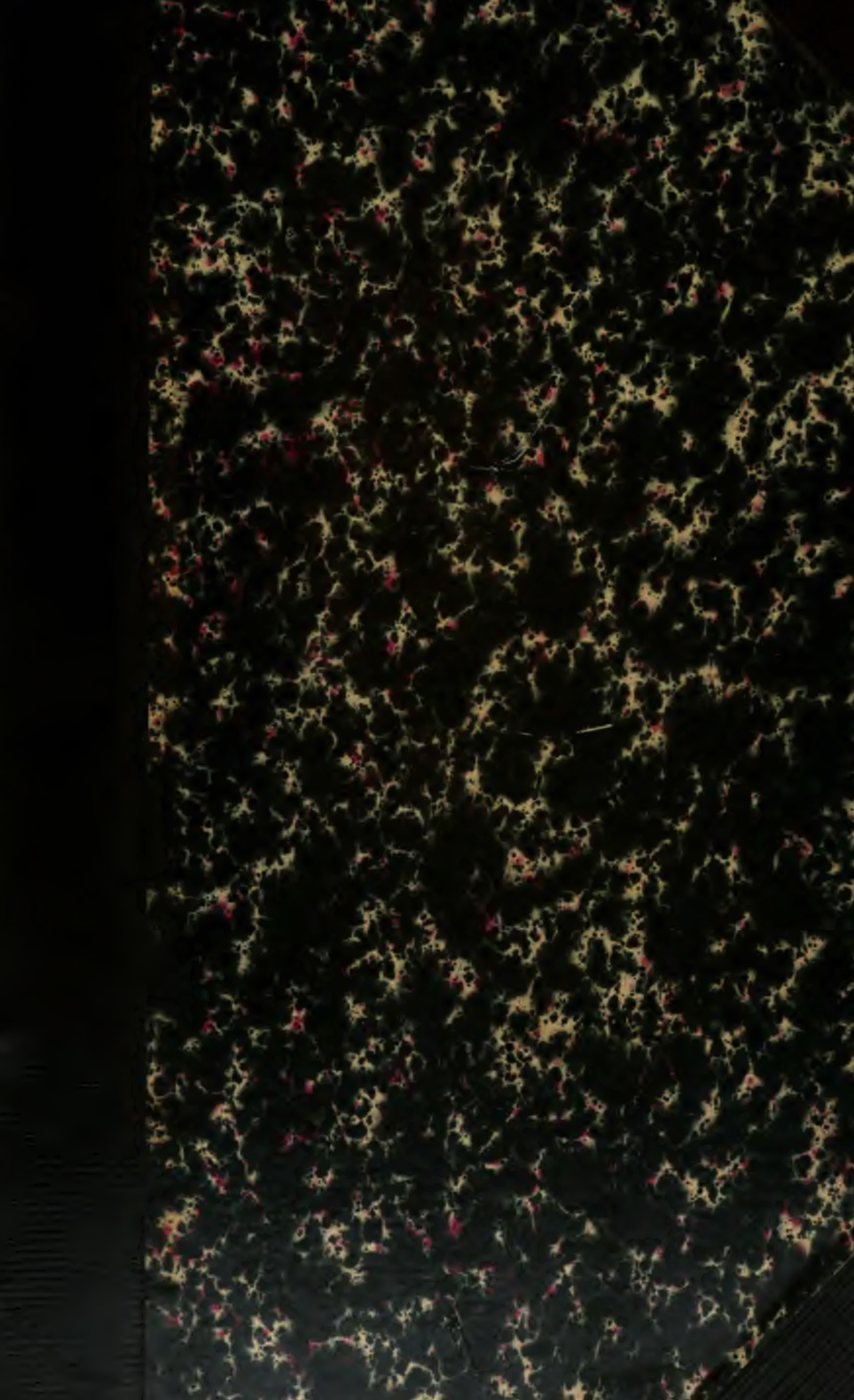






SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

HUNDERTVIERTER BAND.

WIEN, 1895.
AUS DER KAISERLICH-KÖNIGLICHEN HOF- UND STAATSDRUCKEREI.

IN COMMISSION BEI CARL GEROLD'S SOHN,
BUCHHÄNDLER DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

SITZUNGSBERICHTE

DER

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHEN CLASSE

DER KAISERLICHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

CIV. BAND. ABTHEILUNG II. a.

JAHRGANG 1895. — HEFT I BIS X.

(MIT 7 TAFELN UND 81 TEXTFIGUREN.)

WIEN, 1895.

AUS DER KAISERLICH-KÖNIGLICHEN HOF- UND STAATSDRUCKEREI.

IN COMMISSION BEI CARL GEROLD'S SOHN,

BUCHHÄNDLER DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

INHALT.

SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

CIV. BAND. I. HEFT.

ABTHEILUNG II. a.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE, PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.



I. SITZUNG VOM 10. JÄNNER 1895.

Das w. M. Herr Oberbergrath E. Mojsisovics Edler v. Mojsvár überreicht als Mitglied des internationalen Comité für die geologische Karte von Europa im Auftrage des k. k. Ministeriums für Cultus und Unterricht die erschienene I. Lieferung eines für die kaiserl. Akademie bestimmten Freiexemplares dieser Karte. (Massstab 1 : 1,500.000.)

Der Ausschuss der Gesellschaft zur Förderung der naturhistorischen Erforschung des Orients in Wien übermittelt den Aufruf, die Statuten und das Arbeitsprogramm dieser Gesellschaft.

Das Curatorium der Schwestern Fröhlich-Stiftung in Wien übermittelt die diesjährige Kundmachung über die Verleihung von Stipendien aus dieser Stiftung zur Unterstützung bedürftiger und hervorragender schaffender Talente auf dem Gebiete der Kunst, Literatur und Wissenschaft.

Das w. M. Herr Regierungsrath Prof. E. Mach übersendet eine im physikalischen Institute der k. k. deutschen Universität in Prag ausgeführte Arbeit von Prof. Dr. G. Jaumann, betitelt: »Inconstanz des Funkenpotentials«.

Das c. M. Herr Hofrath Prof. L. Boltzmann in Wien übersendet mit Bezug auf seine in der Sitzung vom 13. December v. J. gemachte vorläufige Mittheilung die von ihm und Herrn G. H. Bryan ausgeführte Arbeit: »Über eine mechanische Analogie des Wärmegleichgewichtes zweier sich berührender Körper«.

Herr Prof. Dr. G. Haberlandt in Graz übersendet: »Anatomisch-physiologische Untersuchungen über das

tropische Laubblatt; II. Über wassersecernirende und -absorbirende Organe« (II. Abhandlung).

Die Herren Dr. J. Elster und H. Geitel, beide Oberlehrer am herzogl. Gymnasium in Wolfenbüttel, übersenden eine weitere gemeinschaftliche Arbeit, betitelt: »Elektrische Beobachtungen auf dem Sonnblick« (Nachtrag).

Herr Prof. Rudolf Andreasch an der k. k. Staatsoberrealschule in Währing (Wien) übersendet eine Abhandlung: »Über Dimethylviolursäure und Dimethyldilitursäure«.

Der Secretär legt folgende eingesendete Abhandlungen vor:

1. »Über einen einfachen Apparat zur Elektrolyse unter dem Mikroskope auch bei geringem Focalabstande der benützten Objecte, welcher sich auch zu elektro-physiologischen Versuchen mit Infusorien und Bacterien eignet«, von Dr. Wilhelm Kaiser, k. k. Polizei-Commissär in Floridsdorf.
2. »Ein Blick in das geheime Weben der Natur. (Eine naturwissenschaftliche Abhandlung, enthaltend die Grundzüge einer neuen Chemie)«, von Herrn Adolf Kratschmer, Schulleiter in Gr. Radischen (N.-Ö.).
3. »Über den zwischen den Abplattungen von Rotationsellipsoiden überhaupt und den zwischen den Abplattungen der Planeten Erde, Jupiter und Saturn insbesondere wahrscheinlich bestehenden Zusammenhang«, von Herrn Franz Trenkna, k. k. Steuer-Inspector in Wien.

Ferner legt der Secretär ein von dem vorgenannten Herrn F. Trenkna behufs Wahrung der Priorität eingesendetes versiegeltes Schreiben vor, welches die Aufschrift führt: »Über den zwischen den Excentricitäten der Bahnen der acht Hauptplaneten und den Excentricitäten der Erd- und Mondbahn wahrscheinlich bestehenden inneren Zusammenhang«.

Das w. M. Herr k. u. k. Intendant Hofrath F. Ritter v. Hauer überreicht eine Abhandlung des c. M. Herrn Director Th. Fuchs

in Wien, betitelt: »Studien über Fucoiden und sog. Hieroglyphen«.

Das w. M. Herr k. und k. Hofrath Director Dr. F. Steindachner überreicht eine Mittheilung von Dr. Rudolf Sturany in Wien: »Bestimmungsliste der von Herrn Dr. Konrad Natterer auf S. M. Schiff „Taurus" im Marmara-Meere gedredschten Mollusken«.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. V. v. Ebner überreicht eine vorläufige Mittheilung: »Über den feineren Bau der Chorda dorsalis der Cyclostomen«.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. Ad. Lieben überreicht eine in seinem Laboratorium ausgeführte Arbeit von Dr. Konrad Natterer: Tiefseeforschungen im Marmara-Meer auf S. M. Schiff »Taurus«.

Ferner überreicht Herr Hofrath Prof. Ad. Lieben eine in seinem Laboratorium ausgeführte Arbeit des Herrn Leon Donciŭ: »Über die Einwirkung von Chlor auf das Äthylenglycol«.

Das w. M. Herr Prof. A. Schrauf überreicht eine im mineralogischen Museum der k. k. Universität von Herrn Dr. P. Philipp Heberdey ausgeführte Untersuchung: »Über künstliche Antimonit- und Wismuthkrystalle aus der k. k. Hütte in Přibram«.

Herr Prof. Dr. Ed. Lippmann überreicht eine von ihm und Herrn F. Fleissner im III. chem. Laboratorium der k. k. Universität in Wien ausgeführte Arbeit: »Über das Apochinin und seine Äther«.

Schliesslich legt der Vorsitzende, Herr Prof E. Suess, einige ihm von Herrn Prof. Dr. L. Weinek, Director der k. k. Sternwarte in Prag, zugekommenen Abbildungen seiner neuesten Mondarbeiten vor.

Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:

Dubois E., *Pithecanthropus erectus.* Eine menschenähnliche Übergangsform aus Java. (Mit 2 Tafeln und 3 Textfiguren.) Batavia, 1894; 4°.

Helmholtz H. v., Handbuch der Physiologischen Optik. IX. Lieferung. Hamburg und Leipzig, 1894; 8°.

Internationale geologische Karte von Europa (Massstab 1:1,500.000), beschlossen durch den internationalen Geologen-Congress zu Bologna im Jahre 1881, ausgeführt nach den Beschlüssen einer internationalen Commission, mit Unterstützung der Regierungen, unter der Direction der Herren Beyrich und Hauchcorne. I. Lieferung, enthaltend die Blätter A I, A II, B I, B II, C IV und D IV sammt Farbenschema. Berlin, 1894; Folio.

Statistischer Bericht über die volkswirthschaftlichen Zustände des Erzherzogthums Österreich unter der Enns im Jahre 1890. An das k. k. Handels-Ministerium erstattet von der Handels- und Gewerbekammer in Wien. I. Bd. Gewerbestatistik. Wien, 1894; 4°.

Inconstanz des Funkenpotentials

von

G. Jaumann.

Aus dem physikalischen Institute der k. k. deutschen Universität Prag.

(Mit 7 Textfiguren.)

1. Einfluss der Kraftschwankungen. In einer früheren Arbeit[1] habe ich nachgewiesen, dass die rasche zeitliche Änderung der elektrischen Kraft des Entladungsfeldes eine wesentliche Entladungsbedingung ist. Hiedurch wurde die ältere Ansicht widerlegt, dass der Eintritt der Entladung durch die statischen Eigenschaften des Feldes bestimmt sei, dass also Form, Distanz und Material der Elektroden und die Natur des Dielektricums eine zur Entladung nöthige Potentialdifferenz bestimmen sollen.

Zu Beginn der Entladung hat nicht die elektrische Kraft E im Entladungsfelde einen bestimmten Werth, sondern ungefähr das Product $E \cdot \frac{\partial E}{\partial t}$ derselben in ihre zeitliche Änderung (l. c. S. 793). E ist dabei zu messen an der Oberfläche jener Elektrode, welche von den excitirenden elektrischen Wellen getroffen wird.

2. Polemisches. Von einer zustimmenden Bemerkung bei H. Hertz[2] abgesehen hat diese Arbeit in der Zwischenzeit nur Widerspruch gefunden. Die Constanz des Entladungspotentials wurde aufrecht erhalten durch die Herren Heydweiller,[3]

[1] Einfluss rascher Potentialänderungen auf den Entladungsvorgang. Diese Sitzungsber., Bd. 97, S. 765 (1888).

[2] Hertz, Untersuchungen, Anhang, S. 288.

[3] Wied. Ann. 38 und 43.

Borgesius,[1] Wesendonck,[2] Freyberg,[3] Precht[4] und Andere, und zwar auf Grund unzulänglicher negativer Messungen. Meine positiven Versuche, auch jene, welche ich ausdrücklich als von entscheidender Beweiskraft bezeichnet habe, wurden dabei niemals nur erwähnt, geschweige denn widerlegt.

Herr O. Lehmann,[5] welcher allerdings über den Inhalt meiner Arbeit nicht im Klaren ist (vergl. was er l. c. S. 430 als meine Meinung anführt), hat sich bei Gelegenheit der Naturforscherversammlung 1894 noch sehr energisch für die Constanz des Entladungspotentials erklärt.

3. Theoretische Bedeutung des Einflusses der Kraftschwankungen. Das neue Entladungsgesetz sollte gerade seiner Fremdartigkeit wegen das Vertrauen erwecken, dass es nicht leicht ist, eine andere Auffassung für die ihm zu Grunde liegenden Experimente zu finden. Übrigens widerspricht dasselbe keiner Theorie, denn es gibt keine nennenswerthe Theorie der Entladung. Es widerspricht nur dem Satz von der Constanz des Entladungspotentials, welcher sich längst als theoretisch unfruchtbar erwiesen hat.

Im Gegensatze hiezu kann man sich wohl denken, wie das neue Entladungsgesetz theoretisch verwerthet werden könnte. Die Entladung an sich ist eine der vielen Erscheinungen, welche über die Maxwell'sche Theorie hinausgehen. Der Entladungsstrom ist offenbar nicht wie der Ohm'sche Strom durch die elektrische Kraft E, noch wie der Maxwell'sche Verschiebungsstrom durch deren zeitliche Änderung $\frac{\partial E}{\partial t}$ bestimmt. Die Angabe, dass das Product beider $E \cdot \frac{\partial E}{\partial t}$ den Eintritt der Entladung bestimmt, erscheint also ganz wohl assimilirbar. Zu berücksichtigen ist dabei der Umstand, dass die elektromagnetischen Vorgänge sich genau genommen nicht einfach superponiren (elektrische Doppelbrechung, magnetische Drehung der Polarisationsebene, Entladung durch Licht

---

[1] Borgesius, Dubbelbifilaire Elektrometer, Groningen, 1892.

[2] [3] [4] Wied. Ann., 38, 40, 47, 49.

[5] O. Lehmann, Wied. Ann., 47, 426.

etc.), was darauf hinweist, dass die elektromagnetischen Grundgleichungen nur mit Annäherung linear sind.

4. Erklärung der Hertz'schen Lichtwirkung. Das neue Entladungsgesetz hat auch in der Zwischenzeit einen ganz bemerkenswerthen Erfolg aufzuweisen. Es erklärt vollkommen die Hertz'sche Wirkung des Lichtes auf die Entladung. Beweis dessen ist, dass ich den Ausfall des Experimentes der Herren Elster und Geitel (Wied. Ann., 1894, 52, S. 440) über die Wirkung polarisirten Lichtes schon 1892 voraussagte.[1] Die Herren Elster und Geitel haben diesen ihnen allerdings wohlbekannten Umstand nicht mitgetheilt.

Herr J. Wanka (l. c. S. 58) hat es ferner am hiesigen Institute im Jahre 1891 auf meine Anregung unternommen, die Identität der Hertz'schen Lichtwirkung mit der von mir nachgewiesenen entladenden Wirkung der Kraftschwankungen festzustellen. Es ist ihm auch gelungen, den vorauszusehenden Einfluss der Polarisationsrichtung der einen Funken excitirenden elektrischen Strahlen nachzuweisen.

Bezüglich des Einflusses polarisirten Lichtes auf die Entladung finden sich dort folgende Stellen:

S. 57. »Herr G. Jaumann hielt deswegen auch dafür, dass die Hertz'sche Lichtwirkung auf dem von ihm aufgefundenen Einflusse der Potentialschwankungen auf den Entladungsvorgang beruhe und hiedurch erklärt sei«.

S. 63. »Da die Wirkung bei einer gewissen Stellung des activen Funkens gänzlich erlosch, weil die elektrischen Kräfte desselben polarisirt sind, so ist es auch sehr wahrscheinlich, dass das Hertz'sche Lichtexperiment, mit polarisirtem Licht ausgeführt, zu einem ähnlichen Resultat führen müsse«.

Die Excitation durch polarisirtes Licht muss erfolgen, wenn die elektrischen Schwingungen desselben in der Elektrodennormalen eine Componente haben, wie dies Elster und Geitel thatsächlich nachgewiesen haben.

5. Quantitative Übereinstimmung der Kraftschwankungswirkung mit der Hertz'schen Licht-

[1] Vergl. Wanka, Ein neues Entladungsexperiment. Mitth. der deutschen mathem. Gesellsch. in Prag, 1892. — Wied. Beibl., 17, S. 1103.

wirkung. Die Entladung kann excitirt werden: 1. durch Licht, 2. durch einen elektromagnetischen Strahl, 3. durch eine elektrische Drahtwelle. In der folgenden Tabelle sind für diese drei Fälle die Schätzungen für die maximale Änderungsgeschwindigkeit der elektrischen Kraft $\left(\frac{\partial E}{\partial t}\right)_{max}$ zusammengestellt. Man erkennt, dass gerade diese, welche die Wirkung der Strahlen und Wellen auf den Funken bestimmt, in allen drei Fällen von gleicher Grössenordnung ist, während die Amplitude $(E)_{max}$ und Periode N der Kraftänderung ganz verschiedene Grössenordnung haben.

Experiment von	Excitation durch	Amplitude der Kraft $(E)_{max}$	Schwingungszahl N	Amplitude der Kraftschwankung $\left(\frac{\partial E}{\partial t}\right)_{max} = N.(E)_{max}$	Maximale Beschleunigung der Kraftänderung $\left(\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}\right)_{max} = N^2.(E)_{max}$
1. Hertz	Licht	10^{-5} C. G. S.[1]	10^{15} sec^{-1}	10^{10} C. G. S.	10^{25} C. G. S.
2. Wanka	Hertz'schen Strahl	1	10^{10}	10^{10}	10^{20}
3. Jaumann	Drahtwelle	10	10^{9}	10^{10}	10^{19}

I. Die Aufstellung.

6. Princip der folgenden Messungen. Es handelte sich mir darum, durch möglichst grosse Differenzen die Inconstanz des Entladungspotentials deutlich zu machen.

Nun habe ich (l. c. S. 793, dann S. 803 und a. O.[2] S. 1625) nachgewiesen, dass der Eintritt der Entladung bestimmt wird ungefähr durch das Product

$$E \cdot \frac{\partial E}{\partial t}.$$

[1] Nach Maxwell, Treatise, II, p. 391.

[2] Jaumann, Die Glimmentladungen in Luft von normalem Druck. Diese Sitzungsber., Bd. 97 (1888).

Fig. 1 stellt als Abscisse die Grösse der vorhandenen Kraftschwankungen $\frac{\partial E}{\partial t}$, als Ordinate die zugehörige, für die Entladung nöthige elektrische Kraft E, gemessen an der Oberfläche jener Elektrode, welche von den excitirenden Kraftschwankungen getroffen wird. Die Ordinate gibt also auch ein Mass für das Entladungspotential. Diese Curve ist nach Obigem ungefähr eine gleichseitige Hyperbel, deren Asymptoten den Axen parallel sind.

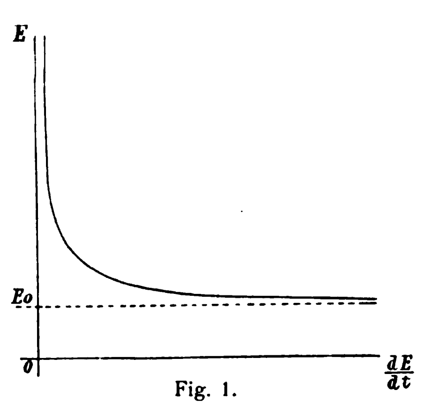


Fig. 1.

Es ist sehr wahrscheinlich, dass auch durch ∞ grosse Kraftschwankungen das Entladungspotential nicht unter eine gewisse (vom Entladungsfelde abhängige) Grösse gedrückt werden kann. Falls man nun einen solchen Ladungsmodus wählt, dass die hiebei unvermeidlichen Kraftschwankungen sehr gross oder sehr rasch sind, so wird man keine grossen Abweichungen von diesem kleinsten Entladungspotential finden. Es trifft dies ein, wenn man, wie dies bei Funkenpotentialmessungen üblich ist, zur Ladung eine Influenzmaschine verwendet oder irgendwo nachlässige Contacte belässt, so dass in den Zuleitungen kleine Fünkchen auftreten. Hieraus mag es sich erklären, dass die Funkenpotentiale bei verschiedenen Beobachtern nicht sehr verschiedene Werthe aufweisen und dass man dieselben für constant halten konnte.

Will man grosse Abweichungen von diesem Grenzwerth erzielen, so muss man zu möglichst kleinen Kraftschwankungen zurückgehen. Erst bei den kleinsten Werthen derselben ist ein rasches Ansteigen des Funkenpotentials zu hoffen.

Ich habe nun den Ladungsmodus dementsprechend eingerichtet und thatsächlich Entladungspotentiale erhalten, welche bis 400% grösser sind als die gewöhnlichen.

Es bestätigt dieser Erfolg, dass der Zusammenhang zwischen Entladungspotential und Kraftschwankungen thatsächlich der Fig. 1 entspricht.

7. Der Ladungsmodus. Eine Entladung unter möglichstem Ausschluss excitirender Kraftschwankungen kann man in folgenden zwei Weisen bewirken.

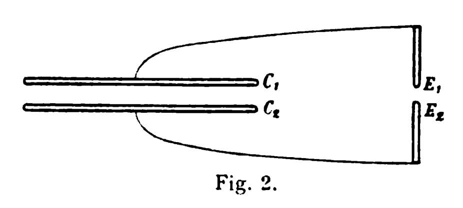


Fig. 2.

Ein Condensatorplattenpaar $C_1 C_2$ (Fig. 2 und 3) ist unter Vermeidung aller Contactfehler mit der Funkenstrecke $E_1 E_2$ verbunden. Man ladet den Condensator durch Auflegen von Zuleitungsdrähten ($A_1 A_2$ Fig. 3) auf ein niedrigeres Potential als zur Entladung bei *E* hinreicht und entfernt dann die Zuleitungsdrähte völlig. Man erzeugt nun den Funken:

1. durch Näherung der Elektroden *E*. Hiebei zeigt sich, dass der erzielte Funke auffallend klein ist für die Potentialdifferenz, welche die Platten haben;

2. durch Entfernung der Platten $C_1 C_2$ von einander. Hiebei zeigt sich, dass die erreichte Potentialdifferenz auffallend hoch ist für die Distanz, welche die Elektroden haben.

Diese einfache Aufstellung ist deshalb bisher nicht zu Messungen herangezogen worden, weil sie thatsächlich im Gebrauch viel umständlicher ist als das übliche Laden mit Hilfe einer Influenzmaschine unter Zuschaltung des Elektrometers und einer grösseren Leydnerbatterie.

8. Beschreibung der Aufstellung. Die beiden Condensatorplatten $C_1 C_2$ (Fig. 3), die beiden Funkenelektroden $E_1 E_2$ und die beiden Elektroden $D_1 D_2$ eines Elektroskops sind unter einander ohne Contactfehler verbunden, so dass $C_1 D_1 E_1$ einen Körper bilden und $C_2 D_2 E_2$ durch Drähte verbunden sind, von welchen der strichlirte Draht $D_2 C_2$ weit ausserhalb der Zeichnungsebene zu denken ist. Die isolirenden Stützen *i* und *J* bestehen aus sorgfältig schellackirtem böhmischem Glas.[1]

[1] Die Condensatorplatten $C_1 C_2$ haben 18 *cm* Radius, ihre Entfernung kann von 0 auf 15 *cm* geändert werden. Es geschieht dies mittelst des Hebelparallelogramms *HH* von 2 *m* horizontaler Länge, welches jenseits seiner

Das Ganze steht in einem kubischen Holzkasten G, welcher die nöthigen Spiegelglasfenster und Öffnungen hat und in welchen die beweglichen Theile J und $A_1 A_2$ mittelst Trichtern aus Kautschukmembran eintreten. Die Luft im Innern des Kastens wird staubfrei und mit Schwefelsäure trocken gehalten.

Die Entfernung der Elektroden von einander kann mittelst der Schraube S von 0 bis 15 *mm* geändert und gemessen werden.

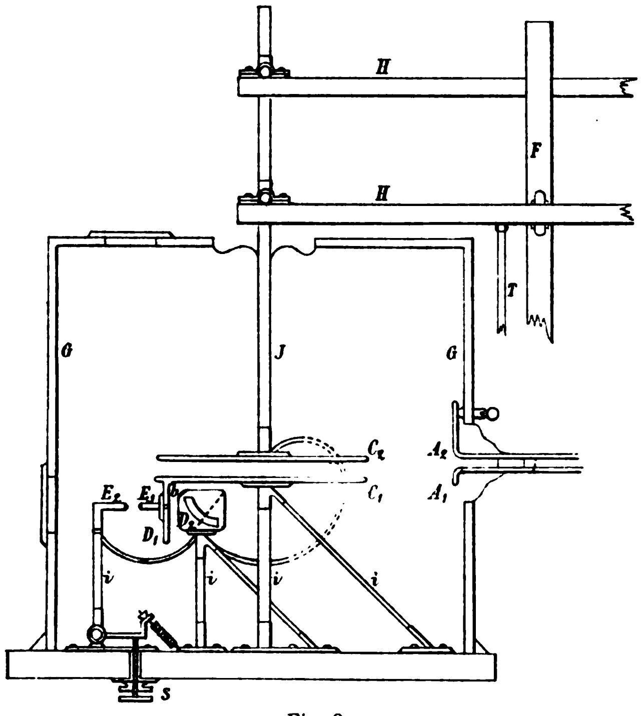


Fig. 3.

Die Elektroden endigen in feingearbeiteten Kugelflächen aus Platin von 0·5, 2·5 oder 20 *mm* Radius.

9. Das Elektroskop besteht aus einem kubischen Schutzkasten D_2 aus Messing, welcher links und oben offen ist und

Stützpunkte rechts ausäquilibrirt ist, durch zwei Kautschukrollen bei F geführt wird und vom Beobachter mit Hilfe des Stabes T entweder aus freier Hand oder mittelst eines Triebes gehoben und gesenkt werden kann. Es ermöglicht dies eine sehr leichte und feine Parallelverschiebung der Platte C_2.

der quadratischen Platte D_1 gegenübersteht. An Stelle der fortfallenden Würfelkante bleibt jedoch eine Brücke *b* von circa 1 *cm* Breite stehen.

Die vordere und hintere Fläche des Schutzkastens trägt kreisförmige Einschnitte, zwischen welchen man die Nadel des Elektroskops spielen sieht. Diese besteht aus einem harten Messingband von 1 *mm* Breite, 0·04 *mm* Dicke und 60 *mm* Länge, welches in die Mitte der rechten oberen Kante des Schutzkastens so gelöthet ist, dass es in der Ruhelage einem Winkel von 25° mit der Verticalen einschliesst.

Die Nadel spielt unmittelbar auf einer Kreisscala, welche das reelle Bild einer in 3 *m* Entfernung hinter dem Elektroskop aufgestellten, auf Papier gezeichneten Kreisscala ist. Dieses Bild wird mittelst einer guten Linse, welche 1 *m* hinter dem Elektroskop aufgestellt ist, in den Schutzkasten desselben geworfen. Die Ablesung erfolgt mittelst eines 1 *m* vor dem Elektroskop aufgestellten Fernrohres.

Dieses Elektroskop erfüllte die Anforderungen, welche die Messungen stellten. Es ist verlässlicher als Elektroskope mit isolirter Nadel, hat keine Contact- und Isolationsfehler, wie sie bei vollkommeneren Elektrometern unvermeidlich sind, ist von günstiger Gleichung und im Gebrauch sehr bequem. Es hat sehr raschen Ausschlag und kommt fast momentan zur Ruhe.

Seine Genauigkeit ist nicht gross, aber für den angestrebten Zweck weitaus ausreichend.

10. Die Graduirung des Elektroskops erfolgte öfters mit Hilfe meines absoluten Elektrometers mit Kuppelsuspension.[1] Folgende Tabelle und Fig. 4 stellen die Gleichung des Elektroskops dar. Die meisten Elektroskope werden bei grossen Ausschlägen labil. Zufolge der Brücke *b*, in deren elektrostatischen Schutz die Nadel bei grösseren Ausschlägen kommt, tritt an Stelle des Labilitätsmaximums ein Wendepunkt, in welchem man eine Stelle sehr grosser Empfindlichkeit zur Verfügung hat, während der Ausschlag darüber hinaus stabil und von geringer Empfindlichkeit ist, so dass der Umfang der Messungen ein grosser ist.

[1] Diese Sitzungsber., Bd. 101 (1892).

Das Instrument gestattet Potentialmessungen zwischen 5 und 60 C. G. S. Die Empfindlichkeit beträgt im Mittel ungefähr 1° Ausschlag für 1 C. G. S., an der empfindlichen Stelle (zwischen 28·6 und 30·0 C. G. S.) aber 10° Ausschlag für 1 C. G. S.

Ausschlag in Kreistheilstrichen	Potentialdifferenz in C. G. S.
1	1·8
5	13·4
10	22·3
20	28·6
30	30·0
40	32·8
50	38·1
60	47·4
65	52·3

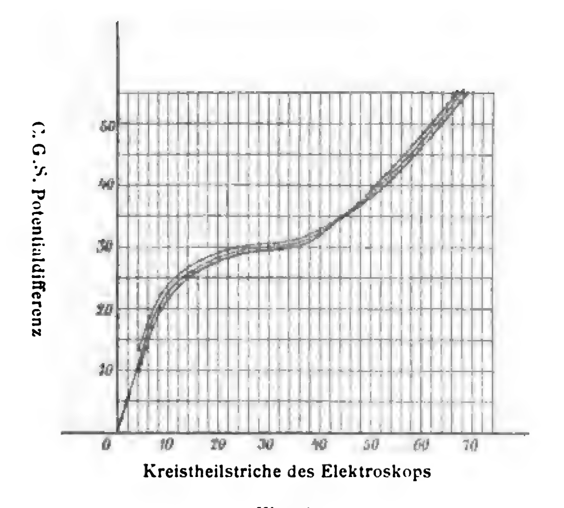


Fig. 4.

Die Genauigkeit des Elektroskops beträgt für gewöhnlich 1%, jedoch kommen ausnahmsweise Fehler bis zu 4% vor.

Grössere Fehler habe ich niemals beobachtet. Fehler von dieser Grössenordnung sind für das Folgende gleichgiltig.

11. Potentialerhöhung durch Hebung der Condensatorplatte C_2. Die in Fig. 5 dargestellten Messungen, welche ganz flüchtig und an verschiedenen Tagen gemacht worden sind, geben ein gutes Bild von der Wirksamkeit der Aufstellung

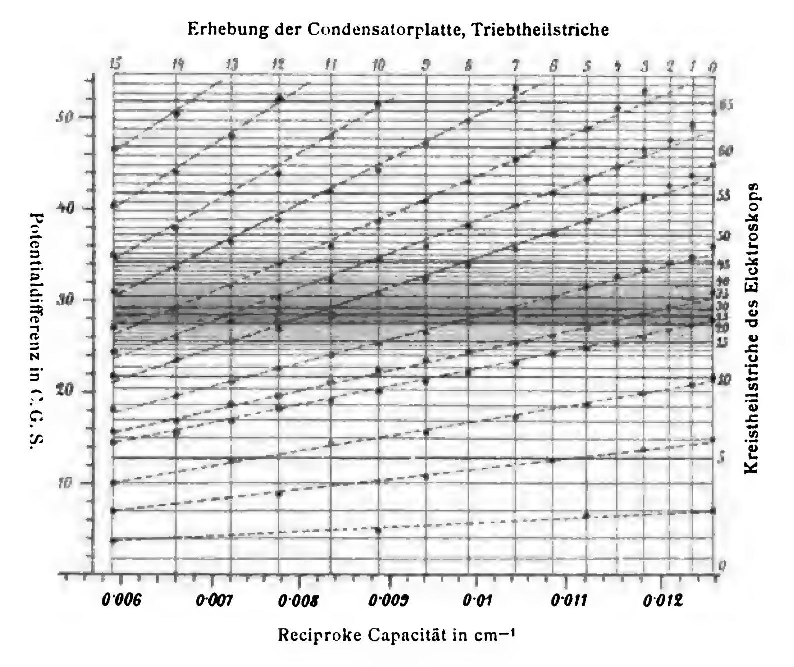


Fig. 5.

und zeigen, dass ich mich über alle Nebeneigenschaften derselben wohl unterrichtet habe.

Die Isolation ist eine so vortreffliche, dass ein Ladungsverlust auch bei den höchsten Potentialen erst nach Stunden bemerkbar wird. Zufolge dessen ordnen sich die Elektroskopablesungen bei gegebener Ladung ganz eindeutig den Stellungen der Platte C_2 (an der Theilung des Triebes abzulesen, welcher die Stange T bewegt) zu.

II. Nachwirkung des Funkens. Erholung der Funkenstrecke.

12. Veränderung der Funkenstrecke durch den Funken. Es wäre leicht für alles Folgende glatte Gesetzmässigkeiten zu erhalten, wenn die Funken nicht die Funkenstrecke verändern würden. Die Nachwirkungen aller vorangegangenen Funken überdecken und verlöschen sich, so dass der Ausfall der Messungen desto unregelmässiger wird, je länger man eine Messungsreihe fortsetzt.

Man schreibt die Veränderung der Funkenstrecke durch den Funken der Corrosion der Elektroden zu, jedoch nicht mit Recht.

Die Nachwirkung der Funken besteht kurz gesagt darin, dass sich die Hyperbel Fig. 1 mehr oder weniger an ihre Asymptoten anschmiegt.

Im $\left\{\begin{array}{l}\text{ersten}\\ \text{zweiten}\end{array}\right.$ Falle werden die Funkenpotentiale cet. par. $\left\{\begin{array}{l}\text{kleiner}\\ \text{grösser}\end{array}\right.$ und auch die Empfindlichkeit für Unterschiede der Kraftschwankungen wird $\left\{\begin{array}{l}\text{kleiner}\\ \text{grösser}\end{array}\right.$. Das ist, was im Folgenden eine $\left\{\begin{array}{l}\text{verdorbene}\\ \text{gute}\end{array}\right.$ Funkenstrecke genannt werden soll.

13. Ungünstige Nachwirkung der Funken. Mehrere kräftige oder unter starker Kraftschwankung erfolgende Funken verderben die Funkenstrecke umso rascher, je kleiner sie ist. Als auffallendes Beispiel folgende Messungsreihe.

Beob. Nr.	Funkenpotential (starke Kraftschwankungen)	
65	28·3 C. G. S.	Funkenlänge 0·8 *mm*
66	25·6	E_1+, Radius 0·5 *mm*
67	29·0	E_2—, Radius 2·5 *mm*
68	7·4	
69	13·4	
73	7·4	
76	6·5	

14. Günstige Nachwirkung der Funken. Weniger deutlich, aber doch oft merkbar ist eine günstige Nachwirkung der Funken. Schwache, bei kleinen Kraftschwankungen erfolgende Funken verbessern manchmal die Funkenstrecke. Diese Verbesserung ist besonders deutlich bei frisch polirten Elektroden. Diese sind schlechter als solche, mit welchen bereits eine Zeit lang vorsichtig gearbeitet wurde.

Beob. Nr.	Funkenpotential C. G. S. (ruhige Ladung)	
41	26·75	Funkenlänge 0·8 *mm*
42	26·95	
43	27·3	E_1+, $r_1 = 0·5$
44	27·85	E_2-, $r_2 = 2·5$
45	28·1	
46	28·3	
Ein Funke bei unvorsichtiger Ladung		
47	26·8	
48	26·85	

Beob. Nr.	Funkenpotential C. G. S. (ruhige Ladung)	
420	21·9	Frisch polirte Elektroden
421	24·5	
425	26·6	Funkenlänge 1·8 *mm*
427	26·2	E_1+, $r_1 = 20$
428	46·4	E_2-, $r_2 = 20$
429	53·0	
432	36·8	
434	35·6	

Man merkt die günstige Nachwirkung der Funken zu Anfang der meisten Messungsreihen.

15. Erholung der Funkenstrecke. Eine verdorbene Funkenstrecke erholt sich von selbst im Laufe einiger Stunden, oft schon einer halben Stunde von der Nachwirkung der Funken.

Die Nachwirkung rührt also nicht von der Corrosion her. Um auch zu zeigen, dass die Nachwirkung nicht von in der Luft schwebendem Metallstaub herrührt, habe ich einen starken Strom staubfreier trockener Luft zwischen den Elektroden durchgeleitet. Dies beschleunigt die Erholung nicht merklich.

Beob. Nr.	Funkenpotential C. G. S. (starke Kraftschwankungen)	
132	13·4	Funkenlänge 0·8 *mm*
Erholung über Nacht		E_1+, 0·5
		E_2-, 2·5
133	29·9	
134	30·0	
135	17·6	
136	13·4	
137	13 4	

Beob. Nr.	Funkenpotential C. G. S. (starke Kraftschwankungen)	
147	13·4	Funkenlänge 0·8 *mm*
149	15·5	E_1+, 0·5
30 Minuten Erholung		E_2-, 2·5
152	37·5	
154	25·6	
155	19·2	
156	13·4	
157	13 4	

16. Vergleich mit der Hertz'schen Lichtwirkung. Wenn eine solche Vorstellung befriedigt, so mag man an eine Oberflächenveränderung denken, welche sowohl bei ganz frisch polirten, als bei stark gebrauchten Elektroden vorhanden ist, welche sich bei der Erholung von selbst ausgleicht und die Nachwirkung der Funken bedingt. Ich stimme einer solchen Erklärung nicht zu.

Keinesfalls aber darf man deshalb, weil die Empfindlichkeit gegen Kraftschwankungen von der Nachwirkung der Funken abhängt, die Kraftschwankungswirkung selbst trivial erklären. Schon der in Abschnitt 4 erwähnte Zusammenhang der Kraftschwankungswirkung mit der Hertz'schen Lichtwirkung muss beide vor einer Trivialerklärung schützen.[1]

Die Lichtwirkung hängt in ungefähr derselben Weise von der Nachwirkung des Funkens ab wie die Kraftschwankungswirkung. Verdorbene Funkenstrecken zeigen eine kleinere Empfindlichkeit für das Licht.

[1] Trivialerklärungen bilden meiner Meinung nach, Risico und Gewinn verglichen, immer einen methodischen Fehler. Man hat vielfach die Hertz-sche Lichtwirkung durch ein Zerstäuben der Elektroden durch das Licht »erklärt«.

III. Hohe Funkenpotentiale bei ruhiger Ladung.

17. Verschiedene Ladungsarten unter starken Kraftschwankungen. Es war anfänglich meine Absicht, das Entladungsgesetz

$$E \cdot \frac{\partial E}{\partial t} = \text{Const.}$$

durch absolute Messungen sicherzustellen. Man ladet das System *CDE* (Abschnitt 8) nicht direct mit der Influenzmaschine, sondern durch Ausladen einer kleinen gemessenen Capacität in den Condensator $C_1 C_2$. Dies gibt eine Kraftschwankung von angebbarer Grösse in der Funkenstrecke.

Man kann in dieser Weise die Ladung bis eben über das Funkenpotential auf einmal oder in mehreren Absätzen herstellen. In je kleineren Sprüngen man die Ladung besorgt, desto grösser soll cet. par. das Funkenpotential sein.

Diese Messungen gaben jedoch der Nachwirkung und der im folgenden Capitel zu beschreibenden Verspätung der Funken wegen kein regelmässiges Resultat. Nur ausnahmsweise ergaben sich bei besonders gutem Zustand der Funkenstrecke bei Abwechslung der Ladungsart entsprechende Änderungen des Funkenpotentials, welche der Änderung der Kraftschwankungen zuzuschreiben sind, wie in folgender Reihe:

Beob. Nr.	Funkenpotential in C. G. S. bei Ladung			
	in einem Absatz	in mehreren Absätzen	mit Influenzmaschine	
256		29·0		Funkenlänge 2·0 *mm*
257	28·3			E_1+, $r_1 = 0·5$
258			25·2	E_2-, $r_2 = 2·5$
259		29·8		
260	20·9			
261			18·5	
262		30·2		
263	25·6			
264			24·8	

18. Entladung durch Näherung der Elektroden. Im Gegensatze zu der Unregelmässigkeit der Funkenpotentiale bei Ladung unter verschiedenen, aber immer starken Kraftschwankungen ist der Unterschied der Funkenpotentiale bei starken Kraftschwankungen und bei völliger Vermeidung derselben unter allen Umständen unverkennbar.

Das System *CDE* (Abschnitt 8) wurde auf 37·2 C. G. S. geladen und dann die Zuleitungen A_1A_2 entfernt. Nun wurden mittelst der Schraube *S* die Elektroden E_1E_2 einander genähert, und es wurde constatirt, dass bei 1·2 *mm* Funkendistanz eben noch kein Funke zu Stande kam.

Diese Funkendistanz wurde beibehalten, das System ausgeladen und nun mittelst der Influenzmaschine[1] geladen. So wurde der starken und zahlreichen Kraftschwankungen wegen der Funke schon bei viel niedrigeren Potentialdifferenzen erhalten.

Beob. Nr.	Funkenpotential		Funkenlänge	
	Näherung der Elektroden	Influenzmaschine		
107	37·2		1·2 *mm*	E_1+, $r_1 = 0·5$
108		20·4		E_2-, $r_2 = 2·5$
109		18·6		
126	36·8		0·8 *mm*	
127		22·3		
128		13·4		
129		11·0		
130	38·1		0·8 *mm*	
131		15·5		
132		13·4		

[1] Es ist unvortheilhaft, die Ladung direct durch die Influenzmaschine zu besorgen. Sie erfolgt dann zu rasch, als dass man das Elektroskop ablesen könnte, während bei Nebenschaltung einer Batterie der Funke die Elektroden ruinirt. Man verfährt folgendermassen: Der Hauptstrom der Influenzmaschine fliesst durch eine nebengeschaltete Büschelentladungsstrecke (+ Spitze und — Platte), die Maschine wird gleichmässig gedreht, der Potentialanstieg, also die Ladung von C_1C_2 wird durch langsames Entfernen der Spitze von der Platte bewirkt. In die Zuleitungen A_1A_2 ist ein kleines Fünkchen eingeschaltet.

19. Entladung durch Hebung der Condensatorplatte C_2. Es wurde verglichen das Funkenpotential, welches durch Ladung mittelst Influenzmaschine zu erhalten war, und jenes, welches sich bei Potentialerhöhung durch Hebung von C_2 ergibt.

Man macht die Capacität $C_1 C_2$ möglichst gross, ladet niedrig, entfernt die Zuleitungen $A_1 A_2$ und wartet 10 Secunden, bevor man die Platte hebt. Das Heben erfolgt in ungefähr 5 Secunden, in derselben Zeit, in welcher man die Ladung mit der Influenzmaschine bewirkt.

Beob. Nr.	Funkenpotential C. G. S. bei Ladung mittelst		
	Hebung von C_2	Influenzmaschine	
Zwei Stunden Erholung			Funkenlänge 0·8 *mm* $E_1+,\ r_1 = 0{\cdot}5$ $E_2-,\ r_2 = 2{\cdot}5$
138		17·6	
139	39·9		
140	51·4		
141		22·3	
142		20·9	
143	34·1		
144		17·6	
145		15 5	
146	24·8		
147		13·4	Funkenstrecke schon verdorben
148	20·9		
149		15·5	
150		13·4	
30 Minuten Erholung			
152		37·5	Erholt, aber sogleich wieder verdorben
153	32·5		
154		25·6	
155		19·2	
156		13·4	
157		13·4	

Bei längeren Funkenstrecken ist die Empfindlichkeit für Kraftschwankungen nicht so gross, aber die Funkenstrecke verdirbt auch nicht so leicht, wie folgende Reihe zeigt:

Beob. Nr.	Funkenpotential in C. G. S.		
	Hebung	Influenzmaschine	
118		38·1	Funkenlänge 3 *mm*
119		38·1	E_1+, $r_1 = 0·5$
120	43·3		E_2-, $r_2 = 2·5$
121		38·1	
122	52·3		
123		38·4	
124	40·5		
125		38·1	

20. Vergleich mit dem Siede- und Gefrierverzug. Es ist (von praktischen Gesichtspunkten abgesehen) noch unrichtiger, einer gegebenen Funkenstrecke ein bestimmtes Funkenpotential zuzuschreiben, als reinem Wasser bei normalem Barometerstand eine bestimmte Siede- und Gefriertemperatur zuzuschreiben.

Je reiner man die Aufstellung macht, um { die Siede- und Gefriertemperatur / das Funkenpotential } zu bestimmen, umso weniger erhält man constante Werthe. Um grosse Abweichungen von den gewöhnlichen Werthen zu erhalten, muss man die kleinsten { Eiskrystalle oder Dampfblasen / Kraftschwankungen } vermeiden. Nur wenn diese in sehr grosser Menge vorhanden sind, erhält man jene Grenzwerthe, welche man gewöhnliche { Siede- und Gefriertemperatur / Funkenpotentiale } nennt. Es ist deshalb eine unzulässige Abstraction, sich vorzustellen, dass der Eintritt solcher katastrophischer Vorgänge stattfindet, weil eine bestimmte Temperatur, Potentialdifferenz etc. vorhanden ist.

Die Untersuchung der wahren Bedingungen der elektrischen Entladung ist durch die Kenntniss der bestimmt zu

fassenden Kraftschwankungswirkung und die sogleich zu beschreibende Verspätung jener über die Bedingungen der Aggregationsänderung, Krystallisation, des Zerreissens etc. voraus.

IV. Verspätung der Entladung.

21. Abwarten des Funkens. Wenn etwas an den Entladungsbedingungen fehlt, so hindert dies nur die sofortige Entladung; nach einigem Abwarten ohne Verbesserung der Entladungsbedingungen kann die Entladung noch erfolgen.

Eine Wartezeit von einigen Minuten kann einen Mangel an Potentialdifferenz von 20 C. G. S. ersetzen. Eine Entladung, welche bei ruhiger Ladung bei 50 C. G. S. sogleich stattfindet, geht bei gleicher ruhiger Ladung auch bei 30 C. G. S. vor sich, aber erst nach mehreren Minuten ruhigen Wartens. Es gibt aber eine untere Grenze der Potentialdifferenz für den gegebenen Zustand der Funkenstrecke, unterhalb welcher die Entladung auch nach stundenlangem Warten nicht mehr eintritt (bei dem gewählten Beispiel wäre ungefähr 29·8 C. G. S. diese Grenze).

Der Condensator $C_1 C_2$ wurde niedrig geladen, dann isolirt ($A_1 A_2$ entfernt), 10 Secunden gewartet und dann die Potentialdifferenz durch Hebung der Platte C_2 bis auf die in folgender Tabelle angegebenen Werthe vergrössert und dann das System solange ruhig stehen gelassen, bis der Funke eintrat.

Die Angabe 0 Secunden für die Verspätung bedeutet, dass die Hebung der Condensatorplatte solange fortgesetzt wurde, bis der Funke eintrat. Das zugehörige Funkenpotential entspricht also nicht der Verspätung 0 Secunden, sondern einer Verspätung von einigen Secunden, weil das Heben der Platte C_2 selbst 5 Secunden in Anspruch nimmt.

Die sämmtlichen angegebenen Verspätungen müssten etwa um 2·5 Secunden vergrössert werden.

Beob. Nr.	Funkenpotential in C. G. S.	Verspätung	
239	47·4	0 Sec.	Funkenlänge 3 *mm*
240	28 2	140	E_1+, $r_1 = 0·5$
241	47·4	0	E_2-, $r_2 = 2·5$

Beob. Nr.	Funkenpotential in C. G. S.	Verspätung	
242	33·4	55 Sec.	
243	45·6	0	
244	28 7	115	
245	40·7	0	
246	29·5	78	
247	38·1	0	Funkenstrecke verdorben
248	32·1	5	
249	29·8	2	
250	41·7	0	
251	33·9	17	

Die Verschlechterung der Funkenstrecke nach heftigeren Funken und ihre Erholung nach längerem Nichtgebrauch ist bei diesen Experimenten ebenfalls sehr deutlich. Eine verdorbene Funkenstrecke gibt unregelmässige und zu kleine Verspätungen. Eine völlig verdorbene Funkenstrecke gibt überhaupt keine deutliche Verspätung.

22. Abwesenheit von vorhergehenden Entladungen während der Verspätung. Man erhält diese Verspätung ganz ohne besondere Aufstellung nicht selten, wenn man eine Leydnerflasche durch einen Auslader nicht völlig schliesst und so einige Secunden wartet.[1] Es ist dies bis jetzt nicht so sehr aufgefallen weil dabei immer knisternde Büschelentladungen in der Funkenstrecke voraus gehen, so dass man annehmen konnte, dass diese Büschelentladungen durch Erhitzung der Luft erst dem Funken den Weg bereiten, womit für die Trivialerklärung gesorgt war.

Bei meiner feineren Aufstellung erkennt man jedoch sofort die Unhaltbarkeit einer solchen Erklärung.

Während der Verspätung findet niemals irgendwelche Entladung statt, so dass der Funke nach Ablauf der Verspätungszeit ganz unvermittelt erscheint.

Die Isolation ist eine vortreffliche, so dass vor dem Funken das Elektroskop ganz ruhig einsteht. Es ist auch nicht das

[1] Prof. Mach beobachtete vor Jahren die gleiche Erscheinung bei einem Funken in Terpentinöl.

geringste Zucken der Elektroskopnadel bis zum Eintritt des Funkens, welcher ganz auslädt, bemerkbar. Man kann gewiss sein, dass während der Verspätung nicht 0·2 C. G. S. an Elektricitätsmenge sich ausgleichen. Diese Entladung würde man schon an einer Bewegung der Elektroskopnadel um $^1/_{10}{}^\circ$ bemerken, und sie wäre übrigens auch gar nicht im Stande, die Funkenstrecke nennenswerth zu erhitzen.

23. Stabilität während der Verspätung. Man muss zunächst vermuthen, dass die Verspätung dadurch ein Ende findet, dass der Funke durch eine zufällige minimale äussere Veranlassung eintritt, denn eine ausgiebige äussere Veranlassung ist doch nicht erfindlich, und so sollte man den Zustand der Funkenstrecke für einen völlig labilen halten und vermuthen, dass der geringste absichtlich eingeführte Reiz den Funken auslösen müsste.

Ich hatte die Hoffnung so eine Aufstellung gewonnen zu haben, welche äusserst empfindlich auf Kraftschwankungen und auf Licht reagirt, sah mich aber hierin völlig enttäuscht. Die Aufstellung ist sehr geeignet, die Kraftschwankungs- und Lichtwirkung einwurfsfrei zu zeigen, aber sie ist auch sehr wenig empfindlich hiefür. Es gehören sehr starke Kraftschwankungen oder Beleuchtungen dazu, um den Funken auszulösen.

Eine schwächere Kraftschwankung oder Beleuchtung veranlasst nicht selten eine theilweise Entladung, wobei die Nadel um 2—3° zurückzuckt, wonach die Verspätung weiter stattfindet und ihrerzeit ohne weiteren Anreiz in dem Funken endigt. Auch diese theilweise Entladung wird von der Funkenstrecke vertragen, ohne dass die Verspätung aufgehoben wird. Es ergänzt dies den Gegenbeweis des Abschnittes 22.

Der Zustand der Funkenstrecke während der ganzen Verspätungszeit mit Ausnahme der letzten Secunden ist also ein sehr stabiler, was auch nicht wundern kann, wenn man bedenkt, dass die Potentialdifferenz dabei um 20 C. G. S. niedriger sein kann als jene, welche cet. par. den Funken sofort bewirkt.

24. Vorprocess der Funkenentladung. Die Verspätung wird nicht durch eine äussere zufällige Veranlassung auf-

gehoben, es lässt sich keine solche denken, welche stark genug wäre, um die nachgewiesene Stabilität aufzuheben.

Der Widerspruch dieser Stabilität und des freiwilligen Eintrittes des Funkens nach Ablauf der Verspätung führt zu einem fremdartigen, aber sicheren Schluss: Die Funkenstrecke muss von selbst gegen Ende der Verspätungszeit aus dem stabilen Zustand heraustreten und in einen labilen übergehen.

Dies besagt Folgendes: Während der Verspätungszeit findet ein specifischer Vorprocess in der Funkenstrecke statt, welcher nach Abschnitt 22 selbst keine Entladung ist, jedoch die Funkenstrecke in einer angebbaren, vergleichsweise grossen Zeit zur Entladung geeignet macht.

Dieser Vorprocess darf nicht trivial erklärt werden, denn er hängt in besonderer Weise mit der Kraftschwankungswirkung und mit der Nachwirkung der Funken zusammen.

25. Unterschied zwischen Verzug und Verspätung. Die Verspätung der Entladung, weil sie von selbst ein Ende findet, macht auf den ersten Blick den Eindruck einer Erscheinung, welche dem Siedeverzug analog ist. Dies ist jedoch nicht der Fall, sondern die dem Siedeverzug analoge Erscheinung ist eher die in Abschnitt 19 beschriebene Überhöhung des Funkenpotentials bei ruhiger Ladung.

Bei dieser Überhöhung fehlt als Entladungsbedingung nur eine kleine Kraftschwankung, der Zustand ist daher labil. Die Verspätung hingegen findet bei weitaus niedrigerer Potentialdifferenz und gleicher Ruhe der Ladung statt, der Zustand ist dabei stabil. Das Analogon hiezu wäre es, wenn das Sieden um einige Grade unter der normalen Temperatur mit einer Verspätung eintreten würde.

26. Einflusslosigkeit einiger Umstände. Die Verspätung ist bei der Entladung in Öl, Terpentin, Schwefelkohlenstoff ebenso zu erhalten wie in Luft.

Man machte mir den Einwurf, dass die Verspätung aufgehoben werden könnte durch leitende Staubkörnchen, welche zufällig in die Funkenstrecke kommen. Das Experiment gelingt jedoch in staubfreier Luft eher besser als in staubhältiger. Ich habe noch eigens bei einigen Versuchen die Elektroden mit

einem Mantel umgeben, durch welchen mit Baumwolle und Glycerin staubfrei gemachte Luft geblasen wurde und die Verspätung völlig in gleicher Weise erhalten. Man kann auch während der Verspätung sehr staubhaltige Luft in diesen Mantel blasen, ohne hiedurch die Verspätung vorzeitig aufzuheben.

Wie unempfindlich die Funkenstrecke während der Verspätung für kleine Veränderungen der Luft oder der Elektrodenflächen ist, erkennt man auch daran, dass man mittelst eines Glasrohres aus dem Mund feuchte Luft zwischen die Elektroden blasen kann, so dass sie sich mit Thau beschlagen, ohne die Verspätung aufzuheben.

Beob. Nr.	Funkenpotential in C. G. S.	Verspätung	
319	21·5	120 Sec.	Funkenlänge 2 *mm*
326	25 8	20	E_1+, 20 *mm*
Erholung über Nacht			E_2—, 20 *mm*
329	45·4	1 Sec.	
330	54·0	0	
333	35·6	20	feuchte Luft und Thau
335	38·9	15	feuchte Luft und Thau

Beob. Nr. 333 und 335 wurden so angestellt, dass während der ersten 10 Verspätungssecunden feuchte Luft eingeblasen wurde. Nach der zehnten Secunde wurde damit eingehalten, der Thau verschwand sogleich, und einige Secunden später kam der Funke.

Dass die Verspätung der Entladung nicht das Abwarten zufällig eintretender günstigerer Umstände ist, sondern der Ablauf eines Vorprocesses, erkennt man sehr schön auch daran, dass nach beendigtem Vorprocess eine Senkung des Potentials die Entladung nicht hindert, wie folgende zwei gelegentlichen Beobachtungen zeigen.

Beob. Nr. 295 (Funkenlänge 2 *mm*, E_1+0·5; E_2—2·5). Das Potential wurde bis 48·5 C. G. S. gehoben und 15 Secunden

gewartet, ohne dass ein Funke kam, dann wurde es rasch bis 28·3 C. G. S. gesenkt und nach 5 Secunden kam der Funke.

Beob. Nr. 430. (Funkenlänge 1·8, E_1+20, E_2—20). Das Potential wurde bis 53·0 gehoben, 15 Secunden gewartet, ohne dass ein Funke kam, dann rasch bis 45·4 gesenkt, und nach 1 Secunde kam der Funke.

27. Gesetzmässigkeit der Verspätung. Die Verspätung hat keine zufällige, sondern eine gesetzmässige Dauer, welche von der Höhe der Potentialdifferenz und dem Zustande der Funkenstrecke abhängt.

Letztere Bedingung erschwert allerdings diesbezügliche Messungen. Zu Anfang derselben, bei erholter Funkenstrecke, ist der Ausfall gewöhnlich regelmässig, später aber werden die Verspätungen unregelmässig und zu klein.

Immerhin ist bei einiger Kenntniss des Zustandes der Funkenstrecke eine Voraussage der Verspätung bis auf 50% ihres Betrages unter allen Umständen möglich.

Die folgende Reihe gibt ein typisches Beispiel für derartige Messungen, von welchen ich viele angestellt habe. Sie beginnt mit einer Verspätung von $4^1/_2$ Min. Dass ich die Geduld hatte so lange zu warten kam daher, dass ich sicher voraussagen konnte, der Funke müsse eintreten, und zwar nach sehr langer Verspätung. Ich hatte tagszuvor bei erholtem Zustande derselben Funkenstrecke den Funken bei 32·5 C. G. S. nach 150 Secunden Verspätung erhalten.

Beob. Nr.	Potentialdifferenz C. G. S.	Verspätung	
Über Nacht erholt			Funkenlänge 3 *mm* E_1+, $r_1 = 0·5$ E_2-, $r_2 = 2·5$
365	33·4	260 Sec.	
366	36·5	25	
367	34·1	100	
368	42·0	3	
369	34·6	80	
370	33·2	10	Funkenstrecke verdorben
371	37·5	20	30 Minuten Erholung
372	34·4	8	} verdorben.
373	34·1	25	

Beob. Nr.	Potentialdifferenz C. G. S.	Verspätung	
374	35·0	45 Sec.	30 Minuten Erholung
375	34·4	50	
376	33·0	70	
377	37·6	20	
378	40·4	12	
379	46·4	1	
380	36·8	22	
381	35·1	0·1	excitirt
382	37·2	15	
383	40·4	20	
384	34·8	35	
385	35·1	35	
386	34·1	25	} verdorben
387	34·1	30	
388	33·6	1	excitirt
389	36·8	40	30 Minuten Erholung
390	35·7	30	
391	36·2	40	
392	34·6	0·1	excitirt
393	33·1	110	
394	39·9	5	
395	43·3	10	
396	34·9	2	
397	34·6	2	
398	34·1	38	} verdorben
399	34·4	15	
400	35·6	10	
401	35·1	30	30 Minuten Erholung
402	35·6	65	
403	38·4	25	
404	37·1	10	
405	36·8	25	
406	37·0	35	
407	38·8	8	

Fig. 6 stellt diese Beobachtungen dar. Die Verspätungen Beob. Nr. 370, 372, 373, 386—88, 396—400 wurden nicht eingetragen. Es war bereits während der Beobachtungen klar, dass dabei die Funkenstrecke verdorben war, und es wurde ihr

auch immer darauf Zeit zur Erholung gelassen. Ferner wurden auch die Beob. Nr. 381, 388 und 392 nicht eingetragen, weil sie durch zufällige starke Kraftschwankungen excitirt wurden.

Die Beobachtungen 382—407 wurden nur durch schwache Punkte markirt.

Die ersten Beobachtungen Nr. 365—369 und 371—380 fügen sich jedoch in zwei glatte Curven.

Es ist nicht zu verkennen, dass die Verspätung vollkommen gesetzmässig verläuft, also nicht durch Zufällig-

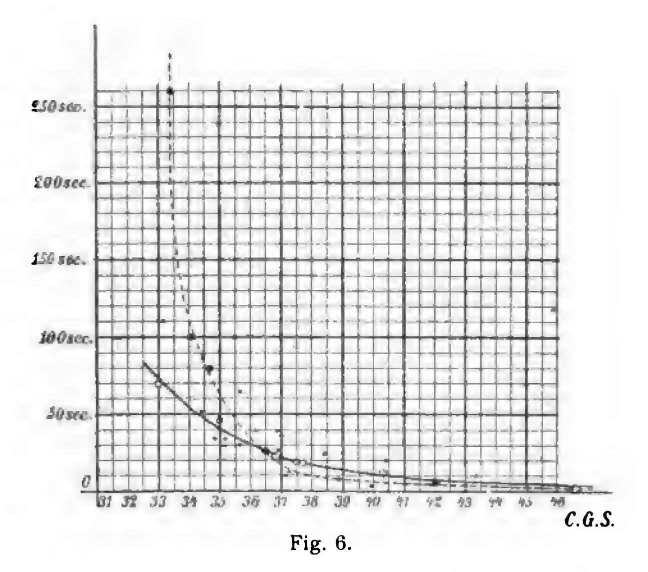


Fig. 6.

keiten beendigt wird. Gleichzeitig erkennt man aber auch den starken Zusammenhang mit der Nachwirkung der Funken.

Bei weiteren Untersuchungen über diese Erscheinung müssen zunächst die Bedingungen ausfindig gemacht werden, unter welchen die Funkenstrecke eine möglichst kleine Nachwirkung der Funken zeigt. Diese Funkenstrecken werden vielleicht auch grössere Verspätungen zeigen. Die kleinen Funkenstrecken, welche starke Nachwirkung zeigen, weisen nämlich kleine Verspätungen auf.

V. Verspätung der Excitation.

28. Excitation durch Kraftschwankungen und Licht. Während der Verspätung ist, wie schon Abschnitt 23

hervorgehoben wurde, die Funkenstrecke sehr wenig empfindlich für Kraftschwankungen und Licht, doch kann man diese Wirkungen immerhin deutlich machen. Die Excitation hat bei dieser Aufstellung ein besonderes Interesse der Einwurfsfreiheit des Experimentes wegen und weil sie eine Eigenschaft erkennen lässt, die sonst nicht zu beobachten ist: die Verspätung der Excitation.

Wenn man die Ladung der Funkenstrecke durch einen Ruhmkorff besorgt, wie dies Hertz und Wanka gethan haben, so hätte ich a priori erwartet, dass keine grosse Empfindlichkeit für Licht und Kraftschwankungen sich zeigen kann, denn der Ruhmkorff ladet ja selbst unter einer unvergleichlich höheren Kraftschwankung. Hingegen hätte ich während der Verspätung der Entladung, wo gar keine Kraftschwankungen gegeben sind, eine grosse Empfindlichkeit erwartet.

Es verhält sich jedoch umgekehrt. Ruhmkorfffunken reagiren noch auf das Licht eines schwachen Funkens in einigen Metern Entfernung, sie reagiren im Wanka'schen Experiment auf Hertz'sche Strahlen, welche von einem in 1 *m* Entfernung aufgestellten Excitator ausgehen und lassen dabei noch die Polarisationsrichtung der excitirenden Hertz'schen Strahlen erkennen.

Die Funken während der Verspätung reagiren hingegen erst auf das Licht eines kräftigen Batteriefunkens in 20 *cm* Entfernung und auf einen Hertz'schen Strahl, welcher von einem in 5 *cm* Entfernung aufgestellten kleinen Excitator ausgeht. Dieser kleinen Distanz wegen konnte der Einfluss der Polarisationsrichtung des Hertz'schen Strahls nicht aufgezeigt werden.

Es ist jedoch zu bemerken, dass die Excitation bei Ruhmkorfffunken genau rechtzeitig eintreffen muss.

Die im Folgenden zu beschreibende Verspätung der Excitation lässt die starke Wirkung der Kraftschwankungen auf einen Ruhmkorfffunken begreiflicher erscheinen.

Es soll hier auch hervorgehoben werden, dass die Excitation im Wanka'schen Experiment nicht von einer in den Metallbestandtheilen des Excitators verlaufenden Schwingung

ausgeht, denn die Stellung derselben ist gleichgiltig, sondern nur von einer zwischen den Elektroden des Excitators verlaufenden Schwingung. Ferner müssen die excitirende und die excitirte Funkenstrecke präcis gleich sein. Ich habe versucht den Einfluss einer Abstimmung des Excitators auf die zu excitirende Funkenstrecke nachzuweisen, jedoch vorläufig ohne deutlichen Erfolg.

29. Der Excitator. Als geeignete Form des Excitators ergab sich folgende. Vier Kugeln *e* von 9 *mm* Durchmesser und je 1 *mm* Funkendistanz werden in eine der Funkenstrecke $E_1 E_2$ parallele Reihe in 5 *cm* Entfernung aufgestellt und von derselben durch einen schwarzen Glasbecher getrennt. Die Zuleitungen zu den äusseren Kugeln durchbrechen die Wand des Schutzkastens *G* (Fig. 3) und führen zu einem kleinen Plattencondensator. Dieser wird erst niedrig geladen, dann werden seine Platten von einander entfernt, wobei er sich durch den Excitator auslädt.

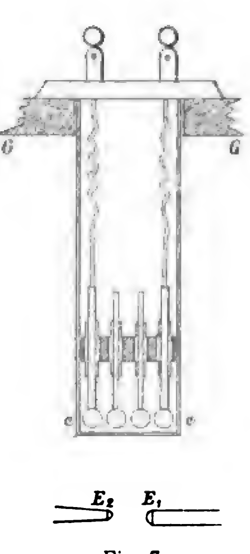


Fig. 7.

Das Vorzeichen der Ladung dieses kleinen Condensators wurde, um einem Einwurf zu begegnen, so gewählt, dass beim Entfernen der Platten desselben durch elektrostatische Induction ein kleines Sinken der Potentialdifferenz der Funkenstrecke $E_1 E_2$ (um ungefähr 0·1 C. G. S.) eintrat.

30. Excitation durch Kraftschwankungen. Die Excitation nach der im vorigen Abschnitt beschriebenen Methode löst bei richtiger Aufstellung mit Sicherheit in Verspätung befindliche Funken aus. Ich zähle dieses Experiment mit zu den einwurfsfreien Beweisen des Vorhandenseins der Kraftschwankungswirkung.

Auch zugeleitete und elektrostatisch inducirte Kraftschwankungen lösen den in Verspätung befindlichen Funken $E_1 E_2$ aus. Solche Kraftschwankungen treten auf, wenn man eine der Condensatorplatten $C_1 C_2$ mit einem vorher abgeleiteten

Metallstück berührt, oder in der Nähe der Condensatorplatte die Entladung eines geladenen Metallstückes vornimmt.

Derartige Excitationen sind mir oft lästig geworden. Sie kommen natürlich nur bei Unvorsichtigkeiten unbeabsichtigt zu Stande und sind zu vermeiden, weil ein Funke, welcher bei sehr niedrigem Funkenpotential durch eine starke Kraftschwankung erzwungen wird, die Funkenstrecke auffallend stark verdirbt.

31. *Verspätung der Excitation.* Ich habe oftmals beobachtet, dass der verspätete Funke einige Secunden später zu Stande kam, nachdem ich scheinbar vergeblich die Excitation desselben nach einer der im vorigen Abschnitt erwähnten Methoden versucht hatte und hielt dies anfänglich für den Beweis besonderer Unempfindlichkeit.

Als aber einmal bei einem mittleren Werth der Potentialdifferenz und sehr gutem Zustande der Funkenstrecke in allen unmittelbar hintereinander vorgenommenen Experimenten der excitirte Funke *eben hörbar* (etwa 0·1 Secunden) später als der excitirende erfolgte, gleichgiltig in welcher Phase der Verspätung die Excitation vorgenommen wurde, konnte ich mich der Überzeugung nicht länger verschliessen: *dass die Excitation durch eine Kraftschwankung nicht unmittelbar den Funken, sondern einen Vorprocess desselben auslöst,* welcher in 0·1 bis mehreren Secunden abläuft.

Es ist wahrscheinlich, dass es sich dabei um denselben Vorprocess handelt, welcher überhaupt während der Verspätung des Funkens abläuft, so dass man erkennt: *Eine Kraftschwankung hebt den Vorprocess nicht auf, sondern beschleunigt nur seinen Abschluss.*

Bei einer anderen Gelegenheit, als wieder die Aufstellung gut getroffen war, und ziemlich regelmässig 30 Secunden Verspätung erhalten wurden, liess ich mir durch einen Gehilfen den Augenblick vorschreiben, in welchem die Excitation vorgenommen werden sollte. Es geschah dies willkürlich zu Anfang, in der Mitte oder gegen Ende der Verspätung. Die Excitation löste stets nach 0·1 bis 3 Secunden den Funken aus.

Die Aufstellung muss sehr genau so abgeglichen sein, dass die Excitation an der Grenze ist, wo sie überhaupt noch

wirkt. Bei Vorhandensein eines halbwegs constanten Zustandes der Funkenstrecke geschieht dieser Abgleich hauptsächlich durch Wahl der Potentialdifferenz. Es gelingt dieses Experiment aber selbstverständlich oft nicht. Die Verspätung der Excitation durch Licht habe ich trotz vielfacher Versuche überhaupt nicht erzielen können, die Excitation war immer entweder momentan oder gar nicht vorhanden.

Die Verspätung der Excitation durch zugeleitete und elektrostatisch inducirte Kraftschwankungen ist hingegen sehr leicht zu erhalten. Schon unter den mitgetheilten Beobachtungen, z. B. Beob. Nr. 381, 388 und 392 in Abschn. 27 und überhaupt bei der Ladung mit Hilfe der Zuleitungen $A_1 A_2$ kam diese Excitation (als Folge der verschiedenen Umladungen, welche $A_1 A_2$ bei ihrem Hin- und Hergang erfahren) sehr oft vor, und zwar gewöhnlich mit Verspätung. Aus diesem Grunde ist auch die im Abschnitt 19 vorgeschriebene Wartezeit von 10 Secunden vor der Hebung nothwendig.

32. Addition der Excitationswirkungen. Aus der Verspätung der Excitation folgt, dass mehrere unmittelbar auf einander folgende Excitationen sich verstärken können. Thatsächlich lässt sich dies beobachten. Mehrere auf einander folgende Excitatorfunken, welche einzeln zu schwach sind, lösen oft zusammen den Funken aus.

Dieses Experiment ist mir auch mit Licht gelungen. Das Licht mehrerer Funken eines Funkenstromes löst die Entladung aus, während einzelne dieser Funken (bei entsprechender Abblendung des Lichtes der übrigen) cet. par. keine Wirkung haben.

Hieraus erklärt sich auch die starke Wirkung der Kraftschwankungen, welche eine Influenzmaschine oder ein in ihren Stromkreis geschaltetes Fünkchen bewirkt. Es handelt sich nicht allein um die Grösse der Kraftschwankungen, sondern auch um ihre Zahl.

VI. Zusammenfassung.

1. Funken verändern die Funkenstrecke, und zwar kräftige Funken deutlich in ungünstigem, schwache manchmal in

günstigem Sinne. Die Funkenstrecke erholt sich von dieser Nachwirkung der Funken von selbst im Laufe einiger Stunden.

2. Bei Vermeidung der kleinsten Kraftschwankungen sind ungewöhnlich hohe Funkenpotentiale zu erhalten.

3. Bei nicht ganz erfüllten Entladungsbedingungen tritt die Entladung nach einer Verspätung von einigen Secunden bis mehreren Minuten ein. Während dieser Verspätung verläuft ein Vorprocess der Entladung, welcher selbst keine Entladung ist.

4. Während dieser Verspätung kann man einwurfsfrei die excitirende Wirkung der Kraftschwankungen nachweisen.

5. Eine mässige Kraftschwankung löst den Funken nicht momentan aus, sondern erst nach 0·1—5 Secunden. Sie beschleunigt nur den Vorprocess desselben, kürzt also seine Verspätung ab.

Die Gesellschaft zur Förderung deutscher Wissenschaft, Kunst und Literatur in Böhmen hat das Zustandekommen dieser Arbeit unterstützt, wofür ich hiemit meinen ergebensten Dank sage.

Elektrische Beobachtungen auf dem Sonnblick

(Nachtrag)

bearbeitet von

J. Elster und **H. Geitel,**

Oberlehrern am herzoglichen Gymnasium zu Wolfenbüttel.

Die nachfolgende Mittheilung bildet den Abschluss der Berichte über die von dem früheren Beobachter der Sonnblickwarte, Peter Lechner, in unserem Auftrage gesammelten Messungen und Beobachtungen der atmosphärischen Elektricität.[1] Wir würden mit ihrer Veröffentlichung gewartet haben, bis wiederum das vollständige Material von einigen Jahren vorgelegen hätte, wenn nicht durch das Ausscheiden Peter Lechner's aus seinem Dienste die Fortsetzung dieser Arbeiten zunächst abgeschnitten wäre. Der folgende Nachtrag umfasst für die Messungen des Potentialgefälles der atmosphärischen Elektricität den Zeitraum von October 1893 bis März 1894, für die Elmsfeuerbeobachtungen den von Februar 1893 bis Mai 1894.

1. Messungen des Potentialgefälles.

Die Messungen, über welche wir früher berichteten, waren an heiteren Tagen in stündlichen Intervallen vorgenommen. Da sich nun herausstellte, dass das Tagesmittel mit befriedigender Annäherung aus den drei Beobachtungen um 7 a., 2 p. und 9 p. gebildet werden konnte, so wiesen wir Peter Lechner an, sich

---

[1] Diese Sitzungsberichte, 101, II. a, S. 1485, 1892 und 102, II. a, S. 1295, 1893.

auf diese drei Termine zu beschränken. Die hieraus gebildeten Tagesmittel für die Monate October bis April stellen wir des Vergleiches wegen mit denen der früheren Jahre zusammen und fügen wiederum die Mittelwerthe der Temperatur, des Dampfdruckes und der Bewölkung bei. Wir dürfen wohl in Erinnerung bringen, dass alle Messungen des Potentialgefälles auf dieselbe — von der Lage des Beobachtungsortes abhängige — Einheit reducirt und daher unter sich, aber nicht mit den auf die Einheit $\frac{\text{Volt}}{\text{Meter}}$ bezogenen vergleichbar sind.

Tabelle I.

Monat	Jahr	Anzahl der Beobachtungstage	Anzahl der Einzelbeobachtungen	Mittlere Temperatur	Mittlerer Dampfdruck	Mittlere Bewölkung	Volt
October	1890	12	65	— 1·8	2·5	1·8	107
	1891	4	40	— 6·5	1·9	3·0	152
	1892	6	75	— 2·9	2·7	1·5	112
	1893	8	24	— 4·6	2·0	1·8	101
Summen und Mittel		20	204				112
November	1890	6	64	— 9·0	2·0	4·5	87
	1891	5	61	—10·2	1·6	2·3	146
	1892	13	146	— 8·3	1·5	1·8	112
	1893	3	9	— 9·6	1·5	1·6	101
Summen und Mittel		27	280				112
December	1890	14	190	—15·2	0·9	0·9	141
	1891	7	96	— 6·2	1·8	2·1	144
	1892	12	145	—11·0	1·1	2·3	138
	1893	9	26	—11·0	1·6	0·7	107
Summen und Mittel		42	437				133
Jänner	1891	11	139	—13·4	1·0	1·1	122
	1892	6	83	—11·7	1·1	1·5	148
	1893	8	95	—13·0	1·3	1·9	134
	1894	7	19	— 9·9	1·2	0·2	79
Summen und Mittel		32	336				121

Monat	Jahr	Anzahl der Beobachtungstage	Anzahl der Einzelbeobachtungen	Mittlere Temperatur	Mittlerer Dampfdruck	Mittlere Bewölkung	Volt
Februar	1891	—	—	—	—	—	—
	1892	2	19	— 9·3	2·2	4·4	165
	1893	4	49	—12·6	1·6	1·2	146
	1894	5	15	— 12·2	1·0	0·6	120
Summen und Mittel		11	83				138
März	1891	5	66	— 8·1	1·6	1·7	138
	1892	10	132	—15·5	1·3	1·9	134
	1893	9	113	— 9·9	1·7	1·5	132
	1894	6	18	—11·3	1·3	1·1	120
Summen und Mittel		30	329				131
April	1891	9	82	—11·5	1·5	3·5	132
	1892	10	135	— 5·2	2·2	1·4	151
	1893	9	104	— 6·8	1·8	1·9	143
	1894	8	22	— 6·0	2·3	1·8	115
Summen und Mittel		36	343				136
Mai	1891	9	59	— 2·5	3·0	5·3	136
	1892	6	79	+ 1·4	4·0	1·4	155
	1893	1	7	— 0·7	3·9	6·3	134
	1894	—	—	—	—	—	—
Summen und Mittel		16	145				143
Juni	1891	5	20	— 1·8	3·8	6·4	134
	1892	—	—	—	—	—	—
	1893	2	29	+ 0·4	4·0	1·2	136
	1894	—	—	—	—	—	—
Summen und Mittel		7	49				135

Wie man sieht, schliessen sich die neuen Werthe im Allgemeinen den alten gut an, nur der vom Jänner 1894 bleibt hinter den entsprechenden erheblich zurück. An äussere Störungen zu denken, verbietet die niedrige Ziffer der mittleren Bewölkung, auch sonst finden wir keinen Anlass, die Glaubwürdigkeit des Resultates in Zweifel zu ziehen. Von zwei Tagen dieses Monates, dem 12. und 14., liegen gleichzeitige

Messungen vom Sonnblick und von Wolfenbüttel vor. Die Tagesmittel sind für den Sonnblick 88, beziehungsweise 71, für Wolfenbüttel 325 und 396 $\frac{\text{Volt}}{\text{Meter}}$. Die letzteren Zahlen schliessen sich dem Mittelwerthe (391 $\frac{\text{Volt}}{\text{Meter}}$) für den Jänner in den Jahren 1888—1891 so nahe an, als es für einzelne Tagesmittel nur erwartet werden kann. Daher ist die Anomalie in den Sonnblickmessungen wohl auf eine Ursache localen Charakters zurückzuführen.

Als das Gesammtresultat der vierjährigen Beobachtungen bleibt die geringe jährliche Veränderlichkeit des Potentialgefälles auf dem Sonnblick im Vergleich zu dem in der Ebene gemessenen bestehen. Dabei ist auch der Schluss aufrecht zu erhalten, den wir aus dieser Thatsache in der früheren Mittheilung zogen, dass der Sonnblickgipfel diejenigen Schichten der Atmosphäre zum grössten Theile überragt, in denen die elektrischen Vorgänge stattfinden, welche im Tieflande die Periodicität des Potentialgefälles am Erdboden bewirken. Bei der Begründung dieses Schlusses hatten wir allein die nach den damaligen Erfahrungen wahrscheinliche Vorstellung in Betracht gezogen, dass diese elektrischen Vorgänge in Schwankungen des Gehaltes der Luft an freier negativer Elektricität beständen. Die neueren Beobachtungen des Potentialgefälles bei Ballonfahrten[1] widersprechen dieser Annahme und nöthigen, sofern wir sie als genügend sicher und allgemein giltig betrachten dürfen, zu der entgegengesetzten Vorstellung, dass die Luft, jedenfalls bis zu einem Niveau von 3000 *m*, positive Elektricität enthält. Von welchem Zeichen nun auch die in der Atmosphäre vertheilte Elektricität sein mag, so zeigt die Constanz des Potentialgefälles auf dem Sonnblick, dass über dem Niveau von 3000 *m* keine stark veränderlichen elektrischen Massen mehr vorhanden sein können, dass also die Ursache der Potentialschwankungen, die man im Tieflande beobachtet, in den unteren Luftschichten zu suchen ist.

Durch Combination der Ergebnisse der Ballonfahrten mit denen der Sonnblickbeobachtungen würde man zu folgender

[1] R. Börnstein, Verhandl. der physik. Gesellschaft in Berlin, 13, S. 35, 1894. — O. Baschin, Zeitschrift für Luftschiffahrt, März/April 1894.

Auffassung der Erscheinungen der normalen Luftelektricität gelangen.[1] Die Erde ist, analog der Vorstellung Lord Kelvins, als ein Condensator zu denken, dessen eine Belegung, die Erdoberfläche, negative Elektricität enthält, während positive in der Atmosphäre, und zwar — hierin liegt das Abweichende der neuen Auffassung — vorzugsweise den tiefsten Luftschichten vertheilt ist. Ob die Gesammtladung der Erde als Planet Null, d. h. ob die negative Elektricitätsmenge des Erdkörpers der positiven in der Atmosphäre genau gleich ist, bleibt zunächst eine offene Frage. Da nach den Beobachtungen im Ballon das Gefälle in der freien Atmosphäre bis zu einem Niveau von 3000 *m* noch nicht ganz auf Null zu sinken scheint, so wäre entweder anzunehmen, dass der Erdkörper einen Überschuss von negativer Elektricität über die positive der Atmosphäre voraus hat, oder dass auch die höchsten atmosphärischen Schichten noch positive Elektricität enthalten. Dann müsste dieser Rest an positiver Elektricität, wie aus den Sonnblickmessungen hervorgeht, nahe constant sein. Die starken Schwankungen, denen die atmosphärische Elektricität im Tieflande während des Tages und Jahres unterworfen ist, wären als eine Folge des Austausches zwischen der negativen Bodenelektricität und der positiven der untersten Luftschichten zu betrachten. Hiebei kann die photoelektrische Entladung der Erdoberfläche als Ursache der Abnahme des Potentialgefälles bei wachsender Sonnenhöhe mit einiger Wahrscheinlichkeit angesehen werden. Aus welchem Grunde aber dies Gefälle für jeden Ort der Erde im Laufe des Jahres veränderlich, im Mittel aber nahe constant ist, bedürfte noch der Aufklärung. Bekanntlich macht diese Constanz des Jahresmittels der atmosphärischen Elektricität der Erklärung weit geringere Schwierigkeiten, wenn man mit Herrn F. Exner der Luft einen wechselnden Gehalt an negativer Elektricität zuschreibt, die von dem Erdboden stammt und diesem in nahe stationärer Weise durch die Niederschläge wieder zugeführt wird.

Ob wir berechtigt sind, auf Grund der bis jetzt vorliegenden elektrischen Messungen im Ballon die positive Elektrisirung der

[1] Inzwischen hat Herr Trabert (diese Berichte Bd. 103, S. 1023. 1894) ähnliche Gesichtspunkte bekannt gemacht.

unteren Luftschichten bei heiterem Himmel als erwiesene Thatsache zu betrachten, scheint uns allerdings noch nicht zweifellos, dagegen ist mit Sicherheit zu hoffen, dass durch solche Untersuchungen, nachdem sie in so vielversprechender Weise begonnen sind, die fundamentale Frage nach der Eigenelektricität der Atmosphäre in dem einen oder andern Sinne entschieden werden wird. Beobachtungen auf Bergobservatorien können zur Lösung dieser Frage nur dann beitragen, wenn es gelingt, das Gefälle auf dem Berge unter der Annahme unelektrischer Luft aus dem in der Ebene beobachteten mit einiger Annäherung durch die geometrische Gestalt des Berges zu berechnen, so dass ein Vergleich zwischen den berechneten und den beobachteten Werthen möglich ist. Wenn die Luftschichten, aus denen der Berg aufragt, freie positive Elektricität enthalten, so müsste sich das auf dem Berge beobachtete Gefälle kleiner als das berechnete ergeben, locale Störungen sind natürlich ausgeschlossen gedacht. Für besonders einfache Bergformen, die angenähert als Kugelcalotten aufzufassen sind, würde die Rechnung ausführbar sein.[1]

Indessen liegt das Ziel der elektrischen Beobachtungen auf Bergobservatorien, soweit sie das normale Potentialgefälle betreffen, im Gegensatze zu denen vom Ballon aus weniger in der Ermittlung absoluter Werthe, als vielmehr in der Feststellung der Periodicität zum Zweck des Vergleiches mit den in der Ebene gewonnenen Resultaten.

2. Elmsfeuerbeobachtungen.

Die Aufzeichnungen Peter Lechner's über Elmsfeuer und ihre Begleiterscheinungen geben wir ebenfalls, wie früher, in tabellarischer Form wieder. Die Regel, dass bei staubförmigem Schnee vorzugsweise negatives, bei flockigem positives Elmsfeuer beobachtet wird, sowie das schon früher constatirte Überwiegen des negativen zur Winterszeit wird durch das neue Material durchaus bestätigt. Wir machen besonders noch auf die starken Ausströmungen positiver Elektricität bei Hagelfall aufmerksam.

[1] Vergl. Mascart, Handbuch der statischen Elektricität, Bd. I, S. 504 ff.

Die Aufzeichnungen zur Zeit der Sommergewitter können leider auf Vollständigkeit keinen Anspruch machen, da der Beobachter während dieser Zeit durch den Fremdenverkehr in Anspruch genommen war.

Tabelle II.

Nr.	Datum	Elmsfeuer von	Elmsfeuer bis	Art und Reihenfolge der Niederschläge	Intensität des Elmsfeuers	Reihenfolge der Zeichen	Windrichtung und Stärke	Mittlere Tages-temperatur	Bemerkungen
24	28/2 1893	9 a.	11h 50' a.	Staubschneefall wechselnder Stärke	wechselnd, zum Theil sehr stark	—	Starker Wind aus W, SW, NW, zuletzt W	— 8·3	Alle 10 Minuten eine Beobachtung
25	6/3 1893	4h 30' p.	8h 20' p.	Starker Staubschneefall wechselnd mit flockigem Schnee	wechselnd	— + — + — + —	Mässig starker bis starker Wind aus E, NE und N	—13·3	Alle 10 Minuten eine Beobachtung Sonnblick mit Nebel bedeckt
26	11/3 1893	6h 35' a.	9h 30' a.	Schwacher Staubschneefall und Schneetreiben	wechselnd, von 7h 50' bis 9h a. verschwunden	—	Anfangs Nordsturm; dann starker Wind aus N bis E	—16·6	Desgleichen
27	19/3 1893	9h a.	8h 10' p.	Staubschnee und Schneetreiben	Wechselnd, zum Theil sehr stark	—	Starker Wind aus NE bis NW	—23·6	Desgleichen
28	17/4 1893	6h 35' p.	8h 20' p.	Graupelfall, öfters vermischt mit Schnee	Wechselnd, durchschnittlich nicht stark	+ —	Schwacher Wind aus WNW	— 8·0	Desgleichen

Nr.	Datum	Elmsfeuer von	Elmsfeuer bis	Art und Reihenfolge der Niederschläge	Intensität des Elmsfeuers	Reihenfolge der Zeichen	Windrichtung und Stärke	Mittlere Tages-temperatur	Bemerkungen
29	21/4 1893	6h 40' a. dann 11h a. dann 5h p.	7h 30' a. 12h m. 5h 5' p.	Graupeln, Schnee, Schneetreiben, flockiger Schnee, Staubschnee	Wechselnd, um 11h 10' a. sehr stark	+ — +	Um 7 a. Sturm, dann starker Wind aus N bis NNW	— 4·9	Desgleichen
30	22/4 1893	8h a.	10h a.	Staubschneefall mit Graupeln	Mässig stark	+	Starker Wind aus NE	— 7·5	Desgleichen
31	19/5 1893	3h 30' dann 5h 40' p.	4h 10' 6h 20' p.	Staubschnee, feine Graupeln, Staubschnee	Mässig stark, 5h 50' sehr stark	— + —	Anfangs schwacher, zuletzt starker W	0·0	Desgleichen
32	28/7 1893	2h p. dann	3h p.	Starker Hagel	Stark	+	Schwacher SE	+ 4·1	Alle Stunden eine Beobachtung
		6h p.	7h p.	Hagel und Schnee	Sehr stark	+			
33	20/8 1893	5h p.	6h p.	Hagel und Graupeln; mässig starker Fall	Stark	+ (Blitze röthlich)	Schwacher S	+ 5·4	Stündlich eine Beobachtung
34	3/9 1893	12h m.	3h p.	Starker Hagel mit Graupeln und Schnee	Stark	+ —	Schwacher N	— 5·0	Desgleichen
35	8/9 1893	6h p.	8h p.	Starker Hagel, später Schnee	Stark	+	Schwacher W	+ 2·1	Desgleichen
36	1/10 1893	11h a.	2h p.	Schnee, Graupeln und Nebel	Stark und sehr stark	+ — +	Anfangs starker W, dann Südsturm	— 1·2	Alle halbe Stunde eine Beobachtung. Kurze Pause des Elmsfeuers um 1 p.

37	10/10 1893	10^h 45' a.	10^h 50' a.	Schwacher Schnee und Graupelfall	Mässig stark	+	S	— 3·4	Alle fünf Minuten eine Beobachtung
38	4/1 1894	8^h a.	12^h m.	Kein Niederschlag, nur feuchter Nebel	Mässig stark	—	N, fast windstill	—17·1	Stündlich eine Beobachtung
39	2/2 1894	12^h m.	12^h 45'	Schneetreiben und schwacher Schneefall	Stark	—	Starker N	—11·5	Alle 15 Minuten eine Beobachtung. Sonnblick öfter mit Nebel bedeckt
40	13/2 1894	3^h p.	4^h 20' p.	Graupeln und starker Schneefall	Anfangs stark	—	Schwacher Wind aus N bis NW	—14·4	Alle 10 Minuten eine Beobachtung
41	19/1 1894	7^h a.	8^h 30' a.	Flockiger Schnee, Staubschnee, dann wieder flockiger Schnee	Anfangs stark	+ — +	Starker Wind aus W bis SW	— 6·1	Desgleichen
42	7/5 1894	6^h 40' p.	8^h 40' p.	Graupeln, Staubschnee, dann flockiger Schnee, zuletzt Graupeln	Sehr stark, doch schnell abnehmend	+ — + —	Wind wechselnd von SW bis NE	— 2·7	Desgleichen
43	18/5 1894	2^h 25' p.	3^h 10' p.	Graupeln und flockiger Schnee	Mässig stark	— +	Schwacher Wind aus N bis NE	— 2·7	Desgleichen. Schwacher Donner im E

Über Curven fünfter Ordnung mit vier Doppelpunkten

von

Jan de Vries in Delft.

(**Vorgelegt in der Sitzung am 8. November 1894.**)

1. Eine ebene Curve fünfter Ordnung Φ_5 mit vier Doppelpunkten Δ_k ($k = 1, 2, 3, 4$) wird durch den Kegelschnittbüschel (D_2), mit den Basispunkten Δ, in den Paaren einer Fundamentalinvolution F_2 getroffen.

Die Paare der F_2, welche mit einem beliebig gewählten Punkte p allineirt sind, gehören einer Curve H an, welche der Ort ist für die zweiten Schnittpunkte eines Strahles aus p mit den Kegelschnitten D_2, welche ihn auf der vorgegebenen Curve Φ_5 schneiden.

Die Curve D_2, welche p enthält, bestimmt durch ihre Schnitte mit Φ_5 zwei Strahlen, welche H in p berühren; p ist demnach ein Doppelpunkt der Curve H. Nachdem nun jeder Strahl aus p noch fünf Punkte des Ortes trägt, ist H eine Curve siebenter Ordnung.

Jeder Punkt Δ ist ein dreifacher Punkt der H_7; seine drei Nachbarpunkte entsprechen nämlich den drei Kegelschnitten, welche die Gerade Δp, ausserhalb Δ, auf Φ_5 treffen.

Von den Schnittpunkten der Curven Φ_5 und H_7 liegen 24 in den Punkten Δ vereinigt; die übrigen 11 sind entweder paarweise mit p allineirt oder aber Berührungspunkte einer D_2 mit einer Geraden durch p.

Diese Berührungspunkte gehören aber der Curve dritter Ordnung an, welche durch den Büschel (D_2) und den zu ihm projectiven Büschel der in Beziehung auf p bestimmten Polaren erzeugt wird, und Φ_5, ausserhalb der Punkte Δ, in 7 Punkten schneidet.

Unter den oben genannten 11 Punkten gibt es daher zwei Paare der F_2; die Involutionscurve ist also zweiter Classe.

Die Paare der F_2 werden aus p durch zwei 5-5-deutige Strahlenbüschel projicirt, für welche die beiden Tangenten der Involutionscurve doppelte Coincidenzstrahlen sind; die übrigen 6 Coincidenzen rühren von ebenso vielen Doppelpunkten der F_2 her.[1]

Man erkennt leicht, dass Φ_5 keine zweite Paarinvolution trägt. Durch eine I_2 werden nämlich die Curven D_2 in ein 2-2-deutiges System geordnet, welches nicht mehr als 4 Verzweigungselemente besitzen kann. Die 6 Doppelpunkte der F_2 würden aber 6 Verzweigungscurven D_2 liefern; das 2-2-deutige System kann somit nur Doppelelemente enthalten; die betreffende I_2 ist daher mit F_2 identisch.

Es gilt nun der Satz:

Auf der quadrinodalen Curve fünfter Ordnung gibt es nur eine Paarinvolution. Sie besitzt sechs Doppelpunkte und die Verbindungsgeraden ihrer Paare hüllen eine Curve zweiter Classe ein.

2. Die Tangenten der Involutionscurve ψ_2 begegnen Φ_5 in den Tripeln einer zweiten Fundamentalinvolution, F_3, welche F_2 begleitet.

---

[1] Das hier benutzte Verfahren lässt sich allgemein anwenden auf die Involutionen, welche durch Curvenbüschel auf einer algebraischen Curve bestimmt werden. In meiner Arbeit: »Involutions quadruples sur courbes biquadratiques« (Archives Neerlandaises, tome 23) habe ich für solche Involutionen die nachstehenden Sätze hergeleitet:

1. Die Involutionscurve einer J_s, welche auf einer Curve C_n herausgeschnitten wird durch einen Curvenbüschel p^{ter} Ordnung, welcher in d Doppel-Punkten der C_n Basispunkte hat, ist von der Classe

$$\frac{1}{2}(n-1)(2s-n)+d.$$

2. Jede auf einer Curve vom Geschlechte g durch einen Curvenbüschel bestimmte I_s besitzt $2(g+s-1)$ Doppelpunkte.

3. Zwei derselben Curve vom Geschlechte g angehörende Involutionen I_s und I_t haben $(s-1)(t-1)-g$ gemeinschaftliche Paare.

4. Eine durch ein Curvennetz auf einer Curve g^{ten} Geschlechtes erzeugte zweistufige Involution I_t^2 besitzt $\frac{1}{2}(t-1)(t-2)-g$ neutrale Paare.

Bezeichnet man einen Curvenpunkt mit a oder α, je nachdem man ihn zu einem Paare der F_2 oder zu einem Tripel der F_3 ergänzen will, so erhellt, dass von den beiden nach $a_1 \equiv \alpha_1$ zielenden Tangenten der ψ_2 die eine noch den Punkt a_2 und ein Tripel $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ enthält, indess die zweite die Punkte α_2, α_3 nebst einem Paare b_1, b_2 trägt.

Dementsprechend bilden die Tangenten $L \equiv \Lambda$ ein 2-3-deutiges System, in welchem der Geraden L durch a_1, a_2 die drei Tangenten $\Lambda', \Lambda'', \Lambda'''$ zugeordnet sind, welche ihr in $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ begegnen, wogegen der Geraden Λ die beiden Tangenten L', L'' entsprechen, welche sie in a_1, a_2 treffen.

Die 6 Doppelpunkte von F_2 liefern die Doppelelemente, welche den Verzweigungselementen des Systems (Λ) entsprechen. Umgekehrt schliesst man aus der Zahl 8 der Verzweigungsstrahlen des Systems (L) auf 8 Doppelpunkte der Involution F_3.

Jeder Coincidenzstrahl der 2-3-deutigen Correspondenz berührt ψ_2 in einem Punkte, der von einem gewissen Punkte dieses Strahles zu einem Paare der F_2 und von zwei anderen Punkten zu einem Tripel der F_3 ergänzt wird. Die Curven ψ_2 und Φ_5 berühren sich also an fünf Stellen.

Weil die betreffenden Tangenten als gemeinschaftliche Tangenten der beiden Curven doppelt zu zählen sind, ergibt sich aus dem Vorhergehenden für Φ_5 die bekannte Classenzahl 12.

Die Involutionscurve der F_2 berührt die Curve Φ_5 in fünf Punkten und hat, ausser den Tangenten in diesen Punkten, noch vierzehn Tangenten mit ihr gemein, welche den sechs Doppelpunkten der F_2 und den acht Doppelpunkten der F_3 entsprechen.

Anderseits ist die Directionscurve einer 2-3-deutigen Correspondenz zwischen den Tangenten eines Kegelschnittes ψ_2 stets eine quadrinodale Curve fünfter Ordnung. Denn die quadratische Tangenteninvolution der ψ_2, deren Axe eine beliebige Gerade ist, hat 5 Paare gemein mit jener 2-3-Correspondenz, wonach diese Gerade 5 Punkte der Directionscurve enthält. Weil es ferner in einer m-n-deutigen Verwandtschaft $\frac{1}{2} m(m-1)+$

$+\frac{1}{2}n(n-1)$ involutorische Paare gibt, muss die Directionscurve 4 Doppelpunkte besitzen.

3. Durch die Paare der F_2 sind die Curven D_2 eindeutig bezogen auf das durch die Tangenten der ψ_2 gebildete Strahlensystem vom Index 2.

Es seien nun $P=0$ und $Q=0$ die Gleichungen von zwei dieser Kegelschnitte und $A=0$, $C=0$ die Gleichungen der ihnen entsprechenden Tangenten. Die Gleichung der Φ_5 wird dann erhalten durch Elimination des Parameters λ aus

$$A+2\lambda B+\lambda^2 C=0 \qquad 1)$$

$$P+\lambda Q=0, \qquad 2)$$

(wo B eine lineare Function der Coordinaten bezeichnet).

Man findet

$$\Phi = AQ^2-2BPQ+CP^2=0, \qquad 3)$$

indess die Einhüllende ψ_2 des Strahlensystems durch

$$\Psi \equiv AC-B^2=0 \qquad (4)$$

dargestellt wird.

Ersetzt man 3) durch

$$(AQ-BP)Q=(BQ-CP)P, \qquad (5)$$

so erhellt, dass Φ_5 als das Erzeugniss zweier projectiven Büschel

$$P+\lambda Q=0 \qquad 2)$$

$$(AQ-BP)+\lambda(BQ-CP)=0 \qquad 6)$$

zu betrachten ist.

Ordnet man jeder Curve D_3 des kubischen Büschels die demselben Werthe von λ entsprechende Tangente der ψ_2 zu, so erzeugen die beiden Systeme eine Curve, deren Gleichung durch Elimination von λ aus 1) und 6) entsteht; nämlich

$$A(BQ-CP)^2-2B(AQ-BP)(BQ-CP)+C(AQ-BP)^2=0$$

oder aber

$$(AC-B^2)(AQ^2-2BPQ+CP^2)=0.$$

Das betreffende Erzeugniss setzt sich daher aus den Curven Φ_5 und ψ_2 zusammen.

Jede Curve D_3 schneidet demnach die Verbindungslinie T des auf ihr belegenen Paares der F_2 zum drittenmale auf ψ_2, also in deren Berührungspunkt mit T.

Die Berührungspunkte ρ_k ($k = 1, 2, 3, 4, 5$) der Curven Φ_5 und ψ_2 genügen den Gleichungen 3) und 4). Eliminirt man zwischen ihnen A oder C, so ergibt sich $(AQ-BP)^2 = 0$ oder $(BQ-CP)^2 = 0$; die Punkte (ρ) sind also allen Curven D_3 gemeinschaftlich.

Für den Büschel (D_3) ist ψ_2 daher die Plücker'sche Curve, d. h. der Ort der Gegenpunkte des Quadrupels (Δ) in Bezug auf die Curven (D_3).

Die Fundamentalinvolution F_2 wird durch den Büschel kubischer Curven bestimmt, dessen Basis aus den Punkten (Δ) und (ρ) besteht; der Kegelschnitt der fünf Punkte (ρ) berührt in diesen die Curve Φ_5.

4. Soll anderseits eine quadrinodale Φ_5 durch einen Kegelschnittbüschel $P+\lambda Q = 0$ und einen zu ihm projectiven kubischen Büschel $M+\lambda N = 0$ erzeugt werden und sind $A = 0$, $C = 0$ die Verbindungsgeraden der auf $P = 0$ und $Q = 0$ belegenen Paare, so müssen M und N beziehungsweise die Formen $AQ-EP$ und $FQ-CP$ besitzen.

Die Curve wird dann durch die Gleichung

$$(AQ-EP)Q = (FQ-CP)P \tag{7}$$

dargestellt.

Aus 7) ersieht man, dass Φ_5 durch

$$P+\lambda Q = 0 \tag{2}$$

mit

$$(AQ-EP)+\lambda(FQ-CP) = 0 \tag{8}$$

oder aber mit

$$(AQ-FP)+\lambda(EQ-CP) = 0 \tag{9}$$

erzeugt werden kann.

Für das Strahlensystem, welches die F_2 projicirt, ergibt sich aus 7) und 2) die Gleichung

$$A+\lambda(E+F)+\lambda^2 C = 0 \tag{10}$$

und für seine Einhüllende ψ_2

$$\psi_2 \equiv 4AC-(E+F)^2 = 0. \tag{11}$$

Die 5 Basispunkte, welche der Büschel 8) ausser (Δ) besitzt, genügen den Gleichungen $AQ = EP$ und $FQ = CP$, also auch der Gleichung

$$\chi_2 \equiv AC-EF = 0. \tag{12}$$

Diese stellt einen Kegelschnitt χ_2 dar, der offenbar auch 5 Basispunkte des Büschels 9) enthält. Dem oben angeführten Plücker'schen Satze zufolge liegen ferner auf χ_2 die dritten Schnittpunkte der Tangenten von ψ_2 mit den ihnen zugeordneten Curven der beiden kubischen Büschel.

Aus der identischen Gleichung

$$4\chi_2-\psi_2 \equiv (E-F)^2 \tag{13}$$

ersieht man, dass die beiden Kegelschnitte χ_2 und ψ_2 sich doppelt berühren.

Werden die beiden kubischen Büschel 8) und 9) so auf einander bezogen, dass entsprechende Curven dasselbe Paar der F_2 enthalten, so erzeugen sie

$$(E-F)[AQ^2-(E+F)PQ+CP^2] = 0,$$

d. h. die Curve Φ_5 und die Berührungssehne der Curven ψ_2 und χ_2. Weil zwei demselben λ entsprechende Curven sich sechsmal auf Φ_5 treffen, erhellt nun, dass die beiden Büschel auf der Berührungssehne dieselbe kubische Involution einschneiden.

Jeder Kegelschnitt, welcher mit

$$\psi_2 \equiv AC-B^2 = 0 \tag{14}$$

eine doppelte Berührung eingeht, lässt sich durch die Gleichung

$$\chi_2 \equiv (AC-B^2)+D^2 = 0 \tag{15}$$

darstellen, oder aber, wenn man

$$B+D \equiv E \quad \text{und} \quad B-D \equiv F$$

ansetzt, durch

$$\chi_2 \equiv AC-EF = 0. \tag{16}$$

Führt man dementsprechend in 3) $E+F$ statt $2B$ ein, wodurch die Gleichung

$$\Phi_5 \equiv AQ^2-(E+F)PQ+CP^2=0 \qquad 17)$$

entsteht, so ergibt sich aus dieser die doppelte Erzeugung der Φ_5 durch

$$P+\lambda Q=0$$
$$(AQ-EP)+\lambda(FQ-CP)=0$$

oder

$$P+\lambda Q=0$$
$$(AQ-FP)+\lambda(EQ-CP)=0.$$

Jede Sehne $D=0$ der ψ_2 liefert dergestalt ein Büschel (χ_2) und damit $2\times\infty$ kubische Büschel, die F_2 projiciren.

Als Hauptergebniss gilt nun der Satz: Die Punktquintupel, welche die Doppelpunkte der Φ_5 zur Basis eines die F_2 erzeugenden kubischen Büschels ergänzen, liegen paarweise auf Kegelschnitten, welche die Involutionscurve der F_2 doppelt berühren.

5. Die Gleichung

$$AQ+\mu CP=0 \qquad 18)$$

stellt einen kubischen Büschel dar, dessen Basis aus den Punkten (Δ), den auf den Geraden $A=0$, $C=0$ belegenen Paaren (a), (c) der F_2 und deren Schnittpunkt s besteht; offenbar trifft er Φ_5 noch in den Tripeln einer Involution.

Nun stellt aber die Gleichung

$$(AQ+\mu CP)(P+\mu Q)+\lambda(AQ^2-2BPQ+CP^2)=0, \qquad 19)$$

wenn dem Parameter μ ein bestimmter Werth beigelegt wird, einen Büschel quadrinodaler Curven fünfter Ordnung dar, dessen Basis aus den Doppelpunkten (Δ), den Paaren (a) und (c), dem auf $P+\mu Q=0$ befindlichen Paare (m) und dem durch die Curve $AQ+\mu CP=0$ bestimmten Tripel μ_1, μ_2, μ_3 besteht.

Dem Werthe $\lambda=-\mu$ entspricht die ausgeartete Curve

$$(A+2\mu B+\mu^2 C)PQ=0.$$

Weil nun die zusammengesetzte Curve $PQ = 0$ die Doppelpunkte (Δ) und die Paare (a), (c) enthält, muss die Gerade

$$A + 2\mu B + \mu^2 C = 0$$

das Paar (m) der F_2 und das Tripel (μ) tragen, d. h. (μ) ist ein Tripel der Fundamentalinvolution, welche F_3 begleitet.

Nachdem nun P und Q zwei beliebig gewählte Curven D_2 darstellen, gilt der Satz:

Die begleitende Tripelinvolution wird durch jeden Büschel kubischer Curven bestimmt, dessen Basis die Punkte (Δ) und zwei Paare der F_2 enthält.

6. Wählt man die beiden Paare so, dass der Schnittpunkt s ihrer Träger auf der Geraden $\overline{\Delta_1\Delta_2}$ liegt, so zerfällt eine Curve des betreffenden Büschels in $\overline{\Delta_1\Delta_2}$ und einen Kegelschnitt. Offenbar enthält dieser ausser den beiden Paaren der F_2 und den Punkten Δ_3, Δ_4 noch die beiden Punkte δ_1, δ_2, welche mit dem fünften Schnittpunkte von Φ_5 und $\overline{\Delta_1\Delta_2}$ ein Tripel der F_3 bilden.

Lässt man s auf $\overline{\Delta_1\Delta_2}$ fortschreiten, so werden daher die Paare der F_2 zu Quadrupeln geordnet, von denen jedes auf einen durch die Punkte Δ_3, Δ_4, δ_1, δ_2 laufenden Kegelschnitt liegt.

Den beiden Schnittpunkten der Involutionscurve ψ_2 mit der Geraden $\overline{\Delta_1\Delta_2}$ entsprechen zwei Paare der F_2, welche sich selbst zu einem, aus zwei Doppelpunkten gebildeten, Quadrupel ergänzen. Demnach:

Es gibt auf Φ_5 sechs Quadrupelinvolutionen, in denen jede Gruppe aus zwei Paaren der F_2 zusammengesetzt ist. Jede dieser Involutionen F_4 wird erzeugt durch einen Büschel von Kegelschnitten, dessen Basis gebildet wird von zwei Doppelpunkten Δ_i, Δ_k und den Punkten δ_l, δ_m, welche den mit Δ_l, Δ_m allineirten Curvenpunkt zu einem Tripel der begleitenden F_3 ergänzen.

7. Durch projective Zuordnung der Büschel

$$P + \mu Q = 0 \qquad 2)$$

$$AQ + \mu CP = 0 \qquad 18)$$

erhält man eine Curve fünfter Ordnung Ψ'_5

$$AQ^2-CP^2=0, \tag{19}$$

welche in (Δ) Doppelpunkte besitzt. Sie unterscheidet sich aber von Φ_5 dadurch, dass sie die Geraden $A=0$, $C=0$ in den Paaren (a), (c) doppelt berührt und durch den Schnittpunkt s dieser Doppeltangenten geht.

Der durch Φ_5 und Ψ'_5 bestimmte Büschel

$$(AQ^2-2BPQ+CP^2)+\lambda(AQ^2-CP^2)=0$$

enthält für $\lambda=-1$ und $\lambda=+1$ beziehungsweise die zusammengesetzten Curven

$$P(CP-BQ)=0 \quad \text{und} \quad Q(AQ-BP)=0.$$

Jede Curve dieses Büschels, also auch Ψ'_5, läuft daher durch die Berührungspunkte (ρ) der Curven ψ_2 und Φ_5.

Die gemeinschaftlichen Punkte zweier einem bestimmten Werthe von μ zugeordneter Curven 2), 18) liegen auf der Curve

$$(A-\mu^2C)Q=0,$$

d. h. die beweglichen Schnittpunkte der Ψ'_5 mit dem Kegelschnitte $P+\mu Q=0$ befinden sich auf der Geraden $A-\mu^2C=0$, welche nach dem Curvenpunkte s zielt. Diese Gerade trägt aber ebenfalls das Punktepaar, welches durch $P-\mu Q=0$ festgelegt wird.

Die Curve Ψ'_5 ist somit dadurch ausgezeichnet, dass für sie die Involutionscurve ψ_2 in einen, als Classencurve doppelt zählenden, Punkt s übergeht. Diese Curve zweiter Art gibt daher Anlass zu dem Satze:

Das Erzeugniss der projectiven Beziehung eines Strahlenbüschels auf die Paare eines in Involution geordneten Kegelschnittbüschels ist eine quadrinodale Curve fünfter Ordnung, zweiter Art.

Den Doppelcurven des zweiten Büschels entsprechen zwei Doppeltangenten der Curve, welche sich auf ihr, in dem Mittelpunkte des Strahlenbüschels, treffen.

Jeder andere Strahl dieses Büschels trägt zwei Paare der Fundamentalinvolution.

Beachtet man, dass Ψ_5 durch den Schnittpunkt s zweier Tangenten der ϕ_2 vollkommen bestimmt wird, so ergibt sich noch:

Durch jeden Punkt der Ebene einer vorgegebenen quadrinodalen Curve fünfter Ordnung, erster Art geht eine Curve zweiter Art, welche die Doppelpunkte mit jener gemein hat und sie in den Berührungspunkten des Fundamentalkegelschnittes und in zwei Paaren der F_2 schneidet.

8. Schreibt man die Gleichung der Ψ_5 in der Form

$$(AQ-GP)Q=(CP-GQ)P,$$

wo $G=0$ irgend eine Gerade darstellt, so erhellt die Erzeugung der Curve mittelst der projectiven Büschel

$$P+\lambda Q=0$$
$$(AQ-GP)+\lambda(CP-GQ)=0.$$

Die Basis des kubischen Büschels besteht aus (Δ) und 5 Punkten des Kegelschnittes

$$AC=G^2;$$

in Bezug auf diesen ist s der Pol von G.

Nachdem jener kubische Büschel durch

$$(AQ+GP)+\lambda(CP+GQ)=0$$

ersetzt werden kann, gilt der Satz:

Die Punktquintupel der Ψ_5, welche die (Δ) zur Basis eines die F_2 erzeugenden kubischen Büschels ergänzen, sind paarweise auf Kegelschnitten belegen, welche die beiden sich auf der Curve treffenden Doppeltangenten berühren.

Es sei die Curve Ψ_5 durch die Büschel

$$\begin{aligned} A-\mu^2 C&=0,\\ P+\mu Q&=0 \end{aligned} \qquad 20)$$

erzeugt.

Legt man durch μ_1 und μ_2 zwei Paare der F_2 fest, so stellt

$$(A-\mu_1^2C)(P+\mu_2Q)+\lambda(A-\mu_2^2C)(P+\mu_1Q)=0 \qquad 21)$$

einen Büschel kubischer Curven dar, dessen Basis aus den Punkten (Δ), s und den Paaren (μ_1), (μ_2) besteht, wonach seine Curven nur noch zwei bewegliche Schnitte mit Ψ_5 ergeben und somit die F_2 herausschneiden. Demnach:

Je drei Paare der F_2 einer Curve zweiter Art liegen in einer kubischen Curve, welche durch (Δ) und s läuft.

9. Weil die Curve erster Art Φ_5 durch den Büschel $AQ+\mu CP=0$ in den Tripeln der begleitenden Fundamentalinvolution getroffen wird, stellt die Gleichung

$$(AQ+\varkappa CP)(A+2\lambda B+\lambda^2C)+$$
$$+\mu(AQ+\lambda CP)(A+2\varkappa B+\varkappa^2C)=0 \qquad 22)$$

einen biquadratischen Büschel dar, dessen Basis gebildet wird von (Δ), (a), (c), s, den Tripeln $(\varkappa)$, (λ) und dem Schnittpunkte t ihrer Träger. Weil seine Curven Φ_5 je in zwei beweglichen Punkten begegnen, schneidet dieser Büschel die F_2 aus. Demnach:

Drei beliebige Paare der F_2 und zwei beliebige Tripel der begleitenden F_3 können durch eine biquadratische Curve verbunden werden, welche durch die Doppelpunkte geht.

Werden s und t auf $\overline{\Delta_1\Delta_2}$ gewählt, so artet eine Curve des biquadratischen Büschels aus in $\overline{\Delta_1\Delta_2}$ und eine kubische Curve durch Δ_3, Δ_4, (a), (c), $(\varkappa)$, (λ).

Durch ein Paar und ein Tripel lässt sich daher, auf 6 Arten, eine kubische Curve legen, welche ein zweites Paar und ein zweites Tripel enthält und durch zwei Doppelpunkte läuft.

Nimmt man ferner (λ) mit (a) in einer Geraden, so ergibt sich ein kubischer Büschel durch (Δ), (c), $(\varkappa)$, der F_2 festlegt. Durch (Δ) gehen somit kubische Curven, welche je zwei Paare der F_2 nebst einem Tripel der F_3 enthalten (vergl. §. 5).

10. Durch die Gleichung

$$AQ(P+\varepsilon Q)+\lambda CP(P+\varepsilon Q)+\mu(A+2\varepsilon B+\varepsilon^2C)PQ=0 \quad 23)$$

wird ein Netz quadrinodaler Curven fünfter Ordnung dargestellt, welche alle die Punkte (Δ) als Doppelpunkte und ferner die Paare (a), (c) und (e) enthalten. Weil jede dieser Curven Φ_5 in 22 festen Punkten trifft, schneidet der Büschel eine Tripelinvolution ein.

Eliminirt man B zwischen 23) und der Gleichung der Φ_5,

$$AQ^2 - 2BPQ + CP^2 = 0,$$

so ergibt sich

$$(P + \varepsilon Q)[(\mu + 1)AQ + (\lambda + \varepsilon\mu)CP] = 0,$$

d. h. jenes Curvennetz legt dieselben Tripel fest wie der Büschel $AQ + \varkappa CP = 0$, bestimmt somit die begleitende F_3.

Ersetzt man die bisher beliebig gedachten drei Paare (a), (c), (e) durch drei Paare (p), (q), (r), wobei p_1, q_1, r_1 auf einer nach Δ_1 zielenden Geraden G angenommen sind, so bildet G einen Bestandtheil von allen Curven des Netzes, welche durch einen auf dieser Geraden festgelegten Punkt gehen, und man erhält einen biquadratischen Büschel, dessen Basis von Δ_2, Δ_3, Δ_4 als Doppelpunkten, den einfachen Punkten Δ_1, p_2, q_2, r_2 und 3 ausserhalb Φ_5 befindlichen Punkten gebildet wird.

Drei Curven dieses rationalen Büschels zerfallen in eine Gerade und eine rationale kubische Curve; sie entsprechen den Punkten, in welchen Φ_5 durch die Seiten des Dreieckes $\Delta_2\Delta_3\Delta_4$ geschnitten wird. Die kubische Curve, welche der Geraden $\overline{\Delta_3\Delta_4}$ beigeordnet ist, muss die Punkte δ_3, δ_4 enthalten, welche den mit $\overline{\Delta_3\Delta_4}$ allineirten Curvenpunkt zu einem Tripel der F_3 ergänzen.

Aus dieser Betrachtung fliesst daher der Satz:

Ergänzt man die Punkte jedes Tripels der durch Δ_i bestimmten Centralinvolution $f_3^{(i)}$ zu Paaren der F_2, so erhält man die Tripel einer neuen Fundamentalinvolution $F_3^{(i)}$, welche erzeugt wird durch einen Büschel kubischer Curven, dessen Basis einen Doppelpunkt Δ_k und die einfachen Punkte Δ_i, Δ_l, Δ_m, δ_l, δ_m enthält.

Aus Obigem ersieht man noch, dass der Curvenbüschel fünfter Ordnung, der in jenem Netze durch einen Punkt der

Geraden $\overline{\Delta_3 \Delta_4}$ festgelegt wird, ebenfalls die begleitende F_3 erzeugt; eine Curve dieses Büschels zerfällt offenbar in $\overline{\Delta_3 \Delta_4}$ und eine binodale Curve vierter Ordnung.

Drei beliebige Paare der F_2 liegen daher allemal mit Δ_k, Δ_l, δ_k, δ_l in einer biquadratischen Curve, welche Doppelpunkte in Δ_i, Δ_j besitzt.

11. Durch eine quadratische Transformation, mit den Hauptpunkten Δ_2, Δ_3, Δ_4, übergeht Φ_5 in eine biquadratische Curve Φ_4 mit einem Doppelpunkte in Δ_1,[1] und F_2 wird zur Fundamentalinvolution Γ_2 der mit Δ_1 allineirten Punktepaare.

Werden drei Paare $(a)(b)(c)$ dieser Γ_2 durch einen Kegelschnitt verbunden, welcher Φ_4 noch in den Punkten σ_1, σ_2 trifft, so muss eine Curve zweiter Ordnung existiren, welche in Δ jeden Curvenzweig dreipunktig berührt; diese Curve wird somit durch die beiden Doppelpunktstangenten gebildet, und es müssen die Tangentialpunkte τ_1, τ_2 von Δ mit σ_1 und σ_2 allineirt sein. Ein Kegelschnitt durch die festen Punkte (σ), welcher das Punktepaar (a) und den Punkt b_1 enthält, trifft Φ_4 daher noch in b_2 und in einem dritten Paare der Γ_2.

Wählt man nun b_1 in gerader Linie mit a_1 und σ_1, so artet der betreffende Kegelschnitt aus in zwei Gerade, welche beziehungsweise die Punkte a_1, b_1, c_1, σ_1 und a_2, b_2, c_2, σ_2 tragen. Jedem Strahle aus σ_1 entspricht demnach ein gewisser Strahl aus σ_2; die beiden damit eindeutig auf einander bezogenen Strahlenbüschel erzeugen einen Kegelschnitt Σ_2, der durch σ_1, σ_2 und die 6 Antitangentialpunkte des Doppelpunktes läuft.

Σ_2 enthält ebenfalls die Schnittpunkte der 8 aus σ_1 an Φ_4 gelegten Tangenten mit den ihnen in der erwähnten Projectivität zugeordneten 8 Tangenten aus σ_2, indem nämlich die 8 Antitangentialpunkte von σ_1 aus Δ in die Antitangentialpunkte von σ_2 projicirt werden.

Für Φ_5 ergibt sich aus dem Obigen: Je drei Doppelpunkte $\Delta_k \Delta_l \Delta_m$ einer Φ_5 sind die Doppelpunkte einer biquadratischen Curve, welche die sechs Doppelpunkte der F_2 enthält und Φ_5 noch in zwei Punkten σ'_i, σ''_i trifft.

[1] Diese Curve wurde eingehend studirt von Herrn Bobek. (Denkschriften der kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien, Bd. 53.)

Die Paare der F_2 werden zu dreien verbunden durch rationale biquadratische Curven, welche σ_i', σ_i'' enthalten und in $\Delta_k \Delta_l \Delta_m$ Doppelpunkte besitzen.

Die Kegelschnittbüschel $(\Delta_k \Delta_l \Delta_m \sigma_i')$ und $(\Delta_k \Delta_l \Delta_m \sigma_i'')$ erzeugen zwei fundamentale Tripelinvolutionen, welche einander derart zugeordnet sind, dass jedes Tripel der einen ein gewisses Tripel der anderen zu drei Paaren der F_2 ergänzt. Dabei entsprechen die acht Doppelpunkte der ersten Involution, in gewisser Anordnung, den Doppelpunkten der zweiten.

II. SITZUNG VOM 17. JÄNNER 1895.

Der Secretär legt das erschienene Heft IX (November 1894) des 15. Bandes der Monatshefte für Chemie vor.

Die Landesregierung für Bosnien und die Herzegovina in Sarajevo übermittelt den Jahrgang 1893 der meteorologischen Beobachtungen an den Landesstationen in Bosnien und der Herzegovina.

Das k. k. österreichische Central-Bureau für den hydrographischen Dienst in Wien übermittelt ein Exemplar des Organisations-Statut des hydrographischen Dienstes in Österreich.

Herr Prof. Dr. Franz Streintz in Graz dankt für die ihm zur Materialbeschaffung für seine Experimentaluntersuchungen zum Zwecke der absoluten Berechnung der elektromotorischen Kräfte von Metallen in Salzlösungen von der kaiserl. Akademie bewilligte Subvention.

Das c. M. Herr Prof. G. Goldschmiedt in Prag übersendet eine Arbeit, betitelt: »Neue Bildungsweise des Diphtalyls«.

Herr Dr. Alois Lode, Assistent an der Lehrkanzel für Hygiene der k. k. Universität in Wien, überreicht eine Abhandlung, betitelt: »Experimentelle Beiträge zur Physiologie der Samenblasen«.

Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:

Landesregierung für Bosnien und die Herzegòvina, Meteorologische Beobachtungen an den Landesstationen in Bosnien und der Herzegovina. Jahrgang 1893. Sarajevo, 1895; Folio.

III. SITZUNG VOM 24. JÄNNER 1895.

Bei Eröffnung der Sitzung bringt der Vorsitzende, Herr Vicepräsident Prof. E. Suess, zur Kenntniss, dass nach einer vorläufigen Mittheilung des hiesigen Hof- und Gerichtsadvocaten Herrn Dr. Othmar Reiser der gestern verstorbene Wiener Bürger Herr Joseph Treitl, Director der Ersten Österreichischen Sparcassa, die kaiserliche Akademie der Wissenschaften testamentarisch zur Universalerbin seines beträchtlichen Vermögens eingesetzt hat.

Zugleich theilt der Vorsitzende aus dem Wortlaute des vom genannten Testamentsexecutor bekanntgegebenen §. 9 des Testamentes vom 9. Mai 1880 einen Auszug mit.

Die anwesenden Mitglieder geben den Gefühlen der Dankbarkeit für den hochherzigen Spender durch Erheben von den Sitzen Ausdruck.

Der Secretär legt das erschienene Heft VIII—X (October bis December 1894), Abtheilung III der Sitzungsberichte vor.

Herr Dr. Alfred Nalepa, Professor am k. k. Staatsgymnasium im V. Bezirke in Wien, übersendet eine vorläufige Mittheilung über »Neue Gallmilben« (11. Fortsetzung).

Das w. M. Herr Prof. H. Weidel überreicht drei Arbeiten aus dem I. chemischen Universitätslaboratorium in Wien:

1. »Über die Affinitätsconstanten der mehrbasischen Säuren und der Estersäuren«, von Dr. R. Wegscheider.

2. »Untersuchungen über die Hemipinsäure und die Esterbildung«, von Dr. R. Wegscheider.
3. »Über den Nicotinsäureäthylester und die Überführung desselben in β-Amidopyridin«, von Felix Pollák.

Der Vorsitzende übergibt mit Bezug auf die in der Sitzung vom 10. Jänner l. J. vorgelegte Serie der neuesten Mondarbeiten von Herrn Director Dr. L. Weinek in Prag die eingelangten Fortsetzungen.



SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

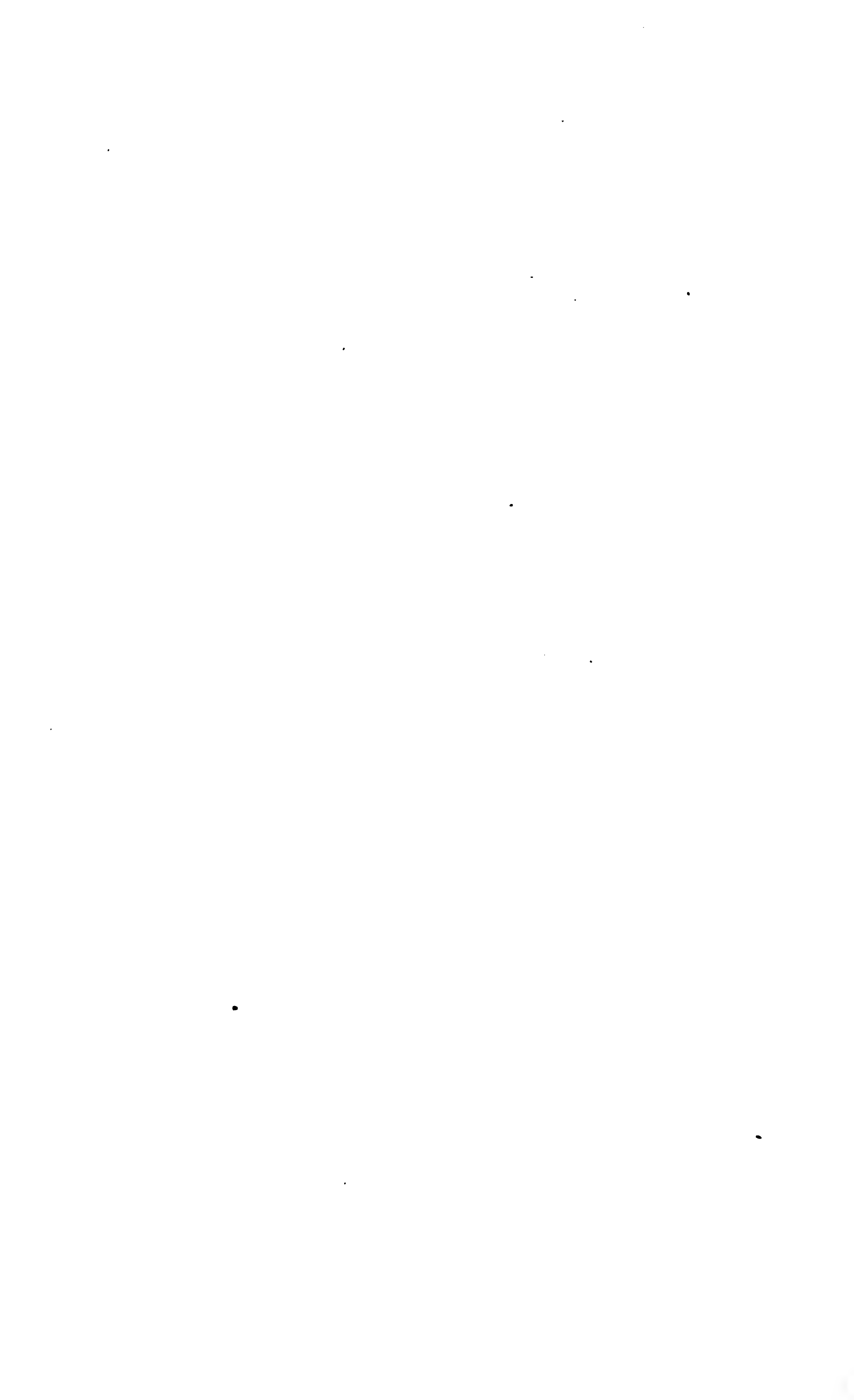
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

CIV. BAND. II. HEFT.

ABTHEILUNG II. a.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.

5



IV. SITZUNG VOM 7. FEBRUAR 1895.

Der Secretär legt das erschienene Heft X (December 1894) der Monatshefte für Chemie vor.

Das c. M. Prof. Zd. H. Skraup übersendet drei im chemischen Institut der k. k. Universität in Graz ausgeführte Untersuchungen, betitelt:

1. »Notiz über das Cinchotenin«, von Dr. P. Fortner.
2. »Über die Einwirkung von Jodwasserstoffsäure auf Cinchotin und Hydrochinin,« von Dr. G. Pum.
3. »Über Cinchotin und Cinchotenin,« von Prof. Zd. H. Skraup.

Das c. M. Herr Prof. Guido Goldschmiedt übersendet eine Arbeit aus dem chemischen Institute der k. k. deutschen Universität in Prag: »Über eine neue Bildungsweise des Pr—2,3-Dimethylindols«, von K. Brunner.

Herr Prof. Dr. H. Chiari in Prag übersendet eine Abhandlung: »Über Veränderungen des Kleinhirns, des Pons und der Medulla oblongata infolge von cogenitaler Hydrocephalie des Grosshirns«.

Das w. M. Herr Prof. H. Weidel überreicht eine im I. chemischen Laboratorium der k. k. Universität in Wien von Herrn F. Haiser durchgeführte Arbeit: »Zur Kenntniss der Inosinsäure«.

Das w. M. Herr Director E. Weiss überreicht eine Abhandlung von Prof. G. v. Niessl in Brünn, betitelt: »Untersuchungen über den Einfluss der räumlichen Bewegung des Sonnensystems auf die Vertheilung der nachweisbaren Meteorbahnen«.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. V. v. Lang überreicht folgende Mittheilung von Dr. Victor Schumann in Leipzig: »Zur Photographie der Lichtstrahlen kleinster Wellenlängen«.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. A. Lieben überreicht eine Abhandlung von Prof. Dr. C. Liebermann aus Berlin: »Zur Formel der Quercetinderivate«.

Herr Prof. Dr. Ed. Lippmann überreicht folgende zwei Arbeiten aus dem III. chemischen Laboratorium der k. k. Universität in Wien, von Herrn Paul Cohn:

1. »Über einige Derivate des Phenylindoxazens.« (II. Mittheilung).
2. »Über die Bildung von Cyclophenylenbenzylidenoxyd.»

Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:

Medicinisch-naturwissenschaftliche Gesellschaft zu Jena, Denkschriften, IV. Band. Prof. Semon, R., mit Unterstützung des Herrn Dr. P. v. Richter: Zoologische Forschungen in Australien und dem Malayischen Archipel in den Jahren 1891—1893. I. Bd.: Ceratodus (I. Lieferung). (Mit 8 Tafeln und 2 Textfiguren). Text und Atlas. — II. Bd.: Monotremen und Marsupialier (I. Lieferung). (Mit 11 Tafeln und 20 Textfiguren). Text und Atlas. — V. Bd.: Statistik und Thiergeographie (I. Lieferung). (Mit 5 Tafeln und 6 Textfiguren). Text und Atlas. — Jena, 1893—1894; 4⁰.

Société Belge de Géologie, de Paléontologie et d'Hydrologie in Brüssel, Bulletin: Tome I—VIII, Brüssel, 1887—1894, 8⁰.

V. SITZUNG VOM 14. FEBRUAR 1895.

Herr Dr. H. Rabl in Wien spricht den Dank aus für die ihm von der kaiserl. Akademie zur Fortsetzung seiner Studien an der zoologischen Station in Neapel über die Pigment-Entwicklung niederer Thiere bewilligte Unterstützung.

Das w. M. Herr Regierungsrath Prof. E. Mach übersendet eine Arbeit aus dem physikalischen Institute der k. k. deutschen Universität in Prag von dem Assistenten dieses Institutes Dr. J. v. Geitler, betitelt: »Schwingungsvorgang in complicirten Erregern Hertz'scher Wellen«.

Das c. M. Herr Prof. Franz Exner in Wien übersendet eine Abhandlung von Prof. P. Bachmetjew aus Sofia: »Über die Vertheilung der magnetischen Verlängerung in Eisendrähten«.

Herr Prof. Dr. Ign. Klemenčič in Graz übersendet eine Abhandlung, betitelt: »Beobachtungen über gleichzeitige Magnetisirung in circularer und axialer Richtung«.

Der Secretär legt folgende eingesendete Abhandlungen vor:

1. »Zur Kenntniss der *Zoantharia tabulata*« von Herrn J. Wentzel, k. k. Realschullehrer in Laibach.
2. »Beitrag zur Construction von Krümmungskugeln an Raumcurven«, von Herrn J. Sobotka in Wien.

Das w. M. Herr Prof. Albrecht Schrauf überreicht eine Abhandlung des Universitätsassistenten Herrn Carl Hlawatsch: »Über eine neue Kupferantimon-Verbindung aus der k. k. Hütte zu Brixlegg«.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. G. Tschermak legt im Namen der Commission für die petrographische Erforschung der Centralkette der Ostalpen den Bericht des c. M. Herrn Prof. F. Becke in Prag über die diesjährigen Aufnahmen vor.

Über die Vertheilung der magnetischen Verlängerung in Eisendrähten

von

P. Bachmetjew,

Professor an der Hochschule in Sofia.

(Mit 4 Textfiguren.)

Dass ein Eisendraht, welcher sich in normalen Verhältnissen befindet, sich beim Magnetisiren verlängert, war schon seit Langem bekannt; es wurde aber noch von Niemandem untersucht, wie diese magnetische Verlängerung in demselben vertheilt ist.

Verschiedene Erscheinungen lassen indessen folgern, dass ein magnetisch gewordener Eisendraht nicht in allen seinen Längentheilen die gleiche Verlängerung erleidet, und es äussern sich diese Erscheinungen wie folgt:

Vor 11 Jahren untersuchte ich die Vertheilung der beim Magnetisiren eines Eisendrahtes sich in demselben entwickelnden Wärme und fand,[1] dass dieselbe an verschiedenen Punkten des Drahtes auch eine verschiedene war, nämlich: die grösste Wärme entwickelte sich in der Mitte des Drahtes und nahm nach den Enden zu ab.

Welchen Antheil die magnetische Verlängerung an der Magnetisirungswärme nimmt, habe ich bereits vor drei Jahren gezeigt.[2] Damals constatirte ich, dass der Eisendraht, welcher beim Magnetisiren keine magnetische Verlängerung besitzt,[3]

---

[1] Journ. russ. phys.-chem. Gesellsch., XVI, S. 81, 1884.

[2] Ebenda, XXIV, S. 1, 1892.

[3] Weil derselbe im entsprechenden gespannten Zustande sich befindet.

nur eine geringere Magnetisirungswärme entwickelt (circa 30%, weniger); mit anderen Worten: Die magnetische Verlängerung (oder Verkürzung) ist einer der Factoren der Wärmeentwicklung beim Magnetisiren der Drähte.

Daraus folgt, dass, indem die Magnetisirungswärme in einem Drahte seiner Länge nach verschieden ist, auch die magnetische Längenveränderung verschieden sein muss. Um diese Folgerung experimentell zu prüfen, habe ich die nöthigen Versuche angestellt.

Die Methode.

Die magnetische Verlängerung in einem Eisendrahte ist — wie bekannt — sehr unbedeutend; dieselbe beträgt im günstigsten Falle 0·002 *mm* pro Meter. Auf diese Weise jedoch konnte ich die unmittelbare Messung der Verlängerung an den verschiedenen Punkten des Eisendrahtes nicht vornehmen. Ich benützte daher eine neue Methode, welche zwar vorläufig keine absoluten Grössen für die Verlängerung ergibt, die aber zu der relativen Bestimmung der Verlängerungsunterschiede dienen kann. Diese Methode beruht auf den thermoelektrischen Eigenschaften des magnetischen Eisens.

Im Jahre 1891 veröffentlichte ich die Untersuchung über die Ursache des magnetisirenden Einflusses auf die thermoelektrischen Eigenschaften von Eisen und Nickel.[1] Es gelang mir damals, den Nachweis zu liefern, dass, wenngleich ein magnetischer Eisendraht mit einem unmagnetischen auch einen thermoelektrischen Strom gibt, dies nicht in Folge des Magnetismus an und für sich geschieht, sondern in der Längenveränderung seine Ursache hat.

Hierauf gestützt, kann gesagt werden, dass, wenn verschiedene Punkte eines der Magnetisirung unterzogenen Eisendrahtes verschiedene thermoelektromotorische Kräfte mit einem nicht magnetisirten Eisendrahte ergeben würden, so wäre aus diesem Umstande zu entnehmen, dass die magnetische Verlängerung in diesen Punkten verschieden ist.

---

[1] Journ. russ. phys.-chem. Gesellsch., XXIII, S. 301, 1891. Wied. Ann., XLIII, S. 723, 1891. Exner's Repert., XXVII, S. 625, 1891.

Praktisch wurde diese Methode wie folgt angewendet:

Ein weicher Eisendraht ($l = 1850$ *mm*, $U = 2 \cdot 8$ *mm*) wurde in die Magnetisirungsspule S eingeschlossen (Fig. 1); dieselbe bestand aus einem Glasrohr ($U = 8$ *mm*) mit einer Lage umwickelten isolirten Kupferdrahtes ($U = 0 \cdot 9$ *mm*). Das Glasrohr war im Innern mittelst Kautschukstöpsel in zwei Abtheilungen eingetheilt. In eine dieser Abtheilungen trat Wasserdampf aus dem Gefässe A ein und ging nachher in das mit kaltem Wasser gefüllte Gefäss B hinaus. Durch die Öffnungen a,

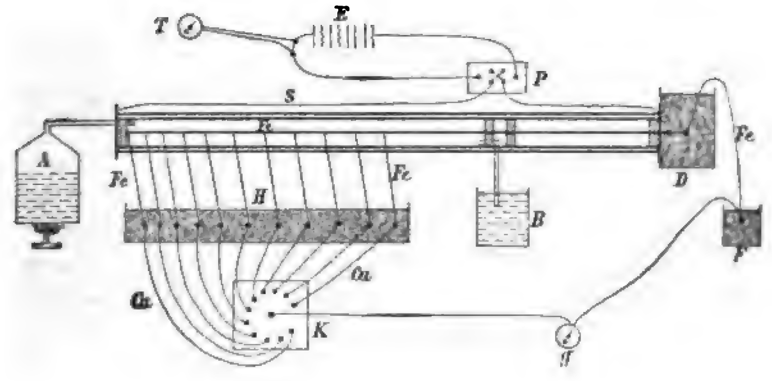


Fig. 1.

b, c etc. in der Röhre gingen dünne Eisendrähte ($U = 0 \cdot 29$ *mm*), welche an den Haupteisendraht in der Spule in folgenden Entfernungen vom Drahtende angelöthet waren:

Nr. des Drahtes	Die Entfernung vom Ende des dicken Eisendrahtes	Nr. des Drahtes	Die Entfernung vom Ende des dicken Eisendrahtes
1.......	0 *mm*	7.......	405 *mm*
2.......	55	8.......	505
3.......	105	9.......	605
4.......	155	10.......	705
5.......	205	11.......	860
6.......	305		

An den Austrittstellen in der Röhre gingen die dünnen Drähte durch die Kautschukhaut, mit welcher die Röhre umwickelt war, damit der Wasserdampf nicht aus der Röhre ent-

weiche. An diese Eisendrähte waren Kupferdrähte angelöthet und die Löthstellen in ein Gefäss *H* mit gestossenem Eis placirt. Das andere Ende des dicken Eisendrahtes, an welchem ein kurzer Kupferdraht angelöthet war, befand sich im Gefäss *D* mit Eis; an diesen Kupferdraht war ein dünner Eisendraht angelöthet, dessen zweites Ende mit dem Leitungsdraht verbunden und diese Stelle wiederum in das Gefäss *F* mit Eis placirt.

Die an den Eisendrähten 1, 2, 3 etc. angelötheten Kupferdrähte führten zu dem Quecksilber-Kommutator *K*, mittelst welchem der thermoelektrische Strom nach Belieben von diesen Paaren geschlossen werden konnte.

Der thermoelektrische Strom wurde mittelst des Galvanometers von Rosenthal *g* gemessen. Zur Magnetisirung wurde der Strom von der Tauchbatterie (6 grosse Elemente mit Chromsäure hintereinander verbunden) verwendet. Die Tangentboussole *T* gestattete die Stromstärke zu controliren, welche während 2 Stunden ziemlich constant blieb, da die Batterie bereits früher mehrmals gebraucht wurde (das Voltameter zeigte am Ende der Versuche 7·1 Volt, und das Amperometer 1·4 Ampère).

Versuche und Resultate.

Der allgemeine Verlauf der Experimente war folgender:

Die Gefässe *H*, *D*, *F* und *C* waren mit Eis gefüllt, während die Lampe unter dem Gefässe *A* brannte. Nachdem der Dampf bereits eine Stunde lang durch die Glasröhre ging, wurden die Messungen vorgenommen. Zuerst wurde der Ausschlag in der Boussole *T* von der Batterie *E* gemessen, sodann der Haupteisendraht mehrere Male magnetisirt und entmagnetisirt. Während der magnetisirende Strom geöffnet blieb, wurde das Centrum des Kommutators *K* mit einem der numerirten Drähte verbunden. Der Ausschlag im Galvanometer wurde angemerkt. Darauf wurde der magnetisirende Strom in *P* geschlossen und der Anschlag im Galvanometer wieder angemerkt; nach der Öffnung des magnetisirenden Stromes wurde der Anschlag noch ein Mal gemessen u. s. w., so dass für jede Nummer mehrere Anschläge erhalten wurden. Dann wurde die folgende Nummer untersucht etc.

Der Haupteisendraht und die dünnen Eisendrähte gaben unter sich immer Thermoströme, selbst wenn durch die Spule kein Strom floss, wahrscheinlich wegen des remanenten Magnetismus und den verschiedenen Eisensorten.

Wie die Controlversuche zeigten, übte die Magnetisirungsspule S und der zu magnetisirende Eisendraht keinen störenden Einfluss auf den Galvanometer g aus.

Die erhaltenen Resultate sind in folgenden Tabellen angeführt.

Tabelle I.

Die Ablenkung in der Boussole ist 50°.

Nr. des Drahtes	Die Lage im Galvanometer vor der Magnetisirung	Die Lage im Galvanometer während der Magnetisirung	Der mittlere Ausschlag
1	170 171	154 154	16·5
2	200 200	183 183	17·0
3	173 173	154 155	18·5
4	132 131	118 118	14·0
5	153 153	139 139	14·0
7	156 157	142 142	14·5
8	162 163	150 150	12·5
9	155 156	142 142	13·5
10	123 123	111 111	12·0
11	173 173	160 160	13·0

Nach einigen Tagen wurden die Versuche noch einmal wiederholt, wobei sich in der thermoelektrischen Kette ein Ergänzungswiderstand von 0·2 Ohm befand.

Tabelle II.

Die Ablenkung in der Boussole ist 45°.

Nr. des Drahtes	Die Lage im Galvanometer vor der Magnetisirung	Die Lage im Galvanometer während der Magnetisirung	Der mittlere Ausschlag
2	193 193 194	182 182 183	11·0
1	160 160 160	150 150 149	10·3
3	158 159 158	146 146 147	12·0
4	128 129 129 130	119 119 120 120	9·5
11	187 188	178 179	9·0
10	110 110	101 101	9·0
9	157 158 158 157	149 149 149 149	8·5
8	168·5 169·0	159 159	9·7
5	155 155 155	145 145 146	9·7

Schon aus diesen Tabellen ist ersichtlich, dass der thermoelektrische Strom, der von verschiedenen Stellen des magnetisirten Drahtes erhalten wird, nicht der gleiche — und folglich die magnetische Verlängerung im Drahte nicht gleichmässig vertheilt ist. Diese Werthe könnten indessen in Folge verschiedener Widerstände einzelner Nummern erhalten werden. Es wurden desshalb die genannten Widerstände mittelst der Brücke von Edelmann gemessen und sind zusammen mit dem Widerstand des Rosenthal'schen Galvanometers (1·46 Ohm) in folgender Tabelle angeführt.

Nr. des Drahtes	Der totale Widerstand zusammen mit dem Galvanometer	Nr. des Drahtes	Der totale Widerstand zusammen mit dem Galvanometer
1	2·82 Ohm	7	2·85 Ohm
2	2·60 »	8	2·82 »
3	2·75 »	9	2·93 »
4	2·97 »	10	3·18 »
5	2 90 »	11	2·78 »

Es ist leicht zu berechnen, welche Ausschläge im Galvanometer erhalten werden würden, wenn der Widerstand aller thermoelektrischen Paare derselbe (3 Ohm) wäre.

Für die Tabelle I erhalten wir die Ausschläge nach der Formel

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{3}{w_1},$$

wo n_1 und n_2 die Ausschläge im Galvanometer beim Widerstand w_1, respective 3 Ohm bedeuten:

Nr.	1	2	3	4	5	7	8	9	10	11
n_2	15·5	14·7	16·9	13·8	13·5	13·4	11·7	13·2	12·7	12·0

Auf gleiche Weise erhält man sie für die Tabelle II, wenn der Ergänzungswiderstand von 0·2 Ohm in Betracht gezogen und der totale Widerstand = 3 Ohm gesetzt wird:

Nr.	1	2	3	4	5	8	9	10	11
n'_2	10·4	10·3	11·8	10·0	10·0	9·7	8·9	10·1	9·0

Beide Tabellen ergeben den stärksten Thermostrom für Nr. 3. Die Controlversuche mit einem Thermoelement Fe/Cu zeigten, dass der Thermostrom bei allen Versuchen in gleicher Richtung floss, und zwar vom nichtmagnetisirten Eisen zum magnetisirten durch die erwärmte Löthstelle.

Gestützt auf diese Versuche habe ich mehr detaillirte Untersuchung dieser Erscheinung vorgenommen. Die zu diesem Zwecke benützte Magnetisirungsspule und die Anordnung der Apparate ist aus folgendem Schema ersichtlich (Fig. 2):

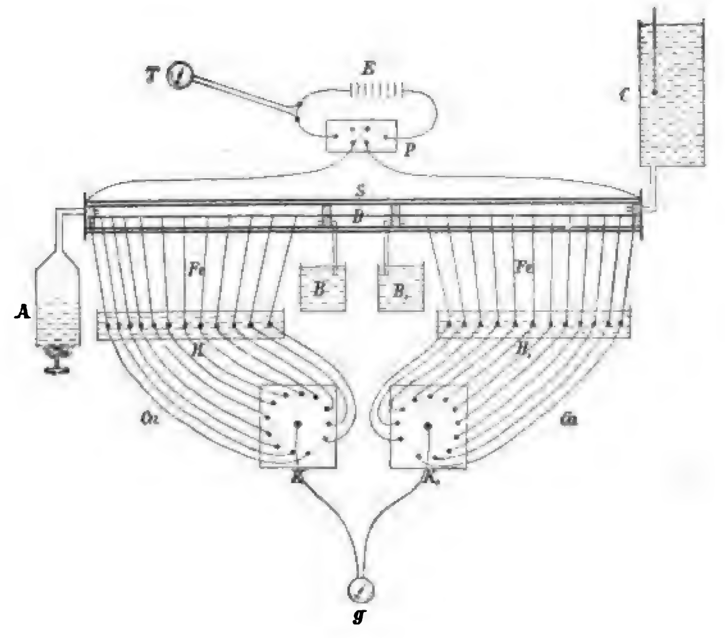


Fig. 2.

Die Spirale S war $3\,m$ lang und das Glasrohr $11\,mm$ äusseren Durchmesser, auf welche isolirter Kupferdraht ($U = 0\cdot3\,mm$) gewickelt war (eine Lage). Der Widerstand der Spirale war $8\cdot73$ Ohm und wurde dieselbe in drei Abtheilungen getheilt. In eine Abtheilung trat der Wasserdampf aus dem Gefässe A und ging nachher in das mit kaltem Wasser gefüllte Gefäss B; durch die zweite Abtheilung floss das Wasser bei Zimmertemperatur aus dem Gefäss C, um nachher ins Gefäss B_1 zu gelangen, während die mittlere Abtheilung nur Luft enthielt.

Die Controlversuche ergaben, dass der Wasserdampf beim Eintritte in das Gefäss B_1 die Temperatur von nahe 98° besass Das Wasser in C hatte Temperatur 14°.

Die übrige Anordnung war die gleiche wie früher.

An den Eisendraht D ($l = 3000$ *mm*, $U = 2 \cdot 76$ *mm*) wurden dünne Eisendrähte, und zwar in folgenden Abständen (δ) von dessen Ende, angelöthet:

Nr. des Drahtes	δ in *cm*	Nr. des Drahtes	δ in *cm*
13........	0	6........	40
12........	5	5........	50
11........	10	4........	60
10........	15	3........	80
9........	20	2........	100
8........	25	1........	120
7........	30		

Diese Drähte wurden symmetrisch an den beiden Hälften des dicken Drahtes D angelöthet. Die thermoelektrischen Ketten wurden mittelst der Kommutatoren K und K_1 geschlossen, wobei der mittlere Contact in K mit derselben Nummer geschlossen wurde, wie in K_1.

Die Versuche mit dieser Spule ergaben:

Tabelle III.

$t_1 = 98$, $t_0 = 14$. Die Ablenkung in der Boussole ist 45°.

Nr. des Drahtes	Die Lage im Galvanometer vor der Magnetisirung	Die Lage im Galvanometer während der Magnetisirung	Der mittlere Ausschlag
13	265 266	283 283	17·5
1	278 278	284 284	6·0
12	263 262 262 261	279 279 278 278	16·5

Nr. des Drahtes	Die Lage im Galvanometter vor der Magnetisirung	Die Lage im Galvanometer während der Magnetisirung	Der mittlere Ausschlag
11	266 267 268 268	283 283 286 286	17·0
10	275 275	297 297	22·0
9	240 241	265 265	24·5
8	277 277	298 298	21·0
7	303 303	319·5 319 5	16·5
6	310 310	327 327	17·0
5	283 282	298 298	15·5
4	298 299	312 312	13·5
3	289 289	300 300	11·0
2	278 278	285 285	7·0
13	276 275	293 293	17·5

Der Widerstand des Galvanometers g sammt den Leitungen von demselben bis zu den Kommutatoren K und K_1 war 1·46 Ohm, und der Widerstand (W) einzelner thermoelektrischer Ketten ist aus der nachstehenden Tabelle ersichtlich, wo auch die auf den Widerstand = 3 Ohm reducirten Ausschläge im Galvanometer g (in Folge der bei der Magnetisirung des Eisendrahtes entstehenden Thermoströme) angeführt erscheinen:

Tabelle IV.

Nr. des Drahtes	W in Ohm	W zusammen mit dem Galvanometer	Der Ausschlag nicht reducirt	Der Ausschlag reducirt auf 3 Ohm
13	1·62	3·08	17·5	18·0
12	1·61	3·07	16·5	16·9
11	1·51	2·97	17·0	16·8
10	1·32	2·78	22·0	20·4
9	1·24	2·70	24·5	22·0
8	1·18	2·64	21·0	18·5
7	1·33	2·79	16·5	15·3
6	1·38	2·84	17·0	16·1
5	1·68	3·14	15·5	16·2
4	1·49	2·95	13·5	13·3
3	1·31	2·77	11·0	10·1
2	1·45	2·91	7·0	6·8
1	1·87	3·33	6·0	6·6

Stellt man die Werthe der letzten Reihe dieser Tabelle graphisch dar, wobei dieselben die Ordinaten und die Entfernungen der untersuchten Punkte vom Ende des Drahtes die Abscissen bedeuten, so erhält man die Figur 3.

Diese Figur zeigt uns, dass diejenige Stelle des Drahtes, welche mit 9 bezeichnet und vom Ende des Eisendrahtes um 20 *cm* entfernt ist, die grösste Änderung seiner thermoelektromotorischen Kraft in Folge der Magnetisirung erleidet.

Nach den Untersuchungen von Schneebeli[1] ist die Entfernung zwischen beiden Polen eines magnetisirten Eisendrahtes gleich 85% der ganzen Drahtlänge, d. h. für unseren Draht 3 *m* in der Länge wäre diese Entfernung gleich 255 *cm* und wären daher folglich die Pole vom Ende des Drahtes um 22·5 *cm* entfernt. Es folgt daraus, dass ein magnetisirter Eisendraht die stärkste thermoelektromotorische

[1] Schneebeli, Pogg. Ann. 6, S. 159.

Kraft an seinen Polen und die schwächste in der Mitte besitzt. Die Versuche mit dickerem und kürzerem Eisendrahte (Tabelle I und II) führen ebenfalls zu dem gleichen Resultate.

Was die absolute Grösse des thermoelektrischen Stromes, welcher zwischen dem magnetisirten und dem nicht magneti-

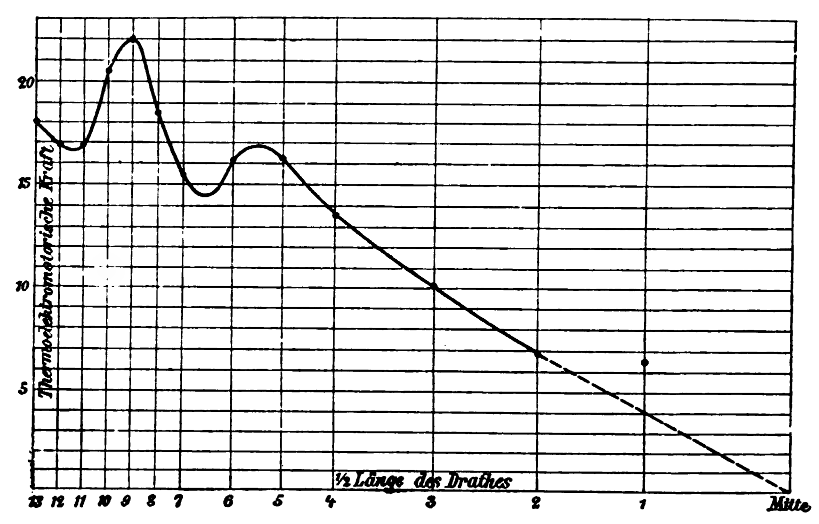


Fig. 4.

sirten Eisen entsteht, betrifft, so ergaben die Messungen folgende Werthe:

Das Rosenthal'sche Galvanometer bei totalem Widerstande des Stromkreises (in meinem Falle = 3 Ohm) gibt für 1 Scalentheil 0·000000235 Volt.

Da der stärkste Strom bei Nr. 9 war, und zwar betrug er 22 Scalentheile, so würde dieser Anschlag einer thermoelektromotorischen Kraft von 0·00000517 Volt entsprechen.

Strouhal und Barus[1] fanden die thermoelektromotorische Kraft zwischen magnetisirtem und nicht magnetisirtem Eisen

$$e = a(t-t_1)+b(t^2-t_1^2),$$

wobei $a = 0{\cdot}037.10^{-5}$; $b = 0{\cdot}015.10^{-7}$ ist.

---

[1] Strouhal und Barus, Wied. Ann. 14, S. 54, 1881.

Indem wir die Temperatur des Wasserdampfes während meiner Untersuchung im Mittel zu 98° gleichsetzen, erhalten wir in der Formel von Strouhal und Barus die Grösse

$$e = 0\cdot 0000508 \text{ Volt;}$$

meine Grösse unter denselben Umständen war

$$e_1 = 0\cdot 00000517 \text{ Volt,}$$

d. h. ungefähr 10 Mal kleiner, was wahrscheinlich dem Umstande zuzuschreiben ist, dass die obgenannten Beobachter zum Magnetisiren eine Dynamomaschine gebrauchten und ausserdem einen Draht von nur 0·8 *mm* Durchmesser hatten (bei mir $U = 2\cdot 76$ *mm*), welcher bis zur Sättigung magnetisirt wurde. Es ist ja bekannt, dass die Stärke des thermoelektrischen Stromes für das Paar Fe/Fe_m nahe proportional dem Quadrate des verschwindenden (respective zum Vorschein kommenden) Magnetismus ist.[1]

Schluss.

Die gegenwärtige Untersuchung ergibt uns die Vertheilung der thermoelektromotorischen Kraft im magnetischen Eisendrahte seiner Länge nach.

Um die Frage über die Vertheilung der magnetischen Verlängerung in dem Eisendrahte zu lösen, wollen wir die Resultate, welche nach der zweiten Methode erhalten wurden, d. h. wo die thermoelektrischen Ströme in nach beiden Seiten des Drahtes symmetrisch gelegenen Punkten entstanden sind, in Betracht ziehen. In diesem Falle haben wir es mit einer vereinfachten Erscheinung zu thun, wie es Fig. 4 veranschaulicht.

In der That, wenn alle Punkte a_1, a_2, a_3 etc., welche nach einer Seite von der Mitte des Drahtes liegen, bis $t_1°$ erwärmt sind, während alle Punkte b_1, b_2, b_3 etc., welche nach der anderen Seite des Drahtes liegen, bis $t_0°$ erwärmt sind, so erhalten wir, indem z. B. der Punkt a_1 mit b_1 mittelst eines nicht magnetisirten Eisendrahtes verbunden werden würde,

---

[1] P. Bachmetjew, Journ. russ. phys.-chem. Gesellsch., XXIII, S. 301, 1891.

einen thermoelektrischen Strom j_1, und zwar darum, weil der magnetisch gewordene Draht an den Stellen a_1 und b_1 eine und dieselbe bestimmte Verlängerung erlitten hat; dabei können die Verlängerungen, welche gleichzeitig auch in den anderen Stellen des Drahtes erhalten werden, keinen Einfluss auf die Grösse j_1 haben, wie dies auch aus den Gesetzen der Thermoelektricität hervorgeht.

Auf diese Art drücken die thermoelektrischen Ströme[1] j_1, j_2, j_3 etc. die magnetische Verlängerung an den Stellen a_1, a_2, a_3 etc. (respective b_1, b_2, b_3 etc.) aus.

Es ist leicht zu zeigen, dass die dabei erhaltenen thermoelektrischen Ströme direct proportional der magnetischen Ver-

Fig. 4.

längerung in den beibehaltenen Stellen des Drahtes sein werden, und zwar:

Gestützt auf die letzten Untersuchungen von Nagaoka[2] geht hervor, dass die Längenveränderung (l) fast in linearer Beziehung mit dem Quadrate der Magnetisirung (M) steht, d. h.

$$l = KM^2.$$

Ich habe die Existenz der Formel

$$E = K^1 M^2$$

gezeigt,[3] und daraus folgt, dass

$$E = K_1 l,$$

wo E die thermoelektromotorische Kraft des Paares Fe/Fe_m und K_1 eine Constante bedeuten. Hier muss ich bemerken, dass diese Formel nur zwischen gewissen Grenzen richtig ist, da die Formel von Nagaoka und die meinige bloss für die mittleren Magnetisirungen strenge genommen giltig sind.

---

[1] Bei gleichen Widerständen der Stromkreise.

[2] H. Nagaoka, Wied. Ann., 53, S. 487, 1894.

[3] P. Bachmetjew, Wied. Ann., 43. S. 723, 1891.

Jedenfalls geht aber aus den gegenwärtigen Untersuchungen hervor, dass die thermoelektromotorische Kraft (E), welche an verschiedenen Punkten eines Eisendrahtes (bei dessen Magnetisirung) erhalten wird, direct proportional der magnetischen Verlängerung an derselben Stelle ist und folglich stellt die Curve der Fig. 3 die Vertheilung der magnetischen Verlängerung im Eisendrahte dar.

Gestützt auf die ermittelte Vertheilung der magnetischen Verlängerung kann man leicht auch die Vertheilung der Magnetisirungswärme in einem Eisendrahte erklären. In der That, an denjenigen Stellen des Drahtes, wo die magnetische Verlängerung die grösste ist (an Polen), ist auch die äussere Arbeit grösser und folglich muss die Wärme an dieser Stelle die kleinste sein und umgekehrt. Die gefundenen Thatsachen stimmen mit dieser Erklärung überein.

Beobachtungen über gleichzeitige Magnetisirung in circularer und axialer Richtung

von

Ignaz Klemenčič.

Aus dem physikalischen Institute der k. k. Universität in Graz.

(Mit 2 Tafeln.)

Die vorliegende Arbeit enthält einige Beobachtungen über den Einfluss, welchen eine circulare Magnetisirung auf die Magnetisirbarkeit in axialer[1] Richtung ausübt. Die circulare Magnetisirung wird bekanntlich in der Weise bewirkt, dass man durch den Versuchsdraht einen Strom schickt. Die Art des Einflusses kann in doppelter Hinsicht untersucht werden. Erstens kann man die Änderungen ins Auge fassen, welche das axiale Moment beim Entstehen oder Verschwinden des circularen Feldes erfährt. Solche Versuche sind von G. Wiedemann, Villari, Janet u. A. gemacht worden. Dann aber kann man auch fragen, wie sich die Magnetisirung eines Drahtes in axialer Richtung verhält, wenn er dauernd von einem Strom durchflossen wird. Die hier beschriebenen Beobachtungen beziehen sich nur auf diese zweite Art des Einflusses. Auch in dieser Richtung liegen schon ältere Arbeiten vor. G. Wiedemann[2] hat im Jahre 1862 gefunden, dass die Stärke der temporären Magnetisirung eines Drahtes abnimmt, wenn man durch denselben einen stationären Strom schickt. Seine

---

[1] Die Magnetisirung in der Richtung der Axe wird häufig auch longitudinal genannt.

[2] Pogg. Ann., 117, S. 213, 1862 und »Lehre von der Elektricität«, Bd. 3, S. 456.

Angaben über die Intensität der Ströme sind nur relativ, doch lässt die Grösse des Effectes auf verhältnissmässig schwache Ströme schliessen.

Durch einige wenige Versuche von W. Siemens[1] werden Wiedemann's Beobachtungen bestätigt. Auch hier fehlen absolute Angaben, insbesondere genügen die Daten nicht, um daran die aus der Hypothese der Molecularmagnete folgende Überlegung Siemens' zu prüfen, wonach für den Fall der Sättigung bei zwei zu einander senkrechten Magnetisirungen und gleichen Feldstärken nach jeder Richtung die Componente $\sqrt{1/2}$ entfällt, wenn man das Maximum der Magnetisirung für eine Richtung $= 1$ setzt.

Ausführliche und wichtige Messungen über die vorliegende Frage sind in neuerer Zeit von G. G. Gerosa und G. Finzi[2] angestellt worden. Sie untersuchten den Einfluss stationärer, unterbrochener und alternirender Ströme auf die Magnetisirbarkeit und Hysteresis von Eisen-, Stahl- und Nickeldrähten (Radius 0·4 und 0·25 *mm*). Ähnliche Versuche machte auch C. G. Knott;[3] allein die von ihm gefundenen Resultate wurden durch Torsionen der magnetisirten Drähte sehr stark gestört, worauf er selbst in einer späteren Abhandlung[4] hinwies. Ganz derselbe Umstand hat jedenfalls auch einen Theil der Beobachtungen von Gerosa und Finzi beeinträchtigt. Im Allgemeinen aber ergaben die Versuche dieser Physiker einen Einfluss der stationären Ströme sowohl auf die Magnetisirbarkeit in axialer Richtung, wie das schon von Wiedemann und Siemens constatirt wurde, als auch auf die Hysteresis. Die vorliegenden Versuche sind an einem Eisen- und einem Stahldraht von 4 *mm* Dicke gemacht worden, und es wurde die Wirkung der circularen Magnetisirung auf die axiale von verschiedenen Gesichtspunkten betrachtet. Erstens sind Beobachtungen über die Grösse des Einflusses bei verschiedenen Stärken des circular magnetisirenden Stromes angestellt worden. Hiebei kamen Ströme bis zu 23 Ampère in Anwendung. Das

[1] Wied. Ann., 14, S. 635, 1881.
[2] Rendiconti del R. Istituto Lombardo, 1891, S. 677.
[3] Phil. Mag., 30, S. 244, 1890.
[4] Wied. Beibl., 1892.

Vorhandensein des circular magnetisirenden Stromes erzeugt und wirkt wie eine Spannung im Drahte; dieser Effect ist nun ferner mit der Wirkung einer Spannung, wie sie durch Erhitzen und rasches Abkühlen hervorgebracht wird, verglichen worden. Schliesslich wurden auch Messungen über die Veränderungen der Hysteresisschleifen gemacht.

Die Anordnung der Versuche.

Die Beobachtungen wurden gemacht erstens an einem 50 *cm* langen und 4 *mm* dicken ausgeglühten Draht aus Frischeisen und zweitens an einem 52 *cm* langen, 4·17 *mm* dicken Draht aus Federstahl. Der erste Draht soll kurzweg als weicher Eisendıaht und der zweite als Stahldraht bezeichnet werden. Zu den Messungen wurde sowohl die magnetometrische als auch die ballistische Methode benützt. Als Magnetisirungsspule diente eine Rolle von 68·5 *cm* Länge, 2 *cm* innerem Durchmesser und 15 Windungen pro Längeneinheit; dieselbe war ost-westlich aufgestellt. In der Verlängerung der Spulenaxe, 105 *cm* von der Spulenmitte entfernt, stand die Magnetometernadel, ein Glockenmagnet mit Kupferdämpfung. Über die Magnetisirungsrolle, und zwar knapp um die Mitte derselben waren mehrere Secundärspulen zu 12, 22 und 745 Windungen gewickelt. Der Versuchsdraht wurde conaxial mit der Rolle so angebracht, dass seine Mitte mit jener der Rolle zusammenfiel. An die Enden desselben waren gleich dicke Messingdrähte befestigt, welche über die Spule hinausragten; durch diese wurde der circular magnetisirende Strom zugeleitet, und zwar wurden die Leitungsdrähte der hiefür bestimmten Batterie an der vom Magnetometer abgewendeten Seite angelegt und der Strom durch den Versuchsdraht hin und dann durch einen ihm parallelen, an der Aussenseite der Magnetisirungsrolle angebrachten Kupferdraht zurückgeführt.

Zur Bestimmung der Magnetisirungsintensität in absolutem Masse diente eine von den Secundärspulen, welche mit einem ballistischen Galvanometer (Schwingungsdauer der Galvanometernadel = 10 Secunden) und mit einem für die Aichung bestimmten Magnetinductor in eine Leitung geschaltet war. Bei den Messungen wurden nun einige über das ganze Bereich

der Magnetisirungscurven vertheilte Beobachtungen gleichzeitig mit dem Magnetometer und mit dem ballistischen Galvanometer gemacht und die übrigen Magnetometerangaben durch graphische Interpolation auf absolutes Mass zurückgeführt.

Obwohl die Magnetisirbarkeit des Eisens und Stahles erst bei sehr hohen Temperatursteigerungen eine ausgiebige Veränderung erfährt, habe ich doch, um jede Störung durch die Erwärmung, wie sie ja beim Hindurchleiten von Strömen bis zu 23 Ampère auftreten musste, zu vermeiden, eine Kühlung des Drahtes durch Wasser eingerichtet. Die Magnetisirungsrolle war an den Enden durch Korke verschlossen, welche Durchbohrungen für die Zuleitungsdrähte des Stromes und für den Ein- und Abfluss des Wassers hatten.[1]

Die Stärke des axial magnetisirenden Stromes wurde an einer für die indirecte Strommessung hergerichteten Boussole, jene des circularmagnetisirenden aber an einem Federgalvanometer von Kohlrausch gemessen.

Ein Theil der Versuche bestand darin, dass die sogenannte aufsteigende Commutirungscurve bei verschiedenen Stärken des circular magnetisirenden Stromes aufgenommen wurde.

Um nun unter denselben Umständen immer wieder die gleichen Werthe der Magnetisirungsintensität zu erhalten, habe ich folgenden Weg eingeschlagen. Vor Beginn der Messungen wurde der Draht bei der höchsten Feldstärke und beim höchsten circular magnetisirenden Strome sehr oft (circa hundertmal) ummagnetisirt, und zwar sowohl in axialer, als auch circularer Richtung. Sodann wurde er vor Aufnahme der Magnetisirungscurven jedesmal durch Stromwechsel und allmälige Stromschwächung soweit als möglich entmagnetisirt, was gewöhnlich bis auf kleine Spuren des remanenten Magnetismus gelang.[2] Schliesslich wurde der Draht bei jeder Feldstärke

[1] Gerosa und Finzi haben nur in einem Falle (Strom 3 Ampère, Drahtdicke 0·5 *mm*) eine Petroleumkühlung angewendet. Eine Erwärmung des Drahtes kann vielleicht auch eine etwa vorhandene Torsion und auf diese Weise indirect die Magnetisirung beeinflussen.

[2] An den Hysteresisschleifen macht sich ein zu Beginn der Beobachtungen vorhandener remanenter Magnetismus sofort bemerkbar.

vor der Ablesung ebenfalls noch einigemal ummagnetisirt. Dadurch gelang es eine grosse Regelmässigkeit zu erzielen.

Bei Beobachtungen an weichem Eisen nach der ballistischen Methode kann das sogenannte »Kriechen« Fehler in den Messungen verursachen. Es ist dies eine Erscheinung, welche von Lord Rayleigh und Ewing[1] studirt wurde und die darin besteht, dass der Draht erst einige Zeit nach dem Auftreten der Feldstärke die entsprechende Magnetisirungsintensität voll annimmt. An dem hier verwendeten Eisendrahte konnte diese Erscheinung am Magnetometer deutlich constatirt werden; sie äusserte sich in der Weise, dass die Magnetometernadel, welche sonst nach 6 Secunden zu voller Ruhe gelangte, bei einer Ummagnetisirung des Eisendrahtes nach dieser Zeit immer noch ein wenig weiter kroch, allerdings nur um Beträge, die ein bis zwei Procent oder noch weniger der gesammten Ablenkung erreichten. Die Schwingungsdauer des ballistischen Galvanometers betrug, wie schon erwähnt, 10 Secunden; da werden in Folge dessen die Messungen etwas zu kleiner Werthe der Intensität ergeben haben. In unserem Falle handelt es sich aber hauptsächlich um relative Werthe, und da kommt die ebengenannte Fehlerquelle kaum in Betracht.

Die Beobachtungsresultate.

Im Nachfolgenden bedeutet:

J die Magnetisirungsintensität,

k die Susceptibilität,

H_s das Spulenfeld; also $H_s = 4\pi n i$, wo n die Anzahl der Windungen der Magnetisirungsrolle pro Längeneinheit und i die Stromstärke in absoluten Einheiten ist.

H das wirksame Feld; es ist $H = H_s - NJ$; der Factor N wurde in diesem Falle nach den Angaben von Du Bois[2] berechnet.

j die Stärke des circular magnetisirenden Stromes in Ampère, und

---

[1] Vide Ewing, Magnetische Induction in Eisen und verwandten Metallen, S. 120.

[2] Du Bois, Magnetische Kreise, deren Theorie und Anwendung, S. 45.

H_c die mittlere durch diesen Strom erzeugte circulare Feldstärke.

1. Weicher Eisendraht.

Es wurden mit diesem Draht aufsteigende Commutirungscurven aufgenommen, zunächst für $j = 0$, dann bei vier verschiedenen Werthen von j und schliesslich wieder für $j = 0$. Die Resultate sind in Tabelle I enthalten und in den Curven der Fig. 1 graphisch dargestellt. Die Beobachtungen gehen hier bis zu Feldstärken von einer Einheit. Zur Bestimmung der Magnetisirungsintensität in noch schwächeren Feldern wurde nur die ballistische Methode verwendet; zu diesem Zwecke diente die Secundärspule mit 747 Windungen. Es schien genügend, die Beobachtungen auf die beiden Fälle $j = 0$ und $j = 23$ auszudehnen. Die gewonnenen Daten sind in Tabelle II und in Fig. 2 verzeichnet.

Ferner ist mit diesem Draht ein Magnetisirungscyclus für $j = 0$ und $j = 23$ zwischen den Grenzen $H_s = \pm 45 \cdot 63$ vorgenommen worden. Die hiezu gehörigen Daten und Hysteresisschleifen sind in Fig. 3 verzeichnet. Dabei bezieht sich die dickere Curve auf den Fall $j = 0$, die feinere gilt für $j = 23$.

Nach diesen Versuchen wurde der Draht zur Rothgluth erhitzt und hierauf rasch ins Wasser getaucht. Eine abermalige Bestimmung der Magnetisirungscurve ergab dann die Daten der Tabelle III, welche in der Fig. 1 durch die gestrichelte Curve dargestellt sind; ebenso ist durch die gestrichelte Hysteresisschleife ein Magnetisirungscyclus zwischen den früher erwähnten Grenzen verzeichnet, welcher jetzt mit dem Draht aufgenommen wurde.

Tabelle I.

Weicher Eisendraht, 50 *cm* lang, 0·4 *cm* dick.

H_s	$j=0$			$j=4$		$j=10·5$		$j=15·7$		$j=23$		$j=0$	
	H	J	k	H	J	H	J	H	J	H	J	H	J
1·00	0·90	35	39	0·91	30	0·93	26	0·94	24	0·94	22	0·90	35
1·73	1·44	99	69	1·51	78	1·54	65	1·57	57	1·58	52	1·44	98
2·22	1·72	172	100	1·86	125	1·92	104	1·98	85	2·00	78	1·72	169
3·07	2·11	334	159	2·39	238	2·54	185	2·62	158	2·68	136	2·11	333
4·95	2·99	679	227	3·48	510	3·79	405	4·01	325	4·11	289	2·99	676
7·71	4·71	1041	221	5·26	852	5·80	665	6·07	571	6·27	499	4·71	1036
10·85	7·51	1163	155	7·74	1082	8·20	922	8·57	789	8·91	675	7·51	1157
20·08	16·45	1264	77	16·31	1243	16·62	1200	16·80	1141	17·01	1066	16·45	1265
32·38	28·58	1317	46	28·61	1307	28·68	1285	28·75	1261	28·86	1224	28 58	1315
45·63	41·74	1349	31	41·76	1343	41·80	1333	41·83	1317	41·92	1292	41·74	1347

Tabelle II.

H_S	$j = 0$			$j = 23$	
	H	J	k	H	J
0·014	0·0135	0·167	12·4	0·0136	0·143
0·031	0·030	0·37	12·4	0·030	0·343
0·062	0·060	0·80	13·3	0·060	0·68
0·122	0·117	1·77	15·1	0·118	1·46
0·240	0·228	4·13	18·1	0·231	3·09
0·380	0·357	8·00	22·4	0·363	5·95
0·567	0·528	13·50	25·6	0·541	8·97

Tabelle III.

H_S	H	J	H_S	H	J
1·00	0·89	40	7·71	5·65	715
1·73	1·44	100	10·85	8·38	858
2·22	1·73	170	20·08	16·88	1110
3·07	2·23	291	32·38	28·71	1274
4·95	3·45	520	45·63	41·74	1344

2. Stahldraht.

Auch bei diesem Probestück wurden zunächst die Magnetisirungscurven wie im vorhergehenden Falle für verschiedene Werthe von j bestimmt, worüber die Daten der Tabelle IV und die Curven der Fig. 4 Aufschluss geben. In diesem Falle war es nicht nothwendig, den Einfluss der circularen Magnetisirung bis in die schwächsten Felder zu verfolgen, da aus den Werthen der Tabelle IV hervorgeht, dass schon bei den schwächsten dort angeführten Feldern ein solcher kaum mehr zu constatiren ist. Eher weisen die Zahlen dieser Tabelle dahin, dass die Magnetisirungsintensität bei gewissen Werthen von j (z. B. $j = 15$) zuerst etwas über die normale steigt, um dann erst

abzunehmen. Es war daher angezeigt, noch einen Versuch mit dieser Drahtsorte, bei verschiedenen zwischen den Grenzen 0·6 und 10 liegenden Feldern für $j = 0$ und $j = 15$ anzustellen. Die neue Probe war ebenso lang wie die frühere. Diesmal wurde die Secundärspule mit 747 Windungen benützt. Die Tabelle V enthält die Resultate, und zwar sind blos die Ausschläge des ballistischen Galvanometers α angeführt. Die Werthe für $j = 0$ sind das Mittel aus zwei Bestimmungen.

Tabelle IV.

H_s	$j = 0$			$j = 4$		$j = 10$		$j = 15$		$j = 22$	
	H	J	k	H	J	H	J	H	J	H	J
1·91	1·88	11·5	6·1	1·88	12	1·88	12	1·88	12	1·88	12
3·70	3·64	22·3	6·1	3·64	22	3·64	22	3·64	24	3·64	23
6·07	5·96	41	6·9	5·96	43	5·96	44	5·96	45	5·96	44
8·05	7·88	62	7·8	7·88	62	7·88	64	7·88	66	7·88	65
11·53	11·20	118	10·5	11·20	120	11·20	120	11·20	119	11·22	110
14·29	13·72	199	14·5	13·72	202	13·72	197	13·74	193	13·76	186
18·47	17·08	493	28·8	17·14	474	17·23	442	17·30	414	17·40	380
28·24	25·38	1034	40·7	25·41	986	25·62	923	25·75	874	25·92	811
37·55	34·00	1244	36·6	34·07	1212	34·22	1166	34·35	1123	34·52	1056
46·23	42·46	1312	30·9	42·49	1300	42·55	1280	42·63	1254	42·76	1209

Tabelle V.

H_s	$j = 0$ α	$j = 15$ α	H_s	$j = 0$ α	$j = 15$ α
0·66	15·3	15·5	3·30	83·8	82·2
1·17	27·7	27·8	5·52	152·8	150·1
1·74	41·9	41·6	7·10	211·4	208·1
2·21	53·9	53·6	9·6	325·5	327·5

Ebenso wie mit dem weichen Eisendraht sind auch mit diesem Magnetisirungen im Cyclus für $j = 0$ und $j = 22$

zwischen den Grenzen $H_s = \pm 46 \cdot 23$ vorgenommen worden; die entsprechenden Curven sind in Fig. 5 verzeichnet.

Schliesslich wurde der Draht bis zur Rothgluth erhitzt und dann rasch ins Wasser getaucht. Die Daten für die sodann aufgenommenen Magnetisirungscurven sind in Tabelle VI verzeichnet und die entsprechenden Curven in Fig. 4 gestrichelt eingetragen. Ebenso ist die jetzt bestimmte cyclische Magnetisirungscurve und die entsprechende Hysteresisschleife in Fig. 5 gestrichelt dargestellt.

Tabelle VI.

H_s	$j = 0$			$j = 22$	
	H	J	k	H	J
1·91	1·88	9	4·8	1·88	9
3·70	3·65	17	4·7	3·65	17
6·07	5·98	31	5·1	5·98	32
8·05	7·94	42	5·3	7·94	42
11·53	11·34	70	6·2	11·34	69
14·29	14·02	97	6·9	14·02	95
18·47	18·03	154	8·6	18·06	146
28·24	27·24	355	14·6	27·37	315
37·55	36 00	550	15·3	36·19	484
46·23	44·15	714	16·2	44·47	619

Discussion der Resultate.

Aus den Daten der vorher angeführten Tabellen und den dazugehörigen Curven der Figuren 1, 2 und 3 ist ersichtlich, dass die Magnetisirbarkeit eines Drahtes in axialer Richtung abnimmt oder besser gesagt, dass das Moment in axialer Richtung schwächer ist, wenn der Draht von einem Strom durchflossen wird. Die Abnahme wächst mit der Stromstärke, jedoch in keiner einfachen Weise. Der Einfluss ist beim weichen Eisen viel grösser als beim Stahl und wird auch bei diesem verringert, wenn man den Draht härtet. Es besteht noch ein Unterschied zwischen Eisen und Stahl. Während man beim

Eisen eine Abnahme der Magnetisirbarkeit in axialer Richtung selbst in den schwächsten Feldern ($H_s = 0\cdot014$) constatiren kann, macht sich beim Stahl der gleiche circular magnetisirende Strom erst bei Feldstärken von ungefähr 10 Einheiten bemerkbar. Beim Eisen erstreckt sich der Einfluss bis in das Gebiet constanter Susceptibilität.

Wir wollen fortan jene Magnetisirungscurven, welche ohne circular magnetisirenden Strom ($j = 0$) aufgenommen wurden, als Normalcurven bezeichnen. Es empfiehlt sich statt der Stärke des circular magnetisirenden Stromes, die in circularer Richtung wirksame Feldstärke einzuführen. Ein Strom, welcher einen Draht durchfliesst, übt auf jeden Punkt in der Entfernung a von der Axe die magnetisirende Kraft $2\pi a u$ aus, wo u die Stromdichtigkeit bedeutet. Diese Feldstärke ist daher in der Axe gleich Null und an der Oberfläche des Drahtes $= \frac{2j}{r}$, wo wir mit r den Radius bezeichnen. Da die circulare Feldstärke also in verschiedenen Punkten von der Axe verschieden gross ist, so ist es am besten, die mittlere Feldstärke einzuführen. Diese bekommt man, wenn man die magnetisirenden Kräfte über die ganze Fläche des Drahtquerschnittes summirt und durch den Querschnitt dividirt. Den so berechneten Mittelwerth wollen wir mit H_c bezeichnen. Es ist

$$H_c = 0\cdot666 \frac{2j}{r}.$$

Der Einfluss der circularen Magnetisirung auf die axiale, äussert sich nicht in allen Theilen des Magnetisirungsgebietes gleich stark. Dies ersieht man am besten aus folgender Zusammenstellung: Man sucht aus den Curven der Figuren 1 und 3 die Werthe der Magnetisirungsintensität, welche der Draht für verschiedene Werthe von H_c bei einer gewissen axialen Feldstärke annimmt. Diese Zusammenstellung ist in Tabelle VII für den Eisendraht und in Tabelle VIII für den Stahldraht enthalten. Einige Reihen dieser Tabellen sind auch in Fig. 6, respective Fig. 7 graphisch dargestellt. Der Werth der Magnetisirungsintensität, welcher der Normalcurve entspricht, ist gleich 100 gesetzt und die anderen sind in Theilen dieses ausgedrückt. Aus

diesen Tabellen geht hervor, dass der Einfluss einer circularen Magnetisirung bei dem hier benützten weichen Eisendraht für axiale Feldstärken von 2—3 Einheiten am grössten ist. Nahe an diesem Bereich liegt auch der Wendepunkt der Normalcurve.

Tabelle VII.

H	J				
	$H_c = 0$	$H_c = 2\cdot7$	$H_c = 7\cdot0$	$H_c = 10\cdot5$	$H_c = 15\cdot3$
1	100	80·4	65·2	56·6	52·2
1·5	100	74·3	60·0	49·5	44·8
2	100	55·4	40·7	31·4	27·8
2·5	100	54·6	37·5	30·0	24·4
3	100	56·7	39·3	29·7	24·5
4	100	74·6	52·8	39·9	34·2
6	100	86·1	64·6	52·6	44·4
10	100	94·4	82·5	71·4	60·8
20	100	98·7	95·6	91·7	86·5
40	100	99·6	98·5	97·7	95·4

Tabelle VIII.

H	J				
	$H_c = 0$	$H_c = 2\cdot7$	$H_c = 7\cdot0$	$H_c = 10\cdot5$	$H_c = 15\cdot3$
14	100	100	96·4	92·4	88·8
15	100	97·7	91·3	86·5	81·0
16	100	96	88·7	83·0	76·7
17	100	95·3	87·2	81·0	74·0
19	100	95·8	88·0	82·3	74·9
21	100	95·5	87·8	82·2	75·4
23	100	95·4	88·0	82·5	75·7
25	100	95·1	88	82·4	75·7
30	100	96·3	93·0	87·0	80·7
42	100	99	97·2	95·0	91·3

Beim Stahl fällt das Maximum des Einflusses zwischen $H = 17$ und 25 Einheiten, also auch nahe an den Wendepunkt der Normalcurve.

Für den gehärteten Stahl ist die procentische Depression der Magnetisirungsintensität durch die circulare Magnetisirung noch geringer als für den ungehärteten. Für $j = 22$ beträgt die grösste Abnahme für diesen $74^0/_0$, während sie für jenen nirgends unter $86^0/_0$ herabsinkt, wie das aus den gestrichelten Curven der Fig. 3 hervorgeht. Man kann also sagen, dass der Einfluss eines circular magnetisirenden Stromes umso kleiner ausfällt, je grösser die magnetische Härte des Materials ist. Ein Vergleich der gestrichelten Curven mit den ausgezogenen in den Figuren 1 und 3 zeigt, wie sich die beiden Effecte, Härtung[1] und circulare Magnetisirung, der Höhe nach gegeneinander verhalten. Beim weichen Eisen fällt die gestrichelte Curve ganz zwischen die ausgezogenen. Hier wird also schon durch schwache circulare Felder von 3—15 Einheiten die Magnetisirungsintensität in axialer Richtung ebenso heruntergesetzt wie durch Spannungen, welche man dem Draht durch Erhitzen und rasches Abkühlen ertheilt. Aber selbst eine ausgiebigere Härtung, wie sie der Draht etwa durch einen Zug erfährt, würde wahrscheinlich ihrem Effecte nach mit circularen Feldstärken von 30—40 Einheiten zu vergleichen sein. Anders ist es beim Stahl. Während die circularmagnetisirenden Ströme von der hier gebrauchten Stärke den ersten Theil der Normalcurve gar nicht beeinflussen, den weiteren aber mässig deprimiren, erscheint die Curve durch die Härtung in allen Theilen tief heruntergedrückt, und man müsste, um ähnliche Wirkungen durch circulare Felder hervorzubringen, vielleicht solche in einer Höhe von hundert und mehr Einheiten anwenden.

Während das circulare Feld und die Härtung die aufsteigende Commutirungscurve im selben Sinne zu verflachen

---

[1] Obwohl man beim weichen Eisendraht von einer Härtung durch Erhitzen und rasches Abkühlen nicht recht sprechen kann, so werden doch durch diese Procedur Spannungen in das Material gebracht, deren Grösse wahrscheinlich von der Oberfläche gegen die Mitte zu abnimmt.

streben, wirken sie in anderen Punkten entgegengesetzt, wie das eine Betrachtung der in Fig. 3 und 5 abgebildeten Hysteresisschleifen lehrt. Beim weichen Eisen wird durch Hindurchleitung eines constanten Stromes die Retentionsfähigkeit stark heruntergesetzt, während sie durch die Härtung kaum alterirt wird. Auch beim Stahl vermindert das circulare Feld die Retentionsfähigkeit.

Die Coërcitivintensität wird durch den circular magnetisirenden Strom beim Eisen kaum verändert, beim Stahl jedoch wahrscheinlich etwas verringert. Durch die Härtung wird sie beim Stahl bekanntlich immer sehr vergrössert.

Um über die zwei letztgenannten Eigenschaften, insbesondere auch über den während eines Magnetisirungscyclus auftretenden Energieverlust gut vergleichbare quantitative Angaben zu erhalten, müsste man die Magnetisirung in allen Fällen bis zu derselben Intensität führen, was unter Umständen die Anwendung ziemlich hoher Felder erfordern würde. Mit Rücksicht auf die zahlreichen, von Gerosa und Finzi (l. c.) in dieser Richtung angestellten Messungen, schien es mir nicht nothwendig darauf weiter einzugehen. Bezüglich des Energieverlustes ist aber auch aus den hier verzeichneten Hysteresisschleifen, die von den beiden Physikern gefundene Thatsache ersichtlich, dass der Inhalt der Hysteresisschleifen durch das circulare Feld verkleinert wird.

Aus den angeführten Beobachtungen lassen sich daher folgende Resultate ableiten:

Die Magnetisirbarkeit von Drähten in axialer Richtung wird durch circularmagnetisirende Ströme heruntergesetzt, und zwar wächst der Einfluss mit der Stärke des Stromes; er ist jedoch ungleich in verschiedenen Theilen der Magnetisirungscurve; am stärksten äussert er sich in der Nähe des Wendepunktes.

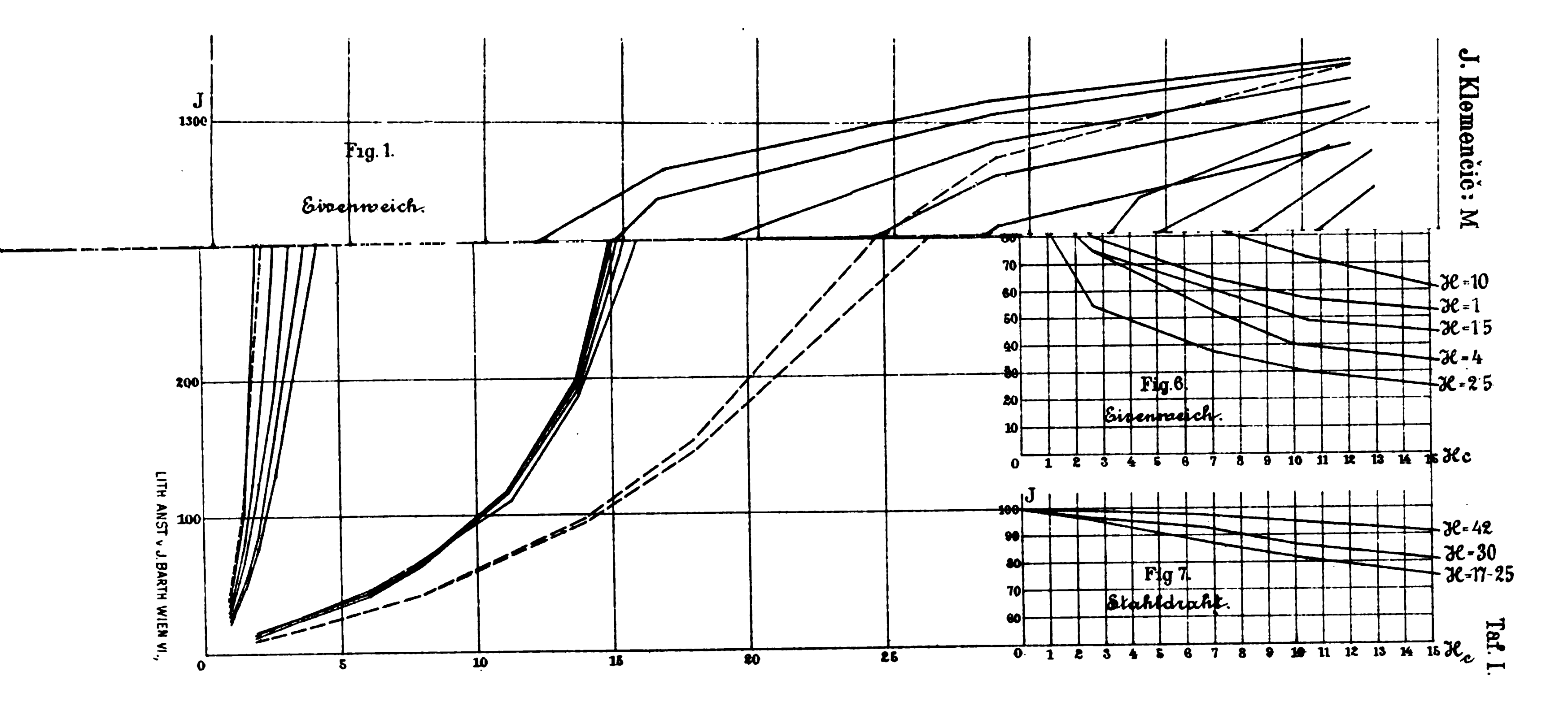
Die Abnahme der Magnetisirbarkeit lässt sich beim weichen Eisen und bei einer mittleren Stärke des circular magnetisirenden Feldes von 15 Einheiten, bis in die schwächsten axialen Felder ($H = 0{\cdot}015$) verfolgen, während dieselbe beim Stahl unter den gleichen Umständen erst bei viel höheren Feldstärken bemerkbar wird.

Die circulare Magnetisirung wirkt auf die axiale Magnetisirungscurve dem Sinne nach so wie eine Härtung des Materials; in beiden Fällen wird die Curve verflacht.

Durch die circulare Magnetisirung wird die Retentionsfähigkeit in axialer Richtung vermindert und beim Stahl scheint unter diesem Einflusse auch die Coërcitivintensität abzunehmen.

J. Klemenčič: M

Taf. I.





VI. SITZUNG VOM 21. FEBRUAR 1895.

Der Vicepräsident der Akademie Herr Prof. E. Suess führt den Vorsitz.



Der Vorsitzende gibt der tiefen Trauer Ausdruck über das am 18. Februar erfolgte Ableben des Ehrenmitgliedes der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften

Seiner kaiserlichen und königlichen Hoheit

des durchlauchtigsten Herrn

ERZHERZOGS ALBRECHT.

Die Mitglieder nehmen stehend diese Trauerkundgebung entgegen.

Der Secretär legt das erschienene Heft VIII—X (October bis December 1894), Abtheilung II. b des 103. Bandes der Sitzungsberichte vor.

Ferner legt der Secretär eine Abhandlung von Dr. Sokrates A. Papavasiliu, Privatdocenten an der Universität in Athen, unter dem Titel: »Das grosse Dislocationsbeben von Lokris vom 20. und 27. April 1894« vor.

Das w. M. Herr Regierungsrath Prof. F. Mertens überreicht eine Abhandlung: »Über die Composition der binären quadratischen Formen«.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. Ad. Lieben überreicht eine Arbeit: »Über Reduction der Kohlensäure bei gewöhnlicher Temperatur«.

Herr Prof. Dr. Ed. Lippmann überreicht eine im III. chemischen Laboratorium der k. k. Universität in Wien ausgeführte Arbeit: »Über *o*-Bromphenylnaphtylketon«, von Dr. R. J. Knoll und Paul Cohn.

Über die Composition der binären quadratischen Formen

von

F. Mertens,

w. M. k. Akad.

1.

Gauss[1] hat die Theorie der Composition der binären quadratischen Formen vornehmlich auf zwei Probleme angewendet: auf die Bestimmung des Verhältnisses der Classenanzahlen, welche für die eigentlich primitive und irgend eine andere Ordnung gelten, und auf die Bestimmung der Anzahl der Geschlechter der eigentlich primitiven Formen. Das erste Problem ist in den Disquisitiones arithmeticae für positive Determinanten nicht vollständig durchgeführt und wurde erst später von Dirichlet mittelst anderer Methoden gelöst. Das zweite Problem, dessen Hauptschwierigkeit in dem Beweise des Satzes besteht, dass jede Classe des Hauptgeschlechts durch Duplication entsteht, wird mit Hilfe der Theorie der ternären quadratischen Formen gelöst.

In dem Folgenden soll eine einfache Lösung des ersten Problems und ein Beweis des genannten Satzes mitgetheilt werden, welche, ähnlich wie bei Arndt[2], aus der Theorie der

---

[1] Gauss, Disquisitiones arithmeticae, Sectio V, art. 256, 287. — Lejeune Dirichlet, De formarum binariarum secundi gradus compositione, 1847. — Dedekind, Vorlesungen über Zahlentheorie, von P. G. Lejeune Dirichlet.

[2] Über die Anzahl der Genera der quadratischen Formen. Crelle's Journal, Bd. 56.

ternären Formen nur einen Hilfssatz von Legendre über die Gleichung

$$ax^2+by^2+cz^2=0$$

erfordert.

2.

Die Lehre von der Composition der binären quadratischen Formen lässt sich auf einen Hilfssatz[1] aus der Theorie der ganzzahligen linear-homogenen Formen gründen.

Ich werde mir hier zur Abkürzung erlauben, eine Summe von Vielfachen mehrerer Grössen als Vielfachsumme dieser Grösse zu bezeichnen und zwei Reihen von Grössen

$$A, B, \dots E$$
$$A', B', \dots E'$$

gleichstimmig zu nennen, wenn jede Grösse der ersten Reihe als Vielfachsumme der Grössen der zweiten Reihe und ebenso jede Grösse der zweiten Reihe als Vielfachsumme der Grössen der ersten Reihe darstellbar ist.

Wenn p ganzzahlige linear-homogene Formen

$$f_1, f_2, \dots f_p$$

der n Veränderlichen $x_1, x_2, \dots x_n$ durch q ähnliche Formen

$$g_1, g_2, \dots g_q$$

ganzzahlig ausdrückbar und $p \geqq n$, $q \geqq n$ sind, so sind alle Determinanten n^{ter} Ordnung, welche sich aus dem Coëfficientensystem der Formen $f_1, f_2, \dots f_p$ bilden lassen, Vielfachsummen der Determinanten n^{ter} Ordnung der Formen $g_1, g_2, \dots g_q$.

Ist nämlich

$$f_i = a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\dots+a_{in}x_n$$
$$g_i = b_{1i}x_1+b_{2i}x_2+\dots+b_{ni}x_n$$
$$f_i = c_{i1}g_1+c_{i2}g_2+\dots+c_{iq}g_q,$$

wo $c_{11}, c_{12}, \dots c_{pq}$ ganze Zahlen bezeichnen, so ergibt sich

$$a_{ik} = c_{i1}b_{k1}+c_{i2}b_{k2}+\dots+c_{iq}b_{kq}.$$

---

[1] Dedekind, Vorlesungen. §. 165.

Das Coëfficientensystem der Formen $f_1, f_2, \ldots f_p$ geht daher aus der Zusammensetzung der Systeme

$$\begin{matrix} c_{11}, c_{12}, \ldots c_{1q} \\ c_{21}, c_{22}, \ldots c_{2q} \\ \cdots\cdots\cdots \\ c_{p1}, c_{p2} \ldots c_{pq} \end{matrix} \qquad \begin{matrix} b_{11}, b_{12}, \ldots b_{1q} \\ b_{21}, b_{22}, \ldots b_{2q} \\ \cdots\cdots\cdots \\ b_{n1}, b_{n2}, \ldots b_{nq} \end{matrix}$$

hervor und jede Determinante n^{ter} Ordnung der Formen $f_1, f_2, \ldots$ ist demzufolge eine Summe von Producten einer Determinante der Zahlen $c_{11}, c_{12}, \ldots$, also einer ganzen Zahl in eine Determinante n^{ter} Ordnung der Formen $g_1, g_2, \ldots g_q$.

Wenn zwei Systeme $f_1, f_2, \ldots f_p$ und $g_1, g_2, \ldots g_q$ von ganzzahligen linear-homogenen Formen der Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_n$ gleichstimmig und $p \geqq n$, $q \geqq n$ sind, so sind die Determinanten n^{ter} Ordnung des einen Systems mit denen des anderen gleichstimmig und besitzen demzufolge denselben grössten gemeinschaftlichen Theiler, wenn sie nicht alle $= 0$ sind.

Wenn ein System S von m gegebenen ganzzahligen linear-homogenen Formen

$$f_1, f_2, \ldots f_m$$

der Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_n$ vom Range n ist, so lässt sich ein und nur ein mit S gleichstimmiges System von n ganzzahligen linear-homogenen Formen

$$\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n$$

der nämlichen Veränderlichen bestimmen, welches folgende Eigenschaften besitzt:

I. ω_k enthält nur die Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_k$ und das Vorzeichen des Coëfficienten c_{kk} von x_k in ω_k kann beliebig vorgeschrieben werden.

II. Ist $\overline{c_{kk}}$ der Zahlenwerth von c_{kk} und c_{ik} der Coëfficient von x_k in ω_i, so ist für jeden über k liegenden Stellenzeiger i

$$0 \leqq c_{ik} < \overline{c_{kk}}.$$

Zunächst lässt sich ein mit S gleichstimmiges System von n Formen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n$ der Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_n$ aufstellen, welches die Eigenschaft I besitzt.

Es sei zu diesem Ende

$$f_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n,$$

b_{nn} der mit dem für c_{nn} vorgeschriebenen Vorzeichen behaftete grösste gemeinschaftliche Theiler der Zahlen

$$a_{1n},\ a_{2n}, \dots a_{mn},$$

welche nicht alle $= 0$ sein können, und $\alpha_1,\ \alpha_2, \dots \alpha_m$ eine ganzzahlige Lösung der Gleichung

$$a_{1n}\alpha_1 + a_{2n}\alpha_2 + \dots + a_{mn}\alpha_m = b_{nn}.$$

Setzt man

$$\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \dots + \alpha_m f_m = \varphi_n,$$

so sind die Differenzen

$$f_1 - \frac{a_{1n}}{b_{nn}}\varphi_n,\ f_2 - \frac{a_{2n}}{b_{nn}}\varphi_n, \dots f_m - \frac{a_{mn}}{b_{nn}}\varphi_n$$

entweder schon alle $= 0$ oder aber ganzzahlige linear-homogene Formen der $n-1$ Veränderlichen $x_1,\ x_2, \dots x_{n-1}$, je nachdem $n = 1$ oder $n > 1$ ist.

Im ersten Falle ist das gegebene System S mit der Form φ_1 gleichstimmig.

Im zweiten Falle sei

$$f_i - \frac{a_{in}}{b_{nn}}\varphi_n = f_i' = a_{i1}'x_1 + a_{i2}'x_2 + \dots + a_{i\,n-1}'x_{n-1}.$$

Die Formen

$$f_1',\ f_2', \dots f_m'$$

bilden mit φ_n zusammen ein mit S gleichstimmiges System S_1 und sind vom Range $n-1$. Die Coëfficienten

$$a_{1\,n-1}',\ a_{2\,n-1}', \dots a_{m\,n-1}'$$

können daher nicht alle $= 0$ sein und besitzen einen bestimmten grössten gemeinschaftlichen Theiler, welcher, mit dem für $c_{n-1\,n-1}$ vorgeschriebenen Vorzeichen versehen, $= b_{n-1\,n-1}$ sei. Man kann somit auf die Formen $f_1',\ f_2', \dots f_m'$ das-

selbe Verfahren wie auf $f_1, f_2, \ldots f_m$ anwenden, indem man eine ganzzahlige Lösung $\beta_1, \beta_2, \ldots$ der Gleichung

$$a'_{1\,n-1}\beta_1 + a'_{2\,n-1}\beta_2 + \ldots + a'_{m\,n-1}\beta_m = b_{n-1\,n-1}$$

ermittelt und die Form

$$\beta_1 f'_1 + \beta_2 f'_2 + \ldots + \beta_m f'_m = \varphi_{n-1}$$

bildet.

Ist $n = 2$, so fallen die Formen

$$f'_1, f'_2, \ldots f'_m$$

mit

$$\frac{a'_{1\,n-1}}{b_{n-1\,n-1}}\varphi_{n-1}, \quad \frac{a'_{2\,n-1}}{b_{n-1\,n-1}}\varphi_{n-1}, \ldots \frac{a'_{m\,n-1}}{b_{n-1\,n-1}}\varphi_{n-1}$$

zusammen und sind mit φ_{n-1} gleichstimmig. Die Formen φ_1, φ_2 sind also mit S_1 und folglich auch mit dem gegebenen System S gleichstimmig.

Ist dagegen $n > 2$, so enthalten die Formen

$$f''_1 = f'_1 - \frac{a'_{1\,n-1}}{b_{n-1\,n-1}}\varphi_{n-1}, \quad f''_2 = f'_2 - \frac{a'_{2\,n-1}}{b_{n-1\,n-1}}\varphi_{n-1}, \ldots$$

nur die $n-2$ Veränderlichen $x_1, x_2 \ldots x_{n-2}$ und bilden mit φ_{n-1} zusammen ein mit $f'_1, f'_2, \ldots f'_m$ gleichstimmiges System. Die Formen

$$\varphi_n, \varphi_{n-1}, f''_1, f''_2, \ldots f''_m$$

bilden daher ein mit S_1 und S gleichstimmiges System S_2.

Wendet man das nämliche Verfahren auf die Formen $f''_1, f''_2, \ldots f''_m$ an und setzt dasselbe nach Bedarf fort, so gelangt man nach n Schritten zu einem mit S gleichstimmigen System von Formen

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n,$$

welche die Eigenschaft I besitzen.

In jedem mit S gleichstimmigen System

$$g_1, g_2, \ldots g_n,$$

welches die Eigenschaft I besitzt, sind die Coëfficienten, welche in $g_1, g_2, \ldots g_n$, beziehungsweise bei $x_1, x_2, \ldots x_n$ stehen, voll-

ständig bestimmt. Es seien, um dies darzuthun, $C_1, C_2, \ldots C_n$ diese Coëfficienten und

$$f_1^0, f_2^0, \ldots f_m^0, g_{\mu+1}^0, g_{\mu+2}^0, \ldots g_n^0$$

diejenigen Bestandtheile der Formen

$$f_1, f_2, \ldots f_m, g_{\mu+1}, g_{\mu+2}, \ldots g_n,$$

welche die Veränderlichen $x_{\mu+1}, x_{\mu+2}, \ldots x_n$ enthalten. Es leuchtet ein, dass die Formen $f_1^0, f_2^0, \ldots f_m^0$ mit $g_{\mu+1}^0, g_{\mu+2}^0, \ldots g_n^0$ gleichstimmig sind; denn für $\mu = 0$ ist diese Behauptung nichts als die Voraussetzung selbst und für $\mu > 0$ braucht man nur in den Gleichungen zwischen den Formen $f_1, f_2, \ldots$ und $g_1, g_2, \ldots$ die Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_\mu = 0$ zu setzen, wodurch $g_1, g_2, \ldots g_\mu$ verschwinden. Da die Formen $g_{\mu+1}^0, g_{\mu+2}^0, \ldots g_n^0$ nur die eine Determinante $n-\mu^{\text{ter}}$ Ordnung

$$C_{\mu+1} C_{\mu+2} \ldots C_n$$

besitzen, so muss dieselbe mit den Determinanten $n-\mu^{\text{ter}}$ Ordnung der Formen $f_1^0, f_2^0, \ldots f_m^0$ oder denen des Elementensystems

$$\begin{array}{cccc} a_{1\,\mu+1} & a_{2\,\mu+1} & \ldots & a_{m\,\mu+1} \\ a_{1\,\mu+2} & a_{2\,\mu+2} & \ldots & a_{m\,\mu+2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{mn} \end{array}$$

gleichstimmig sein und daher bis auf das Vorzeichen mit dem grössten gemeinschaftlichen Theiler T_μ derselben zusammenfallen. Es ist also, wenn ε_i die mit dem für c_{ii} vorgeschriebenen Vorzeichen versehene Einheit bezeichnet,

$$C_{\mu+1} C_{\mu+2} \ldots C_n = \varepsilon_{\mu+1} \varepsilon_{\mu+2} \ldots \varepsilon_n T_\mu .$$

Hienach wird

$$C_n = \varepsilon_n T_{n-1}$$

$$C_{n-1} = \varepsilon_{n-1} \frac{T_{n-2}}{T_{n-1}}$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$C_1 = \varepsilon_1 \frac{T_0}{T_1}$$

Dass T_μ durch $T_{\mu+1}$ theilbar ist, folgt daraus, dass die Determinanten $n-\mu^{\text{ter}}$ Ordnung des vorstehenden Elementensystems Vielfachsummen der Determinanten $n-\mu-1^{\text{ter}}$ Ordnung des Elementensystems

$$\begin{matrix} a_{1\,\mu+2} a_{2\,\mu+2} \ldots a_{m\mu+2} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{1n} \quad a_{2n} \quad \ldots a_{mn} \end{matrix}$$

sind.

Soll nun ein mit S gleichstimmiges System $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n$ bestimmt werden, welches beide Eigenschaften I und II aufweist, so ist dasselbe auch mit $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n$ gleichstimmig und man hat

$$\omega_m = h_1\varphi_1 + h_2\varphi_2 + \ldots + h_n\varphi_n,$$

wo $h_1, h_2, \ldots h_n$ ganze Zahlen bezeichnen. Ist $m < n$, so erhellt, indem man nach und nach die Coëfficienten von $x_n, x_{n-1}, \ldots x_{m+1}$ in Betracht zieht, dass

$$h_1 = h_2 = \ldots h_{m+1} = 0$$

und

$$\omega_m = h_1\varphi_1 + h_2\varphi_2 + \ldots + h_m\varphi_m$$

sein muss. Da überdies die Coëfficienten von x_m in ω_m und φ_m zusammenfallen müssen, so ergibt sich $h_m = 1$ und man hat

$$\omega_m = h_1\varphi_1 + h_2\varphi_2 + \ldots + \varphi_m.$$

Ist $m = 1$, so ist $\omega_1 = \varphi_1$ vollständig bestimmt.

Ist aber $m > 1$ und setzt man

$$\varphi_i = b_{i1}x_1 + b_{i2}x_2 + \ldots + b_{ii}x_i,$$

so soll der Coëfficient

$$h_{m-1}b_{m-1\,m-1} + b_{m\,m-1}$$

von x_{m-1} in ω_m nicht negativ und kleiner als der Zahlenwerth von $b_{m-1\,m-1}$ sein. Derselbe muss daher der echte Rest von $b_{m\,m-1}$ in Bezug auf den Modul $b_{m-1\,m-1}$ sein, wodurch h_{m-1} vollständig bestimmt ist. Ist $m > 2$, so ergibt sich in derselben Weise, dass der Coëfficient von x_{m-2} in ω_m der echte Rest von $h_{m-1}b_{m-1\,m-2} + b_{m\,m-2}$ in Bezug auf den Modul $b_{m-2\,m-2}$ sein

muss. Da aber h_{m-1} bereits bestimmt ist, so erhellt, dass auch sowohl der in Rede stehende Coëfficient, als auch h_{m-2} vollständig bestimmt sind. Schliesst man so fort, so ergibt sich, dass $h_1, h_2, \ldots h_{m-1}$ sich immer und nur auf eine Weise so bestimmen lassen, dass ω_m die Eigenschaft II besitzt, und dies gilt für jeden der Werthe $2, 3, \ldots n$ von m.

Überdies ist klar, dass die so bestimmten Formen $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n$ mit $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n$ gleichstimmig sind. Denn φ_1 ist ein Vielfaches von ω_1, φ_2 eine Vielfachsumme von ω_2 und φ_1, also auch von ω_2 und ω_1, φ_3 eine Vielfachsumme von $\omega_3, \varphi_1, \varphi_2$, also auch von $\omega_3, \omega_2, \omega_1$ u. s. f.

Das System

$$\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n$$

soll ein reducirtes Formensystem des Systems S genannt werden.

Setzt man

$$\omega_i = p_{i1} f_1 + p_{i2} f_2 + \ldots + p_{im} f_m$$
$$f_i = q_{1i} \omega_1 + q_{2i} \omega_2 + \ldots + q_{ni} \omega_n,$$

so ergibt sich durch Einsetzung der Ausdrücke für $f_1, f_2, \ldots f_m$ in die Gleichung für ω_i

$$\begin{aligned} \omega_i = & (p_{i1} q_{11} + p_{i2} q_{12} + \ldots + p_{im} q_{1m}) \omega_1 \\ & + (p_{i1} q_{21} + p_{i2} q_{22} + \ldots + p_{im} q_{2m}) \omega_2 \\ & \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ & + (p_{i1} q_{n1} + p_{i2} q_{n2} + \ldots + p_{im} q_{nm}) \omega_n \end{aligned}$$

Wegen der linearen Unabhängigkeit von $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n$ folgt hieraus

$$p_{i1} q_{i1} + p_{i2} q_{i2} + \ldots + p_{im} q_{im} = 1$$

und

$$p_{i1} q_{k1} + p_{i2} q_{k2} + \ldots + p_{im} q_{km} = 0,$$

wenn i und k verschieden sind. Die Zahlen

$$p_{i1}, p_{i2}, \ldots p_{im}$$

ebenso wie die Zahlen

$$q_{i1}, q_{i2}, \ldots q_{im}$$

haben sonach den grössten gemeinschaftlichen Theiler 1.

3.

Es seien
$$f = ax^2 + 2bxy + cy^2$$
$$f' = a'x'^2 + 2b'x'y' + c'y'^2$$
zwei binäre quadratische Formen von gleicher Determinante D, deren Theiler m, m' relativ prim vorausgesetzt werden, und es werde zur Abkürzung
$$ax + (b + \sqrt{D})y = f_0$$
$$a'x' + (b' + \sqrt{D})y' = f_0'$$
gesetzt; es soll das Product $f_0 f_0'$ nach den Unbestimmten x, y, x', y' entwickelt und für die Coëfficienten dieser Entwickelung, welche als linear-homogene Functionen von 1 und $\sqrt{D}$ aufzufassen sind, dasjenige reducirte System
$$c_{11}, \qquad c_{21} + c_{22}\sqrt{D}$$
ermittelt werden, in welchem c_{22} positiv ist und c_{11} das Vorzeichen von aa' hat.

Man hat
$$f_0 f_0' = aa'xx' + (ab' + a\sqrt{D})xy' + (a'b + a'\sqrt{D})yx' + \\ + (D + bb' + (b + b')\sqrt{D})yy',$$
und es handelt sich also um die Bestimmung des reducirten Systems der vier linearen Formen
$$aa', \quad ab' + a\sqrt{D}, \quad a'b + a'\sqrt{D}, \quad D + bb' + (b + b')\sqrt{D}$$
von 1, $\sqrt{D}$ mit den oben genannten Vorzeichenbedingungen.

Bezeichnet ν den grössten gemeinschaftlichen Theiler der Zahlen
$$a, \quad a', \quad b + b',$$
so ergibt sich zunächst $c_{22} = \nu$.

Um c_{11} zu ermitteln, sind die Determinanten zweiter Ordnung des Elementensystems
$$\begin{matrix} aa', & ab', & ba', & D + bb' \\ 0, & a, & a', & b + b' \end{matrix}$$

zu bilden. Dieselben sind:

$$aa'.a,\quad aa'.a',\quad aa'.(b+b'),\quad aa'.(b'-b),\quad aa'.c',\quad aa'.c.$$

Ihr grösster gemeinschaftlicher Theiler ist, wenn vom Vorzeichen abgesehen wird, das Product von aa' in den grössten gemeinschaftlichen Theiler t der sechs Zahlen

$$a,\quad a',\quad b'+b,\quad b'-b,\quad c,\quad c'.$$

Da der grösste gemeinschaftliche Theiler m der Zahlen a, $2b$, c zu dem grössten gemeinschaftlichen Theiler m' der Zahlen a', $2b'$, c' relativ prim ist, so haben die Zahlen

$$a,\quad 2b,\quad c,\quad a',\quad 2b',\quad c'$$

den grössten gemeinschaftlichen Theiler 1 und es besteht eine Gleichung

$$a\mathfrak{A}+2b\mathfrak{B}+c\mathfrak{C}+a'\mathfrak{A}'+2b'\mathfrak{B}'+c'\mathfrak{C}'=1,$$

worin $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \ldots \mathfrak{C}'$ ganze Zahlen sind. Dann besteht aber auch die Gleichung

$$a\mathfrak{A}+a'\mathfrak{A}'+(b'+b)(\mathfrak{B}'+\mathfrak{B})+(b'-b)(\mathfrak{B}'-\mathfrak{B})+c\mathfrak{C}+c'\mathfrak{C}'=1,$$

aus welcher erhellt, dass $t=1$ ist. Der grösste gemeinschaftliche Theiler der sechs obigen Determinanten ist sonach, vom Vorzeichen abgesehen, $=aa'$ und man hat

$$c_{11}c_{22}=aa',$$

also

$$c_{11}=\frac{aa'}{\nu}.$$

Um c_{21} zu ermitteln, hat man eine beliebige Lösung der Gleichung

$$a\alpha+a'\beta+(b+b')\gamma=\nu$$

zu bestimmen, mit Hilfe derselben den Ausdruck

$$\varphi_2=\alpha(ab'+a\sqrt{D})+\beta(ba'+a'\sqrt{D})+\gamma(D+bb'+(b+b')\sqrt{D})$$

zu bilden und hierauf in der Gleichung

$$c_{21}+c_{22}\sqrt{D}=\varphi_2+lc_{11}$$

den Coëfficienten l so zu bestimmen, dass c_{21} nicht negativ und kleiner als der Zahlenwerth von c_{11} ausfällt. c_{21} ist somit der echte Rest der Zahl

$$ab'\alpha+ba'\beta+(D+bb')\gamma$$

in Bezug auf den Modul $\frac{aa'}{\nu}$.

Da ν sowohl in $\frac{aa'}{\nu}$ als auch in ab', ba' und

$$D+bb' = b(b+b')-ac$$

aufgeht, so ist c_{21} durch ν theilbar und das gesuchte reducirte System hat die Gestalt

$$\nu A, \qquad \nu(B+\sqrt{D}),$$

wenn

$$\frac{c_{11}}{c_{22}} = A \qquad \frac{c_{21}}{c_{22}} = B$$

gesetzt wird.

Setzt man

$$\begin{aligned}
aa' &= p_1\nu A+q_1\nu(B+\sqrt{D})\\
ab'+a\sqrt{D} &= p_2\nu A+q_2\nu(B+\sqrt{D})\\
ba'+a'\sqrt{D} &= p_3\nu A+q_3\nu(B+\sqrt{D})\\
D+bb'+(b+b')\sqrt{D} &= p_4\nu A+q_4\nu(B+\sqrt{D})
\end{aligned}$$

$$p_1xx'+p_2xy'+p_3yx'+p_4yy' = \mathfrak{X}$$
$$q_1xx'+q_2xy'+q_3yx'+q_4yy' = \mathfrak{Y},$$

so wird identisch

$$f_0f_0' = \nu(A\mathfrak{X}+(B+\sqrt{D})\mathfrak{Y}).$$

Durch Verwandlung von $\sqrt{D}$ in $-\sqrt{D}$ folgt hieraus die zweite Identität

$$(ax+(b-\sqrt{D})y)(a'x'+(b'-\sqrt{D})y') = \nu(A\mathfrak{X}+(B-\sqrt{D})\mathfrak{Y})$$

und man erhält durch Multiplication derselben mit der vorhergehenden

$$aa'ff' = \nu^2(A^2\mathfrak{X}^2+2AB\mathfrak{X}\mathfrak{Y}+(B^2-D)\mathfrak{Y}^2)$$

oder

$$A^2\mathfrak{X}^2+2AB\mathfrak{X}\mathfrak{Y}+(B^2-D)\mathfrak{Y}^2 = Aff'.$$

Da auf Grund dieser Gleichung $(B^2-D)\mathfrak{Y}^2$ durch A theilbar und $\mathfrak{Y}$ eine ganze ganzzahlige primitive Function von x, y, x', y' ist, so muss B^2-D durch A theilbar sein und man hat

$$B^2-D = AC$$

$$A\mathfrak{X}^2+2B\mathfrak{X}\mathfrak{Y}+C\mathfrak{Y}^2 = ff', \tag{1}$$

wo C eine ganze Zahl bezeichnet.

Da νA, $\nu(B+\sqrt{D})$ Vielfachsummen der vier Coëfficienten von $f_0 f_0'$ sind und in den diesbezüglichen Gleichungen $\sqrt{D}$ durch irgend eine Zahl ersetzt werden darf, so erscheinen, wenn man $\sqrt{D}$ durch b ersetzt, νA und $\nu(B+b)$ als Vielfachsummen der Zahlen

$$aa',\quad a(b+b'),\quad 2ba',\quad 2b(b+b')-ac$$

und somit als Vielfache von νm; es sind also A und $2(B+b)$ und sonach auch $2B$ durch m theilbar. Ebenso erscheinen νA und $\nu(B+b')$, wenn $\sqrt{D}$ durch b' ersetzt wird, als Vielfachsummen von

$$aa',\quad 2b'a,\quad a'(b+b'),\quad 2b'(b+b')-a'c'$$

also als Vielfache von $\nu m'$ und A, $2(B+b')$, also auch $2B$ müssen durch m' theilbar sein. Dann sind aber A, $2B$ durch mm' theilbar und die Identität (1) zeigt, dass mm' auch in C aufgeht. Anderseits zeigt dieselbe Identität, dass das Product von mm' in die primitive Function $\frac{f}{m}\cdot\frac{f'}{m'}$ Vielfachsummen von A, $2B$, C zu Coëfficienten hat, und es ist somit auch mm' eine Vielfachsumme von A, $2B$, C. Dann ist aber mm' der grösste gemeinschaftliche Theiler der Zahlen A, $2B$, C.

Setzt man

$$AX^2+2BXY+CY^2 = F,$$

so wird die Form F aus den Formen f, f' zusammengesetzt genannt. Sie hat dieselbe Determinante wie f, f', den Theiler mm', ist vollständig bestimmt, von der Reihenfolge, in welcher

die Formen f, f' genommen werden, unabhängig und genügt der Identität

$$F(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}) = f \cdot f'.$$

Um die Form F zu bilden, hat man zunächst den grössten gemeinschaftlichen Theiler ν der Zahlen a, a', $b+b'$ und eine Lösung der Gleichung

$$a\alpha + a'\beta + (b+b')\gamma = \nu$$

zu ermitteln; es wird dann $A = \frac{aa'}{\nu^2}$, B der echte Rest der Zahl

$$\frac{ab'}{\nu}\alpha + \frac{ba'}{\nu}\beta + \frac{D+bb'}{\nu}\gamma$$

in Bezug auf den Modul A und C ergibt sich aus der Gleichung

$$C = \frac{B^2 - D}{A}.$$

Die aus zwei Formen f, f' zusammengesetzte Form soll mit $\overline{ff'}$ bezeichnet werden.

Sagt man von einer Form, deren Theiler n ist, dass sie zur Ordnung n gehört, so gehört die Form F zur Ordnung mm'. Ist eine der Formen f, f', etwa f, primitiv, so gehören f' und F derselben Ordnung an.

Ist irgend eine Anzahl μ von Formen

$$\begin{aligned} f &= ax^2 + 2bxy + cy^2 \\ f' &= a'x_1^2 + 2b'x_1y_1 + c'y_1^2 \\ f'' &= a''x_2^2 + 2b''x_2y_2 + c''y_2^2 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f^{(\mu-1)} &= a^{(\mu-1)}x_{\mu-1}^2 + 2b^{(\mu-1)}x_{\mu-1}y_{\mu-1} + c^{(\mu-1)}y_{\mu-1}^2 \end{aligned}$$

der Determinante D gegeben, deren Theiler $m, m', m'', \ldots m^{(\mu-1)}$ paarweise relativ prim sind, so kann man zunächst irgend zwei Formen f, f' in eine Form

$$F' = A'X_1^2 + 2B'X_1Y_1 + C'Y_1^2,$$

hierauf diese Form F' und irgend eine dritte Form f'', deren Theiler mm' und m'' ebenfalls relativ prim sind, in eine Form

$$F'' = A''X_2^2 + 2B''X_2Y_2 + C''Y_2^2$$

zusammensetzen und so fortfahren, bis man zuletzt die Form

$$F^{(\mu-2)} = A^{(\mu-2)} X_{\mu-2}^2 + 2 B^{(\mu-2)} X_{\mu-2} Y_{\mu-2} + C^{(\mu-2)} Y_{\mu-2}^2$$

und die letzte Form $f^{(\mu-1)}$ in eine Form

$$F^{(\mu-1)} = A^{(\mu-1)} X_{\mu-1}^2 + 2 B^{(\mu-1)} X_{\mu-1} Y_{\mu-1} + C^{(\mu-1)} Y_{\mu-1}^2$$

zusammensetzt. Die Form $F^{(\mu-1)}$ heisst dann aus den Formen $f, f', f'', \ldots f^{(\mu-1)}$ zusammengesetzt, hat die Determinante D, den Theiler $m m' m'' \ldots m^{(\mu-1)}$ und ist von der Reihenfolge unabhängig, in welcher die Formen $f, f', \ldots f^{(\mu-1)}$ genommen werden. Dieselbe soll mit $\overline{ff' \ldots f^{(\mu-1)}}$ bezeichnet werden.

Es sei zur Abkürzung

$$\begin{aligned} f_0^{(i)} &= a^{(i)} x_i + (b^{(i)} + \sqrt{D}) y_i \\ F_0^{(i)} &= A^{(i)} X_i + (B^{(i)} + \sqrt{D}) Y_i \\ P &= f_0 f_0' f_0'' \ldots f_0^{(\mu-1)} \end{aligned}$$

und ν_1 der grösste gemeinschaftliche Theiler der Zahlen a, a', $b+b'$, ν_i derjenige der Zahlen $A^{(i-1)}$, $a^{(i)}$, $B^{(i-1)}+b^{(i)}$. Die Coëfficienten von $f_0 f_0'$ sind mit $\nu_1 A'$, $\nu_1(B'+\sqrt{D})$ oder den Coëfficienten von $\nu_1 F_0'$ gleichstimmig. Daher sind auch die Coëfficienten von $f_0 f_0' f_0''$ und $\nu_1 F_0' f_0''$ gleichstimmig; da aber die Coëfficienten von $F_0' f_0''$ und $\nu_2 F_0''$ gleichstimmig sind, so sind es auch die von $\nu_1 F_0' f_0''$ und $\nu_1 \nu_2 F_0''$ und somit auch die von $f_0 f_0' f_0''$ und $\nu_1 \nu_2 F_0''$. In derselben Weise ergibt sich, wenn $\mu > 3$ ist, die Gleichstimmigkeit der Coëfficienten von $f_0 f_0' f_0'' f_0'''$ und $\nu_1 \nu_2 \nu_3 F_0'''$ u. s. f. Es sind also auch die Coëfficienten von P mit denen von $\nu_1 \nu_2 \ldots \nu_{\mu-1} F_0^{(\mu-1)}$ gleichstimmig. Hieraus folgt, dass die linearen Formen von 1, $\sqrt{D}$

$$\nu_1 \nu_2 \ldots \nu_{\mu-1} A^{(\mu-1)}, \qquad \nu_1 \nu_2 \ldots \nu_{\mu-1} (B^{(\mu-1)} + \sqrt{D})$$

ein mit den Coëfficienten von P gleichstimmiges reducirtes System, und zwar dasjenige reducirte System

$$c_{11}, \qquad c_{21} + c_{22} \sqrt{D}$$

bilden, in welchem c_{22} positiv ist und c_{11} das Vorzeichen von $aa' \ldots a^{(\mu-1)}$ hat, da

$$A^{(\mu-1)} = \frac{aa' \ldots a^{(\mu-1)}}{\nu_1^2 \nu_2^2 \ldots \nu_{\mu-1}^2}$$

ist. Da dieses System nur von den Coëfficienten von P abhängt, also von der Reihenfolge der Formen $f, f', \dots f^{(\mu-1)}$ unabhängig und

$$A^{(\mu-1)} = \frac{c_{11}}{c_{22}} \qquad B^{(\mu-1)} = \frac{c_{21}}{c_{22}}$$

ist, so ist auch die Form $F^{(\mu-1)}$ von dieser Reihenfolge unabhängig.

Um $F^{(\mu-1)}$ zu erhalten, kann man auch folgendermassen verfahren. Man theile die gegebenen Formen

$$f, f' \dots f^{(\mu-1)}$$

irgendwie in zwei Gruppen, und es sei φ die Form, welche aus den Formen der einen Gruppe zusammengesetzt ist, oder auch die Form dieser Gruppe selbst, wenn letztere nur eine einzige Form enthält, und ψ die Form, welche in Bezug auf die Formen der anderen Gruppe eine ähnliche Bedeutung hat; es ist dann

$$F^{(\mu-1)} = \overline{\varphi\psi}.$$

Setzt man nämlich

$$\begin{aligned}
\varphi &= px^2+2qxy+ry^2\\
\psi &= p'x_1^2+2q'x_1y_1+r'y_1^2\\
\chi &= \overline{\varphi\psi} = p_1X^2+2q_1XY+r_1Y^2\\
\varphi_0 &= px+(q+\sqrt{D})y\\
\psi_0 &= p'x_1+(q'+\sqrt{D})y_1\\
\chi_0 &= p_1X+(q_1+\sqrt{D})Y
\end{aligned}$$

und bezeichnet mit Q_1, Q_2 die Producte der Ausdrücke $f_0, f'_0, \dots$ oder auch eintretendenfalls solche Ausdrücke selbst, welche den Formen der beiden Gruppen entsprechen, so sind die Coëfficienten von Q_1 mit denen von $k\varphi_0$, die von Q_2 mit denen von $k'\psi_0$, also die Coëfficienten von $P = Q_1Q_2$ mit denen von $kk'\varphi_0\psi_0$ und daher auch denen von $kk'k_1\chi_0$ gleichstimmig, wo k, k', k_1 ganze Zahlen bezeichnen. Es ist also

$$p_1 = \frac{c_{11}}{c_{22}} = A^{(\mu-1)} \qquad q_1 = \frac{c_{21}}{c_{22}} = B^{(\mu-1)}.$$

4.

Um irgend eine Form

$$f = (a, b, c)$$

mit der Hauptform

$$g = (1, 0, -D)$$

zusammenzusetzen, hat man

$$\nu = 1 \qquad A = a$$

und kann als Lösung der Gleichung

$$a\alpha + \beta + b\gamma = 1$$

die Zahlen $\alpha = 0$, $\beta = 1$, $\gamma = 0$ nehmen. B wird dann der echte Rest b_0 von b in Bezug auf den Modul a. Es ist daher

$$\overline{fg} = \left(a, b_0, \frac{b_0^2 - D}{a}\right).$$

Nennt man insbesondere eine Form (a, b, c) kurz »schlicht«, wenn b nicht negativ ist und den Zahlenwerth von a nicht erreicht, so ist die aus einer schlichten Form f und der Hauptform zusammengesetzte Form die Form f selbst.

Wenn f primitiv und f' die entgegengesetzte Form $(a, -b, a)$ von f ist, so hat man

$$\nu = \pm a \qquad A = 1$$

und B hat als echter Rest in Bezug auf den Modul 1 den Werth 0. Daher ist

$$\overline{ff'} = (1, 0, -D).$$

Wenn f eine primitive Form und die Formen g, g' verschieden und schlicht sind, so sind auch die Formen $\overline{fg}$, $\overline{fg'}$ verschieden.

5.

Wenn die Formen f, f' theilerfremde Theiler haben und die Form g mit f, die Form g' mit f' äquivalent ist, so ist $\overline{gg'}$ mit $\overline{ff'}$ äquivalent.

Es gehe f in g durch die Substitution $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$, f' in g' durch die Substitution $(\alpha', \beta', \gamma', \delta')$ über und man setze

$$\begin{aligned}
f &= ax^2+2bxy+cy^2 \\
f' &= a'x_1^2+2b'x_1y_1+c'y_1^2 \\
g &= px^2+2qxy+ry^2 \\
g' &= p'x_1^2+2q'x_1y_1+r'y_1^2 \\
\overline{ff'} &= F = AX^2+2BXY+CY^2 \\
\overline{gg'} &= G = A'X_1^2+2B'X_1Y_1+C'Y_1^2 \\
f_0 &= ax+(b+\sqrt{D})y \\
f_0' &= a'x_1+(b'+\sqrt{D})y_1 \\
g_0 &= px+(q+\sqrt{D})y \\
g_0' &= p'x_1+(q'+\sqrt{D})y_1 \\
F_0 &= AX+(B+\sqrt{D})Y \\
G_0 &= A'X_1+(B'+\sqrt{D})Y_1 \\
a\alpha+(b-\sqrt{D})\gamma &= k \\
a'\alpha'+(b'-\sqrt{D})\gamma' &= k'.
\end{aligned}$$

Man hat

$$f_0 f_0' = \nu F_0(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$$
$$g_0 g_0' = \nu' G_0(\mathfrak{U}, \mathfrak{V})$$

wo ν den grössten gemeinschaftlichen Theiler von a, a', $b+b'$, ν' den von p, p', $q+q'$ und $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$ ganze ganzzahlige Functionen von x, y, x', y' bezeichnen. Gehen $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ nach Ersetzung von x, y, x', y' durch

$$\alpha x+\beta y, \quad \gamma x+\delta y, \quad \alpha' x_1+\beta' y_1, \quad \gamma' x_1+\delta' y_1$$

in $\mathfrak{X}'$, $\mathfrak{Y}'$ über, so wird identisch

$$\nu F_0(\mathfrak{X}', \mathfrak{Y}') = f_0(\alpha x+\beta y, \gamma x+\delta y) f_0'(\alpha' x_1+\beta' y_1, \gamma' x_1+\delta' y_1).$$

Multiplicirt man mit kk' und beachtet, dass

$$k f_0(\alpha x+\beta y, \gamma x+\delta y) = a g_0$$
$$k' f_0'(\alpha' x_1+\beta' y_1, \gamma' x_1+\delta' y_1) = a' g_0'$$

ist, so ergibt sich

$$\nu k k' F_0(\mathfrak{X}', \mathfrak{Y}') = a a' g_0 g_0'.$$

Hienach sind die Coëfficienten von $\nu k k' F_0(\mathfrak{X}', \mathfrak{Y}')$ mit denen von $aa' g_0 g_0'$ und daher auch denen von $aa'\nu' G_0$ gleichstimmig. Man hat also

$$aa'\nu' A' = \nu k k' F_0(\mathfrak{a}, \mathfrak{c})$$
$$aa'\nu'(B' + \sqrt{D}) = \nu k k' F_0(\mathfrak{b}, \mathfrak{d}),$$

wo $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$ ganze Zahlen bezeichnen.

Aus diesen Gleichungen folgt, wenn man die erste mit der conjugirten Gleichung

$$aa'\nu' A' = \nu f_0(\alpha, \gamma) f_0'(\alpha', \gamma')(A\mathfrak{a} + (B - \sqrt{D})\mathfrak{c})$$

multiplicirt,

$$a^2 a'^2 \nu'^2 A'^2 = \nu^2 . a f(\alpha, \gamma) . a' f'(\alpha', \gamma') . AF(\mathfrak{a}, \mathfrak{c})$$

oder den Gleichungen

$$A = \frac{aa'}{\nu^2} \qquad A' = \frac{pp'}{\nu'^2}$$

$$f(\alpha, \gamma) = p \qquad f'(\alpha', \gamma') = p'$$

zufolge

$$A' = F(\mathfrak{a}, \mathfrak{c}).$$

Ferner ergibt sich durch Division der obigen Gleichungen

$$\frac{B' + \sqrt{D}}{A'} = \frac{F_0(\mathfrak{b}, \mathfrak{d})}{F_0(\mathfrak{a}, \mathfrak{c})}$$
$$= \frac{A\mathfrak{a}\mathfrak{b} + B(\mathfrak{a}\mathfrak{d} + \mathfrak{b}\mathfrak{c}) + C\mathfrak{c}\mathfrak{d} + (\mathfrak{a}\mathfrak{d} - \mathfrak{b}\mathfrak{c})\sqrt{D}}{F(\mathfrak{a}, \mathfrak{c})}$$

und der bereits gefundenen Gleichung $A' = F(\mathfrak{a}, \mathfrak{c})$ zufolge

$$B' = A\mathfrak{a}\mathfrak{b} + B(\mathfrak{a}\mathfrak{d} + \mathfrak{b}\mathfrak{c}) + C\mathfrak{c}\mathfrak{d}$$
$$\mathfrak{a}\mathfrak{d} - \mathfrak{b}\mathfrak{c} = 1.$$

Wenn zwei unäquivalente Formen φ, ψ mit einer primitiven Form f zusammengesetzt werden, so sind die resultirenden Formen $\overline{f\varphi}$, $\overline{f\psi}$ ebenfalls unäquivalent. Im Gegenfalle müssten nämlich die Formen $\overline{f'f\varphi}$ und $\overline{f'f\psi}$ äquivalent sein, wo f' die entgegengesetzte Form von f bezeichnet; da aber $\overline{ff'} = (1, 0, -D)$ ist, so müssten auch φ und ψ äquivalent sein.

Unter der Formenclasse, welche aus zwei Classen K, L zusammengesetzt ist, versteht man diejenige Classe, zu welcher die aus zwei den Classen K und L entnommenen Formen f, g zusammengesetzte Form gehört.

6.

Wenn eine Zahl m durch die Form f so dargestellt wird, dass die darstellenden Zahlen ξ, η den grössten gemeinschaftlichen Theiler μ haben, so ist die Form f einer Form $\left(\frac{m}{\mu^2}, r, l\right)$ äquivalent, in welcher r nicht negativ und kleiner als der Zahlenwerth von $\frac{m}{\mu^2}$ ist, und $\frac{\xi}{\mu}$, $\frac{\eta}{\mu}$ bilden den ersten und dritten Coëfficienten einer und nur einer Substitution $\left(\frac{\xi}{\mu}, \beta, \frac{\eta}{\mu}, \delta\right)$ von der Determinante 1, welche f in $\left(\frac{m}{\mu^2}, r, l\right)$ verwandelt. Nennt man eine schlichte Form $\left(\frac{m}{\mu^2}, r, l\right)$ der Determinante D kurz eine Hilfsform der Zahl m und sagt, dass die Darstellung (ξ, η) aus der Hilfsform $\left(\frac{m}{\mu^2}, r, l\right)$ und der Substitution $\left(\frac{\xi}{\mu}, \beta, \frac{\eta}{\mu}, \delta\right)$ hervorgehe, so gehen demnach alle Darstellungen der Zahl m durch f aus den mit f äquivalenten Hilfsformen und den einzelnen Substitutionen hervor, welche f in diese Hilfsform verwandeln.

Wenn f primitiv und D negativ ist, so gehen aus jeder mit f äquivalenten Hilfsform so viele Darstellungen hervor, als die Pell'sche Gleichung

$$t^2 - Du^2 = 1$$

Lösungen besitzt.

Wenn dagegen D positiv ist, so gehen aus jeder mit f äquivalenten Hilfsform unendlich viele Darstellungen hervor. Setzt man $f = (a, b, c)$ und bezeichnet irgend eine besondere aus einer dieser Hilfsformen hervorgehende Darstellung von m durch f mit (ξ_0, η_0) und mit T, U die kleinste positive Lösung der Pell'schen Gleichung

$$t^2 - Du^2 = 1,$$

so sind alle aus der nämlichen Hilfsform hervorgehenden Darstellungen von m mittelst der Form f durch die Gleichung

$$a\xi+(b+\sqrt{D})\eta = \pm(a\xi_0+(b+\sqrt{D})\eta_0)(T+U\sqrt{D})^e$$

gegeben, wo e alle ganzen Zahlen zu durchlaufen hat. Unter allen diesen aus einer Hilfsform hervorgehenden unendlich vielen Darstellungen gibt es aber nur eine einzige, welche den Bedingungen

$$1 < \frac{a\xi+(b+\sqrt{D})\eta}{\sqrt{\pm am}} \leqq T+U\sqrt{D}$$

genügt.

7.

Durch jede gegebene primitive Form

$$\varphi = Ax^2+Bxy+Cy^2,$$

in welcher B auch ungerade sein kann, lassen sich Zahlen darstellen, welche zu einer gegebenen Zahl M theilerfremd sind. Nimmt man den einzigen Fall aus, wo A, B ungerade und C, M gerade sind, so darf man sogar für y eine beliebige, zu M theilerfremde Zahl setzen, und es lässt sich x noch immer so wählen, dass $\varphi(x, y)$ theilerfremd zu M ausfällt.

Es sei η eine beliebig gewählte, zu M theilerfremde Zahl.

Wenn $M = 1$ ist, so bedarf es keines Beweises, da $\varphi(\xi, \eta)$ für jedes ξ zu M theilerfremd ist.

Ist $M > 1$, so können die Zahlen

$$A+B\eta, \quad 2B\eta, \quad C\eta^2, \quad M$$

keinen Theiler gemein haben. Denn ein solcher Theiler müsste zu η relativ prim sein, also in C, $2B$, $A+B\eta$ aufgehen; da er aber wegen der Primitivität von φ zu B theilerfremd sein muss, so könnte er nur $= 2$ sein, und es wären gegen die Annahme M, C gerade, A, B ungerade.

Es gibt also ganze Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, welche der Gleichung

$$(A+B\eta)\alpha+2B\beta+C\eta^2\gamma+M\delta = 1$$

genügen. Ersetzt man in derselben $A+B\eta$, $2B\eta$, $C\eta^2$ durch

$$\varphi(1, \eta)-\varphi(0, \eta), \quad -3\varphi(0, \eta)+4\varphi(1, \eta)-\varphi(2, \eta), \quad \varphi(0, \eta),$$

so ergibt sich eine Gleichung

$$\alpha'\varphi(0, \eta)+\beta'\varphi(1, \eta)+\gamma'\varphi(2, \eta)+M\delta = 1,$$

in welcher α', β', γ', δ ganze Zahlen bezeichnen. Für jeden Primfactor p von M kann man daher eine Zahl ξ angeben, für welche $\varphi(\xi, \eta)$ nicht durch p theilbar ist, da nicht alle drei Resultate $\varphi(0, \eta)$, $\varphi(1, \eta)$, $\varphi(2, \eta)$ durch p theilbar sein können.

Ist nun M eine Primzahlpotenz, so ist der Beweis erbracht.

Enthält M dagegen mehrere verschiedene Primfactoren $p_1, p_2, \ldots$, so ermittle man Zahlen $\xi_1, \xi_2 \ldots$ von der Art, dass $\varphi(\xi_1, \eta)$ zu p_1, $\varphi(\xi_2, \eta)$ zu p_2 u. s. w. theilerfremd ausfallen, und eine Zahl ξ, welche den Zahlen $\xi_1, \xi_2, \ldots$ beziehungsweise nach den Moduln $p_1, p_2, \ldots$ congruent ist. Dann ist $\varphi(\xi, \eta)$ der Congruenz

$$\varphi(\xi, \eta) \equiv \varphi(\xi_i, \eta) \qquad (\text{mod } p_i)$$

zufolge durch keinen einzigen Primfactor von M theilbar, also zu M theilerfremd.

In dem Ausnahmefalle, wo A, B ungerade, C, M gerade sind, braucht man nur x, y mit einander zu vertauschen.

8.

Aufgabe. Es ist eine schlichte Form F der Ordnung n gegeben; es sollen alle schlichten primitiven Formen ermittelt werden, welche, mit der einfachsten Form ω der Ordnung n zusammengesetzt, F hervorbringen.

Es sei

$$F = n\left(ax^2 + \frac{2}{\sigma}\, bxy + cy^2\right)$$

$$\omega = \left(n, \frac{n(\sigma-1)}{\sigma}, \frac{n^2(\sigma-1)^2 - D\sigma^2}{n\sigma^2}\right),$$

wo $\sigma = 1$ oder $= 2$ und b für $\sigma = 2$ ungerade ist. Ist

$$f = (A, B, C)$$

irgend eine Lösung der Forderung

$$\overline{f\omega} = F,$$

ν der grösste gemeinschaftliche Theiler der Zahlen A, n, $B+\frac{n(\sigma-1)}{\sigma}$ und $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ eine Lösung der Gleichung

$$A\mathfrak{a}+n\mathfrak{b}+\left(B+\frac{n(\sigma-1)}{\sigma}\right)\mathfrak{c}=\nu,$$

so muss

$$an=\frac{An}{\nu^2},$$

also $A=a\nu^2$ und

$$\frac{nb}{\sigma}\equiv\frac{An(\sigma-1)}{\nu\sigma}\mathfrak{a}+\frac{Bn}{\nu}\mathfrak{b}+\left(\frac{D}{\nu}+\frac{Bn(\sigma-1)}{\nu\sigma}\right)\mathfrak{c} \qquad (\text{mod } an)$$

sein. Zieht man von dieser Congruenz die mit $\frac{B}{\nu}$ multiplicirte Gleichung zwischen $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ ab, so ergibt sich

$$\frac{nb}{\sigma}-B\equiv\left(\frac{n(\sigma-1)}{\sigma}-B\right)\mathfrak{a}\cdot\frac{A}{\nu}-C\mathfrak{c}\cdot\frac{A}{\nu} \qquad (\text{mod } an)$$

$$\equiv 0 \qquad (\text{mod } a\nu)$$

und es ist demnach

$$B=\frac{nb}{\sigma}+sa\nu$$

$$C=\frac{B^2-D}{A}=as^2+\frac{2}{\sigma}bs\frac{n}{\nu}+c\frac{n^2}{\nu^2},$$

wo s eine ganze Zahl bezeichnet.

Hienach muss jede der gesuchten Lösungen die Gestalt

$$f=\left(a\nu^2,\ \frac{nb}{\sigma}+sa\nu,\ as^2+\frac{2}{\sigma}bs\frac{n}{\nu}+c\frac{n^2}{\nu^2}\right)$$

haben, wo ν irgend einen Theiler von n bezeichnet.

Umgekehrt genügt jede Form, welche diese Gestalt hat und überdies primitiv und schlicht ist, der Aufgabe. Sind nämlich die Coëfficienten

$$a\nu^2, \qquad 2\left(\frac{nb}{\sigma}+sa\nu\right), \qquad as^2+\frac{2b}{\sigma}s\frac{n}{\nu}+c\frac{n^2}{\nu^2}$$

mit 1 gleichstimmig, so sind es auch die Zahlen

$$a\nu, \qquad \frac{n}{\nu}, \qquad as$$

und daher auch

$$a\nu, \qquad \frac{n}{\nu}, \qquad as + \frac{n}{\nu} \cdot \frac{b+\sigma-1}{\sigma}.$$

ν ist daher der grösste gemeinschaftliche Theiler der Zahlen

$$a\nu^2, \qquad n, \qquad \frac{n(b+\sigma-1)}{\sigma} + sa\nu.$$

Bezeichnet demnach $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C})$ die Form $\overline{f\omega}$ und α, β, γ eine Lösung der Gleichung

$$a\nu^2\alpha + n\beta + \left(sa\nu + \frac{n(b+\sigma-1)}{\sigma}\right)\gamma = \nu,$$

so hat man

$$\mathfrak{A} = \frac{a\nu^2 . n}{\nu^2} = an$$

$$\mathfrak{B} \equiv a\nu . \frac{n(\sigma-1)}{\sigma}\alpha + \frac{n}{\nu} \cdot \left(\frac{nb}{\sigma} + sa\nu\right)\beta +$$
$$+ \left(\frac{D}{\nu} + \left(\frac{nb}{\nu\sigma} + sa\right)\frac{n}{\sigma}(\sigma-1)\right)\gamma \qquad (\text{mod } an).$$

Zieht man aber die mit $\frac{nb}{\nu\sigma}$ multiplicirte Gleichung zwischen α, β, γ ab, so folgt

$$\mathfrak{B} - \frac{nb}{\sigma} \equiv -an\left(\alpha\nu\frac{(b-\sigma+1)}{\sigma} - \beta s + \gamma\left(\frac{b-\sigma+1}{\sigma}s + c\frac{n}{\nu}\right)\right) \qquad (\text{mod } an)$$
$$\equiv 0 \qquad (\text{mod } an).$$

Es ist also $\mathfrak{B} = \frac{nb}{\sigma}$ und daher auch $\mathfrak{C} = nc$.

Durch passende Wahl von ν und s lässt sich erreichen, dass f primitiv ausfällt. Man zerlege n in zwei Factoren μ und ν von der Art, dass μ theilerfremd zu a ist und ν nur Primfactoren von a enthält. Dann ist μ zu $a\nu^2$ theilerfremd, und es

kann nicht gleichzeitig $a\nu^2$ und c gerade, a und b ungerade sein. Nach 7 gibt es daher Zahlen s von der Art, dass

$$\frac{1}{n} F(s, \mu) = as^2 + 2\frac{b}{\sigma} s \frac{n}{\nu} + c\frac{n^2}{\nu^2}$$

zu $a\nu^2$ theilerfremd, also die Form

$$f_0 = \left(a\nu^2, \frac{nb}{\sigma} + sa\nu, as^2 + \frac{2b}{\sigma} s \frac{n}{\nu} + \frac{cn^2}{\nu^2}\right)$$

primitiv ausfällt. Diese Eigenschaft wird nicht zerstört, wenn man s um ein Vielfaches von ν ändert, und man kann demnach bewirken, dass $\frac{nb}{\sigma} + sa\nu$ nicht negativ und kleiner als der Zahlenwerth von $a\nu^2$ wird.

Mit Hilfe der Form f_0 lässt sich die Aufgabe auf den Fall zurückführen, wo die gegebene Form F mit ω selbst zusammenfällt. Ist nämlich f irgend eine Lösung, f_0' die entgegengesetzte Form von f_0 und setzt man $\overline{f_0' f} = \varphi$, so wird

$$f = \overline{f_0 f_0' f} = \overline{f_0 \varphi}$$
$$\overline{\varphi\omega} = \overline{f_0' f \omega} = \overline{f_0' F} = \overline{f_0' f_0 \omega} = \omega.$$

φ ist also eine primitive, schlichte, der Forderung

$$\overline{\varphi\omega} = \omega$$

genügende Form. Ist umgekehrt φ eine solche Form, so genügt $\overline{f_0\varphi}$ der Forderung

$$\overline{f_0 \varphi \omega} = \overline{f_0 \omega} = F.$$

Man erhält also alle Lösungen der Aufgabe, wenn man f_0 mit allen Formen φ zusammensetzt.

Ist $F = \omega$, handelt es sich also um die vollständige Auflösung der Forderung

$$\overline{\varphi\omega} = \omega,$$

so haben die Formen φ die Gestalt

$$\varphi = \left(\nu^2, n \,.\, \frac{\sigma - 1}{\sigma} + \nu s, l\right)$$

und fallen mit allen primitiven Hilfsformen von n^2 für die Determinante D zusammen, deren Inbegriff mit $\mathfrak{H}$ bezeichnet werde.

Ist nämlich (ν^2, r, l) eine solche Hilfsform von n^2 und setzt man

$$r = \frac{n(\sigma-1)}{\sigma} + z,$$

so wird

$$0 = \left(z + \frac{n(\sigma-1)}{\sigma}\right)^2 - l\nu^2 - D$$

$$= z^2 + \frac{2n}{\sigma}(\sigma-1)z + n^2\left(ac - \frac{b^2-(\sigma-1)^2}{\sigma^2}\right),$$

also auch

$$0 = \left(\frac{z}{\nu}\right)^2 + \frac{2}{\sigma}\,\frac{n}{\nu}(\sigma-1)\frac{z}{\nu} + \frac{n^2}{\nu^2}\left(ac - \frac{b^2-(\sigma-1)^2}{\sigma^2}\right).$$

$\frac{z}{\nu}$ ist also als Wurzel einer ganzzahligen Gleichung mit höchstem Coëfficienten 1 eine ganze Zahl und man kann $z = \nu s$, also

$$r = \frac{n(\sigma-1)}{\sigma} + \nu s$$

setzen.

Die Formen φ reproduciren sich durch Zusammensetzung. Sind nämlich φ_1, φ_2 irgend zwei Formen des Inbegriffes $\mathfrak{H}$, so hat man

$$\overline{\varphi_1\omega} = \omega \qquad \overline{\varphi_2\omega} = \omega.$$

Hieraus folgt aber

$$\overline{\varphi_1\varphi_2\omega} = \overline{\varphi_1\omega} = \omega$$

Die Form $\overline{\varphi_1\varphi_2}$ muss demnach ebenfalls zu $\mathfrak{H}$ gehören.

Aber auch diejenigen Formen φ von $\mathfrak{H}$, welche mit der Hauptform

$$H = (1, 0, -D)$$

äquivalent sind und deren Inbegriff mit J bezeichnet werden soll, besitzen dieselbe Eigenschaft. Sind nämlich φ_1, φ_2 Formen von J, so gehört $\overline{\varphi_1\varphi_2}$ zu $\mathfrak{H}$ und ist mit H äquivalent, da φ_1 und φ_2 mit H, also $\overline{\varphi_1\varphi_2}$ mit $HH = H$ äquivalent ist.

Setzt man alle Formen von J mit irgend einer Form ψ von $\mathfrak{H}$ zusammen, so gehören die resultirenden Formen wieder zu $\mathfrak{H}$ und bilden alle diejenigen Formen von $\mathfrak{H}$, welche mit ψ äquivalent sind. Ist nämlich φ irgend eine Form von J, so ist dieselbe mit H und daher $\overline{\varphi\psi}$ mit $\overline{H\psi} = \psi$ äquivalent. Ist umgekehrt ϑ eine mit ψ äquivalente Form von $\mathfrak{H}$ und ψ' die entgegengesetzte Form von ψ, so ist $\overline{\vartheta\psi'}$ mit $\overline{\psi\psi'} = H$ äquivalent. Da überdies $\overline{\vartheta\psi'}$ eine schlichte Form ist und der Forderung

$$\overline{\overline{\vartheta\psi'}\omega} = \overline{\psi'\overline{\vartheta\omega}} = \overline{\psi'\omega} = \overline{\psi'\overline{\psi\omega}} = \omega$$

genügt, so ist sie eine Form φ von J und man hat

$$\overline{\vartheta\psi'} = \varphi \qquad \vartheta = \overline{\psi\overline{\psi'\vartheta}} = \overline{\varphi\psi}.$$

Wählt man daher unter den Formen von $\mathfrak{H}$ die grösstmögliche Anzahl

$$\varphi_0, \varphi_1, \ldots \varphi_{\rho-1}$$

von Formen aus, welche untereinander unäquivalent sind, so lassen sich alle Formen von $\mathfrak{H}$ in die ρ Inbegriffe

$$J\varphi_0, J\varphi_1, \ldots J\varphi_{\rho-1}$$

vertheilen, wenn man den Inbegriff der aus der Zusammensetzung aller Individuen eines Formencomplexes C mit einer Form f hervorgehenden Formen kurz mit Cf bezeichnet.

Ist nun L der Inbegriff der Formen $\varphi_0, \varphi_1, \ldots \varphi_{\rho-1}$ und

$$\omega_0, \omega_1, \omega_2, \ldots \omega_{k-1}$$

ein vollständiges System von Formen der Ordnung n, wo $\omega_0 = \omega$, so ist nach dem Obigen $\mathfrak{H}f_i$ die Gesammtheit aller primitiven Formen f, welche der Forderung

$$\overline{f\omega} = \omega_i$$

genügen, wenn f_i eine besondere Lösung dieser Forderung bezeichnet. Unter den Formen von $\mathfrak{H}f_i$ sind nur die des Inbegriffs Lf_i untereinander unäquivalent und es bestehen also die k Inbegriffe

$$Lf_0, Lf_1, \ldots Lf_{k-1} \tag{2}$$

aus lauter untereinander unäquivalenten Formen. Diese Inbegriffe besitzen aber überdies die Eigenschaft, dass jede gegebene primitive Form G der Determinante D einer in denselben vorkommenden Form äquivalent sein muss. Denn die Form $\overline{G\omega}$ gehört zur Ordnung n und ist daher einer Form $\omega_i = \overline{f_i\omega}$ äquivalent. Dann ist aber, wenn die entgegengesetzte Form von f_i mit f_i' bezeichnet und $f_i'G = G_1$ gesetzt wird, die Form $\overline{f_i' G\omega} = \overline{G_1\omega}$ mit $\overline{f_i' f_i \omega} = \omega$ äquivalent und man hat eine Identität

$$\omega(\alpha X+\beta Y, \gamma X+\delta Y) = \overline{G_1\omega},$$

worin α, β, γ, δ ganze Zahlen bezeichnen. Anderseits geht $\overline{G_1\omega}$ durch eine Substitution

$$X = \mathfrak{X} \qquad Y = \mathfrak{Y},$$

in welcher $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ Vielfachsummen von xx', xy', yx', yy' bedeuten, in das Product $G_1(x, y)\,\omega(x', y')$ über und es wird

$$\omega(\alpha\mathfrak{X}+\beta\mathfrak{Y}, \gamma\mathfrak{X}+\delta\mathfrak{Y}) = G_1(x, y)\cdot\omega(x', y').$$

Für $x' = 1$, $y' = 0$ folgt hieraus

$$\omega(\mathfrak{a}x+\mathfrak{b}y, \mathfrak{c}x+\mathfrak{d}y) = n\,G_1(x, y),$$

wo $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$ ganze Zahlen sind. Da hienach die Form ω durch die Substitution $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d})$ in nG_1 übergeht, so hat man zwischen den Determinanten dieser Formen die Gleichung

$$D(\mathfrak{a}\mathfrak{d}-\mathfrak{b}\mathfrak{c})^2 = Dn^2$$

und überdies für $x = \mathfrak{d}$, $y = -\mathfrak{c}$ die Gleichung

$$n(\mathfrak{a}\mathfrak{d}-\mathfrak{b}\mathfrak{c})^2 = n\,G_1(\mathfrak{d}_1-\mathfrak{c}).$$

Es ist demnach

$$G_1(\mathfrak{d}_1-\mathfrak{c}) = n^2$$

oder n^2 durch G_1 darstellbar und G_1 muss demzufolge einer Hilfsform der Zahl n^2, also auch einer der Formen $\varphi_0, \varphi_1, \ldots \varphi_{p-1}$, etwa φ_ε äquivalent sein. Dann ist aber G mit der Form $\overline{\varphi_\varepsilon f_i}$ von $f_i L$ äquivalent.

Die obigen k Complexe (2) bilden sonach ein vollständiges System von primitiven Formen für die Determinante D und man hat

$$h = k\rho,$$

wo h die Anzahl aller primitiven Classen bezeichnet.

Es gilt nun noch die Zahl ρ zu ermitteln. Bezeichnet zu diesem Ende $\Theta(n^2)$ die Anzahl aller Formen von $\mathfrak{H}$ und ρ_1 die Anzahl der Formen von J, so ist

$$\rho = \frac{\Theta(n^2)}{\rho_1}.$$

Um ρ_1 zu ermitteln, sei $D = D_1 \frac{n^2}{\sigma^2}$.

Ist D negativ und λ die Anzahl der Lösungen der Pell'schen Gleichung

$$t^2 - Du^2 = 1,$$

so ist $\lambda\rho_1$ die Anzahl aller möglichen Darstellungen (ξ, η) der Zahl n^2 durch die Hauptform H. Denn jede solche Darstellung geht aus einer und nur einer mit H äquivalenten Hilfsform der Zahl n^2 oder einer Form von J und einer der H in diese Form verwandelnden Substitution hervor. Aus der Gleichung

$$\xi^2 - D\eta^2 = \xi^2 - D_1 \frac{n^2\eta^2}{\sigma^2} = n^2$$

erhellt aber, dass ξ durch $\frac{n}{\sigma}$ theilbar ist. Setzt man demgemäss

$$\xi = \frac{nt_1}{\sigma} \qquad \eta = u_1,$$

so wird $t_1^2 - D_1u_1^2 = \sigma^2$, und es ist klar, dass die Anzahl aller Darstellungen von n^2 durch H mit der Anzahl λ_1 der Lösungen der Pell'schen Gleichung

$$t_1^2 - D_1u_1^2 = \sigma^2$$

zusammenfällt. Man hat also

$$\lambda\rho_1 = \lambda_1 \qquad \rho_1 = \frac{\lambda_1}{\lambda}.$$

Ist D positiv und T, U die kleinste positive Lösung der Pell'schen Gleichung

$$T^2 - DU^2 = 1,$$

so ist ρ_1 die Anzahl aller Darstellungen (ξ, η) der Zahl n^2 durch H, welche den Bedingungen

$$1 < \frac{\xi + \eta\sqrt{D}}{n} \leqq T + U\sqrt{D}$$

genügen. Denn jede Darstellung (ξ, η) von n^2 durch H geht aus einer und nur einer mit H äquivalenten Hilfsform von n^2 oder einer Form von J hervor und unter allen aus einer bestimmten Hilfsform hervorgehenden Darstellungen gibt es nur eine, welche den vorstehenden Bedingungen genügt.

Die Anzahl ρ_1 der in Rede stehenden Darstellungen lässt sich aber noch in anderer Weise ausdrücken. Da ξ durch $\frac{n}{\sigma}$ theilbar sein muss, so ergibt sich, wenn

$$\xi = \frac{n}{\sigma} t_1 \qquad \eta = u_1$$

gesetzt wird,

$$t_1^2 - D_1 u_1^2 = \sigma^2$$

$$1 < \frac{t_1 + u_1\sqrt{D}}{\sigma} \leqq T + U\sqrt{D}.$$

ρ_1 ist demnach auch die Anzahl aller Lösungen der Pell'schen Gleichung

$$t_1^2 - D_1 u_1^2 = \sigma^2,$$

welche den vorstehenden Ungleichungen genügen. Bezeichnet aber T_1, U_1 die kleinste positive Lösung dieser Gleichung, so ist

$$T + U\sqrt{D} = \left(\frac{T_1 + U_1\sqrt{D}}{\sigma}\right)^c$$

$$\frac{t_1 + u_1\sqrt{D_1}}{\sigma} = \pm\left(\frac{T_1 + U_1\sqrt{D_1}}{\sigma}\right)^p$$

und die Bedingungen für $\frac{t_1 + u_1\sqrt{D_1}}{\sigma}$ gehen, da nur das obere Vorzeichen gelten kann, in

$$1 < \left(\frac{T_1 + U_1\sqrt{D_1}}{\sigma}\right)^p \leqq \left(\frac{T_1 + U_1\sqrt{D_1}}{\sigma}\right)^e$$

über und ergeben

$$0 < p \leqq e.$$

p kann also nur die Werthe 1, 2,...e haben und es ist

$$\rho_1 = e = \frac{l(T + U\sqrt{D})}{l\left(\frac{T_1 + U_1\sqrt{D_1}}{\sigma}\right)}.$$

e ist der kleinste Exponent, zu welchem $\frac{T_1 + U_1\sqrt{D_1}}{\sigma}$ erhoben werden muss, damit in dem Resultate der Coëfficient von $\sqrt{D_1}$ ganz und durch $\frac{n}{\sigma}$ theilbar ausfalle.

Man hat also für eine negative Determinante

$$k = \frac{h\lambda_1}{\lambda\Theta(n^2)}$$

und für eine positive

$$k = \frac{he}{\Theta(n^2)} = \frac{hl(T + U\sqrt{D})}{\Theta(n^2)\, l\left(\frac{T_1 + U_1\sqrt{D_1}}{\sigma}\right)}.$$

Die Bestimmung der Zahl $\Theta(n^2)$ kommt nur in den Fällen

$$n = \sigma = 2 \qquad D \equiv 1 \pmod 4$$

und

$$n > 1 \qquad \sigma = 1$$

in Betracht.

I. Wenn $n = \sigma = 2$ und $D \equiv 1 \pmod 4$ ist, so ist $D_1 = D$ und alle Hilfsformen der Zahl 4 sind

$$(1, 0, -D), \left(4, 1, \frac{1-D}{4}\right), \left(4, 3, \frac{9-D}{4}\right).$$

Die zwei letzten Formen sind jedoch nur dann primitiv, wenn $D \equiv 5 \pmod 8$ ist und es wird

$$\Theta(2^2) = 2 - (-1)^{\frac{D^2-1}{8}}.$$

Man hat also bei negativer Determinante

$$k = \frac{h\lambda_1}{\lambda\left(2-(-1)^{\frac{D^2-1}{8}}\right)}$$

und bei positiver

$$k = \frac{he}{2-(-1)^{\frac{D^2-1}{8}}} = \frac{h}{2-(-1)^{\frac{D^2-1}{8}}} \frac{l(T+U\sqrt{D})}{l\left(\frac{T_1+U_1\sqrt{D}}{2}\right)}.$$

II. Es sei $\sigma = 1$, $n > 1$, $D = D_1 n^2$.

Damit die Hilfsform $\left(\nu^2, \nu s, s^2 - \frac{D}{\nu^2}\right)$ primitiv ausfalle, ist es nothwendig und hinreichend, dass $s^2 - \frac{D}{\nu^2}$ zu ν theilerfremd sei. Es kommt also nur darauf an, für jeden einzelnen Theiler ν von n die Anzahl der Zahlen der Reihe

$$0^2 - \frac{D}{\nu^2},\ 1^2 - \frac{D}{\nu^2},\ 2^2 - \frac{D}{\nu^2}, \ldots (\nu-1)^2 - \frac{D}{\nu^2}$$

zu ermitteln, welche zu ν theilerfremd sind und es sei zu diesem Ende x_δ die Anzahl aller Zahlen dieser Reihe, welche mit ν den grössten gemeinschaftlichen Theiler δ haben, y_δ die Anzahl der durch δ theilbaren Zahlen der nämlichen Reihe.

Man kann y_δ für einen bestimmten Theiler δ von ν auf zweierlei Weise ausdrücken.

Einerseits kann jede durch δ theilbare Zahl $s^2 - \frac{D}{\nu^2}$ der vorstehenden Reihe mit ν nur einen grössten gemeinschaftlichen Theiler haben, welcher ein Vielfaches von δ, also eine der Zahlen

$$\delta,\ \delta\varepsilon,\ \delta\varepsilon' \ldots$$

ist, wo $1, \varepsilon, \varepsilon', \ldots$ alle Theile von $\frac{\nu}{\delta}$ bezeichnen. Die in Rede stehenden Zahlen zerfallen daher in die x_δ Zahlen, welche mit ν den grössten gemeinschaftlichen Theiler δ haben, in die $x_{\delta\varepsilon}$ Zahlen, welche mit ν den grössten gemeinschaftlichen Theiler $\delta\varepsilon$ haben, u. s. f. und es ist

$$y\delta = x_\delta + x_{\delta\varepsilon} + x_{\delta\varepsilon'} + \dots$$
$$= \Sigma\, x_{\delta t},$$

wo die Summe über alle Theiler t von $\frac{\nu}{\delta}$ zu erstrecken ist.

Anderseits ist es für die Theilbarkeit der Zahl $s^2 - \frac{D}{\nu^2}$ durch δ nothwendig und hinreichend, dass der echte Rest s_0 von s in Bezug auf den Modul δ eine nicht negative und δ nicht erreichende Wurzel der Congruenz

$$z^2 \equiv \frac{D}{\nu^2} \pmod{\delta}$$

und $\frac{s-s_0}{\delta}$ eine der Zahlen

$$0, 1, \dots \frac{\nu}{\delta} - 1$$

sei. Besitzt daher diese Congruenz $\mathfrak{A}_\delta$ nicht negative und δ nicht erreichende Wurzeln $\omega, \omega', \dots$, so sind

$$\omega,\ \omega+\delta,\ \omega+2\delta, \dots \omega+\left(\frac{\nu}{\delta}-1\right)\delta$$

$$\omega',\ \omega'+\delta,\ \omega'+2\delta, \dots \omega'+\left(\frac{\nu}{\delta}-1\right)\delta$$

. . . .

genau alle Zahlen der Reihe $0, 1, \dots \nu-1$, für welche der Ausdruck $s^2 - \frac{D}{\nu^2}$ durch δ theilbar wird, und es wird demnach

$$y_\delta = \frac{\nu}{\delta}\mathfrak{A}_\delta.$$

Ist aber $\mathfrak{A}_\delta = 0$, so leuchtet diese Gleichung unmittelbar ein.

Man hat also die Gleichung

$$\Sigma x_{\delta t} = \frac{\nu \mathfrak{A}_\delta}{\delta}.$$

Da es solcher Gleichungen so viele gibt als Theiler δ von ν, so ergibt sich in bekannter Weise durch deren Auflösung

$$x_1 = \Sigma \frac{\chi(\delta)\,\nu\,\mathfrak{A}_\delta}{\delta},$$

wo die Summe über alle Theiler δ von ν zu erstrecken ist und $\chi(\delta)$ den Werth 0, 1, —1 hat, je nachdem δ einen die Einheit übersteigenden quadratischen Theiler oder eine gerade oder ungerade Anzahl von verschiedenen Primfactoren enthält.

Wenn nun δ keinen die Einheit übersteigenden quadratischen Theiler besitzt, so ist, über alle Theiler δ_1 von δ erstreckt,

$$\mathfrak{A}_\delta = \Sigma \left(\frac{D_1 \frac{n^2}{\nu^2}}{\delta_1}\right);$$

hierin ist unter $\left(\frac{D_1 \frac{n^2}{\nu^2}}{\delta_1}\right)$ das Legendre-Jacobi'sche Symbol zu verstehen, welches in dem Falle eines geraden Nenners $\delta_1 = 0$ zu setzen ist. Es ist also auch

$$\chi(\delta)\mathfrak{A}_\delta = \Sigma\, \chi(\delta) \left(\frac{D_1 \frac{n^2}{\nu^2}}{\delta_1}\right).$$

Diese Formel gilt aber auch noch, wenn δ quadratische Theiler aufweist, da in diesem Falle beide Seiten verschwinden.

Man hat also

$$x_1 = \Sigma \chi(\delta) \left(\frac{D_1 \frac{n^2}{\nu^2}}{\delta_1}\right) \frac{\nu}{\delta},$$

wo die Summe über alle Theiler δ und δ_1 von ν zu erstrecken ist, deren zweiter in dem ersten aufgeht. Setzt man für jedes solches Theilerpaar δ, δ_1

$$\delta = \delta_1 \delta_2 \qquad \nu = \delta\delta_3 = \delta_1\delta_2\delta_3,$$

so wird

$$x_1 = \Sigma \chi(\delta_1\delta_2) \left(\frac{D_1 \frac{n^2}{\delta_1^2\delta_2^2\delta_3^2}}{\delta_1}\right) \delta_3,$$

wo die Summe über alle möglichen Theiler $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ von ν zu erstrecken ist, deren Product $= \nu$ ist.

Summirt man alle Anzahlen x_1, welche den einzelnen Theilern ν von n entsprechen, so ergibt sich $\Theta(n^2)$ als Summe aller Ausdrücke

$$\chi(\delta_1\delta_2)\left(\frac{D_1\frac{n^2}{\delta_1^2\delta_2^2\delta_3^2}}{\delta_1}\right)\delta_3,$$

in welchen $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ alle möglichen Theiler von n durchlaufen, deren Product in n aufgeht. Man hat also in diesem Sinne

$$\Theta(n^2) = \Sigma\chi(\delta_1\delta_2)\left(\frac{D_1\frac{n^2}{\delta_1^2\delta_2^2\delta_3^2}}{\delta_1}\right)\delta_3.$$

Man denke sich die Glieder dieser Summe in Gruppen vertheilt, indem man alle Glieder, welche irgend zwei bestimmten Werthen von δ_1 und δ_3 entsprechen, in je eine Gruppe stellt. Man erhält alle Glieder einer Gruppe, wenn man δ_2 alle Theiler von $\frac{n}{\delta_1\delta_3}$ durchlaufen lässt.

Wenn $\frac{n}{\delta_1\delta_3} > 1$, so ist die Summe der Glieder einer solchen Gruppe $= 0$. Sind nämlich δ_1 und $\frac{n}{\delta_1\delta_3}$ nicht theilerfremd, so müssen entweder δ_1 und δ_2, oder δ_1 und $\frac{n}{\delta_1\delta_2\delta_3}$ einen die Einheit übersteigenden Theiler gemein haben und es ist entweder $\chi(\delta_1\delta_2) = 0$ oder $\left(\frac{D_1\frac{n^2}{\delta_1^2\delta_2^2\delta_3^2}}{\delta_1}\right) = 0$, so dass alle Glieder der betreffenden Gruppe verschwinden. Sind aber δ_1 und $\frac{n}{\delta_1\delta_3}$ theilerfremd, so ist δ_1 zu jedem Werthe von δ_2 und $\frac{n}{\delta_1\delta_2\delta_3}$ theilerfremd und man hat

$$\chi(\delta_1\delta_2) = \chi(\delta_1)\chi(\delta_2)$$

$$\left(\frac{D_1\frac{n^2}{\delta_1^2\delta_2^2\delta_3^2}}{\delta_1}\right) = \left(\frac{D_1}{\delta_1}\right)\left(\frac{\frac{n}{\delta_1\delta_2\delta_3}}{\delta_1}\right)^2 = \left(\frac{D_1}{\delta_1}\right),$$

da $\left(\frac{\frac{n}{\delta_1\delta_2\delta_2}}{\delta_1}\right)^2$ den Werth 1 oder 0 hat, je nachdem δ_1 ungerade oder gerade ist. Die Summe der Glieder der Gruppe ist daher

$$= \chi(\delta_1)\left(\frac{D_1}{\delta_1}\right)\Sigma\chi(\delta_2),$$

wo die Summation sich auf alle Theiler δ_2 von $\frac{n}{\delta_1\delta_3}$ bezieht und daher ein verschwindendes Resultat liefert.

Es bleiben also nur diejenigen Gruppen übrig, in welchen $n = \delta_1\delta_3$ ist und welche nur aus einem, dem Theiler $\delta_2 = 1$ entsprechenden Gliede

$$\chi(\delta_1)\left(\frac{D_1}{\delta_1}\right)\delta_3 = \chi(\delta_1)\left(\frac{D_1}{\delta_1}\right)\frac{n}{\delta_1}$$

bestehen, und es wird

$$\begin{aligned}\Theta(n^2) &= \Sigma\chi(\delta_1)\left(\frac{D_1}{\delta_1}\right)\frac{n}{\delta_1}\\ &= n\Pi\left((1-\left(\frac{D_1}{p}\right)\frac{1}{p}\right)\end{aligned}$$

wo das Summenzeichen auf alle Theiler δ_1 von n und das Productzeichen auf alle Primfactoren p von n zu beziehen ist.

9.

Gauss bestimmt die Anzahl der Classen des Hauptgeschlechts, indem er beweist, dass dieselben mit den Classen zusammenfallen, welche aus der Duplication aller primitiven Classen hervorgehen.

Bezeichnet Γ den Inbegriff aller primitiven ambigen Classen der Determinante D und ΓK den Inbegriff aller Classen, welche aus der Zusammensetzung der Classe K mit allen Classen von Γ hervorgehen, so lassen sich alle primitiven Classen in einen oder mehrere Inbegriffe

$$\Gamma K_0,\ \Gamma K_1, \ldots \Gamma K_{\mu-1}$$

vertheilen. Da aus jeder ambigen Classe durch Duplication die Hauptclasse K_0 entsteht, so bringen alle Classen eines Inbegriffs ΓK_i durch Duplication dieselbe Classe K_i^2 hervor und es können daher durch Duplication aller primitiven Classen nur höchstens die μ Classen

$$K_0^2, K_1^2, \ldots K_{\mu-1}^2 \tag{3}$$

entstehen. Diese sind aber auch wirklich alle untereinander verschieden. Denn aus der Annahme

$$K_\beta^2 = K_\alpha^2$$

würde

$$(K_\beta K_\alpha')^2 = (K_\alpha K_\alpha')^2 = K_0$$

hervorgehen, wo K_α' die entgegengesetzte Classe von K_α bezeichnet; es wäre also $K_\beta K_\alpha'$ eine ambige Classe L und gegen die Annahme $K_\beta = LK_\alpha$.

Alle Classen (3) gehören dem Hauptgeschlechte an und es erhellt, dass dieselben dieses Geschlecht genau erschöpfen müssen, wenn man darthun kann, dass jede Classe des Hauptgeschlechtes durch Duplication entsteht.

Es ist also zu beweisen, dass jede gegebene primitive Form F des Hauptgeschlechts einer Form $\varphi\bar{\varphi}$ äquivalent ist, welche aus der Duplication einer primitiven Form φ entsteht.

Zu diesem Ende soll zunächst dargethan werden, dass F im Stande ist, Quadratzahlen darzustellen. Man darf hiebei unbeschadet der Allgemeinheit annehmen, dass der erste Coëfficient von F zu $2D$ theilerfremd ist.

Es sei

$$F = AX^2 + 2BXY + CY^2$$

und

$$A = A_0 g^2 \qquad D = D_0 h^2,$$

wo g^2, h^2 die grössten in A, D aufgehenden quadratischen Theiler bezeichnen. Da h zu A_0 theilerfremd ist, so kann man eine Zahl B_0 bestimmen, welche der Congruenz

$$hB_0 \equiv B \qquad (\text{mod } A_0)$$

genügt, und es wird

$$h^2 B_0^2 \equiv B^2 \equiv D \equiv h^2 D_0 \qquad (\text{mod } A_0).$$

Hebt man h^2 fort, so ergibt sich

$$B_0^2 \equiv D_0 \qquad (\text{mod } A_0)$$

und man hat

$$D_0 = B_0^2 - A_0 C_0,$$

wo C_0 eine ganze Zahl bezeichnet. Wird nun

$$A_0 x^2 + 2B_0 xy + C_0 y^2 = f$$
$$hB_0 = B + lA_0$$

gesetzt, so ist identisch

$$F(hx+ly, g^2 y) = g^2 h^2 f(x, y)$$

und es genügt darzuthun, dass die Form f Quadratzahlen darstellt, oder die Gleichung

$$A_0 x^2 + 2B_0 xy + C_0 y^2 - z^2 = 0$$

in ganzen Zahlen x, y, z lösbar ist.

Setzt man

$$x = \xi - B_0 \eta$$
$$y = A_0 \eta$$
$$z = A_0 \zeta$$

so ergibt sich nach Forthebung von A_0 für ξ, η, ζ die Gleichung

$$\xi^2 - D_0 \eta^2 - A_0 \zeta^2 = 0,$$

welche zu den von Lagrange und Legendre gelösten gehört.

Dieselbe erfüllt alle Lösbarkeitsbedingungen. Denn ihre Coëfficienten $1, -D_0, -A_0$ sind ohne quadratischen Theiler, paarweise theilerfremd und nicht von gleichen Vorzeichen. Ferner sind die negativen Producte je zweier

$$-A_0 D_0, \quad A_0, \quad D_0$$

beziehungsweise quadratische Reste von

$$1, \quad D_0, \quad A_0.$$

Dass D_0 Rest von A_0 ist, folgt aus der Gleichung $D_0 = B_0^2 - A_0 C_0$. Dass A_0 Rest von D_0 ist, erhellt unmittelbar, wenn es feststeht, dass A Rest von D ist; denn aus einer Congruenz

$$A = g^2 A_0 \equiv q^2 \qquad (\text{mod } D)$$

folgt, wenn $gg_1 \equiv 1 \pmod{D_0}$ ist,

$$A_0(gg_1)^2 \equiv A_0 \equiv (g_1 q)^2 \pmod{D_0}.$$

Dass aber A Rest von D ist, folgt daraus, dass A eine zu D theilerfremde, durch F darstellbare Zahl und F eine Form des Hauptgeschlechts ist, da A demzufolge nicht nur Rest von den einzelnen etwaigen ungeraden Primfactoren von D, sondern auch von der höchsten, in D aufgehenden Potenz von 2 ist.

Man kann also nach dem Lagrange'schen Verfahren eine ganzzahlige Lösung ξ, η, ζ der obigen Gleichung ermitteln und es ist klar, dass ζ nicht $= 0$ sein kann, da andernfalls aus der Gleichung $\xi^2 - D_0\eta^2 = 0$ auch $\xi = \eta = 0$ folgen würde.

Stellt aber die Form F eine Quadratzahl k^2 dar, so ist sie einer primitiven Hilfsform (m^2, b, c) von k^2 äquivalent, deren erster Coëfficient ein Quadrat ist.

Es lässt sich nun weiter zeigen, dass jede primitive Form $\psi = (m^2, b, c)$, welche zum Hauptgeschlechte gehört und schlicht ist, durch Duplication entsteht.

Es sei μ der grösste gemeinschaftliche Theiler von m und b, δ' der von m und 2 und δ'' der von δ' und $\frac{b+m}{\mu}$. Die Zahl $\mu\delta'\delta''$ kann nur gerade sein, wenn $\delta' = 2$ ist, und ist zu c theilerfremd. Hätten nämlich c und $\mu\delta'\delta''$ einen Primtheiler gemein, so müsste derselbe in μ oder δ', also jedenfalls in m^2, $2b$ und c aufgehen, was der Primitivität der Form ψ widerspricht.

c ist quadratischer Rest von jeder etwa in $\mu\delta'\delta''$ aufgehenden ungeraden Primzahl p. Denn c ist durch ψ darstellbar und p geht in μ, also auch in m, b und $D = b^2 - m^2 c$ auf.

Ist die Zahl $\mu\delta'\delta''$ gerade und 2^π die höchste in derselben aufgehende Potenz von 2, so ist c auch quadratischer Rest von 2^π. Dies bedarf nur eines Beweises, wenn $\pi > 1$, also μ gerade ist. Man hat

$$\frac{D}{\mu^2} = \frac{b^2 - m^2 c}{\mu^2} = \frac{b^2 - m^2}{\mu^2} + \frac{m^2}{\mu^2}(c-1)$$
$$\equiv \delta'' \pmod{2},$$

weil $\frac{b+m}{\mu}$ und $\frac{b-m}{\mu}$ bei ungeradem δ'' beide ungerade sind.

Hieraus folgt aber

$$D \equiv \delta''\mu^2 \equiv \mu\delta'\delta''+8\delta''.\frac{1}{2}\cdot\frac{\mu}{2}\left(\frac{\mu}{2}-1\right) \qquad (\text{mod } 2\mu^2)$$

$$\equiv \mu\delta'\delta'' \qquad (\text{mod } 8)$$

und es ist also entweder gleichzeitig

$$\mu\delta'\delta'' \equiv 4 \qquad D\equiv 4 \quad (\text{mod } 8) \qquad \pi = 2$$

$$(-1)^{\frac{c-1}{2}} = 1 \qquad c\equiv 1 \quad (\text{mod } 4)$$

oder gleichzeitig

$$\mu\delta'\delta'' \equiv 0 \qquad D\equiv 0 \quad (\text{mod } 8) \qquad \pi > 2$$

$$(-1)^{\frac{c-1}{2}} = 1 \qquad (-1)^{\frac{c^2-1}{8}} = 1 \qquad c\equiv 1 \qquad (\text{mod } 8).$$

Die Congruenz

$$z^2 \equiv c \qquad (\text{mod } \mu\delta'\delta'')) \tag{4}$$

ist daher immer lösbar. Sie ist aber auch so lösbar, dass die Zahl $\frac{b+mz}{\mu\delta''}$ theilerfremd zu μ ausfällt.

Dass diese Zahl für jede Wurzel z der vorstehenden Congruenz ganz ist, folgt daraus, dass z in dem Falle $\delta''=2$ ungerade, also

$$\frac{b+mz}{\mu} \equiv \frac{b+m}{\mu} \equiv 0 \qquad (\text{mod } \delta'')$$

ist.

Für jede in $\mu\delta'\delta''$ genau aufgehende Primzahlpotenz p^π gibt es zwei ungerade Wurzeln ζ und $-\zeta$ der Congruenz

$$z^2 \equiv c \qquad (\text{mod } p^\pi)$$

und es muss eine der beiden Zahlen $\frac{b+m\zeta}{\mu\delta''}$, $\frac{b-m\zeta}{\mu\delta''}$ zu p theilerfremd sein. Wären nämlich beide durch p theilbar, so wären es auch $\frac{2}{\delta''}\cdot\frac{b}{\mu}$ und $\frac{2}{\delta''}\cdot\frac{m}{\mu}$ und daher auch $\frac{2}{\delta''}$, weil $\frac{q}{\mu}$ und $\frac{m}{\mu}$ theilerfremd sind; es müsste also $p=2$, $\delta''=1$ sein,

was unmöglich ist, da $\frac{b+m\zeta}{\mu} \equiv \frac{b+m}{\mu} \equiv \delta''$ (mod 2) ist. Man darf also annehmen, dass $\frac{b+m\zeta}{\mu\delta''}$ zu p theilerfremd ist. Bestimmt man dann eine Zahl z, welche in Bezug auf die einzelnen Primzahlpotenzen p^π von $\mu\delta'\delta''$ der jeweiligen Wurzel ζ congruent ist, so genügt dieselbe der Congruenz (4) und es wird

$$\frac{b+mz}{\mu} \equiv \frac{b}{\mu} + \frac{m}{\mu}\zeta \qquad (\text{mod } p)$$

Die Zahl $\frac{b+mz}{\mu\delta''}$ kann also durch keinen ungeraden Primfactor von μ theilbar sein. Sie muss aber auch ungerade sein, wenn μ gerade ist, da alsdann $2^\pi \geqq 4$, also

$$\frac{b+mz}{\mu} \equiv \frac{b}{\mu} + \frac{m}{\mu}\zeta \qquad (\text{mod } 4)$$

und

$$\frac{b+mz}{\mu\delta''} \equiv \frac{b+m\zeta}{\mu\delta''} \qquad (\text{mod } 2)$$

ist.

Dieselbe Zahl $\frac{b+mz}{\mu\delta''}$ ist aber auch zu $\frac{m}{\mu}$ theilerfremd, weil $\frac{m}{\mu}$ zu $\frac{b}{\mu}$, also auch zu $\frac{b+mz}{\mu}$ und umsomehr zu $\frac{b+mz}{\mu\delta''}$ theilerfremd ist. Wenn aber μ und $\frac{m}{\mu}$ zu $\frac{b+mz}{\mu\delta''}$ theilerfremd sind, so gilt dasselbe von dem Product $\mu\cdot\frac{m}{\mu} = m$. Weil endlich m und $\frac{2}{\delta'}$ theilerfremd sind, so sind es auch m und $\frac{2(b+mz)}{\mu\delta'\delta'}$ und $\mu\delta'\delta''$ ist der grösste gemeinschaftliche Theiler von $m\mu\delta'\delta''$ und $2(b+mz)$.

Setzt man nun

$$l = \frac{(b+mz)^2-D}{m\mu\delta'\delta''} = z\cdot\frac{2(b+mz)}{\mu\delta'\delta''} - m\cdot\frac{z^2-c}{\mu\delta'\delta''}$$

$$\varphi = (m\mu\delta'\delta'',\ b+mz,\ l),$$

so ist φ eine primitive Form, welche, mit sich selbst zusammengesetzt, ψ hervorbringt.

Dass φ primitiv ist, folgt daraus, dass die Coëfficienten $m\mu\delta'\delta''$ und $2(b+mz)$ nur solche Primtheiler gemein haben können, welche in ihrem grössten gemeinschaftlichen Theiler $\mu\delta'\delta''$ aufgehen; ein solcher Primtheiler geht aber in m auf und kann in l nicht aufgehen, weil er weder in z noch in $\frac{2(b+mz)}{\mu\delta'\delta''}$ aufgehen kann.

Wird die Form $\varphi\bar{\varphi}$ mit $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C})$ bezeichnet und eine Lösung der Gleichung

$$m\mu\delta'\delta''\alpha + 2(b+mz)\gamma = \mu\delta'\delta''$$

ermittelt, so ist

$$\mathfrak{A} = \left(\frac{m\mu\delta'\delta''}{\mu\delta'\delta''}\right)^2 = m^2$$

$$\mathfrak{B} \equiv \alpha m(b+mz) + \gamma \frac{D+(b+mz)^2}{\mu\delta'\delta''} \qquad (\text{mod } m^2).$$

Zieht man von dieser Congruenz die mit $\frac{b}{\mu\delta'\delta''}$ multiplicirte Gleichung zwischen α, γ ab, so folgt

$$\begin{aligned} \mathfrak{B} - b &\equiv \alpha m^2 z + \gamma \frac{D - b^2 + m^2 z^2}{\mu\delta'\delta''} \\ &\equiv \left(\alpha z + \gamma \cdot \frac{z^2 - c}{\mu\delta'\delta''}\right) m^2 \\ &\equiv 0 \qquad (\text{mod } m^2). \end{aligned}$$

Es ist also $\mathfrak{B} = b$ und demnach

$$(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}) = \varphi\bar{\varphi} = \psi.$$

Beitrag zur Construction von Krümmungskugeln an Raumcurven

von

J. Sobotka.

I.

Verbinden wir, vier consecutive Punkte einer Raumcurve durch eine Kugel, so nennen wir diese eine Krümmungskugel der Curve. Die Entwicklung einer Construction der Krümmungskugel in einem Punkte für irgend eine Raumcurve und die Anwendung dieser Construction auf die cubischen Raumcurven und auf die Raumcurven vierter Ordnung erster Art machen den Gegenstand vorliegender Betrachtungen aus. Vorerst möge aber folgende Erwägung vorausgeschickt werden.

1. Es seien u und v die Axen eines Strahlennetzes, h sei der zu beiden normale Hauptstrahl desselben, O der Mittelpunkt der auf ihm durch u und v abgegrenzten Strecke, ω die durch O gelegte Normalebene von h und schliesslich μ die unendlich entfernte Ebene.

Durch das Strahlennetz wird zwischen den Ebenen ω und μ eine Collineation hergestellt, in der sich solche Punkte A, $\mathfrak{A}$ entsprechen, welche Schnitte desselben Strahles sind. Bilden wir die Ebene μ polar in Bezug auf den in ihr liegenden absoluten Kreis ab, so erhalten wir in μ ein Strahlenfeld, welches mit dem Punktefeld in ω correlativ ist und mit ihm somit eine Fläche zweiter Classe P erzeugt. Diese Fläche ist, wie leicht zu sehen, ein orthogonales Paraboloid, für welches O der Scheitel und h die Axe ist; die Winkelhalbirenden u', v' der

Geraden u, v, die man in ω durch O zieht, sind die Scheitelgeraden von P.

Unsere Correlation führt uns zu einer eindeutigen Abbildung der Strahlen des Netzes in die Ebenen des Paraboloids P und umgekehrt.

Da in der eben angeführten Correlation den Punkten einer Geraden m in ω die Strahlen eines Büschels $\mathfrak{M}'$ in μ entsprechen, so wird durch unsere Abbildung die auf m sich stützende Regelschaar des Netzes in den durch $\mathfrak{M}'$ gehenden Ebenenbüschel zweiter Ordnung der Fläche P übergeführt. Dieser Ebenenbüschel hüllt in ω eine Parabel m^2 ein, welche m und ausserdem die Geraden u', v' berührt. Dadurch wird in der Ebene ω dem Strahlenfeld $[m]$ eine Parabelschaar-Schaar $[m^2]$ projectiv zugeordnet.

Es sei nun q ein beliebiger Strahl des Netzes. Durch ihn geht ein ganzer Büschel (R) von Regelschaaren hyperbolischer Paraboloide, welcher in unserem Strahlennetz enthalten ist und in ω einen zu ihm perspectiven Strahlenbüschel erster Ordnung (m) einschneidet, dessen Mittelpunkt der Spurpunkt Q von q ist. Dem Büschel (m) ist nach Vorigem eine Parabelnschaar (m^2) projectiv zugeordnet, deren sämmtliche Parabeln die Spur n der durch Q gehenden Normalebene N des Strahles q zur gemeinschaftlichen Tangente haben. Dabei ist die Reihe der Berührungspunkte der Parabeln in (m^2) mit n zu (m) projectiv. Da jede Parabel m^2 in (m^2) die Spur eines Tangentialebenenbüschels zweiter Ordnung von P ist, welcher durch unsere Abbildung einer Regelschaar R in (R) entspricht, so ist der Berührungspunkt von m^2 mit n der Spurpunkt in ω für die Schnittgerade c der unendlich benachbarten Tangentialebenen von P, die dem Strahle q und dem ihm auf R unmittelbar folgenden Strahle q_R des Strahlennetzes entsprechen. Die Schnittgerade c muss also durch den Berührungspunkt C von N mit dem orthogonalen Paraboloid P gehen.

Daraus erkennen wir, dass sich die Gerade c in einem zu (R) projectiven Büschel, welcher C zum Mittelpunkte hat, bewegt, wenn wir die Fläche R den Büschel (R) durchlaufen lassen. Wenn wir nun die Ebene ω Mittelebene des Strahlennetzes und irgend einen Strahl desselben mit den sämmt-

lichen ∞^1 in ihm liegenden Nachbarstrahlen ein Strahlensystemelement mit q als Ausgangsstrahl nennen, so können wir unser Ergebniss folgendermassen zusammenfassen:

»Die Normalebenen der Strahlen eines Strahlensystemelementes (q) im Strahlennetze durch deren Spurpunkte in der Mittelebene des Strahlennetzes schneiden sich insgesammt in einem Punkte. Das Strahlensystemelement ist zu demjenigen Strahlenbüschel um diesen Punkt, welcher in der Normalebene des Ausgangsstrahles durch alle übrigen eingeschnitten wird, projectiv.«

2. Nach dieser Abschweifung wenden wir uns unserer eigentlichen Aufgabe zu. Es sei r eine Raumcurve, q irgend ein Strahl ihrer Sehnencongruenz, der also zwei Punkte U, V der Curve verbindet. Diese Sehnencongruenz wird längs des Strahles q von einem Strahlennetz berührt, d. h. sie hat auch die zu q unendlich benachbarten Strahlen mit einem Strahlennetze gemeinsam. Die Tangenten u, v in U, respective V an die Curve r sind die Axen des berührenden Strahlennetzes.

Die Halbirungspunkte aller Sehnen der Curve r liegen auf einer Fläche Γ. Diese geht natürlich auch durch den Halbirungspunkt Q der Sehne q und hat in Q die Mittelebene ω des berührenden Strahlennetzes zur Tangentialebene. Der Punkt C, zu dem wir zuvor gelangt sind, ist der Mittelpunkt der Kugel, welche r in U und V berührt. Auf diese Weise könnte man zur Construction von Kugeln gelangen, welche eine Raumcurve in zwei Punkten berühren, auch für den Fall, wenn die Punkte conjugirt imaginär sind.

An unseren Erwägungen ändert sich nichts, wenn die Axen u, v unendlich benachbart sind, ohne sich zu schneiden. Dieser specielle Fall auf die Curve r angewendet führt uns zur Construction der Krümmungskugel K derselben in irgend einem auf ihr gelegenen Punkte A.

Es sei q die Tangente der Curve r in A. Die ihr beiderseitig benachbarten Tangenten sind die Axen des zu Hilfe genommenen Strahlennetzes, welchem alle Nachbarstrahlen von q der auf r sich stützenden Sehnencongruenz angehören. Die Mittelebene ω des Netzes wird nun zur Schmiegungsebene

von r in A; sie berührt in A nach Früherem auch die alle Sehnen halbirende Fläche Γ.

Denken wir uns durch den unendlich fernen Punkt $\mathfrak{Q}$ von q irgend eine Ebene λ gelegt, so ist auch ihr eine Fläche Γ' in derselben Weise zugeordnet, wie der unendlich fernen Ebene die Fläche Γ. Einem Punkte X in λ entspricht nämlich ein Punkt X' auf Γ' derart, dass (XX') eine Sehne von r ist, und dass beide Punkte X, X' harmonisch conjugirt sind in Bezug auf das Schnittpunktepaar (im besonderen Falle auf jedes Schnittpunktepaar) von (XX') mit r. Man pflegt den Punkt X' den conjugirten Punkt zu X und die Fläche Γ' die conjugirte Fläche zur Ebene λ in Bezug auf die Raumcurve r zu nennen.

Dem Ebenenbündel durch $\mathfrak{Q}$ ist ein zweifach unendliches Flächensystem $[\Gamma']$ in der Art conjugirt. Bezeichnen wir ferner mit q' irgend einen Nachbarstrahl von q in der Sehnencongruenz, mit $\mathfrak{Q}'$ seinen unendlich fernen Punkt und mit Q' den Halbirungspunkt der unendlich kleinen Sehne von r auf q'; weiter sei $\mathfrak{Q}'_\lambda$ der Schnittpunkt von q' mit λ und Q'_λ der zu ihm in Bezug auf r conjugirte Punkt. Wir sehen sofort, dass die Entfernung $\overline{Q'Q'_\lambda}$ unendlich klein von der zweiten Ordnung ist; es sind somit die Geraden (AQ'), (AQ'_λ) unendlich benachbart und fallen demnach beide in die Schmiegungsebene ω hinein. Demgemäss ist die Schmiegungsebene ω gemeinschaftliche Berührungsebene aller Flächen des Systems $[\Gamma']$. Dies erhellt übrigens sofort auch aus der Construction der conjugirten Punkte in ω.

Nebenbei bemerken wir, dass, was für A gilt, in dieser Hinsicht für jeden Punkt der Curve r seine Giltigkeit beibehält, dass also die Schmiegungsebene von r in irgend einem Punkte gemeinschaftliche Tangentialebene dieses Punktes für die conjugirten Flächen sämmtlicher Ebenen des Raumes ist. Die Curve r ist sonach eine asymptotische Curve für die in Bezug auf sie conjugirte Fläche einer jeden Ebene des Raumes.

Aus dem Erläuterten entnehmen wir folgende Construction des Mittelpunktes C für die Krümmungskugel K der Curve r im Punkte A.

Durch die Tangente q in A an r ist ein Parallelstrahlenbündel bestimmt. Wir wählen in demselben irgend eine Gerade

m, gleichgiltig ob im Endlichen oder in der unendlich entfernten Ebene und denken uns die auf m sich stützende Regelfläche F der Sehnencongruenz von r. Die Tangentialebene ω dieser Fläche in A ist zugleich Schmiegungsebene dieses Punktes für r. Weiter ermitteln wir die in ω liegende Tangente t in A an die Curve m', welche der Geraden m in Bezug auf r in der früher angegebenen Weise conjugirt ist. Bezeichnen wir mit q' den Nachbarstrahl von q auf der Fläche F, so ist der Schnitt c der Normalebene N in A von q mit der Normalebene von q' im Punkte (tq') ein Durchmesser der Kugel K.

Legen wir nun durch den infinitesimalen Flächenstreifen (qq') irgend ein hyperbolisches Paraboloid, welches t zur Leitgeraden hat, und errichten zu jedem Strahle q_x seiner Regelschaar die Normalebene im Punkte (tq_x), so werden alle diese Normalebenen eine parabolische Cylinderfläche V einhüllen, welche zu der asymptotischen Ebene des Flächenstreifens normal ist und die Ebene N in der gesuchten Geraden c berührt.

Um die Construction möglichst einfach zu gestalten, wird man etwa in die Schmiegungsebene ω orthogonal projiciren und die Normalebene durch t zu ω als Richtungsebene des eben erwähnten hyperbolischen Paraboloids wählen. Ist F der Berührungspunkt mit F für die projicirende Ebene ρ von q — (rectificirende Ebene von r in A) —, so ist die Spur von V in ω eine Parabel, welche F zum Brennpunkte und t zur Scheiteltangente hat und die Spur der Ebene N in einem Punkte des fraglichen Durchmessers c berührt. Da dieser Durchmesser normal zur asymptotischen Ebene (qm) ist, so ist er hiedurch vollkommen bestimmt.

Hätten wir statt in ω in irgend eine zu t parallele Ebene projicirt, so würden wir natürlich die Normalebene durch t zu dieser Projectionsebene als Richtebene für das Hilfsparaboloid angenommen haben.

Wählt man in dem durch q bestimmten Parallelstrahlenbündel eine zweite ausserhalb der Ebene (qm) liegende Gerade n, so gelangt man durch Wiederholung des gegebenen Verfahrens zu einem zweiten Durchmesser c' von K, dessen Schnittpunkt mit c den Mittelpunkt C von K liefert. Die Senkrechte von C

auf ω ist die zu A gehörige Krümmungsaxe von r; sie trifft ω im Krümmungsmittelpunkte von r in A.

3. Alle Regelflächen F, F',... durch q, die in der Sehnencongruenz von r enthalten sind, haben im Punkte A und in dem ihm auf r unmittelbar folgenden Punkte gemeinsame Berührungsebenen, nämlich ω und die Nachbarebene im Ebenenbüschel durch q. Es sind dies die dem Strahle q der Congruenz gehörigen Brennebenen.

Von dieser Eigenschaft kann man mit Vortheil Gebrauch machen. Um beispielsweise den Berührungspunkt F' der Ebene ρ mit F' zu ermitteln, stellen wir eine Projectivität in dem Ebenenbüschel um q her, indem wir einander diejenigen Berührungsebenen von F, respective F' zuweisen, welche denselben Berührungspunkt haben. Die Doppelebenen dieser Projectivität fallen in ω zusammen; dieselbe ist also nebstdem durch das Entsprechen der Ebenen (qm), (qn) völlig bestimmt. Daraus wird die Ebene im ersten Büschel, welcher die Ebene ρ im zweiten Büschel entspricht, sehr einfach gefunden; sie berührt F in F'.

Der Zusammenhang dieser Projectivitäten wird in der zweiten Aufgabe des nächsten Abschnittes in einer für die Darstellung sehr bequemen Weise zum Ausdrucke gebracht.

II.

Construction von Krümmungskugeln der cubischen Raumcurven.

1. Die vorigen Auseinandersetzungen sollen zur Lösung folgender Aufgabe verwendet werden.

Eine cubische Raumcurve r^3 ist durch fünf Punkte A, B, C, D, E und die Tangente q in A gegeben; es soll die Krümmungskugel K der Curve für den Punkt A construirt werden.

Ich nehme in dem durch q bestimmten Parallelstrahlenbündel die Strahlen m und m_1 so an, dass der erste von ihnen etwa durch den Punkt B, der zweite durch den Punkt C geht. Die Sehnen von r^3, die sich auf $\left.\begin{matrix} m \\ m_1 \end{matrix}\right\}$ stützen, bilden eine

Regelschaar $\left.\begin{matrix}\mathrm{F}\\ \mathrm{F}'\end{matrix}\right\}$; die zu $\left.\begin{matrix}m\\ m_1\end{matrix}\right\}$ in Bezug auf r^3 conjugirte Curve $\left.\begin{matrix}m'\\ m'_1\end{matrix}\right\}$ artet, da $\left.\begin{matrix}m\\ m_1\end{matrix}\right\}$ eine Secante von r^3 ist, in einen Kegelschnitt durch $\left.\begin{matrix}B\\ C\end{matrix}\right\}$ und die Tangente in $\left.\begin{matrix}B\\ C\end{matrix}\right\}$ an r^3 aus. Die Schnittgerade der Ebene $\left.\begin{matrix}\beta\\ \gamma\end{matrix}\right\}$ dieses Kegelschnittes mit der Schmiegungsebene ω im Punkte A ist die Tangente $\left.\begin{matrix}t\\ t'\end{matrix}\right\}$ dieses Punktes für die conjugirte Curve.

Daraus geht die nachstehende Anordnung hervor:

α) Wir legen durch B und C die Parallelebene $\varkappa$ zu q und bestimmen in ihr den dritten Schnittpunkt S mit r^3.

Dies kann nach der Chasles'schen Construction bewerkstelligt werden. Ist nämlich A' der Nachbarpunkt von A auf r^3, so schneiden die Flächen des Tetraëders $AA'DE$ die Ebene $\varkappa$ in einem Vierseit, welches mit der Geraden (BC) fünf Tangenten eines Kegelschnittes l^2 bestimmt, dessen von (BC) verschiedene Tangenten durch B und C sich in dem Punkte S durchschneiden.

β) Wir ziehen durch S die Parallele zu q, bis sie (BC) in S' trifft und halbiren in J die Strecke $\overline{SS'}$. Alsdann ist $\beta \equiv (AJB)$, $\gamma \equiv (AJC)$. Denn (CS) ist eine Sehne von r^3, und die Gerade, welche den zum Schnittpunkte von m und (SC) conjugirten Punkt in Bezug auf r^3 mit B verbindet, geht durch den Punkt J und gehört der Ebene β an. Aus gleichen Gründen gehört J auch der Ebene γ an.

γ) Die Secanten von r^3, die sich auf q und $\left.\begin{matrix}(CS)\\ (BS)\end{matrix}\right\}$ stützen, bilden die Leitschaar von $\left.\begin{matrix}\mathrm{F}\\ \mathrm{F}'\end{matrix}\right\}$. Die Ebene (qD) wird von $\left.\begin{matrix}(CS)\\ (BS)\end{matrix}\right\}$ in einem Punkte durchbohrt, dessen Verbindungsgerade mit D auf q den Berührungspunkt der Ebene (qD) mit $\left.\begin{matrix}\mathrm{F}\\ \mathrm{F}'\end{matrix}\right\}$ bestimmt. Ebenso ermittelt man den Berührungspunkt der Ebene (qE) mit $\left.\begin{matrix}\mathrm{F}\\ \mathrm{F}'\end{matrix}\right\}$. Da man überdies die asymptotische Ebene $\left.\begin{matrix}(qm)\\ (qm_1)\end{matrix}\right\}$ kennt, so ist man in der Lage, ebensowohl den Berührungspunkt $\left.\begin{matrix}F\\ F'\end{matrix}\right\}$ der rectificirenden Ebene von r^3 im Punkte A

mit $\left.\begin{matrix} \mathrm{F} \\ \mathrm{F}' \end{matrix}\right\}$ als auch die Schmiegungsebene ω einfach zu ermitteln.

Wie man jetzt weiter fortfährt, um schliesslich die Durchmesser c, c' der Krümmungskugel K zu bekommen, ist dem früher Erläuterten leicht zu entnehmen.

2. Ist die cubische Raumcurve r^3 durch vier Punkte A, B, C, D und den Krümmungskreis k^2 von A gegeben, so kann man bei der Lösung unserer Aufgabe den folgenden Weg einschlagen.

Wir nehmen die Schmiegungsebene ω des Punktes A als erste, seine Normalebene ν als zweite Projectionsebene an. Die Schnittgerade n beider Ebenen ist die Hauptnormale des Punktes A.

Zunächst projiciren wir r^3 etwa von B als Projectionscentrum in die Ebene ω. Die Projection ist ein Kegelschnitt o^2, welcher k^2 in A osculirt und durch die Projectionen von C und D hindurchgeht, demnach also hinreichend bestimmt ist. Die Axe centrischer Collineation zwischen o^2 und k^2, für die A das Collineationscentrum ist, schneidet den Kreis k^2 ausser in A noch in einem Punkte, dessen Verbindungsgerade s mit B eine Sehne von r^3 ist. Wir construiren für einen späteren Zweck diese Sehne; gleichzeitig construiren wir auch die Polarebene der durch B zur Tangente q in A gelegten Parallelen m; ihre Spur t in ω erhält man äusserst einfach. Dieselbe ist die Tangente in A an den zu m in Bezug auf r^3 conjugirten Kegelschnitt m'.

Jetzt handelt es sich noch darum, den Berührungspunkt F der rectificirenden Ebene in A mit der Fläche F der auf m sich stützenden Sehnenregelschaar aufzufinden.

Wir nehmen da die Fläche zweiten Grades F′, welche r^3 mit dem Sehnenpaar qs verbindet, zu Hilfe und projiciren nun orthogonal in ω und ν.

Die Ebene (qC) wird von s in einem Punkte durchbohrt, dessen Verbindungsgerade mit C auf q den Berührungspunkt L von (qC) mit F′ einschneidet. In gleicher Weise erhalten wir den Berührungspunkt M von (qD) mit F′. Um die Projectivität der Ebenen des Büschels um q mit der Reihe ihrer Berührungspunkte auf q mit F′ für unsere Darstellung bequem zu ver-

mitteln, construiren wir nach Mannheim ein hyperbolisches Paraboloid P′, welches F′ längs q berührt und ν zur Richtungsebene hat. Dieses Paraboloid enthält die Gerade n und wird in Folge dessen von jeder Ebene durch n noch in einer zweiten Geraden geschnitten. Unter diesen Geraden befindet sich eine G, deren erste und zweite Abbildung in der üblichen Anordnung der Projectionsbilder identisch sind. Diese Gerade liegt bekanntlich in der einen Halbirungsebene χ der durch ν und ω gebildeten rechten Winkel.

Wir wollen, wie man es auch sonst zu thun pflegt, das Bild der ersten Projection eines Gebildes Λ mit Λ_1, das der zweiten mit Λ_2 bezeichnen. Es liefert alsdann der Schnittpunkt der Parallelen zu $n_{1.2}$ durch L_1 mit $(qC)_2$ einen Punkt des Doppelbildes $G_{1.2}$, der Schnittpunkt der Parallelen zu $n_{1.2}$ durch M_1 mit $(qD)_2$ einen zweiten. $G_{1.2}$ schneidet $n_{1.2}$ in dem Doppelbilde des Berührungspunktes der Ebene χ mit P′. Überdies ist $G_{1.2}$ parallel zum zweiten Bilde der asymptotischen Ebene durch q für P′, also auch für F′.

Um jetzt den fraglichen Punkt F einfach zu ermitteln, denken wir uns für die Fläche F das Berührungsparaboloid P längs q, welches gleichfalls ν zur Richtungsebene hat. Die beiden Paraboloide P′, P berühren sich längs n; es berührt somit auch die Ebene χ beide Paraboloide in demselben Punkte auf n. Demgemäss schneidet die Parallele $H_{1.2}$ durch den Schnittpunkt von $G_{1.2}$ mit $n_{1.2}$ zu dem zweiten Bilde der asymptotischen Ebene (qm) das Bild q_1, wie aus dem Zusammenhange der Figur sofort entnommen werden kann, im Bilde F_1 von F.

Dies ist die Construction, auf welche wir zum Schlusse des ersten Abschnittes verwiesen haben.

Der weitere Vorgang wiederholt sich nun. Man fällt nämlich von F die Senkrechte auf t, bis sie etwa in I die Normale n schneidet und trägt $\overline{IA}$ von A aus auf n bis nach I' auf. Die Normale von I' auf (qm) ist ein Durchmesser der Krümmungskugel, welcher von der Normalen a, die man im Mittelpunkte von k^2 zu ω errichtet, im Mittelpunkte der Krümmungskugel K geschnitten wird.

3. Ist die Krümmungsaxe a des Punktes A gegeben, so wird in manchen Fällen sich empfehlen, den zu a parallelen

Schmiegungsstrahl aufzusuchen. Derselbe geht durch den Anschmiegungspunkt U der zu q parallelen Schmiegungsebene. Bringt man dann die Tangente des Punktes U an k^3 mit ω zum Schnitte, so ist die Verbindungsgerade m' dieses Schnittpunktes mit A ein zu m associirter Schmiegungsstrahl von r^3. Es ist also m' zu m in Bezug auf r^3 conjugirt und demnach ist hier die zuvor mit t bezeichnete Tangente identisch mit m'.

Diese Construction liefert eine schöne Anwendung auf die räumliche Parabel.

Es sei $\mathfrak{U}$ der unendlich ferne Punkt und $\mathfrak{u}$ seine gleichfalls im Unendlichen liegende Tangente der räumlichen Parabel. Die Verbindungsgerade des unendlich fernen Punktes von q mit $\mathfrak{U}$ wählen wir als die mit m bezeichnete Gerade. Da die räumliche Parabel der unendlich fernen Ebene sich in $\mathfrak{U}$ anschmiegt, so ist hier m ein Schmiegungsstrahl von r^3. Der Schnitt der Ebene $(A\mathfrak{u})$ mit ω ist die Gerade $m' \equiv t$ für den Punkt A.

Die Fläche F der auf m sich stützenden Sehnenregelschaar ist ein hyperbolisches Paraboloid. Bewegt sich A auf der räumlichen Parabel, dann bewegt sich F in einem Büschel von Flächen zweiter Ordnung und m' beschreibt eine Cayley'sche Regelfläche dritten Grades, für die $\mathfrak{u}$ die ausgezeichnete Gerade ist.

III.

Construction von Krümmungskugeln der Raumcurven vierter Ordnung erster Art.

1. Wir stellen uns hier zuerst die nachstehende Aufgabe: Eine biquadratische Raumcurve erster Art r^4 ist als Schnitt zweier Flächen zweiter Ordnung H_1, H_2 gegeben; man soll die Krümmungskugel K in einem beliebigen Punkte A derselben ermitteln.

α) Die Berührungsebene τ_1 in A an H_1 und die Berührungsebene τ_2 in A an H_2 schneiden sich in der Tangente q des Punktes A an r^4.

Alle Sehnen der biquadratischen Raumcurve erster Art r^4, welche eine gegebene Sehne derselben ausserhalb der Curve schneiden, bilden allgemein eine Regelschaar.

Von diesem bekannten Satze wollen wir hier Gebrauch machen.

Es sei q die gegebene Sehne und F sei die Fläche zweiter Ordnung, auf der die Sehnenregelschaar liegt, welche r^4 mit q, dem angeführten Satze gemäss, verbindet. Diese Fläche F werden wir selbstverständlich für unsere Construction als die Hilfsregelfläche durch q in der Sehnencongruenz von r^4 annehmen.

Zu allererst haben wir da zu den Punkten von q die zugehörigen Tangentialebenen mit F zu ermitteln.

Durch r^4 ist ein Büschel von Flächen zweiter Ordnung bestimmt, und wir wissen, dass die Polarebenen irgend eines Punktes L in Bezug auf sämmtliche Flächen des Büschels sich in einer einzigen Geraden l schneiden.

Ist also L ein Punkt auf q, so bestimmen wir den Schnitt l der Polarebenen dieses Punktes in Bezug auf H_1 und H_2; durch l geht dann auch die Polarebene von L in Bezug auf jede Fläche des Flächenbüschels, also auch die Berührungsebene λ in L an F. Bewegt sich L auf q, so beschreibt l einen Kegel zweiter Ordnung, nämlich den zu q in Bezug auf H_1 und H_2 doppelt conjugirten Kegel $Q_{1.2}$, dessen Gerade l auf die Punkte von q projectiv bezogen sind, und zwar in der Art, dass die Berührungsbene von F eines jeden Punktes L die correspondirende Gerade l enthält. Hiedurch ist jeder Geraden in der auf q sich stützenden Regelschaar von F eine Gerade des Kegels $Q_{1.2}$ projectiv zugeordnet. Das Erzeugniss beider ist eine cubische Raumcurve q', nämlich der von q verschiedene Schnitt der beiden Flächen F und $Q_{1.2}$. Die Gerade q ist auch Tangente von q'. Sämmtliche Flächen zweiter Ordnung, welche durch q und q' hindurchgelegt werden können, bilden einen Büschel und haben in A eine gemeinschaftliche Berührungsebene — die Schmiegungsebene von q' in A; diese ist die Tangentialebene ω von F in A. Wir ersehen daraus, dass ω auch den Kegel $Q_{1.2}$ längs q berührt. Da diese Ebene gleichzeitig, wie wir aus Früherem wissen, die Schmiegungsebene von r^4 in A ist, so sind wir nebenher zu dem folgenden Resultate gelangt.

»Die Schmiegungsebene einer biquadratischen Curve erster Art r^4 in einem Punkte A ist die Berührungsebene längs der Tangente der Curve in A für die conjugirte Kegelfläche dieser Tangente in Bezug auf den Büschel von Flächen zweiter Ordnung, welcher durch die biquadratische Curve gelegt werden kann.«

Eine andere Herleitung dieses Satzes gab Fr. Machovec in den Sitzungsberichten der k. böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Prag, Jahrgang 1890, S. 142 u. f.

β) In angegebener Weise bestimmen wir also die asymptotische Ebene ε mit der in ihr nebst q enthaltenen Geraden l_s von $Q_{1.2}$ und weiter noch in zwei für die Darstellung günstig gewählten Punkten von q die Berührungsebenen von F, woraus dann mit Leichtigkeit die Schmiegungsebene ω in A und der Berührungspunkt F der rectificirenden Ebene ρ mit F abgeleitet wird.

Der Krümmungsmittelpunkt des Kegelschnittes einer der Flächen H_1, H_2 in ω für den Punkt A wird nach bekannten Constructionen einfach erhalten; die Normale a in ihm zu ω ist die zu A gehörige Krümmungsaxe, also ein Durchmesser von K.

γ) Wir ziehen jetzt die Ebene ε näher in Betracht. Sie schneidet die Flächen H_1, H_2 beziehungsweise in den Kegelschnitten k_1^2, k_2^2, welche sich in A berühren und ausserdem in zwei Punkten schneiden, deren Verbindungsgerade m die zu q parallele Erzeugende von F ist. Die Gerade m wird als die Axe centrischer Collineation zwischen k_1^2, k_2^2 für A als Collineationscentrum erhalten. Man bringt k_1^2, k_2^2 mit zwei durch A gelegten Strahlen in K_1, K_1', respective K_2, K_2' zum Schnitte; die Verbindungsgeraden (K_1K_1'), (K_2K_2') schneiden sich in einem Punkte der Geraden m, wodurch dieselbe bereits bestimmt ist.

Die Berührungsebenen in A, K_1, K_1' an H_1 schneiden sich im Pole E_1 von ε bezüglich H_2; die Berührungsebenen in A, K_2, K_2' an H_2 schneiden sich im Pol E_2 von ε bezüglich H_2. Wir construiren thatsächlich diese Pole sowie die Pole M_1, M_2 von m in Bezug auf k_1^2, beziehungsweise k_2^2.

δ) Die Gerade m wählen wir als diejenige in dem durch q bestimmten Bündel, deren conjugirte Curve m' bezüglich r^4 wir nun in Betracht ziehen wollen.

Es sei U irgend ein Punkt auf m und u sei die ausser m durch U gehende Erzeugende von F; alsdann liegt der zu U in Bezug auf r^4 conjugirte Punkt U' auf u einerseits, auf der zu U in Bezug auf den Büschel von Flächen zweiter Ordnung durch r^4 conjugirten Geraden u' anderseits. Bewegt sich U auf m, so bewegt sich u durch die eine Geradenschaar von F und u' beschreibt bekanntlich eine zur Punktreihe auf m projective Regelschaar einer Fläche zweiter Ordnung C. Die Polaren von m bezüglich der Flächen unseres Flächenbüschels bilden die Schaar der Leitstrahlen auf der Fläche C.

Die Flächen F und C haben die Gerade m gemeinschaftlich und schneiden sich nebstdem noch in einer cubischen Raumcurve; diese ist, wie sich auf Grund unserer Betrachtung ergibt, die zu m in Bezug auf r^4 conjugirte Curve m'.

Die Tangente t in A an m', um deren Ermittelung es sich lediglich handelt, ist die Schnittgerade der Tangentialebene γ an C in A mit der Schmiegungsebene ω.

In unserem Falle ist die Fläche C durch die drei Polaren $(E_1 M_1)$, $(E_2 M_2)$, m der Geraden m bezüglich H_1, H_2, respective F vollkommen bestimmt.

Der Büschel von Ebenen durch l_ε ist projectiv zu der Reihe ihrer Berührungspunkte mit C. Diese Projectivität ist bereits bestimmt, da den Ebenen $[l_\varepsilon m]$, $[l_\varepsilon E_1]$, $[l_\varepsilon E_2]$ beziehentlich die Punkte $(l_\varepsilon m)$, M_1, M_2 correspondiren. Darnach sind wir in der Lage, aus dieser Projectivität die Berührungsebene γ in A und mithin auch t äusserst einfach zu ermitteln.

Wie man nun die Construction zu Ende führt, soll hier nicht von Neuem wiederholt werden.

2. Ist insbesondere r^4 als Durchdringungscurve zweier Kegel zweiten Grades gegeben, dann vereinfacht sich noch unsere Construction wie folgt.

Sind nämlich S_1, S_2 die Spitzen der Kegel, so suchen wir die weiteren drei Punkte B, C, D von r^4 in der Ebene $(S_1 S_2 A)$ und deren Tangenten q_B, q_C, q_D, welche mit q, wie leicht zu sehen, ein auf der Fläche F liegendes, windschiefes Vierseit bilden. Ist etwa q_D die Gegenseite von q in diesem Vierseit, so wird aus dem soeben angeführten Grunde q_D von der Ebene ε

in einem Punkte der Geraden m geschnitten, wodurch diese bereits bestimmt ist.

Ebenso ist durch diese Anordnung die Projectivität zwischen dem Ebenenbüschel um q und der Reihe der Berührungspunkte auf q mit F ohneweiters gegeben. Auch die Durchführung der übrigen hier vorzunehmenden Constructionen gestaltet sich besonders einfach.

Wäre r^4 durch die Flächen H_1 und F von vornherein gegeben, so würde man für die Fläche C nicht wie früher zwei Leitgerade, sondern zwei Gerade der Regelschaar, d. h. die in Bezug auf den Büschel von Flächen zweiter Ordnung conjugirten Geraden l_1, l_2 zweier Punkte auf m bestimmen, was mit Hilfe von F und H_1 allein geschehen kann. Die Transversale durch A zu l_1, l_2 stellt alsdann mit l_s die Ebene γ fest.

3. Die Durchführung der Construction wird beschwerlicher, wenn die biquadratische Curve r^4 in anderer als vorhin angeführter Art gegeben ist.

Kennen wir beispielsweise nebst dem Punkte A und seiner Tangente q noch sechs weitere, von einander unabhängige Punkte B, C, D, E, F, G von r^4 und sollen wir da die Krümmungskugel K des Punktes A ermitteln, so legen wir durch r^4 zunächst die mit F bezeichnete Fläche und dann noch irgend eine zweite Fläche zweiten Grades H, wodurch die Lösung dann auf den früheren Fall zurückgeführt wird.

Dies geschieht etwa auf Grund des Satzes:

»Wenn eine biquadratische Raumcurve erster Art und eine cubische Raumcurve r^3 einem räumlichen Fünfeck umschrieben sind und eine Sehne s gemein haben, die durch keinen der fünf Eckpunkte geht, so liegen sie mit s auf einer Fläche zweiter Ordnung« (Reye, Geom. der Lage, 3. Aufl., 3. Abth., S. 25).

Um darnach F zu erhalten, denken wir uns eine cubische Raumcurve g^3 durch die Punkte B, C, D, E, F so gelegt, dass sie q zur Sehne hat und construiren die durch G gehende Sehne g von g^3. Die Secanten der Curve g^3, welche sie mit q und g verbinden, liegen bereits auf F.

In derselben Art kann man etwa durch die Punkte B, C, D eine cubische Raumcurve g'^3 legen, welche q in A berührt und

(EF) zur Sehne hat. Die Sehne g' durch G für diese Curve bestimmt mit (EF) eine durch beide gehende Sehnenregelschaar von g'^3, welche auf einer Fläche zweiter Ordnung H liegt.

Da nun, dem citirten Satze gemäss, r^4 die Durchdringungscurve von F und H ist, so können jetzt die vorigen Constructionen angewendet werden. Die unserer eigentlichen Construction vorhergehende Ermittelung der Flächen F und H macht die Durchführung derselben bedeutend umständlicher.

Wir werden auf ähnliche Aufgaben im Folgenden noch einmal zu sprechen kommen.

4. Unsere Erwägungen in diesem Abschnitte gingen hauptsächlich darauf aus, die zur Geraden m des durch q bestimmten Parallelstrahlenbündels in Bezug auf r^4 conjugirte Curve m' zu bestimmen und ihre Tangente t in A zu construiren. War der Krümmungskreis k^2 von r^4 in A gegeben oder liess er sich rasch sonst ermitteln, so schien uns am einfachsten, die zu q parallele Sehne von r^4 als die Gerade m zu wählen. Aber unsere Construction wird im Wesen nicht geändert, wenn m irgend eine Gerade des erwähnten Parallelstrahlenbündels ist.

Es sei also jetzt m irgend eine Gerade, die durch den unendlich fernen Punkt $\mathfrak{Q}$ von q geht.

Die Regelfläche Q, welche durch die auf m sich stützenden Sehnen von r^4 gebildet wird, ist jetzt bei allgemeiner Lage von m, wie man sich leicht überzeugt, eine Fläche achten Grades, welche m zur doppelten Leitgeraden besitzt. In jeder Ebene durch m bekommt man sechs Punkte von m', die auf die Seiten des vollständigen Vierecks, welches durch die vier Punkte von r^4 in dieser Ebene gebildet wird, sich zu je einem vertheilen; weitere Punkte von m' können wir aber nicht erhalten. Es ist also m' eine Raumcurve sechster Ordnung.

Jedem Punkte U von m sind zwei Punkte in Bezug auf r^4 conjugirt; die Verbindungsgerade derselben ist die dem Punkte U in Bezug auf den Büschel von Flächen zweiter Ordnung durch r^4 conjugirte Gerade u'. Durchläuft U die Gerade m, dann durchläuft u' die zu m in Bezug auf den Flächenbüschel conjugirte Regelschaar. Die Curve m' ist ein Theil der Durchdringung von Q mit der Fläche U der eben

erwähnten Regelschaar. Die gesammte Durchdringungscurve von U und Q ist von der Ordnung 16. Die Restdurchdringung wird somit eine Raumcurve zehnter Ordnung sein, welche auf *m* zwei Doppelpunkte besitzt.

Für unsere Construction genügt indessen zu wissen, dass sie auf der Fläche U liegt. Denn es handelt sich ja nur um die Tangente t in A an m' und diese muss nun in der Schmiegungsebene ω an r^4 in A, gleichzeitig aber auch in der Berührungsebene γ der Fläche U in A liegen; infolge dessen wird sie die Schnittgerade beider Ebenen sein.

Daraus geht die nachstehende Construction der Krümmungskugel K von r^4 in A hervor.

α) Man construirt die zu $\mathfrak{Q}$ in Bezug auf den Büschel von Flächen zweiter Ordnung durch r^4 conjugirte Gerade $l_\mathfrak{e}$.

β) Man nimmt eine zu q parallele Gerade m an und bestimmt die in Bezug auf den Flächenbüschel conjugirten Geraden l, l' zweier Punkte auf m. Die Transversale dieser Geraden durch A bestimmt mit $l_\mathfrak{e}$ eine Ebene, welche ω in t schneidet.

Die Gerade q bestimmt mit jedem zu ihr in der Sehnencongruenz von r^4 benachbarten Strahle ein windschiefes Flächenelement; man construirt in bekannter Weise den Berührungspunkt desjenigen derartigen Flächenelementes, welches $[qm]$ zur asymptotischen Ebene besitzt, mit der rectificirenden Ebene ρ von r^4 in A nach der Angabe des Artikels 2 im Abschnitt II. Daraus wird dann ein Durchmesser c von K in bekannter Weise gefunden.

γ) Man wiederholt die soeben ausgeführten Operationen auf Grund einer zweiten zu q parallelen, aber nicht in der Ebene $[qm]$ liegenden Geraden m_1 und gelangt zu einem zweiten Durchmesser c_1 von K.

5. Jede Gerade m durch $\mathfrak{Q}$ führt uns zu einer Geraden t durch A in vorbeschriebener Weise. Aber alle Geraden m_1 durch $\mathfrak{Q}$, die in derselben durch q gehenden Ebene liegen, führen uns zu einer einzigen Tangente t, welche in A die entsprechenden conjugirten Curven $m', \ldots$ berührt. Diesen Zusammenhang kann man hier noch von anderer Seite beleuchten und zur Vereinfachung unserer Lösung benützen.

Wir gehen wieder von dem Büschel von Flächen zweiter Ordnung [F^2], welcher durch die biquadratische Raumcurve erster Art r^4 bestimmt ist, aus. Die Pole einer Ebene α in Bezug auf sämmtliche Flächen des Büschels erzeugen bekanntlich eine cubische Raumcurve a^3, welche so der Ebene α zugeordnet ist. Den Punkten von α sind in Bezug auf den Flächenbüschel die Sehnen von a^3, den Strahlen in α die Regelschaaren der Sehnencongruenz von a^3 conjugirt.

Es sei U ein Punkt in α und u' die ihm in Bezug auf den Flächenbüschel [F^2] conjugirte Sehne der Curve a^3. Alsdann ist dem Strahlenbüschel erster Ordnung durch U in der Ebene α derjenige Büschel von Sehnenregelschaaren der Curve a^3, der durch u' geht, projectiv zugeordnet. Alle Flächen dieses Regelschaarenbüschels besitzen in den Schnittpunkten von u' mit a^3 gemeinschaftliche Berührungsebenen. Ferner schneidet die Ebene α den Flächenbüschel [F^2] in einem Kegelschnittbüschel; die Ecken des gemeinschaftlichen Polardreiecks aller Kegelschnitte des eben erwähnten Büschels sind solche Punkte, in denen die Ebene α von drei Flächen des Büschels [F^2] berührt wird, und die also der Curve a^3 auch angehören.

Übertragen wir dies auf unseren Fall, wo die Ebene α durch die Tangente q in A an r^4 gelegt wird.

Es möge da wiederum die Fläche zweiter Ordnung, welche q mit r^4 verbindet, durch F, der zu q in Bezug auf den Flächenbüschel [F^2] conjugirte Kegel durch $Q_{1.2}$ und die dem unendlich fernen Punkte $\mathfrak{Q}$ von q bezüglich [F^2] conjugirte Gerade desselben durch l_ε bezeichnet werden.

Die Ebene α schneidet unseren Flächenbüschel in einem Büschel von Kegelschnitten, die sich sämmtlich im Punkte A berühren; die Fläche F wird von dieser Ebene ausser in q, noch in einer Geraden e geschnitten. q und e bilden ein Geradenpaar des Kegelschnittbüschels und schneiden sich in dem Berührungspunkte P der Ebene α mit F. Alle Kegelschnitte des eben besagten Kegelschnittbüschels in α besitzen für den Punkt P eine gemeinschaftliche Polare l_α. Ist A^+ der Nachbarpunkt von A auf dieser Polare, dann ist das unendlich schmale Dreieck PAA^+ das Polardreieck des Kegelschnittbüschels. Die cubische Raumcurve a^3, welche der Ebene α bezüglich [F^2] zugeordnet

ist, geht also durch den Punkt A und berührt in ihm überdies die Gerade l_α; dass a^3 auch durch den Berührungspunkt P geht, ist für uns von geringerem Interesse.

Einer zu q parallelen Geraden m in α ist eine Fläche des Büschels von Flächen zweiter Ordnung, welcher durch l_ε und a^3 geht, conjugirt; auf dieser Fläche, die in A von der Ebene $(l_\alpha l_\varepsilon)$ berührt wird, liegt die in Bezug auf r^4 conjugirte Curve m'. Dies gilt für jede Parallele zu q in α. Demnach ist die Schnittgerade t der Ebene $(l_\alpha l_\varepsilon)$ mit der Schmiegungsebene ω von r^4 in A die gemeinschaftliche Tangente in A an sämmtliche Curven, die zu den zu q parallelen Geraden in α bezüglich r^4 conjugirt sind.

Da l_α durch einen zu P bezüglich r^4 conjugirten Punkt geht, so sind sowohl l_ε als auch l_α Geraden auf dem Kegel $\mathfrak{Q}_{1.2}$, wie im 1. Artikel des III. Abschnittes näher erläutert worden ist.

Man erkennt dies auch daraus, dass die Gerade q dem Parallelstrahlenbüschel in jeder Ebene α durch sie angehört. Denn der Geraden q ist die Regelfläche $\mathfrak{Q}_{1.2}$ conjugirt; auf dieser liegen somit die sämmtlichen cubischen Raumcurven $a^3, \ldots$ die den Ebenen durch q zugeordnet sind, und da dieselben durch A gehen, so müssen sie zu Berührungsgeraden in A die Geraden des Kegels $\mathfrak{Q}_{1.2}$ haben. Nebenbei bemerkt sind deshalb die Tangentialebenen von $\mathfrak{Q}_{1.2}$ Schmiegungsebenen der Curven $a^3, \ldots$

Bewegt sich P gegen den unendlich entfernten Punkt $\mathfrak{O}$, dann nähert sich α der asymptotischen Ebene ε von F und der zweite Schnittpunkt von a^3 mit l_ε nähert sich dem Punkte A; fällt schliesslich α mit der Ebene ε zusammen, so wird die Ebene $(l_\alpha l_\varepsilon)$ zur Berührungsebene $\mathfrak{Q}_{1.2}$ längs l_ε und schmiegt sich in A der betreffenden cubischen Raumcurve a^3 an.

Die Tangente q bestimmt mit jeder ihr benachbarten Sehne von r^4 einen infinitesimalen windschiefen Flächenstreifen $\{q_\alpha\}$; wir ordnen wie früher jeder Ebene α durch q denjenigen Flächenstreifen $\{q_\alpha\}$ zu, der α zur asymptotischen Ebene besitzt. Nur in dem Falle, wenn α mit der Schmiegungsebene zusammenfällt, degenerirt der Flächenstreifen $\{q_\omega\}$.

Diese Betrachtungen liefern uns die Construction der Krümmungskugel K von r^4 in A wohl in der einfachsten Form, die wir hier noch übersichtlich beschreiben wollen.

α) Wir ermitteln die Fläche zweiter Ordnung F, welche die Tangente q in A an r^4 mit dieser Curve verbindet.

β) Wir bestimmen die conjugirte Gerade l_t des unendlich fernen Punktes von q in Bezug auf den durch r^4 gehenden Büschel von Flächen zweiter Ordnung [F^2].

γ) Wir legen durch q irgend eine Ebene α, ermitteln ihren Berührungspunkt P mit F, hierauf die conjugirte Gerade l_α von P in Bezug auf [F^2] und suchen die Schnittgerade t der Ebene $(l_t l_\alpha)$ mit der Berührungsebene ω von F in A.

δ) Weiter construiren wir den Berührungspunkt der rectificirenden Ebene von r^4 in A mit dem durch q gehenden in der Sehnencongruenz der Curve r^4 liegenden Flächenstreifen $\{q_\alpha\}$, welcher die Ebene α zur asymptotischen Ebene besitzt, nach Artikel 2, Abschnitt II, woraus dann ein Durchmesser c der Krümmungskugel K in öfters hier benützter Weise erhalten wird.

ε) Wie wir mit Hilfe der Ebene α zum Durchmesser c von K gelangt sind, ebenso rasch gelangen wir auf Grund einer zweiten durch q gelegten Ebene α' zu einem zweiten Durchmesser c' von K, wodurch dann unsere Aufgabe gelöst ist.

Es braucht nicht besonders ausgeführt zu werden, wie sich diese Ergebnisse auf cubische Raumcurven übertragen. Ist nämlich eine cubische Raumcurve r^3 gegeben, so kann man sie durch eine Sehne, welche zwei Punkte M, N auf ihr verbindet, zu einer biquadratischen Raumcurve erster Art ergänzen und durch diese den Flächenbüschel zweiter Ordnung [F^2] legen, in welchem wir die Kegelflächen zweiter Ordnung, welche r^3 von M und N aus projiciren, zu unseren Constructionen verwenden. Als Fläche F wählen wir die Fläche der Sehnenregelschaar, die durch q und (MN) geht. Alles

Übrige folgt aus obiger Construction unmittelbar und liefert auch für r^3 eine einfache Lösung unseres Problems.

IV.

Eine zweite Construction von Krümmungskugeln der Raumcurven vierter Ordnung erster Art.

1. Eine sehr einfache Construction der Krümmungskugel K einer cubischen Raumcurve r^3 in irgend einem Punkte derselben habe ich früher einmal entwickelt (cf. Monatshefte für Math. und Phys. V. Jahrg.). Sie besteht darin, dass man den Krümmungskreis k^2 von r^3 in A mit r^3 durch eine Fläche zweiten Grades verbindet. Die Normale dieser Fläche in A ist bereits ein Durchmesser von K; ein zweiter Durchmesser dieser Kugel ist die zu A gehörige Krümmungsaxe.

Gelingt es nun, eine cubische Raumcurve r^3 zu ermitteln, die eine gegebene Raumcurve r im Punkte A hyperosculirt, d. h. die mit ihr vier in A unmittelbar aufeinander folgende Punkte gemeinschaftlich hat, dann ist die Krümmungskugel von r^3 in A gleichzeitig auch Krümmungskugel der gegebenen Raumcurve r in demselben Punkte.

Wir wollen noch zeigen, wie diese Construction sich für biquadratische Raumcurven erster Art verwenden lässt.

2. Liegt eine Raumcurve vierter Ordnung erster Art als Durchdringungscurve zweier Kegel zweiter Ordnung K_1, K_2 mit den Spitzen S_1, respective S_2 vor, und soll in irgend einem Punkte A derselben die Krümmungskugel K construirt werden, so beachte man, dass es unter allen den ∞^4 cubischen Raumcurven, welche r^4 in A hyperosculiren, eine s^3 gibt, welche durch die beiden Kegelspitzen S_1, S_2 geht; diese wollen wir für unsere Construction verwenden.

Diese Hilfscurve s^3 wird von S_1 aus durch einen Kegel zweiter Ordnung S_1 projicirt, welcher mit K_1 vier, in (S_1A) unmittelbar aufeinander folgende Gerade gemeinschaftlich hat. Desgleichen wird s^3 von S_2 aus durch einen Kegel zweiter Ordnung S_2 projicirt, der K_2 längs (S_2A) hyperosculirt. Da man die Kegel S_1, S_2 einfach construiren kann, so wird hiedurch auch s^3 als ihre Durchdringungscurve in der einfachsten Weise ermittelt.

Betreffs der Durchführung möge Folgendes hier Platz finden.

Es seien abermals q die Tangente, ω die Schmiegungsebene und k^2 der Krümmungskreis von r^4 in A; weiter sei k_1^2 der Kegelschnitt auf K_1, k_2^2 der Kegelschnitt auf K_2 und M der Spurpunkt von (S_1S_2) in der Ebene ω. Der Kreis k^2 ist der gemeinschaftliche Krümmungskreis von k_1^2 und k_2^2 im Punkte A.

Der Kegel S_1 schneidet ω in einem Kegelschnitte s_1^2; derselbe geht durch M und ist, da er ja k_1^2 in A hyperosculirt, zu k_1^2 centrisch collinear für den Punkt A als Collineationscentrum und die Gerade q als Collineationsaxe. Diese Beziehung versetzt uns in die Lage, beliebige Punkte von s_1^2 construiren zu können. Wir brauchen aber nur noch einen beliebigen Punkt N_1 von s_1^2 auf diese Weise zu bestimmen, wodurch wir dann sehr einfach die centrisch collineare Beziehung zwischen s_1^2 und dem Krümmungskreise k^2 für A als Collineationscentrum herstellen können. Die Axe dieser Collineation schneidet k^2 in einem Punkte L_1, der k^2 und s_1^2 gemeinschaftlich ist.

Demgemäss ist (S_1L_1) eine Sehne der cubischen Raumcurve s^3, die sich auf k^2 stützt.

Was wir soeben bezüglich des Kegels S_1 durchgeführt haben, wird dann in derselben Weise bezüglich des Kegels S_2 wiederholt. Ist L_2 der Schnittpunkt von k^2 mit dem Kegelschnitt s_2^2, welchen der Kegel S_2 in ω einschneidet, so ist alsdann (S_2L_2) eine zweite, auf k^2 sich stützende Sehne der cubischen Raumcurve s^3.

Somit kennen wir bereits zwei Gerade, nämlich (S_1L_1) und (S_2L_2) der Sehnenregelschaar von s^3 auf der Fläche zweiter Ordnung H, welche k^2 mit s^3 verbindet. Die Transversale dieser Geraden durch A ist eine Gerade der Leitschaar auf H und bestimmt somit mit q die Tangentialebene von H in A. Die Normale im Punkte A zu der soeben erhaltenen Ebene ist ein Durchmesser der Krümmungskugel K in A für die Curve r^4. Ein zweiter Durchmesser ist die Krümmungsaxe von r^4 für den Punkt A. Hiedurch ist auch der Mittelpunkt von K gefunden.

3. Eine cubische Raumcurve s^3 ist auch durch fünf Punkte und eine Sehne eindeutig bestimmt. Wir können somit für eine cubische Raumcurve s^3, welche eine gegebene Raumcurve r in

einem Punkte A hyperosculirt, noch einen Punkt U und eine Sehne u willkürlich annehmen.

Es möge hier gezeigt werden, wie man diesen Umstand bei einer Raumcurve vierter Ordnung erster Art r^4 ausnützen kann, wenn man wenigstens eine Regelfläche zweiter Ordnung H_1 kennt, die durch r^4 hindurchgeht.

In dem Falle werden wir den Punkt U und die Sehne u der Hilfscurve s^3 auf H_1 wählen. Diese Wahl ist sonst willkürlich und nur durch eine für unsere Darstellung günstige Lage bedingt. Da nun alle Bestimmungsstücke von s^3 auf der Regelfläche H_1 liegen, so liegt die ganze Curve s^3 auf ihr.

Durch die Tangente q in A und die Sehne u ist eine einzige Fläche zweiter Ordnung Q bestimmt, die durch s^3 geht. Wenn wir dieselbe ermittelt haben, so ergibt sich dann s^3 als theilweise Durchdringung von H_1 mit Q; die Restdurchdringung ist eben die Sehne u. Die Transversale der Geraden q, u, die durch U geht, liegt auf Q, und die Ebene (qv) berührt Q im Punkte (qv).

Nun haben wir früher gezeigt, wie man für die Fläche F, welche durch die auf q sich ausserhalb der Curve stützenden Sehnen von r^4 erzeugt wird, zu jeder Ebene durch q den Berührungspunkt findet, und haben ferner kennen gelernt, wie man daraus dann für irgend eine andere beliebig durch q gelegte Sehnenregelfläche von r^4 den Berührungspunkt jeder Ebene durch q findet, wenn der Berührungspunkt einer einzigen von ω verschiedenen Ebene durch q mit dieser Fläche gegeben ist.

So sind wir auch im Stande, den Berührungspunkt X jeder Ebene ξ durch q mit der Fläche Q rasch aufzusuchen. Die Verbindungsgerade des Punktes X mit dem Durchbohrungspunkte von ξ mit u ist alsdann eine Erzeugende von Q. Nach diesem Vorgange construirt man also die Fläche Q selbst.

Man hat jetzt nur die Krümmungskugel für die Durchdringungscurve s^3 von Q mit H_1 zu suchen.

Um die Construction zu vereinfachen, genügt die Bemerkung, dass man über den Punkt U in vorhinein keine Verfügung treffen muss. Jede Sehnenregelfläche durch q enthält die vier in A benachbarten Punkte von r^4, also thut es auch die Fläche G, welche F längs q berührt und durch u geht.

Somit haben wir den folgenden Weg bei der Lösung unseres Problems einzuschlagen.

Wir construiren den Berührungsebenenbüschel um q für die Fläche F, welcher mit irgend einer Sehne u auf einer durch r^4 gehenden Regelfläche zweiter Ordnung H_1 eine zweite Regelfläche zweiter Ordnung G erzeugt. Die Krümmungskugel in A für die cubische Raumcurve, in der sich G und H_1 durchdringen, ist die gesuchte.

Ist der Krümmungskreis k^2 in A von r^4 bekannt, so genügt es, noch drei Punkte von der jetzt erhaltenen cubischen Raumcurve zu ermitteln, um dann K sofort construiren zu können. Dabei wird es sich, wie wir im Vorigen gesehen haben, um die Ermittelung zweier Sehnen der cubischen Raumcurve handeln, die sich auf k^2 stützen. Da könnten wir schon die Sehne u so wählen, dass sie sich auf k^2 stützt; die Construction würde aber keine wesentliche Vereinfachung hiedurch erfahren.

Nach der erläuterten Methode wollen wir zum Schluss noch die folgende Aufgabe durchführen.

Eine biquadratische Curve vierter Ordnung erster Art r^4 ist durch sechs Punkte A, B, C, D, E, F und den Krümmungskreis k^2 des ersten unter ihnen gegeben; es ist die Krümmungskugel K in diesem Punkte für die gegebene Curve zu construiren.

Wir könnten da etwa zunächst den früher citirten Satz (Reye, Geom. der Lage, 3. Abth., S. 25) heranziehen; doch ziehen wir es vor, unserer Lösung die folgende Anordnung zu geben.

α) Wir denken uns abermals die Tangente q in A an r^4 mit dieser Curve durch die Fläche zweiter Ordnung F verbunden.

Für diese Fläche führen wir die Construction des Tangentialebenenbüschels durch q thatsächlich durch. Zu dem Behufe betrachten wir die Ebenen $\lambda \equiv (ABC)$ und $\nu \equiv (DEF)$. Zuerst construiren wir den Kegelschnitt l^2, in welchem F die Ebene λ schneidet. Es sei Q_ν der Schnittpunkt von q mit ν und l_ω die Schnittgerade der Ebene ω von k^2 mit λ. Alle Kegelschnitte, welche l_ω in A berühren und durch B und C gehen, bilden einen Büschel (λ); alle Kegelschnitte, welche durch die Punkte

Q_ν, D, E, F gehen, bilden einen Büschel (ν). Diese Büschel schneiden auf der Geraden $[\lambda\nu]$ zwei Involutionen ein, die ein gemeinsames Punktepaar besitzen. l^2 ist alsdann derjenige Kegelschnitt in (λ), welcher durch dieses gemeinsame Paar geht.

Um l^2 aber linear zu construiren, denken wir uns jedes Paar der Involution, welche durch (ν) auf $[\lambda\nu]$ eingeschnitten wird, mit den Punkten A, B, C je durch einen Kegelschnitt verbunden. Offenbar bilden alle diese Kegelschnitte gleichfalls einen Büschel $(\lambda)'$ und l^2 ist derjenige Kegelschnitt in demselben, der l_ω zur Tangente besitzt.

Wir werden also den vierten Punkt U construiren, durch welchen alle Kegelschnitte von $(\lambda)'$ hindurchgehen. Zuerst suchen wir die Gerade (CU). Dieselbe bildet mit der Geraden (AB) einen Kegelschnitt von $(\lambda)'$. Desshalb haben wir blos (AB) mit $[\lambda\nu]$ in E' zu schneiden und den zweiten Schnittpunkt E'' von $[\lambda\nu]$ mit dem durch Q_ν, D, E, F, E' gehenden Kegelschnitte zu ermitteln, dann ist $(E''C) \equiv (CU)$.

Genau so bringen wir (AC) mit $[\lambda\nu]$ in F' zum Schnitte und ermitteln den zweiten Punkt F'' des durch Q_ν, D, E, F, F' gehenden Kegelschnittes. $(F''B)$ geht gleichfalls durch U und schneidet somit die Gerade $(E''C)$ in U.

l^2 berührt l_ω in A und geht durch B, C und U, ist somit völlig bestimmt. Dadurch ist auch die Fläche F selbst bestimmt. Die Ebene ω berührt diese Fläche in A. Ist ferner D_λ der Schnittpunkt der Ebene (qD) mit l^2, dann ist $(D_\lambda D)$ eine Gerade auf F und trifft q in dem Berührungspunkte von (qD) mit F. Ebenso kann noch etwa der Berührungspunkt der Ebene (qE) mit F ermittelt werden, worauf wir in der Lage sind, für jede Ebene durch q den Berührungspunkt mit F anzugeben.

β) Analog wird etwa die Fläche zweiter Ordnung H_1 bestimmt, welche die Sehne (BC) mit r^4 verbindet. Für diese Fläche möge der Kegelschnitt o^2 in ω gesucht werden.

Ist N der Schnitt von (BC) mit ν und O mit ω, so ziehen wir jetzt die Kegelschnittbüschel (ω) und $(\nu)'$ in Betracht, von denen der erste k^2 in A osculirt und durch O geht, der zweite D, E, F, N zu Grundpunkten hat. Aus der Beziehung von (ω) zu $(\nu)'$ bestimmen wir, ähnlich wie früher, einen Punkt V von o^2. Wir suchen nämlich den zweiten Schnittpunkt Q' der

Geraden $[\omega\nu]$ mit dem Kegelschnitte, welcher durch D, E, F, N und den Schnittpunkt von q mit $[\omega\nu]$ geht und ziehen die Gerade $(Q'O)$. Ferner suchen wir den zweiten Schnittpunkt Q'' der Geraden $[\omega\nu]$ mit dem Kegelschnitte, der durch D, E, F, N und den Schnittpunkt der Geraden (AO) mit $[\omega\nu]$ geht und ziehen die Gerade $(Q''A)$. Die Geraden $(Q'O)$, $(Q''A)$ schneiden sich in einem Punkte V von o^2.

So haben wir also o^2 gefunden.

Weiter bringen wir die Ebenen (BCD), (BCE), (BCF) mit o^2 ausser in O noch beziehungsweise in den Punkten D_γ, E_γ, F_γ zum Schnitte. Die Geraden (DD_γ), (EE_γ), (FF_γ) liegen auf der Fläche H_1 und bestimmen dieselbe hinlänglich.

γ) Die cubische Hilfscurve s^3, welche r^4 in A hyperosculirt, ist der Schnitt von H_1 mit der Fläche F′, welche durch die Gerade (BC) geht und F längs q berührt.

Es reicht hin, drei Punkte X, Y, Z von s^3 zu construiren. Am bequemsten erhalten wir sie in den Ebenen (BCD), (BCE), respective (BCF). Diese mögen von q beziehungsweise in den Punkten X_q, Y_q, Z_q durchbohrt werden, denen die Berührungsebenen ξ, η, ζ mit F′ zukommen. Alsdann sind die Schnittpunkte von ξ mit (DD_γ), von η mit (EE_γ) und von ζ mit (FF_γ) die drei verlangten Punkte X, Y, respective Z.

Denn die Gerade (X_qX) ist der Schnitt der Ebene ξ und (BCD); sie schneidet also (BC) und ist demzufolge eine Gerade auf F′. Somit ist X der Schnittpunkt der Geraden (X_qX) auf F′ mit der Geraden (DD_γ) auf H_1. So verhält es sich auch mit Y und Z.

Da jetzt s^3 durch k^2 und X, Y, Z vollkommen bestimmt ist, so ist der weitere Verlauf der Construction ohneweiters klar. Dieselbe lässt sich in dieser Weise auch in dem Falle durchführen, dass ein Paar oder zwei Paare in den gegebenen Punkten B, C, D, E, F conjugirt imaginär sind.

Unsere Constructionen lassen sich auch noch bequem auf die biquadratischen Raumcurven zweiter Art übertragen, was jedoch hier nicht weiter erörtert werden möge.

Schwingungsvorgang in complicirten Erregern Hertz'scher Wellen

von

Dr. **Josef** Ritter v. **Geitler.**

Aus dem physikalischen Institute der k. k. deutschen Universität in Prag.

(Mit 5 Textfiguren.)

1. Die von E. Sarasin und L. de la Rive[1] zuerst beschriebene und mit dem Namen der multiplen Resonanz bezeichnete Erscheinung besteht bekanntlich darin, dass die mit Hilfe des Resonators gemessene Länge elektrischer Wellen lediglich von den Dimensionen des Resonators abhängt und sich mit diesen ändert, dagegen von den Dimensionen des Erregers in sehr weiten Grenzen unabhängig ist. Die genannten Physiker glaubten ihre Versuche in der Weise deuten zu müssen, dass dem gewöhnlichen Hertz'schen Primärkreis nicht eine bestimmte Periode zukomme, dass derselbe vielmehr ein ganzes Spectrum von Wellenlängen aussende und dass dem Resonator nur die Rolle zufalle, aus der Menge der ausgesendeten Schwingungen jene herauszugreifen, welche seiner eigenen Schwingungsdauer entsprechen. Diese den hergebrachten Anschauungen über den Schwingungsvorgang bei Condensatorentladungen widersprechenden Folgerungen gaben zu einem eingehenden Studium dieser Frage Veranlassung. Der nach den diesbezüglichen Arbeiten von Bjerknes,[2] Poincaré,[3]

[1] Sarasin et de la Rive, Arch. des scienc. phys. et natur., 23, p. 113, 1890.

[2] V. Bjerknes, Wied. Ann., 44, S. 74, 92, 513; 1891. — 54, S. 58, 1895.

[3] H. Poincaré, Electricité et Optique, II., Paris, 1891, p. 249.

Hertz,[1] Garbasso und Aschkinass[2] allein berechtigte Standpunkt dürfte wohl derjenige sein, von welchem aus man den Schwingungsvorgang im Hertz'schen Erreger sozusagen einheitlich als gedämpfte Sinusschwingung auffasst, zu deren Zerlegung in ihre Fourier'schen Bestandtheile uns die experimentellen Mittel in Gestalt der Resonatoren zu Gebote stehen.[3] Mit dem Ausdrucke Periode eines gewissen Erregers wird man demnach einen ganz bestimmten Sinn verbinden können, wenn man darunter die Periode des ungedämpft schwingenden Erregers verstehen will. Man kann dann behaupten, dass der gewöhnliche Hertz'sche Erreger, solange er sich in genügender Entfernung von störenden Objecten, insbesondere schwingungsfähigen Systemen befindet, eine und nur eine Periode besitze.

2. Bei diesem Stande der Dinge schien es mir nicht ohne Interesse zu sein, solche Erreger Hertz'scher Wellen herzustellen und den in denselben stattfindenden Schwingungsvorgang zu untersuchen, von welchen man voraussetzen konnte, dass ihnen mehr als nur eine Periode zukomme. Die für diesen Zweck endgiltig gewählte Form des Erregers ist aus Fig. 1 zu ersehen. Die nähere Beschreibung folgt weiter unten. Jede andere ähnlich combinirte Form würde natürlich ähnliche Dienste leisten.

Um den Schwingungsvorgang eines solchen complicirten Kreises zu untersuchen, stehen dieselben beiden Wege offen, welche von V. Bjerknes[4] beim einfachen Kreise betreten worden sind. Entweder kann man die Wellen an sehr langen Drähten fortleiten und mit Hilfe ihrer mechanischen Wirkungen die Vertheilung der Intensität beobachten, welche in dem am Ende der Leitung sich ausbildenden Gebiete stehender Wellen stattfindet: Die Form der Intensitätscurve würde unmittelbar den Verlauf der Schwingung im primären Kreise wiedergeben —

[1] Die Darlegung von H. Hertz ist in dem Anmerkung 3 auf voriger Seite citirten Werke von Poincaré, S. 250 ff., mitgetheilt.

[2] A. Garbasso und E. Aschkinass, Wied. Ann., 53, S. 534, 1894.

[3] Vergl. von Lommel, Wied. Ann., 3, S. 251 ff., 1877. — G. Jaumann, diese Sitzungsberichte, CIII, Abth. II. a, Mai 1894 oder Wied. Ann., 53, S. 832, 1894. — A. Garbasso, Accad. delle Scienze di Torino, vol. XXX, 16. December 1894.

[4] V. Bjerknes, l. c.

oder man kann die Oscillationen des Erregers durch Anwendung von Resonatoren analysiren: auf diesem Wege erhält man unmittelbar die Wellenlängen, sowie auch das Perioden- und Amplitudenverhältniss der dem Kreise zukommenden Schwingungen. Die ursprüngliche Absicht ging dahin, beide Methoden gleichzeitig anzuwenden. Es wäre dann möglich gewesen, die Resultate beider Methoden mit einander zu vergleichen und aneinander zu controliren. Aus Gründen, welche ich vielleicht

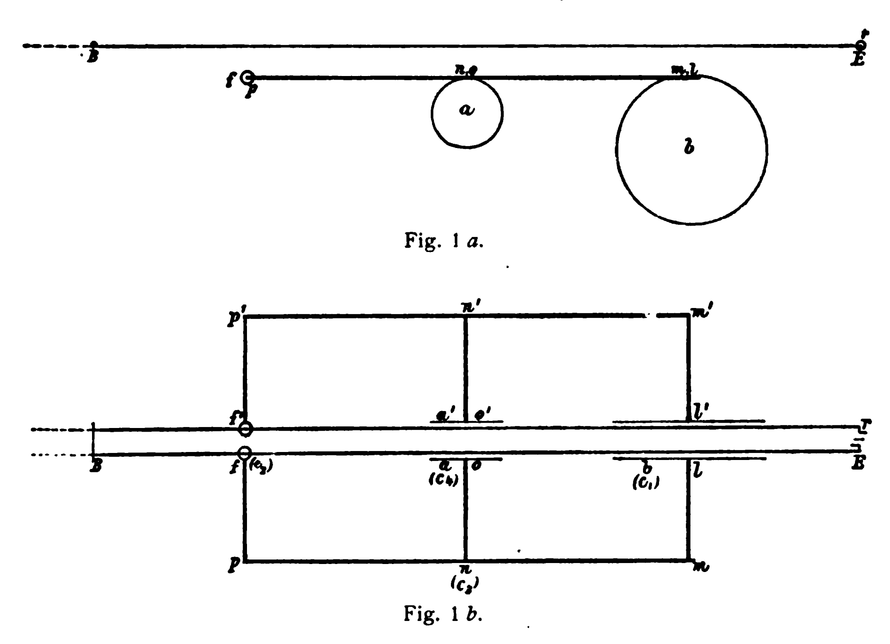


Fig. 1 *a*.

Fig. 1 *b*.

später ausführlicher darzulegen hoffe, wurde schliesslich nur die Resonatormethode angewendet. Einer der Gründe, weshalb ich von der ersteren Methode abging, war die auch von mir bemerkte Thatsache, auf welche P. Lebedew[1] aufmerksam macht; ein zweiter, eine störende Erscheinung, welche mir im Verlaufe der Versuche entgegentrat, über welche ich jedoch noch nicht das genügende Beobachtungsmaterial besitze, um an dieser Stelle näher auf dieselbe eingehen zu können.

3. Die Versuchsanordnung ist in Fig. 1 angedeutet. Der Erreger bestand aus zwei Condensatoren (kreisrunde Zink-

[1] P. Lebedew, Wied. Ann., 52, S. 628, Fig. 7, 1894.

platten aa', bb'), welche durch die 2 *mm* starken Kupferdrähte $lmpf$ und $bnpf$ (beziehungsweise $l'm'p'f'$ und $b'n'p'f'$) mit der von zwei Messingkugeln (Radius = 2 *cm*) gebildeten, gemeinsamen Funkenstrecke ff' in Verbindung standen. Von den Kugeln führten dünne Verbindungsdrähte zu den Polen eines grossen Ruhmkorff'schen Inductoriums mit Quecksilberunterbrecher, welches durch drei Bunsenelemente getrieben wurde. Das Inductorium konnte vom Platze des Beobachters aus mit Hilfe eines Schnurlaufes in und ausser Gang gesetzt werden. Der Erreger war auf einem Holzgerüst derart montirt, dass behufs Änderung der Capacität die Platten aa', bb' einander genähert oder durch Platten von anderen Dimensionen ersetzt werden konnten. Der Draht mp, beziehungsweise $m'p'$ war, um die bei Veränderung der Capacität nothwendigen kleinen Deformationen zu gestatten, nicht ganz straff gespannt. Durch Wegnahme des Theiles $nmlbn'm'l'b'$ oder $noan'o'a'$ konnten auch einfache Hertz'sche Erreger nach Blondlot'schem[1] Muster hergestellt werden. Es waren die Längen der Drähte bei den weiter unten mitgetheilten Versuchen:

$$lm = no = pf = l'm' = n'o' = p'f' = 28\,cm$$
$$mn = np = m'n' = n'p' = 58\,cm$$

Die Angaben über Radius und Distanz der Platten aa', bb' finden sich in der Beschreibung der Versuche. Der Resonator bestand aus zwei 1 *mm* starken, in der gegenseitigen Entfernung von 3 *cm* gehaltenen Kupferdrähten, welche centrischsymmetrisch in einer Höhe von 7 *cm* über dem Erreger ausgespannt waren. Bei E waren die Enden der Drähte mit den Platten eines kleinen Elektrometers verbunden. Die Einrichtung desselben ist aus der Fig. 2 ersichtlich. An dem feinen, circa 0·5 *cm* langen Quarzfaden q hängt das Spiegelchen s. Dieses ist mit dem rechteckigen Aluminiumblättchen n durch ein 8 *cm* langes Glasstäbchen starr verbunden. Die Messingplatten 1, 2 (Radius = 1 *cm*) sind an der Innenseite der die Vor- und Rückwand des Gehäuses bildenden Glas-

---

[1] R. Blondlot, Compt. rend., 114, p. 283, 1892 oder Graetz' Revue, I, p. 308, 1892.

platten in der normalen Distanz von 1 *cm* derart angekittet, dass ihre inneren Ränder von der Symmetrieebene des Elektrometers tangirt werden. Die kurzen Stiele *t* der Platten treten durch die Glaswände ins Freie. An den Stielen sind ganz kurze Stücke *r* aus sehr dünnem Messingband und an diesen wieder ganz kurze amalgamirte Kupferdrähte angelöthet, welche in die kleinen Quecksilbernäpfe (*xx*) eintauchen; in diese Näpfe tauchen auch die Enden der Resonatordrähte ein. Diese Anordnung ist getroffen, um das wegen seiner grossen Empfindlichkeit gegen mechanische Erschütterungen auf einem isolirten Pfeiler aufgestellte Elektrometer vor den Erzitterungen zu bewahren, welche dasselbe ohne Zwischenschaltung der Stücke *r* beim Laufen des Inductoriums u. s. w. erleiden würde. Die Ablesung der Elektrometerausschläge geschah mit Hilfe eines 2 *m* vom Elektrometer aufgestellten Scalenfernrohres. Das Elektrometer, welches seinen Nullpunkt in Folge der vorzüglichen Eigenschaften der Quarzfadensuspension in sehr befriedigender Weise constant erhielt, wurde mit einer Zink-Kupfer-Wasser-Batterie von 40 Elementen geaicht. Die Empfindlichkeit des Instrumentes für kleine Kräfte war leider gering. Aus naheliegenden Gründen empfahl es sich jedoch, ein Elektrometer von kleiner Capacität und Schwingungsdauer zu wählen, wodurch die Empfindlichkeit naturgemäss heruntergedrückt wurde. Mit Hilfe der Brücke *B* konnte dem Resonator jede beliebige Länge, respective Schwingungsdauer ertheilt werden. Die Stellung der Brücke wurde an einer Theilung abgelesen, welche parallel dem Resonator von *E* ausgehend gespannt war.

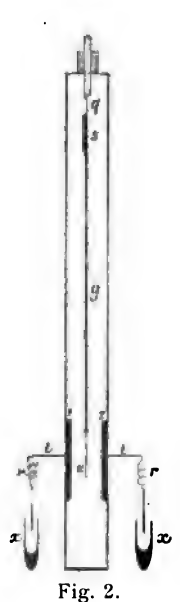


Fig. 2.

4. Die Beobachtungen wurden in der folgenden Weise ausgeführt: Für eine bestimmte Configuration des Erregers wurde durch allmäliges Verschieben der Brücke *B* die Länge des Resonators verändert. Bei jeder neuen Lage der Brücke wurde das Inductorium in Gang gesetzt und der erste Aus-

schlag des Elektrometers abgelesen. Auf diese Weise konnte festgestellt werden, bei welchen Lagen der Brücke Resonanz eintrat; auch war es leicht, die Form der Resonanzcurve zu ermitteln. Bei der Kleinheit der Elektrometercapacität und der geringen Distanz der Resonatordrähte wird wohl kaum etwas dagegen einzuwenden sein, wenn in erster Annäherung die Länge rB (Fig. 1) gleich der Viertelwellenlänge der dem betreffenden Resonator entsprechenden Schwingung gesetzt wird.[1] Dies wird im Weiteren geschehen. Die einigermassen exacte Feststellung des Intensitätsverhältnisses zweier Punkte derselben, oder der Maxima zweier verschiedener Resonanzcurven war, wegen der Unregelmässigkeit der Primärfunken, nur durch Ausführung einer sehr grossen Zahl abwechselnder Einzelbeobachtungen zu erreichen. Bei dem Grade der Empfindlichkeit, welchen das Elektrometer hatte, war ausserhalb der Gebiete der Resonanz kein Ausschlag vorhanden.

5. Die Ergebnisse einiger Versuche sind in den folgenden Tabellen und Figuren dargestellt. Es bedeuten darin:

R_a den Radius der Condensatorplatten aa' in Centimetern,

R_b den Radius der Condensatorplatten bb' in Centimetern,

δ_a die Distanz der Condensatorplatten aa' in Centimetern,

δ_b die Distanz der Condensatorplatten bb' in Centimetern,

$\lambda/4$ die Länge rB (Fig. 1), für welche Resonanz eintrat, in Metern.

Aus Tabelle I und Fig. 3 ist ersichtlich, dass bei der gewählten Aufstellung den verschiedenen einfachen Kreisen, durch deren Combination die zu untersuchenden complicirten Erreger gebildet wurden, in dem eingangs definirten Sinne eine und nur eine bestimmte Periode zukommt.

---

[1] Vergl. P. Drude, Wied. Ann., 53, S. 728, 729; 1894.

Tabelle I.

	$\lambda/4$			
$\delta =$	8	6	4	3
$R_a =$ 5	.	.	1·5	1·625
$R_a =$ 10	2·0	2·2	2·525	2·85
$R_a =$ 15	2·65	2·95	3·5	4·05
$R_a =$ 20	3·35	3·75	4·45	5·1
$R_b =$ 5	1·9	2·0	2·15	2·3
$R_b =$ 10	2·7	2·9	3·3	3·7
$R_b =$ 15	3·5	3·9	4·55	5·1
$R_b =$ 20	4·3	4·8	5·7	6·55

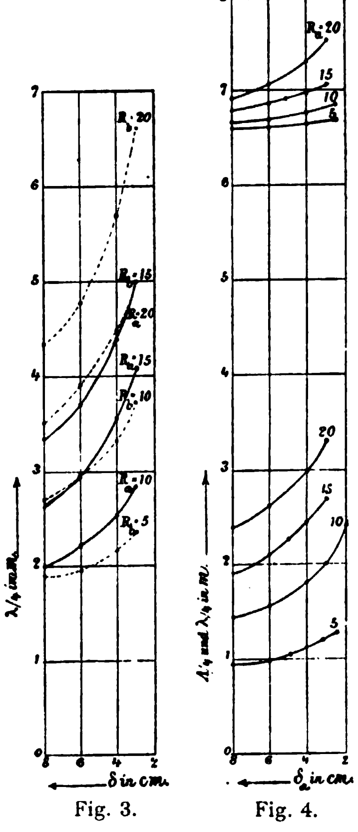


Fig. 3. Fig. 4.

In Tabelle II und Fig. 4 sind verschiedene Versuche mit complicirten Erregern zusammengestellt. Bei allen diesen hier mitgetheilten Versuchen war der Condensator bb' unverändert, und zwar hatte er die Bestimmungsstücke $R_b = 20$, $\delta_b = 3$. In dieser Tabelle bedeuten $\Lambda/4$ und $\lambda/4$ die Resonatorlängen rB, bei welchen Resonanz eintrat, in Metern.

Tabelle II.

$\delta_a =$	8		6		5		4		3		2	
R_a	$\lambda/4$	$\Lambda/4$	$\lambda/4$	$\Lambda/4$	$\lambda/4$	$\Lambda/4$	$\lambda/4$	$\Lambda/4$	$\lambda/4$	$\Lambda/4$	$\lambda/4$	$\Lambda/4$
5	0·935	6·62	0·985	6·635	1·01	6·655	1·09	6·67	1·19	6·675	1·42	6·7
10	.	.	1·52	6·72	1·61	6·73	1·74	6·775	1·94	6·81	2·38	6·98
15	1·9	6·82	2·09	6·86	2·22	6·92	2·42	6·98	2·705	7·12	.	.
20	2·35	6·95	2·6	7·08	.	.	3·01	7·3	3·34	7·57	.	.

In Tabelle III ist das Verhältniss Λ/λ angegeben:

Tabelle III.

$\delta_a =$	8	6	5	4	3	2
R_a	Λ/λ	Λ/λ	Λ/λ	Λ/λ	Λ/λ	Λ/λ
5	7·08	6·74	6·59	6·12	5·61	4·72
10	.	4·42	4·18	3·89	3·51	2·93
15	3·59	3·28	3·12	2·89	2·69	.
20	2·96	2·72	.	2·43	2·27	.

Aus diesen Tabellen folgt, dass für jede der in denselben verzeichneten Combinationen zwei Resonanzmaxima mit den vorhandenen Mitteln nachweisbar waren. Es erregt daher jede dieser (und ebenso eine grosse Zahl anderer, von mir untersuchter ähnlicher) Combinationen zwei und höchstwahrscheinlich nicht mehr als zwei gedämpfte Schwingungen verschiedener Periode. Was die Grösse der Perioden anbetrifft, so lässt sich der Satz aussprechen, dass die kürzere Periode des combinirten Kreises kleiner sei als die Periode des (elektrisch) kleineren, die längere hingegen grösser als diejenige des (elektrisch) grösseren einfachen Kreises, durch deren Zusammensetzung man den combinirten Kreis gebildet denken kann.

6. Was die Amplituden der dem combinirten Kreise zukommenden beiden Schwingungen anlangt, so fand ich, dass dieselben für jede bestimmte Combination in einem innerhalb der Beobachtungsfehler constanten Verhältnisse zu einander stehen. In der Fig. 5 ist das Verhältniss Λ/λ als Abscisse, das Verhältniss a/A als Ordinate verzeichnet. a und A bedeuten die Amplituden der kürzeren, beziehungsweise der längeren Schwingung der combinirten Kreise. Die Bestimmung des Amplitudenverhältnisses geschah in der S. 174 angedeuteten Weise; für jeden der beiden mittleren Ausschläge, welche den beiden Resonanzmaximis entsprachen, wurde bei jeder Combination nach der Empfindlichkeitscurve des Elektrometers die

Anzahl der Elemente bestimmt, welche denselben Ausschlag hervorgerufen hätte, und das Verhältniss der Elementenzahlen als Amplitudenverhältniss angesehen. Die Curve, welche das Amplitudenverhältniss als Function des Periodenverhältnisses darstellt, weist ein ausgesprochenes Maximum in der Nähe von $\Lambda/\lambda = 3$ auf. Es hat daselbst den Werth $0 \cdot 34$. Die Curve scheint noch ein zweites, weniger scharfes Maximum bei $\Lambda/\lambda = 6$ zu besitzen. Jenseits von $\Lambda/\lambda = 7 \cdot 08$ und $\Lambda/\lambda = 2 \cdot 27$ war es mir nicht möglich, bei den verschiedenen daraufhin untersuchten Kreisen das der kleineren Schwingung zugehörige Maximum nachzuweisen, obwohl an seinem Vorhandensein zu zweifeln ein Grund nicht vorliegt. Es dürfte dies nur eine Folge der oben erwähnten unzureichenden Empfindlichkeit meines Elektrometers gewesen sein. Über den Verlauf der Curve Fig. 5 jenseits der hier angegebenen Grenzen wüsste ich daher nichts auszusagen, was den Werth von mehr als einer blossen Vermuthung beanspruchen dürfte.

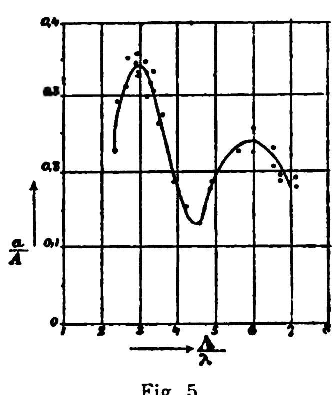


Fig. 5.

7. Kurz zusammengefasst ist also das Ergebniss der vorliegenden Versuche das folgende:

Erreger Hertz'scher Schwingungen von der in Fig. 1 angegebenen Gestalt erzeugen im Allgemeinen zwei simultane Schwingungen, deren Amplitudenverhältniss für jeden bestimmten Erreger ein bestimmtes ist; doch könnte dasselbe von der Erregungsart abhängen. Die numerischen Werthe der Perioden der den combinirten Kreis bildenden einfachen Hertz'schen Erreger liegen zwischen denjenigen der Simultanschwingungen des entsprechenden combinirten Kreises.

8. Die Ergebnisse der beschriebenen Versuche stehen in guter Übereinstimmung mit der Theorie. Man kann dieselbe unter Zugrundelegung der Kirchhoff'schen Annahmen

ganz allgemein für ein beliebig complicirtes System aufstellen.[1]

Es sollen n punktförmige Capacitäten $c_1, c_2, \ldots c_n$, welche auf die Potentiale $V_1, V_2, \ldots V_n$ geladen sind, in allen möglichen Combinationen zu je zweien durch capacitätsfreie und widerstandslose Drähte verbunden werden. Bedeutet J_{ik} die Stromstärke in dem die Capacitäten c_i und c_k verbindenden Drahte, von c_i nach c_k gezählt, so gelten zunächst die n Gleichungen:

$$-c_i \frac{dV_i}{dt} = J_{i1} + J_{i2} + \ldots + J_{in} \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

Hierin ist $J_{ik} = -J_{ki}$, mithin $J_{ii} = 0$.

Sind die Drähte so angeordnet, dass ihre gegenseitige Induction vernachlässigt werden kann und bedeutet $L_{ik} = L_{ki}$ den Selbstinductionscoëfficienten des die Capacitäten c_i und c_k verbindenden Drahtes, so gelten ferner die $^1/_2\, n(n-1)$ Gleichungen:

$$L_{ik} \frac{dJ_{ik}}{dt} = V_i - V_k \qquad (i = 1, 2, \ldots n;\; k = 1, 2, \ldots n).$$

Aus diesen Gleichungen folgt nach Elimination der J_{ik} das System von n simultanen Gleichungen für die Potentiale V_i:

$$c_i \frac{d^2 V_i}{dt^2} = V_1 N_{i1} + V_2 N_{i2} + \ldots + V_i N_{ii} + \ldots + V_n N_{in} \qquad 1)$$

Hierin ist N_{ik} für $\frac{1}{L_{ik}}$ gesetzt, und zur Definition der N_{ii} dient die Gleichung:

$$\sum_{i=1}^{i=n} N_{ik} = 0. \qquad 2)$$

Ein Integral der Gleichungen 1) ist jedenfalls:

$$V_i = A_i \sin xt, \qquad 3)$$

---

[1] Ich bin Herrn Prof. G. Jaumann sehr zu Dank verpflichtet, welcher mir diese von ihm gelegentlich für andere Zwecke angestellte Rechnung zur Verfügung stellte.

wo $x = \frac{2\pi}{T}$ gesetzt wird und A_i die Amplitude, T die Dauer der Schwingung, t die Zeit bedeutet. In Verbindung mit Gleichung 1) ergibt dies die folgenden Bedingungen für die Constanten der Schwingung:

$$\begin{array}{l} 0 = (N_{11} + c_1 x^2) . A_1 + N_{12} A_2 + \ldots + N_{1n} A_n \\ 0 = N_{21} . A_1 + (N_{22} + c_2 x^2) A_2 + \ldots + N_{2n} A_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 = N_{n1} . A_1 + N_{n2} A_2 + \ldots + (N_{nn} + c_n x^2) A_n \end{array}$$

Wegen der Homogeneität dieser n Gleichungen in den A_i verschwindet die Determinante der Coëfficienten dieser Grössen. Zur Bestimmung der x^2, beziehungsweise der T erhält man somit die Gleichung:

$$\begin{vmatrix} (N_{11} + c_1 x^2), & N_{12}, & N_{13}, & \ldots & N_{1n} \\ N_{21}, & (N_{22} + c_2 x^2), & N_{23}, & \ldots & N_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ N_{n1}, & N_{n2}, & N_{n3}, & \ldots & (N_{nn} + c_n x^2) \end{vmatrix} = 0 \qquad 4)$$

Mit Rücksicht auf Gleichung 2) lässt sich Gleichung 4) in die Form bringen:

$$\begin{vmatrix} c_1, & N_{12}, & N_{13}, & \ldots & N_{1n} \\ c_2, & (N_{22} + c_2 x^2), & N_{23}, & \ldots & N_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_n, & N_{n2}, & N_{n3}, & \ldots & (N_{nn} + c_n x^2) \end{vmatrix} = 0 \qquad 5)$$

Ein System von n Capacitäten vermag also mit höchstens $n-1$ durch Gleichung 4) oder Gleichung 5) definirten Schwingungsdauern zu schwingen.

Auf eine Anordnung dieser allgemeinen Form lässt sich jedes System zurückführen. Falls zwischen zwei Capacitäten c_i und c_k kein directer Verbindungsdraht vorhanden ist, so ist $N_{ik} = 0$ zu setzen. An solchen Verzweigungspunkten der

Drähte, an welchen keine Capacität angebracht ist, ist die Capacität $c_i = 0$ einzuführen. Wenn zwei symmetrische Systeme durch einen Draht symmetrisch verbunden sind, so kann man in der Mitte dieses Drahtes eine unendlich grosse Capacität anbringen und dann auch die eine Hälfte des Systems fortlassen; die Schwingungsdauern des neuen Systems sind dieselben wie jene der symmetrisch verbundenen symmetrischen Systeme.

9. Auf den bei den obigen Experimenten vorliegenden Fall[1] angewendet, ergibt sich zur Berechnung der Schwingungen (vergl. Fig. 1) die Determinante:

$$\begin{vmatrix} (N_{11}+c_1 x^2), & 0, & N_{13}, & 0 \\ 0, & (N_{22}+c_2 x^2), & N_{23}, & 0 \\ N_{13}, & N_{23}, & N_{33}, & N_{34} \\ 0, & 0, & N_{34}, & (N_{44}+c_4 x^2) \end{vmatrix} = 0$$

Da der Erreger um die Funkenstrecke ff' symmetrisch ist, so hat man bei ff' eine Capacität $c_2 = \infty$ zu setzen und die eine Hälfte des Systems fortzudenken.

Es ergibt sich:

$$x^2 = \frac{(L_{13}+L_{23})c_1+(L_{23}+L_{34})c_4}{2(L_{13}L_{23}+L_{13}L_{34}+L_{23}L_{34})c_1c_4} \pm$$
$$\pm \sqrt{\left[\frac{(L_{13}+L_{23})c_1+(L_{23}+L_{34})c_4}{2(L_{13}L_{23}+L_{13}L_{34}+L_{23}L_{34})c_1c_4}\right]^2 - \frac{1}{(L_{13}L_{23}+L_{13}L_{34}+L_{23}L_{34})c_1c_4}} \qquad 6)$$

In Tabelle IV sind die aus Gleichung 6) sich ergebenden Viertelwellenlängen für einige der oben untersuchten Combinationen zusammengestellt und aus Tabelle II die entsprechenden beobachteten Werthe in Klammern beigefügt. Die Selbstinductionscoëfficienten L_{13}, L_{23}, L_{34} sind nach der für geradlinige Drähte geltenden Formel

[1] Dieselbe Rechnung lässt sich auf die Versuche von A. J. v. Oettingen, Wied. Ann., 34, S. 570, 1888 anwenden. Die dortige Versuchsanordnung bildet, von einer gewissen Unsymmetrie abgesehen, einen speciellen Fall der in Fig. 1 skizzirten Aufstellung, wenn man in letzterer die im Weiteren mit l_{23} bezeichnete Länge gleich Null macht, so dass $n(n')$ mit $f(f')$ zusammenfällt. Dann ergibt die Theorie den Grenzfall, dass die Schwingungen des complicirten Kreises gleich sind jenen der beiden Einzelkreise. Dies aber ist die v. Oettingen'sche Voraussetzung.

$$L_{ik} = 2 l_{ik} \left[\log \text{nat.} \frac{4 l_{ik}}{d} - 0{\cdot}75 \right] \qquad 7)$$

berechnet, worin l_{ik} die Länge, d den Durchmesser des die Capacitäten c_i und c_k verbindenden Drahtes in Centimetern bedeutet. Die Capacitäten c_1 und c_4 berechnen sich nach der Formel

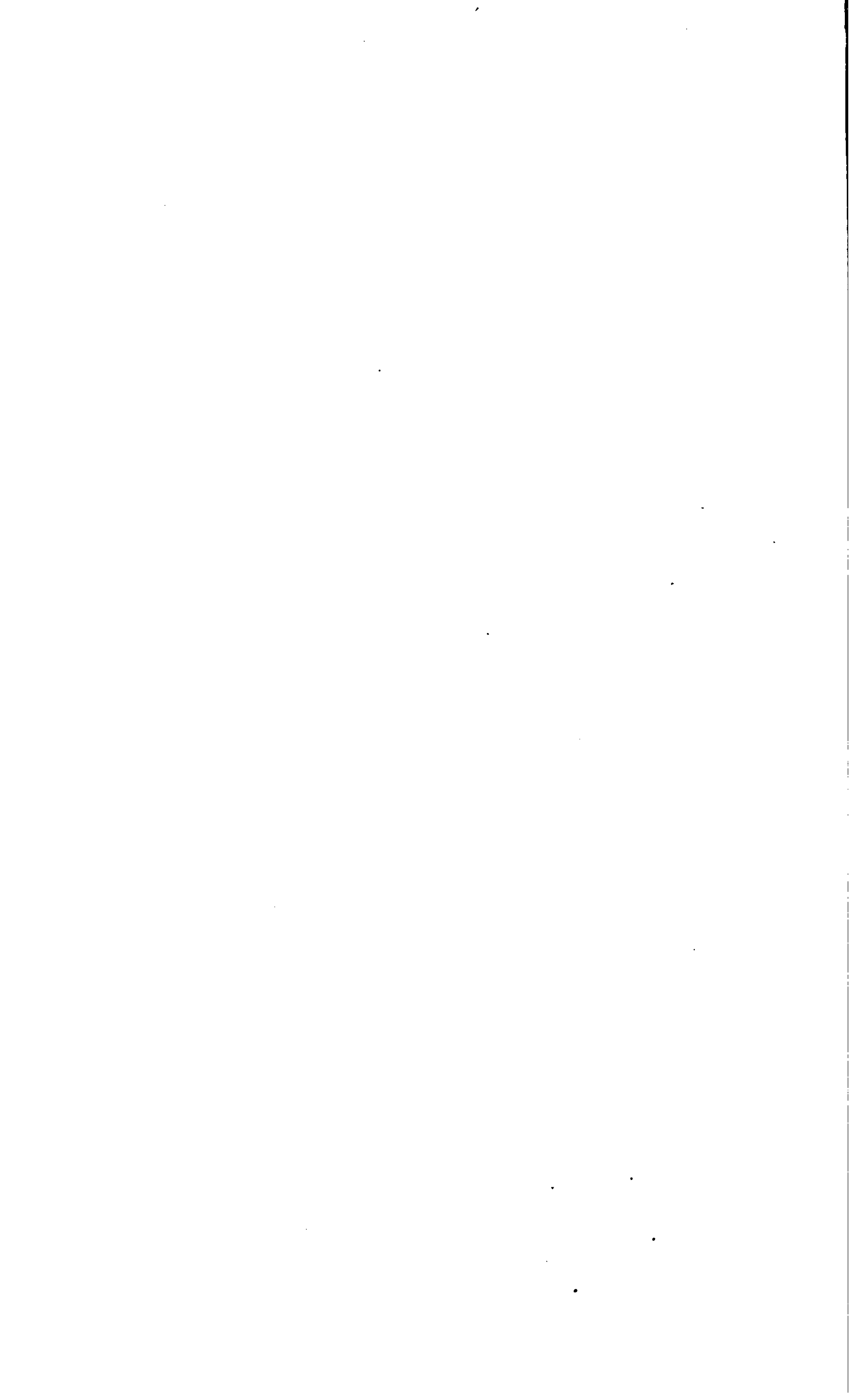
$$c_i = \frac{1}{2} \cdot \frac{R_i^2}{4 \delta_i} \cdot \frac{1}{9.10^{20}}, \qquad 8)$$

wenn R_i den Radius, δ_i die Distanz der die Capacität c_i bildenden Platten in Centimetern ausdrückt.

Tabelle IV.

δ_a	8		6		5		4		3	
R_a	$\lambda/4$	$\Lambda/4$	$\lambda/4$	$\Lambda/4$	$\lambda/4$	$\Lambda/4$	$\lambda/4$	$\Lambda/4$	$\lambda/4$	$\Lambda/4$
10	.	.	1·33 (1·52)	6·25 (6·72)	.	.	.	.	1·85 (1·94)	6·37 (6·81)
20	2·22 (2·35)	6·55 (6·95)	.	.	.	.	2·97 (3·01)	6·87 (7·3)	3·29 (3·34)	7·16 (7·57)

Die vorhandenen Unterschiede zwischen den beobachteten und berechneten Werthen erklären sich wohl ungezwungen einerseits aus den Vernachlässigungen, welche in den Voraussetzungen der mitgetheilten Theorie gemacht wurden (Annahme capacitätsloser Drähte und inductionsfreier Condensatoren), anderseits aus den Ungenauigkeiten, welche der Berechnung der L_{ik} und c_i nach Formel 7) und 8) von Natur aus anhaften.



SITZUNGSBERICHTE

DER

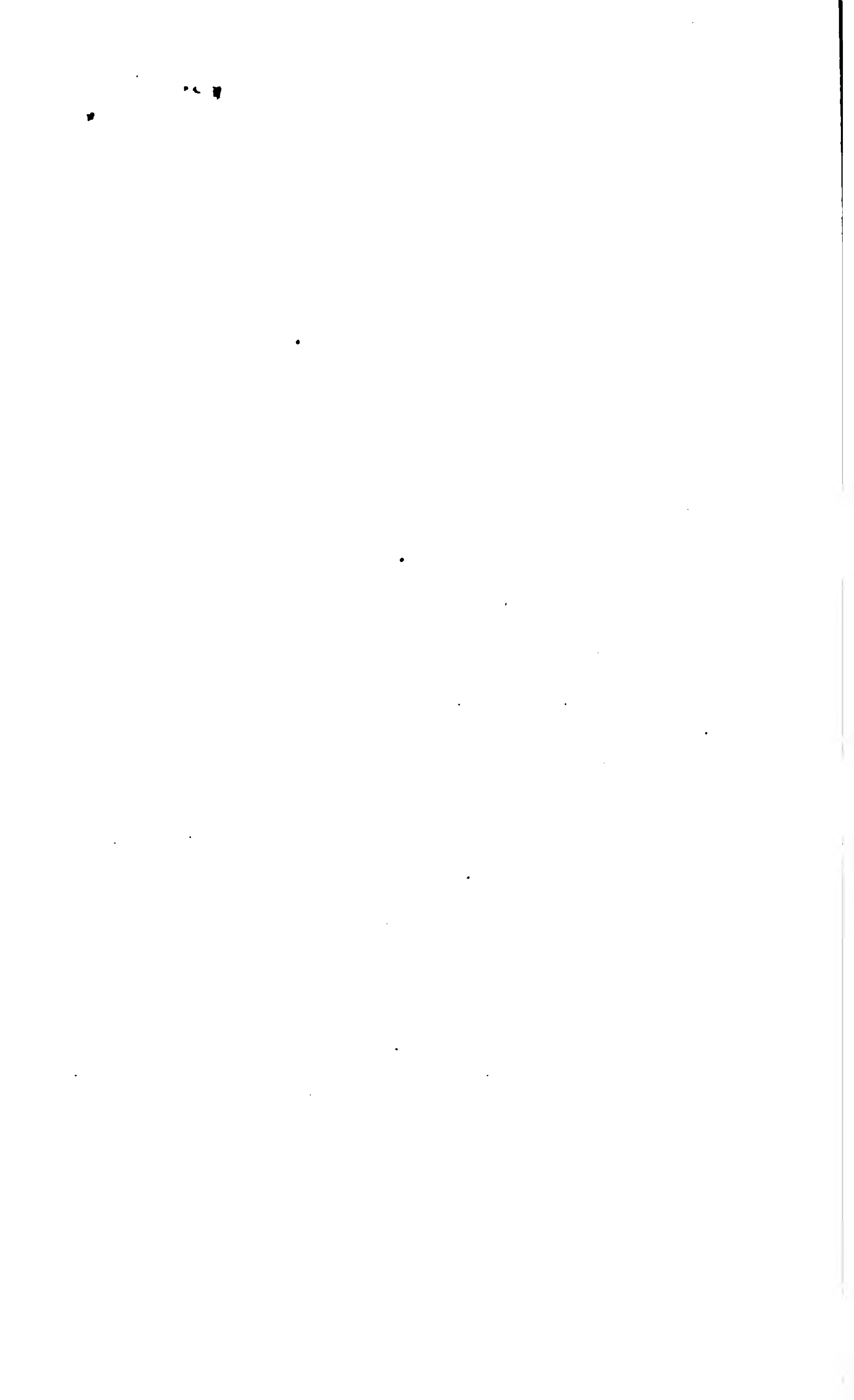
KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

CIV. BAND. III. HEFT.

ABTHEILUNG II. a.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE, PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.



VII. SITZUNG VOM 7. MÄRZ 1895.

Der Secretär legt das erschienene Heft IX—X (November und December 1894), Abtheilung II. a. des 103. Bandes der Sitzungsberichte, ferner das Heft I (Jänner 1895) des 16. Bandes der Monatshefte für Chemie vor.

Herr Prof. Dr. O. Tumlirz an der k. k. Universität in Czernowitz übersendet eine Abhandlung, betitelt: »Die Erstarrungswärme in Lösungen«.

Der Secretär legt ein versiegeltes Schreiben behufs Wahrung der Priorität von Herrn F. C. Lukas, Rechnungsofficial der k. k. statistischen Central-Commission in Wien mit der Aufschrift: »Rotationsreihen« vor.

Das w. M. Herr Oberbergrath E. Mojsisovics Edler v. Mojsvár überreicht eine Abhandlung des Herrn Gejza v. Bukowski in Wien, unter dem Titel: »Die levantinische Molluskenfauna der Insel Rhodus« (II. Theil, Schluss).

Das w. M. Herr Prof. H. Weidel überreicht folgende zwei im I. chemischen Laboratorium der k. k. Universität in Wien ausgeführte Arbeiten von Carl Oettinger:

1. »Über die Umwandlung des Triamidophenols in das 1-, 2-, 3-, 5-Phentetrol«.
2. »Zur Kenntniss der Acetylproducte des Triamidophenols«.

Herr Intendant Hofrath F. Ritter v. Hauer überreicht eine Abhandlung von Dr. A. Bittner in Wien: »Über zwei ungenügend bekannte Crustaceen des Vicentinischen Eocäns«.

Herr Dr. Ed. Mahler in Wien überreicht eine Abhandlung unter dem Titel: »Zur Chronologie der Babylonier«.

Herr Prof. Dr. Wilhelm Wirtinger an der k. k. Universität in Innsbruck überreicht eine Mittheilung: »Zur Theorie der allgemeinen Thetafunctionen«.

Schliesslich legt der Vorsitzende, Herr Prof. E. Suess, eine neue Collecte von photographischen Mondbildern vor, welche Herr Prof. Dr. L. Weineck, Director der k. k. Sternwarte in Prag, mit einem hierauf bezüglichen Schreiben eingesandt hat.

Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:

Ithaka, U. S. New York, Cornell University, The Physical Review. Editors: Edward L. Nichols and Ernest Merritt. Vol. II.—X. January—February 1895. New York, 1895; 8⁰.

VIII. SITZUNG VOM 14. MÄRZ 1895.

Der Secretär legt das erschienene Heft VIII—X (October bis December 1894), Abtheilung I des 103. Bandes der Sitzungsberichte vor, womit nun der Druck dieses Bandes in allen Abtheilungen vollendet ist.

Das w. M. Herr Oberbergrath E. Mojsisovics Edler v. Mojsvár legt eine Abhandlung von Dr. Carl Diener vor, unter dem Titel: »Mittheilungen über triadische Cephalopodenfaunen von der Ussuri-Bucht und der Insel Russkj in der ostsibirischen Küstenprovinz«.

Das w. M. Herr Prof. A. Weichselbaum überreicht eine Abhandlung aus dem pathologisch-anatomischen Institute der k. k. Universität in Wien von Dr. K. Buday, betitelt: »Beiträge zur Lehre von der Osteogenesis imperfecta«.

Das w. M. Herr Director E. Weiss überreicht eine Abhandlung von Prof. Dr. J. v. Hepperger in Graz unter dem Titel: »Über die Helligkeit des verfinsterten Mondes und die scheinbare Vergrösserung des Erdschattens«.

Herr Dr. F. Czapek überreicht eine im pflanzenphysiologischen Institute der k. k. Wiener Universität ausgeführte Arbeit: »Über Zusammenwirken von Heliotropismus und Geotropismus«.

Der Vorsitzende, Herr Vicepräsident E. Suess, zeigt und bespricht zwei von dem ausw. c. M. Herrn M. Loewy, Director der Pariser Sternwarte, und Herrn Puiseux mit dem grossen Equatorial coudé dieser Sternwarte angefertigte Bilder von Theilen des Mondes.

Über die Helligkeit des verfinsterten Mondes und die scheinbare Vergrösserung des Erdschattens

von

Dr. J. v. Hepperger,

Professor an der k. k. Universität in Graz.

(Mit 2 Textfiguren.)

Es ist schon seit langer Zeit bekannt, dass die Helligkeit des im Kernschatten der Erde liegenden Theiles der Mondoberfläche von dem durch die Erdatmosphäre dorthin gebrochenen Sonnenlichte herrührt und daher wesentlich von dem Grade der Durchsichtigkeit und dem Brechungsvermögen unserer Atmosphäre abhängt. Unter Umständen kann die Helligkeit während einer totalen Finsterniss soweit abnehmen, dass der Mond unsichtbar wird, wie die Finsternisse[1] vom 9. December 1620 (Bericht von Cysat an Kepler), 25. April 1642 (Hevel) und 6. Juni 1816 (Steph. Lee in London) dargethan haben.

Diese Abhängigkeit der Helligkeit von den wechselnden Trübungen in unserer Atmosphäre, sowie der erst in neuester Zeit behobene Mangel an verlässlichen Extinctionsbeobachtungen mag dazu beigetragen haben, dass die Intensität der Beleuchtung des verfinsterten Mondes noch nie Gegenstand eingehender Untersuchung geworden ist.[2] Durch einige vor

[1] R. Wolf, Handbuch der Astronomie, Zürich 1890, I. Bd., S. 519.

[2] Laplace scheint sich hiemit nur sehr flüchtig befasst zu haben, wie aus der Bemerkung in »Oeuvres Complètes de Laplace« tome VI, livre I, chap. 16, hervorgeht, dass, wenn das Licht in unserer Atmosphäre keine Absorption erfahren würde, der Mittelpunkt des Mondes bei einer centralen Finsterniss mehr Licht empfangen würde, als bei voller Beleuchtung durch die Sonne (während

wenigen Jahren veröffentlichte Beobachtungen der Helligkeit des verfinsterten Mondes angeregt, habe ich mir die Aufgabe gestellt, die Helligkeit aus den Elementen der Finsternisse zu berechnen. Es liegt in der Natur dieses Problems, dass eine genaue Lösung desselben nicht gegeben werden kann, so lange die meteorologischen Verhältnisse der Erdatmosphäre nicht ihrem vollen Umfange nach bekannt sind. Man wird aber auch, um die Schwierigkeiten, die sich der analytischen Behandlung des Problems entgegenstellen, einigermassen zu mindern, genöthigt sein, gewisse vereinfachende Annahmen zu machen, wozu man umsomehr berechtigt ist, als auch die Wirkungen von Refraction und Absorption nur näherungsweise angegeben werden können.

Es wird in Folgendem davon abgesehen, dass die Helligkeit der Sonne gegen den Rand zu abnimmt, und die Sonne als eine durchaus gleichmässig leuchtende Scheibe vorausgesetzt. Ferner wird angenommen, dass die Erdoberfläche und die Flächen gleichen Druckes und gleicher Temperatur in der Atmosphäre concentrische Kugelflächen seien und der Einfluss localer Trübungen vernachlässigt werden könne. Des Weiteren wird die Annahme gemacht, dass alle Punkte der Mondoberfläche sich in demselben Abstande vom Erdmittelpunkte befinden und daher die Begrenzung des Erdschattens auf dem Monde durch einen Kreisbogen dargestellt sei. Da die Helligkeit irgend eines im Schattenkegel der Erde gelegenen Punktes von den Refractions- und Absorptionsbeträgen der verschiedenen atmosphärischen Schichten abhängt, werde ich mit den hierauf Bezug nehmenden Untersuchungen beginnen.

Refraction.

Bei Vernachlässigung der Abplattung der Erde, sowie der Verschiedenheit der Lufttemperatur in gleichen Abständen vom Erdcentrum ist der Weg jedes die Atmosphäre durchsetzenden

---

er thatsächlich bei mittlerem Abstande des Mondes von der Erde nur ungefähr $^1/_{60}$ der dem Volllichte entsprechenden Lichtmenge erhält) und dass durch die Absorption das Verhältniss dieser Lichtmengen bei Finsternissen im Apogäum 0·02, im Perigäum 0·0036 werde (dieses Verhältniss ist annähernd gleich 0·000008, respective 0·000002).

Lichtstrahles eine Curve, welche durch die Linie der kürzesten Entfernung vom Erdmittelpunkte in zwei symmetrisch zu derselben verlaufende Äste getheilt, mithin in ihrem Scheitelpunkte getroffen wird. Die ganze Ablenkung, welche der Lichtstrahl durch die Atmosphäre erleidet, ist sonach gleich dem doppelten Betrage der Horizontalrefraction für den Scheitelpunkt der Curve und nach jeder Refractionstheorie nur eine Function des in verticaler Richtung gemessenen Abstandes dieses Punktes von der Erdoberfläche. Da die verschiedenen Refractionstheorien auf verschiedenen Annahmen über die Temperaturänderung innerhalb der Grenzen der Atmosphäre basiren und die in ihnen auftretenden Constanten meist so bestimmt sind, dass die beobachteten Refractionen, welche vorzüglich von der Beschaffenheit der untersten Luftschichten abhängen, möglichst gut dargestellt werden, so ist zu erwarten, dass die aus verschiedenen Theorien berechneten Refractionen nicht unwesentlich von einander abweichen werden, und zwar um Beträge, welche bis zu einer gewissen Grenze mit der Erhebung des Scheitelpunktes der Lichtcurve zunehmen. Je rascher die Dichte der Luft mit wachsender Höhe abnimmt, desto schneller erfolgt auch die Abnahme der Refraction.

Nun gibt es allerdings kein sicheres Kriterium für die Aufstellung einer Grenze, unter welcher die Dichte der Luft in sehr grossen Höhen nicht angenommen werden darf, indem die hierauf bezugnehmenden Erscheinungen immerhin auf verschiedene Weise erklärt werden können. So fehlt es auch nicht an Hypothesen über die Ursache des Leuchtens der Sternschnuppen. Hievon dürfte jedoch jene, und wie mir scheint mit Recht, die meisten Anhänger besitzen, welche das Leuchten als eine Folge der durch den Widerstand der Luft hervorgerufenen Wärmeentwicklung betrachtet. Zur Berechnung dieser Wärmeentwicklung macht Herr Schiaparelli[1] zwei auf ballistischen Experimenten beruhende Annahmen, dass die Abhängigkeit des Widerstandes U von der in Metern ausgedrückten Geschwindigkeit u durch die Formeln dargestellt werde:

[1] Entwurf einer astronomischen Theorie der Sternschnuppen, übersetzt von G. v. Boguslawski; erste und zweite Note.

$$\text{I}\ldots \quad U = 0\cdot0260\left(1+\frac{u}{400}\right).u^2$$

$$\text{II}\ldots \quad U = 0\cdot0387\left[1+\left(\frac{u}{600}\right)^2\right]u^2.$$

U bedeutet den von der Luft bei der Temperatur 0° im Niveau des Meeres auf den Quadratmeter des grössten Kreises des Projectils ausgeübten Überdruck in Kilogrammen. Die absolute Temperatur T', auf welche eine Luftschicht von der Temperatur T durch Compression gebracht wird, erhält man aus der Formel

$$\frac{T'}{T} = \left(0\cdot02643\frac{U}{T}\right)^{0\cdot2933}.$$

Für $u = 72000\,m$ und $T = 123$ (= —150° C.) wird nach Formel I:

$$T' = 11493 \; (= 11220° \text{ C.}),$$

nach Formel II:

$$T' = 42776 \; (= 42503° \text{ C.}).$$

Die Abnahme der Geschwindigkeit einer in verticaler Richtung in die Atmosphäre mit einer anfänglichen Geschwindigkeit von 72000 *m* eindringenden Kugel von 4 *cm* Durchmesser und dem specifischen Gewichte 3·5 lässt sich aus folgender Zusammenstellung ersehen.

	Formel I	Formel II
u	p	p
72000 *m*	0·000 *mm*	0·0000 *mm*
60000	0·038	0·0005
48000	0·096	0·0013
36000	0·192	0·0031
24000	0·383	0·0082
12000	0·950	0·0358

p bedeutet die in Millimetern ausgedrückte Höhe der Quecksilbersäule, welche dem Luftdrucke in jener Schicht das Gleichgewicht hält, in welcher die anfängliche Geschwindigkeit auf die beigefügte Zahl reducirt erscheint. Aus dieser Tafel ist ferner die rasche Abnahme von p beim Übergange von Formel I

auf II ersichtlich. Da p dem Durchmesser der Kugel und dem specifischen Gewichte derselben proportional ist, letzteres aber für die überwiegende Mehrheit der Sternschnuppen den angenommenen Werth nicht viel übersteigen wird, während der Diameter derselben im Durchschnitte wahrscheinlich viel kleiner ist als 4 *cm*, so nimmt die Geschwindigkeit der Sternschnuppen nach Formel II mit der Drucksteigerung in der Atmosphäre bereits so rapid ab, dass man durch Einführung einer höheren Potenz von u in den Ausdruck für U der Wahrheit kaum näher kommen dürfte.

Nach Herrn Newton ist für die Novembermeteore (Leoniden), welche den Elementen ihrer Bahn zufolge mit einer relativen Geschwindigkeit von etwa 70 *km* in die Atmosphäre eindringen, die mittlere Höhe des Aufleuchtens circa 155 *km*. In dieser Höhe müsste nach den gemachten Annahmen die Dichte der Luft noch so gross sein, dass die durch Compression bewirkte Temperatursteigerung das Glühen der Körper rechtfertigt. Untersuchen wir von diesem Gesichtspunkte aus zunächst Ivory's Theorie der Refraction, in welcher, unter Beibehaltung der üblichen Bezeichnungsweise (ρ = Dichte, p = Druck, t = Temperatur, $s = \frac{r-a}{a}$ etc.):

$$\rho = \rho_0 e^{-u}; \qquad s = \frac{l_0}{a}\left[\frac{7}{9}u + \frac{4}{9}(1-e^{-u})\right];$$

$$\frac{p}{p_0} = \frac{\rho}{\rho_0}\,\frac{1+mt}{1+mt_0}.$$

Hieraus erhält man für folgende Höhen

Höhe	$\log \frac{\rho}{\rho_0} + 20$	p	$t_0 - t$
80 *km*	14·8249	0·003950 *mm*	60°5
100	13·4691	174	60·5
120	12·1134	8	60·5
140	10·7575	0	60·5
160	9·4006	0	60·5

$$m = 0{\cdot}00367; \qquad \log \frac{1+mt}{1+mt_0} = 9{\cdot}8909-10.$$

Formel II gibt für eine Geschwindigkeit von 72000 *m* $\log U = 12\cdot3323$; ist $t = -60\cdot5$, also $T = 212$, so wird $T' = 62830$ ($= 62557°$ C.). Die Erwärmung eines Körpers durch ein glühendes Gas hängt ausser von der Temperatur des Gases auch von der Dichte desselben, sowie von der Zeit der Berührung ab. Bezeichnet P, D Druck und Dichte der comprimirten Luft, p, ρ Druck und Dichte der Luft vor der Compression, k das Verhältniss der specifischen Wärme bei constantem Druck zu jener bei constantem Volum, so ist

$$\frac{P}{p} = \left(\frac{D}{\rho}\right)^k = \left(\frac{T'}{T}\right)^{\frac{k}{k-1}},$$

demnach

$$\log\frac{P}{p} = 8\cdot4283$$

$$\log\frac{D}{\rho} = 5\cdot9564$$

und es wird

	Höhe	
	150 *km*	160 *km*
$\frac{\rho_0}{D}$	9205	43960
$\frac{p_0}{P}$	40	190

In diesen Höhen wäre sonach der Druck der comprimirten Luft noch viel kleiner als der Atmosphärendruck an der Erdoberfläche und daher die durch Compression des Meteors erzeugte Wärme verschwindend klein. Auch wird die geringe Dichte der erhitzten Luftschicht den Erwärmungsprocess wesentlich verlangsamen, indem die in einer bestimmten Zeit dem Körper zugeführte Wärme dieser Dichte proportional ist. Wenn das Meteor während einer vollen Secunde der Erwärmung durch eine glühende Luftschicht von der einer Höhe von 150 *km* respective 160 *km* entsprechenden Dichte D ausgesetzt gewesen wäre, so würde die Temperatursteigerung ungefähr so gross sein wie jene, welche es durch eine unter dem Atmosphärendruck p_0 glühende Luftschicht von derselben Temperatur im

Zeitraume von $^1/_{40}$, respective $^1/_{190}$ Secunde erfahren hätte. Da die Dichte der Luft nach Ivory's Theorie so rasch abnimmt, dass sie bei einer Höhenzunahme von 10 *km* nur ungefähr $^1/_5$ des ursprünglichen Werthes beträgt, so ist die Zeit, während welcher die Meteore des Novemberschwarmes in ihren Bahnen bis zu einer Höhe von 155 *km* sich beträchtlich erwärmen, kleiner als 1 Secunde und die aufgenommene Wärmemenge wahrscheinlich noch geringer als jene, welche ihnen unter dem Drucke p_0 in $^1/_{1000}$ Secunde zugeführt worden wäre. In so kurzer Zeit dürfte selbst eine Flamme, deren Temperatur 62000° C. beträgt, kaum im Stande sein, einen Körper derart zu erhitzen, dass das von ihm ausgestrahlte Licht in so grosser Entfernung noch solchen Eindruck macht, wie das Aufleuchten einer Sternschnuppe.

Noch klarer offenbart sich die geringe Eignung der Ivory'schen Theorie, auf mechanischem Wege das Glühen der Meteore zu erklären, wenn man die hiezu nöthige Wärmemenge mit der zur Überwindung des Luftwiderstandes aufgewendeten Arbeit in Beziehung bringt. Die Arbeit A, bezogen auf den Quadratmeter des grössten Kreises $= a\int\frac{\rho}{\rho_0}U.ds$; bei Vernachlässigung der Geschwindigkeitsabnahme erhält man

$$A_0 = aU\int\frac{\rho}{\rho_0}ds; \qquad A < A_0$$

und da für Höhen über 100 *km* bei der Differentiation der Gleichung

$$s = \frac{l_0}{a}.\frac{7}{9}u + \frac{4}{9}\frac{l_0}{a}(1-e^{-u})$$

das zweite Glied unbedenklich vernachlässigt werden kann,

$$A_0 = \frac{7}{9}l_0.U.\frac{\rho_1}{\rho_0};$$

$\rho_1 =$ Dichte der Schicht, bis zu welcher das Meteor in verticaler Richtung vorgedrungen ist.

Für $\log U = 12\cdot3323$ wird $\log A_0 = 16\cdot1389 + \log\frac{\rho_1}{\rho_0}$.
Wenn die ganze Arbeit in Wärme umgesetzt würde, so wäre

die Anzahl der durch eine Kugel von 4 *cm* Durchmesser erzeugten Wärmeeinheiten (Arbeitsäquivalent der Wärmeeinheit = 430 *kgm*) in 150 *km*, respective 160 *km* Höhe 4·83, respective 1·01. Hieraus folgt, dass selbst in dem Falle, dass diese Wärmemenge einem einzigen Gramm der meteorischen Substanz mitgetheilt wird, die Temperatur kaum höher steigen würde, als auf 20000, respective 4000° C. Wenn man bedenkt, dass nur ein kleiner Theil der verlorenen Energie dem bewegten Körper in Form von Wärme rückerstattet wird, dass ferner der Durchmesser der Sternschnuppen im Mittel wahrscheinlich wesentlich kleiner als 4 *cm* und die entwickelte Wärme dem Quadrate des Durchmessers proportional ist, so kann man sich der Überzeugung nicht verschliessen, dass die Dichte der Luft in den Höhen, in welchen sich das Sternschnuppenphänomen darbietet, viel grösser sein muss als jene, welche aus Ivory's Theorie folgt.

Dieses Erforderniss wird durch die der Bessel'schen Theorie zu Grunde liegende Annahme über die Änderung der Dichte erfüllt. Da die in meiner Abhandlung »Zur Theorie der astronomischen Refraction«[1] entwickelte Refractionsformel auf derselben Annahme basirt und die Refractionen in der Nähe des Horizontes hiedurch besser dargestellt werden, als nach der Bessel'schen Formel, habe ich auch zur Berechnung der Horizontalrefraction in ihrer Abhängigkeit von der Höhe der Lichtcurve über der Erdoberfläche mich ersterer Formel bedient.

Bedeutet ρ, p, g, t Dichte, Druck der Luft, Schwerkraft und Temperatur in der Entfernung r vom Erdcentrum und der Index 0, dass sich diese Grössen auf die Erdoberfläche beziehen, so ist, wenn a_0 den Erdhalbmesser ausdrückt und m den Ausdehnungscoëfficienten der Luft für 1° C.:

$$s = \frac{r-a_0}{a_0}; \qquad l_0 = \frac{p_0}{\rho_0 g_0}; \qquad \varkappa_0 = a_0\left(\frac{1}{l_0} - \frac{m\omega_0}{1+mt_0}\right);$$

$$\beta_0 = \frac{c\rho_0}{1+c\rho_0}; \quad \rho = \rho_0 \frac{p}{p_0}\,\frac{1+mt_0}{1+mt}; \quad \frac{1+mt_0}{1+mt} = 1+\frac{m\omega_0 a_0 s}{1+mt_0};$$

$$\nu = \frac{1}{e-1}; \quad \nu-\mu_0 = \frac{2}{\varkappa_0}; \quad \rho = \rho_0 e^{-\varkappa_0 s}; \quad \frac{1}{k^2} = 1+\frac{\nu(\nu-\mu_0-\beta_0)}{\beta_0\mu_0}$$

[1] Diese Sitzungsberichte, Bd. 102, Abth. II. a. April 1893.

und die Horizontalrefraction an der Erdoberfläche Θ_0 in Bogensecunden:

$$\Theta_0 = \frac{k_0}{\sin 1''}\sqrt{\frac{\beta_0}{\mu_0}}\int_{\varphi_1}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\varphi d\varphi}{\sqrt{1-k_0^2\sin^2\varphi}};$$

$$\sin\varphi_1 = \sqrt{1-\nu};$$

$$\varphi_1 = 40°16'54''4.$$

Durch Entwicklung dieses Integrals in eine nach Potenzen von k_0 fortschreitende Reihe erhält man

$$\int_{\varphi_1}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\varphi d\varphi}{\sqrt{1-k_0^2\sin^2\varphi}} = b_0+b_1k_0^2+b_2k_0^4+b_3k_0^6+\ldots$$

Die Werthe der Constanten sind folgende:

$$b_0 = 0\cdot680490, \qquad \log\beta_0 = 6\cdot747845,$$
$$\log b_1 = 9\cdot448640, \qquad \log\mu_0 = 9\ 762745,$$
$$\log b_2 = 9\cdot25764, \qquad \log\nu = 9\cdot764906,$$
$$\log b_3 = 9\cdot12508, \qquad \log k_0 = 9\cdot642700,$$
$$\log b_4 = 9\cdot0230,$$
$$\log b_5 = 8\cdot9401,$$
$$\log b_6 = 8\cdot870,$$
$$\log b_7 = 8\ 811,$$

$$\frac{a_0}{l_0} = 773\cdot354, \qquad \frac{m\omega_0 a_0}{1+mt_0} = 81\cdot00, \qquad t_0 = 9°3\,\mathrm{C}.$$

Um die Horizontalrefraction Θ_1 für einen um a_1 vom Erdcentrum entfernten Punkt abzuleiten, muss man an Stelle der bisherigen Constanten jene setzen, welche für a_1 Geltung haben.

Es sei

$$s' = \frac{r-a_1}{a_1}; \quad \Delta = \frac{a_1-a_0}{a_0}; \quad l_1 = \frac{p_1}{\rho_1 g_1};$$

$$\varkappa_1 = a_1\left(\frac{1}{l_1}-\frac{m\omega_1}{1+mt_1}\right); \quad \beta_1 = \frac{c\rho_1}{1+c\rho_1},$$

so wird

$$\rho = \rho_1 e^{-\varkappa_1 s'}; \qquad \rho_1 = \rho_0 e^{-\varkappa_0 \Delta}; \qquad \frac{1+mt_0}{1+mt_1} = 1+81\,\Delta;$$

$$\frac{l_0}{l_1} = \frac{g_1}{g_0}\,\frac{1+mt_0}{1+mt_1}.$$

Durch die Annahme $\omega_0 = \omega_1$ wird

$$\frac{\varkappa_1}{\varkappa_0} = \frac{a_1}{a_0}\,\frac{1+mt_0}{1+mt_1}$$

oder näherungsweise

$$\frac{l_0}{l_1} = \frac{\varkappa_1}{\varkappa_0} = \frac{1+mt_0}{1+mt_1}.$$

Die neuen Constanten sind demnach:

$$\frac{1}{l_1} = \frac{1}{l_0}(1+81\,\Delta), \qquad \nu - \mu_1 = \frac{2}{\varkappa_1},$$

$$\varkappa_1 = \varkappa_0(1+81\,\Delta), \qquad \frac{1}{k_1^2} = 1 + \frac{\nu(\nu-\mu_1-\beta_1)}{\mu_1\beta_1},$$

$$\beta_1 = \beta_0 e^{-\varkappa_0\Delta}$$

und man erhält die Horizontalrefraction für die Höhe $a_1 - a_0$ durch die Formel

$$\Theta_1 = \frac{k_1}{\sin 1''}\sqrt{\frac{\beta_1}{\mu_1}}\,[b_0 + b_1 k_1^2 + b_2 k_1^4 + b_3 k_1^6 + \ldots] \qquad 1)$$

Die Coëfficienten b_0, $b_1 \ldots$ sind dieselben, wie in der Gleichung für Θ_0, da die Integrationsgrenzen sich nicht geändert haben. Die nach dieser Formel, in welcher die Zahl der einzubeziehenden Glieder für wachsende Δ rasch abnimmt, berechneten Refractionen sind in der Tafel auf S. 224 enthalten. Für $\Delta = 0{\cdot}001$ gibt diese Formel fast genau denselben Werth, wie die Bessel'sche Formel, wenn in derselben l der Temperaturabnahme entsprechend geändert wird. Für grössere Δ gibt letztere Formel etwas kleinere Refractionen und dürfte der Unterschied im Maximum bis auf etwa 15″ anwachsen.

Dichte, Druck und Temperatur der Atmosphäre werden für ein gegebenes Δ durch folgende Gleichungen bestimmt:

$$\rho = \rho_1 e^{-\varkappa_1 s'}; \qquad \rho_1 = \rho_0 e^{-\varkappa_0 \Delta}; \qquad p_1 = a_1 \rho_1 \int_0^\infty g e^{-\varkappa_1 s'} ds'$$

oder, wenn man für g den Anfangswerth g_1 setzt:

$$p_1 = \frac{a_1 \rho_1 g_1}{\varkappa_1}; \qquad p_0 = l_0 . g_0 . \rho_0; \qquad \frac{1+mt_1}{1+mt_0} = \frac{a_1 g_1}{\varkappa_1 l_0 g_0}.$$

Da die zur Ableitung der Formel $\rho = \rho_0 e^{-\varkappa_0 s}$ gemachte Annahme $p = p_0 . e^{-\frac{a_0}{l_0} s}$ die Druckabnahme wegen Vernachlässigung der Temperaturänderung zu langsam erfolgen lässt, so gibt die Formel auch die Dichte zu gross, wesshalb der hieraus bestimmte Druck p_1 für $\Delta = 0$ nicht in p_0 übergeht, sondern merklich grösser bleibt. Die Werthe von ρ, p, t für Höhen zwischen 80 *km* und 160 *km* sind folgende:

Höhe	$\log \frac{\rho}{\rho_0} + 10$	$\log \frac{p}{p_0} + 10$	p	t
80 *km*...	6·2255	5·9636	0·069890 *mm*	—118°3
100 ...	5·2819	4·9670	7044	—136·0
120 ...	4·3382	3·9759	719	—150·1
140 ...	3·3946	2·9893	74	—161·7
150 ...	2·9228	2·4974	24	—166·7
160 ...	2·4502	2·0056	8	—171·3

Für $u = 72000\,m$ wird

Höhe	150 *km*	160 *km*
t'...........	38060° C.	36870° C.
$\frac{\rho_0}{D}$	8	23
$\frac{p_0}{P}$	$\frac{1}{17}$	$\frac{1}{6}$

Nach dieser Hypothese werden sich demnach die Meteore trotz der niedrigeren Temperatur der umgebenden Luft wegen der bedeutend grösseren Dichte derselben viel rascher erwärmen, als nach Ivory's Theorie. Ferner wird

$$A_0 = U . \int_{a_1}^\infty \frac{\rho}{\rho_0} dr = \frac{a_1 U . \rho_1}{\varkappa_1 \rho_0}.$$

Die geleistete Arbeit ist wegen der Geschwindigkeitsabnahme etwas kleiner. Ein Meteor von 4 *cm* Durchmesser, dessen specifisches Gewicht 3·5 ist, würde in einer Höhe von 150 *km* eine um 830 *m*, in einer Höhe von 160 *km* eine um 270 *m* kleinere Geschwindigkeit besitzen, als beim Eintritte in die Atmosphäre. Sieht man von diesem Geschwindigkeitsverluste ab, so ist das Wärmeäquivalent der Arbeit bei 150 *km* und 160 *km* gleich 1704, respective 551. Selbst wenn nur $^1/_{100}$ dieser Wärmemenge auf den bewegten Körper übergeht, dürfte seine äusserste Schicht in lebhafte Gluth versetzt werden.

Absorption.

Laplace hat durch die Annahme, dass die absorbirende, sowie die brechende Kraft der Luft ihrer Dichte proportional sei, eine einfache Beziehung zwischen Absorption und Refraction aufgestellt, die in folgender Gleichung ihren Ausdruck findet:

$$\log \frac{J_0}{J} = \frac{H\zeta}{\sin z},$$

worin z die scheinbare Zenithdistanz des Himmelskörpers, ζ den Betrag der Refraction, J_0 die Intensität des ungeschwächten Lichtes, $J_0 - J$ den Intensitätsverlust durch Absorption, und H eine Constante bedeutet. Bezeichnet J_1 die Intensität für $z = 0$, so wird, da nach Bessel $\log\left(\frac{\zeta}{\sin z}\right)_{z=0} = 1\cdot7616$,

$$\log\log. \frac{J_0}{J_1} = \log H + 1\cdot7616.$$

Nach diesen Formeln hat Herr Seeliger[1] aus folgenden Werthen von $\log \frac{J_1}{J}$, welche der Extinctionstabelle des Herrn G. Müller entnommen sind, unter Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate erhalten:

---

[1] H. Seeliger, Über die Extinction des Lichtes in der Atmosphäre. Sitzungsber. der math.-phys. Classe der königl. bayr. Akad. der Wiss. 1891, Bd. XXI, Heft III.

$$\log H = 7 \cdot 1258 - 10; \qquad \frac{J_1}{J_0} = 0 \cdot 837.$$

Die Müller'schen Werthe sind mit *M*, die aus der Laplace'schen Formel berechneten mit *L* überschrieben; *x* ist der absorbirenden Luftmasse proportional.

z	*M*	*L*	*M—L*	*x*
0°	0	0	0	1·0
20	0·004	0·005	— 1	1·1
40	0·024	0·023	+ 1	1·3
50	0·048	0·043	+ 5	1·6
60	0·092	0·077	+15	2·0
70	0·180	0·146	+34	2·9
75	0·261	0·216	+45	3·8
80	0·394	0·352	+42	5·6
81	0·432	0·395	+37	6·1
82	0·477	0·448	+29	6·8
83	0·533	0·515	+18	7·7
84	0·607	0·599	+ 8	8·8
85	0·707	0·707	0	10·2
86	0·846	0·859	—13	12·1
87	1·045	1·066	—21	14·8
87·5	1·176	1·208	—32	16·7

Herr Seeliger bemerkt hiezu: »Die Darstellung der Beobachtungen ist eine recht befriedigende. Indessen sind die Differenzen doch von systematischem Charakter, dem wir um so grösseres Gewicht zusprechen werden, als auch die Seidel'schen Beobachtungen, die mit einem ganz anderen Instrumente ausgeführt sind, Abweichungen von der Theorie in demselben Sinne geben« und untersucht anschliessend hieran, inwieweit diese Abweichungen aus dem zuerst von Herrn Langley hervorgehobenen Umstande zu erklären seien, dass die Absorptionsformel nur für einfarbiges Licht gilt, während die Beobachtung die durch Vereinigung der Intensitäten der einzelnen, verschiedener Absorption unterworfenen Spectralfarben

gebildete Gesammtintensität gibt. Hiedurch scheinen aber nach der eingehenden Untersuchung diese Abweichungen nur zu einem kleinen Theile gerechtfertigt, indem schon wegen des intensiven Hervorleuchtens der gelben Farbe in den Spectren der meisten Sterne die physiologischen Wirkungen der übrigen Farben von untergeordneter Bedeutung sind, so dass man mit Herrn Seeliger wird behaupten dürfen, dass für die Photometrie, welche die Stärke des Lichtes nach seinen physiologischen Wirkungen misst, die Einwände des Herrn Langley trotz ihrer principiellen Richtigkeit und Wichtigkeit von keiner grossen Bedeutung sind.

Wenn aber der Grund der zwischen Theorie und Beobachtung bestehenden Discordanz nicht im polychromen Lichte der Sterne liegt, so wird man ihn wohl in der Theorie suchen dürfen.

Herr Müller[1] hat bei Höhen der Sonne zwischen 3° und 44° zahlreiche Messungen der Intensität verschiedener Farben ihres Spectrums ausgeführt, aus denen unzweifelhaft hervorgehen würde, dass für alle beobachteten Spectralregionen der Absorptionscoëfficient zugleich mit der Sonnenhöhe abnimmt. Leider erhielt das Spectralphotometer das Licht mittelst eines Heliostaten, wodurch die Intensitäten einer bestimmten Farbe bei verschiedenem Stande der Sonne nicht mit einander vergleichbar sind.[2] Es schien mir jedoch nicht überflüssig, den Versuch zu machen, die Formel, welche die Spectralbeobachtungen ganz befriedigend darstellt, indem der aus sämmtlichen Beobachtungen berechnete wahrscheinliche Fehler noch etwas kleiner wird, als der von Herrn Müller auf graphischem Wege hiefür erhaltene, auch zur Reduction der hier angeführten Müller'schen Werthe für $\log \frac{J_1}{J}$ zu benützen, wobei sich zeigte, dass die Darstellung derselben wesentlich

---

[1] Astr. Nachrichten, Bd. 103, Nr. 2464.

[2] Auf diesen Umstand wurde ich anlässlich einer kurzen Besprechung der Grundzüge dieser Arbeit in einer Abtheilungssitzung des Congresses deutscher Naturforscher und Ärzte (Wien 1894) von Herrn Seeliger aufmerksam gemacht, nachdem ich die vollständige Reduction der Beobachtungen bereits durchgeführt hatte.

besser wird, als nach der Laplace'schen Formel. Die Formel, zu welcher ich gelangt bin, beruht auf den Annahmen, dass die Absorption, welche eine Luftschicht von sehr geringer Dicke ausübt, dem Drucke, unter welchem sie steht, proportional sei und dass der Absorptionscoëfficient bei wachsender Entfernung dieser Schicht von der äussersten Luftschicht abnehme. Die erstere Annahme, welche für sich allein zu einem von der Laplace'schen Formel nur unbedeutend abweichenden Ergebnisse führen würde, habe ich gemacht, weil es wahrscheinlich ist, dass auch bei niedrigen Temperaturen die Absorption mit der Temperatur wächst.

Bezeichnet α den Absorptionscoëfficienten einer Luftschicht unter dem Drucke p_0, i den spitzen Winkel zwischen der Tangente an die Refractionscurve und dem Radiusvector, so wird für

$$s = \frac{r-a}{a}; \qquad p = p_0 e^{-\frac{a}{l}s}$$

$$\frac{dJ}{J} = \frac{a\alpha e^{-\frac{a}{l}s}\,ds}{\cos i}.$$

Es sei ferner

$$\int_s^\infty \frac{e^{-\frac{a}{l}s}}{\cos i}\,ds = S; \qquad \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{a}{l}s}}{\cos i}\,ds = \vartheta,$$

dann ist

$$\frac{dJ}{J} = -a\alpha dS.$$

Ich mache nun die Annahme:

$$d\alpha = -\Delta\alpha . c . e^{-cS}\,dS$$

oder, was auf dasselbe hinauskommt:

$$\alpha = \alpha_0 - \Delta\alpha(1 - e^{-cS}),$$

wo α_0 den auf den Druck p_0 reducirten Absorptionscoëfficienten der äussersten Luftschicht bedeutet und $\Delta\alpha$, c Constante sind.

Man erhält sonach

$$\frac{dJ}{J} = -a(\alpha_0 - \Delta\alpha)\,dS - a\Delta\alpha e^{-cS}\,dS.$$

Da S für $s = 0$ in ϑ übergeht und für $s = \infty$ Null ist, so ergibt die Integration der Gleichung zwischen diesen Grenzen (M = Modulus)

$$\log\frac{J_0}{J} = Ma(\alpha_0 - \Delta\alpha)\vartheta + Ma.\frac{\Delta\alpha}{c}(1 - e^{-c\vartheta}).$$

Setzt man zur Abkürzung

$$X = M.a.(\alpha_0 - \Delta\alpha),$$
$$Y = M.\frac{a\Delta\alpha}{c},$$
$$Z = e^c,$$

so ist

$$\log\frac{J_0}{J} = X\vartheta + Y(1 - Z^{-\vartheta}). \qquad 2)$$

Für $z = 0$ ist $J = J_1$ und $\vartheta = \vartheta_1 = \frac{l}{a}$, daher

$$\log\frac{J_1}{J} = X(\vartheta - \vartheta_1) + Y(Z^{-\vartheta_1} - Z^{-\vartheta}). \qquad 3)$$

Die Bestimmung der Constanten nach der Methode der kleinsten Quadrate ergab

$$\log X = 1\cdot 7269, \qquad \log a\alpha_0 = 2\cdot 3738,$$
$$\log Y = 9\cdot 1112, \qquad \log c = 2\cdot 5822,$$
$$\log.\log Z = 2\cdot 2200, \qquad \frac{\Delta\alpha}{\alpha_0} = 0\cdot 4807,$$
$$\frac{J_1}{J_0} = 0\cdot 760.$$

Die Darstellung der Beobachtungen (M—H) ist aus folgender Tafel ersichtlich, in welche auch die Werthe von M—L und x aus der vorhergehenden Tafel aufgenommen sind.

z	$M-L$	$M-H$	$\log \vartheta$	$\frac{\vartheta}{\vartheta_0}$	x
0	0	0	7·1116	1·0	1·0
20	— 1	— 3	1386	1·1	1·1
40	+ 1	— 8	2270	1·3	1·3
50	+ 5	— 9	3028	1·6	1·6
60	+15	— 7	4111	2·0	2·0
70	+34	+ 1	5739	2·9	2·9
75	+45	+ 8	6919	3·8	3·8
80	+42	+ 9	8571	5·6	5·6
81	+37	+ 6	8993	6·1	6·1
82	+29	+ 1	9457	6·8	6·8
83	+18	— 4	7·9974	7·7	7·7
84	+ 8	— 7	8·0555	8·8	8·8
85	0	— 7	1215	10·2	10·2
86	—13	— 4	1976	12·2	12·1
87	—21	+ 3	2870	15·0	14·8
87·5	—32	+ 5	8·3379	16·8	16·7

Der engere Anschluss an die Beobachtung, welcher durch die letztere Formel erreicht wird, lässt vermuthen, dass sich dieselbe auch für die Extrapolation besser eignet. Zugleich ersieht man, dass trotz der bedeutenden Abnahme des Absorptionscoëfficienten, welche für $z = 87°5$ an der Erdoberfläche dem Maximalwerthe $\Delta\alpha$ schon sehr nahe gleichkommt, sowohl die Darstellung der Beobachtungen, als auch der Werth von $\frac{J_1}{J_0}$ verhältnissmässig wenig geändert wird und desshalb aus dem Umstande, dass die Laplace'sche Formel die Beobachtungen befriedigend darstellt, noch nicht auf die Unveränderlichkeit des Absorptionscoëfficienten geschlossen werden kann. Es mag ein Zufall sein, verdient aber immerhin einige Beachtung, dass die Müller'schen Spectralbeobachtungen, welche wegen ihrer Beschränkung auf grössere Zenithdistanzen eine nur sehr unsichere Bestimmung von Z gestatten, hiefür Werthe ergaben, welche von dem hier angegebenen nur wenig verschieden sind.

Für $z = 90°$ habe ich ϑ nach der Formel

$$\vartheta = \sqrt{\frac{\pi}{2\gamma}}\left\{1+9\cdot574\left(\frac{1}{\gamma}\right)+9\cdot2752(\beta\gamma)+8\cdot7425(\beta\gamma)^2+\right.$$
$$\left.+8\cdot269(\beta\gamma)^3+7\cdot824(\beta\gamma)^4\right\}$$

$$\gamma = \frac{a}{l}$$

berechnet, welche hinreichend genau ist, um $\log\vartheta$ auf 4 Decimalstellen bestimmen zu können. Die Coëfficienten, deren Logarithmen hier angesetzt sind, enthalten γ und $\varkappa$ nur in der Form $\frac{\varkappa}{\gamma}$ und können, weil $\varkappa_1 l_1 = \varkappa_0 l_0$ ist, als von Δ unabhängig betrachtet werden.

Da

$$\gamma_1 = \gamma_0(1+81\Delta)$$
$$\beta_1 = \beta_0 e^{-\varkappa_0\Delta}$$

ist, so wird die Berechnung von ϑ für jedes Δ sehr einfach.

Die Bestimmung von ϑ für $\Delta = 0$ mittelst mechanischer Quadratur ergab denselben Werth wie die Rechnung nach obiger Formel. Die Werthe von $\log 2\vartheta$ sind in der Tafel auf S. 224 enthalten. Dieselbe Tafel enthält auch die Werthe von $\log i$, d. i. die Logarithmen des Verhältnisses der Intensitäten eines Lichtstrahles bei dem Eintritte in die Atmosphäre und dem Austritte aus derselben entsprechend der Formel

$$\log i = X.2\vartheta + Y(1-Z^{-2\vartheta}).$$

Helligkeit.

Ein im Erdschatten gelegener Punkt kann von der Sonne theils direct, theils indirect durch die brechende Wirkung der Atmosphäre beleuchtet werden. Von diesem Punkte, den wir M nennen wollen, aus betrachtet, wird die Atmosphäre als ein die Erde mehr oder minder umschliessendes Lichtband erscheinen und die Beleuchtung, welche der Punkt durch dasselbe erhält der ganzen durch die Atmosphäre in der Richtung nach M gebrochenen Lichtmenge entsprechen. Wenn wir nun dieses

Lichtband durch eine Anzahl mit dem Erdrande concentrischer Kreise in Streifen zerlegen und die Lichtmengen, welche die einzelnen Streifen nach M entsenden, summiren, so erhalten wir die gesammte, durch Refraction dem Punkte M übermittelte Lichtmenge.

Indem man die Breite dieser Streifen genügend klein annimmt, kann man für alle zu einem Streifen gehörige Lichtstrahlen Refraction und Absorption als constant voraussetzen.

Es sei (Fig. 1) E der Mittelpunkt der Erde, S der Sonnenscheibe, SS' der Sonnenhalbmesser, O der Punkt der Sonnenscheibe, gegen welchen die Linie ME gerichtet ist, SN die Axe des Kernschattens, $GChDM$ der Weg eines von G ausgehenden, in der Ebene SEM liegenden Lichtstrahles, H der

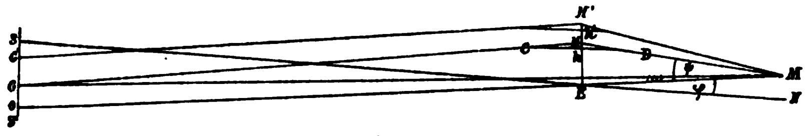


Fig. 1.

Durchschnittspunkt der Linien, welche die Richtungen des Strahles vor und nach der Brechung in der Atmosphäre darstellen, ferners

$$\sphericalangle GMO = \omega, \qquad HE = r,$$
$$\sphericalangle HME = \psi, \qquad hE = a_1,$$
$$\sphericalangle SMS' = s, \qquad SE = F,$$
$$\sphericalangle SMO = \sigma, \qquad EM = f,$$
$$\sphericalangle MEN = \varphi,$$
$$\sphericalangle EHM = \sphericalangle EHG,$$

Refraction für den Strahl $GChDM = 2\Theta$,
Transmissions-Coëfficient für den Strahl $GChDM = i$.

Hieraus folgt

$$\sphericalangle EHM = 90 - \Theta; \qquad r \cos\Theta = f \sin\psi$$

und aus dem Dreiecke SEM

$$\sin(\varphi - \sigma) = \frac{f}{F} \sin\sigma$$

oder hinreichend genähert

$$\varphi - \sigma = \frac{f}{F+f}\varphi = \frac{f}{F}\sigma.$$

Sei $\eta = \psi - \omega$, so ergibt sich aus dem Dreiecke GHM

$$GM \sin\eta = GH \sin 2\Theta$$

oder mit ausreichender Annäherung

$$\eta = 2\Theta\left(1 - \frac{f}{F+f}\right).$$

Nimmt ψ um den Betrag $d\psi$ zu, so wandern die Punkte H, G nach H', G'. Denkt man sich Fig. 1 um MO als Axe gedreht, so beschreiben die Punkte H, H', G, G' Kreise, deren scheinbare Radien ψ, $\psi + d\psi$, ω, $\omega + d\omega$ sind. So lange die Punkte G, G' innerhalb des Sonnenrandes liegen, wird zwischen h und h' gleich viel Licht passiren und daher die nach M gelangende Lichtmenge dL proportional sein der Intensität der einzelnen Strahlen, sowie der Fläche des Kreisringes, also

$$dL = C.i.2\pi \sin\psi d\psi.$$

Wenn aber der zwischen den mit den Radien ω und $\omega + d\omega$ beschriebenen Kreisen liegende Ring vom Sonnenrande geschnitten wird, so bleibt der ausserhalb der Sonnenscheibe liegende Theil des Ringes wirkungslos und ist daher die nach M gelangende Lichtmenge in dem Verhältnisse kleiner, in welchem die innerhalb des Sonnenrandes gelegene Ringfläche zur Fläche des ganzen Ringes steht.

Ist (Fig. 2) $\lambda = \sphericalangle SOG$, so wird dieses Verhältniss $= \frac{\lambda}{\pi}$; die vom Ringe $2\pi \sin\omega d\omega$ nach M entsendete Lichtmenge ist daher im Allgemeinen $= C.i.2\lambda.\sin\psi d\psi$ und die von der ganzen Atmosphäre nach M gebrochene Lichtmenge

$$L = 2C\int \lambda.i.\sin\psi d\psi.$$

Ohne Dazwischenkunft der Erde würde M die Lichtmenge L_0 erhalten, wo

$$L_0 = C.\int 2\lambda.\sin\omega d\omega;$$

dieses Integral stellt die scheinbare Fläche der Sonnenscheibe dar. Es ist daher

$$L_0 = 4\,C.\pi \sin^2 \frac{s}{2}.$$

Da für $\eta = 0$ ψ in ω übergeht und $i = 1$ wird, so entfällt die Nothwendigkeit einer getrennten Berechnung der directen und indirecten Beleuchtung, indem erstere ebenso durch $2\,C \int \lambda i \sin\psi\, d\psi$ ausgedrückt wird, wenn für die obere In-

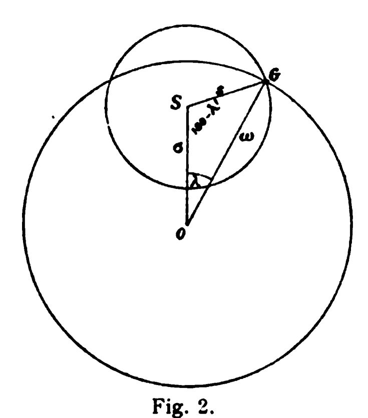


Fig. 2.

tegrationsgrenze der dem oberen Sonnenrande entsprechende Werth $\psi = \sigma + s$ gesetzt wird.

Zur Berechnung von λ dienen die Formeln

$$\sin^2 \frac{\lambda}{2} = \frac{\sin \frac{s+\omega-\sigma}{2} \sin \frac{s-\omega+\sigma}{2}}{\sin\sigma \sin\omega};$$

$$\cos^2 \frac{\lambda}{2} = \frac{\sin \frac{\omega+\sigma+s}{2} \sin \frac{\omega+\sigma-s}{2}}{\sin\sigma \sin\omega},$$

wofür man mit Rücksicht auf die Kleinheit der Winkel auch schreiben kann:

$$\sin^2 \frac{\lambda}{2} = \frac{(s+\omega-\sigma)(s-\omega+\sigma)}{4\sigma\omega}; \quad \cos^2 \frac{\lambda}{2} = \frac{(\omega+\sigma+s)(\omega+\sigma-s)}{4\sigma\omega}.$$

Nach der Gleichung $\omega = \psi - \eta$ kann ω auch negativ werden; das Vorzeichen von ω übt aber keinen Einfluss auf

die Lage der mit den Radien ω und s beschriebenen Kreise aus, da dieselbe nur von den absoluten Werthen dieser Grössen abhängt. Ebenso dürfen wir wegen der gleichen Beleuchtung aller Punkte eines Kreises, dessen Centrum in der Axe des Kernschattens liegt, σ in einer und derselben beliebig gewählten Richtung von S aus zählen und daher s, σ, ω, λ, λ' als positive Grössen betrachten.

Ist $\sigma < s$, so schneiden sich die Kreise für $s-\sigma < \omega < s+\sigma$ und es wird $\pi > \lambda > 0$, während für

$$\omega \leqq s-\sigma \qquad \lambda = \pi,$$
$$\omega \geqq s+\sigma \qquad \lambda = 0.$$

Ist $\sigma > s$, so wird für $\sigma-s < \omega < \sigma+s$ $\lambda > 0$ und für diese Grenzen von ω und ausserhalb derselben $\lambda = 0$.

Bedeutet Ψ' den Werth von ψ, für welchen η bereits so klein ist, dass die Wirkung von Refraction und Absorption unmerklich und daher $\omega = \Psi'$ wird, so sendet, wenn $\Psi' < \sigma+s$, ein Theil der Sonne Licht direct nach M und ist die Menge desselben $= C[\lambda_1' s^2 - \lambda_1 \Psi'^2 + \sigma\Psi' \sin\lambda_1]$.

Die Winkel λ_1, λ_1' müssen den Dreieckseiten s, σ, Ψ' (Fig. 2) entsprechend bestimmt werden.

Bezeichnet man mit H das Verhältniss, in welchem die ganze während einer Finsterniss nach M gelangende Lichtmenge zu jener Lichtmenge steht, welche M ohne Dazwischentreten der Erde erhalten würde, so ist, wenn ψ_0 den kleinsten Werth darstellt, den ψ annehmen kann,

$$H = \frac{1}{2\sin^2\frac{s}{2}} \int_{\psi_0}^{\Psi'} \frac{\lambda}{\pi} . i . \sin\psi d\psi + \frac{\lambda_1'}{\pi} - \frac{\lambda_1}{\pi}\left(\frac{\Psi'}{s}\right)^2 + \frac{\sigma\Psi'}{s^2}\frac{\sin\lambda_1}{\pi};$$

$$\Psi' < \sigma+s. \qquad 4)$$

Für $\Psi' \geqq \sigma+s$ nimmt alles Licht den Weg durch die Atmosphäre; es wird daher $\lambda_1 = \lambda_1' = 0$ und die obere Grenze des Integrals gleich jenem Werthe von ψ, welcher dem $\omega = \sigma+s$ entspricht.

Nachdem Θ und i nur von der Höhe des Punktes h über der Erdoberfläche abhängen, so empfiehlt es sich, bei der vor-

zunehmenden Integration diese Höhe als unabhängige Variable zu wählen. Ist wieder

$$\Delta = \frac{a_1 - a_0}{a_0},$$

so wird (Fig. 1)

$$hE = a_0(1+\Delta) = a_1.$$

Nun ist einerseits

$$f \sin\psi = r \cos\Theta,$$

anderseits aber auch aus der Fundamentalgleichung für die Horizontalrefraction, wenn n_1 den Brechungsexponenten der Luft in der Höhe Δ bedeutet,

$$f \sin\psi = n_1 a_0 (1+\Delta)$$

und daher

$$\frac{r}{a_0}\cos\Theta = n_1(1+\Delta).$$

Da

$$n_1^2 - 1 = c\rho_0 e^{-\varkappa_0\Delta} \quad \text{und} \quad \beta_0 = \frac{c\rho_0}{1+c\rho_0},$$

so kann man für n_1 annehmen

$$n_1 = 1 + \frac{1}{2}\beta_0 e^{-\varkappa_0\Delta}$$

und setzen

$$\frac{r}{a_0}\cos\Theta = 1 + \Delta + \frac{1}{2}\beta_0 e^{-\varkappa_0\Delta}.$$

Durch Differentiation erhält man

$$d\left(\frac{r}{a_0}\cos\Theta\right) = \left(1 - \frac{1}{2}\beta_0\varkappa_0 e^{-\varkappa_0\Delta}\right)d\Delta.$$

Es wird demnach

$$\sin\psi = \frac{a_0}{f}\left(1 + \Delta + \frac{1}{2}\beta_0 e^{-\varkappa_0\Delta}\right),$$

$$d\psi = \frac{a_0}{f}\,\frac{1 - \frac{1}{2}\beta_0\varkappa_0 e^{-\varkappa_0\Delta}}{\cos\psi}\,d\Delta.$$

Führt man die Äquatorial-Horizontalparallaxe Π des Mondes ein, so ist, wenn man sich die Vereinfachung erlaubt, die Parallaxe von M der des Mondcentrums gleichzusetzen

$$\frac{a_0}{f} = \sin \Pi$$

und $\cos\psi$ von $\cos\Pi$ so wenig verschieden, dass bei fünfstelliger Rechnung der Unterschied für die ganze Atmosphäre zu vernachlässigen ist. Setzt man zur Abkürzung

$$Q = 1 - \frac{1}{2}\beta_0 \varkappa_0 e^{-\varkappa_0 \Delta},$$

so wird

$$\int_{\psi_0}^{\psi_1} \frac{\lambda}{\pi}.i.\sin\psi d\psi = \frac{\sin^2\Pi}{\cos\Pi}\int_{\Delta_0}^{\Delta_1} \frac{\lambda}{\pi}.i.\left(\frac{r}{a_0}\cos\Theta\right).Qd\Delta. \qquad 5)$$

Dieses Integral kann durch mechanische Quadratur bestimmt werden, indem das Differential nur von Δ und den Elementen der Finsterniss abhängt. Die untere Grenze Δ_0 ist Null von $\sigma = 0$ bis $\sigma = s + \omega_0$, wo ω_0 den Werth von ω für $\Delta = 0$ bedeutet. Ist $s < \sigma < s + \omega_0$, so sendet ein Theil der untersten Schicht der Atmosphäre Licht nach M, während eine hieran anschliessende Schicht von gewisser Dicke ganz wirkungslos bleibt und die höheren Schichten auf der entgegengesetzten Seite der Erde in Action treten. Für $\sigma > s + \omega_0$ entspricht Δ_0 dem $\omega = \sigma - s$. Die obere Grenze Δ_1 bezieht sich durchwegs auf $\omega = \Psi$, so lange $\Psi < \sigma + s$, sonst aber auf $\omega = \sigma + s$. Indem man die Werthe von ω in eine Tafel bringt, deren Argument Δ ist, kann man für ein beliebiges ω das entsprechende Δ durch Interpolation finden.

Die Werthe $\frac{r}{a_0}\cos\Theta$ und Q sind in der Tafel am Schlusse der Abhandlung aufgeführt.

Insoferne die Helligkeit eines Elementes der Mondoberfläche der Lichtmenge proportional ist, welche dasselbe erhält, drückt auch H, da die Einfallswinkel der Strahlen sich nur wenig ändern, das Verhältniss der Helligkeit eines Flächenelementes des verfinsterten Mondes zur Helligkeit desselben Elementes im Volllichte aus.

Unter der Annahme

$$\Pi = 57'2''06;\ s = 15'59''55\ \left(\log\frac{f}{F} = 7\cdot4126\right)$$

ergibt sich aus den Formeln:

φ	log H	Differenz	φ	log H	Differenz
0′	4·673	88	40′	7·402	1·458
5	4·761	229	45	8·860	520
10	4·990	308	50	9·380	257
15	5·298	350	55	9·637	162
20	5·648	376	60	9·799	108
25	6·024	397	65	9·907	69
30	6·421	429	70	9·976	
35	6·850	552			

Wenn wir uns die Mondoberfläche auf die Himmelssphäre projicirt denken, so ist für die geometrische Grenze des Kernschattens $s + \sigma_1 = \Pi$ und es wird $\varphi_1 = 41'8''88$. Zu Beginn oder am Ende der totalen Finsterniss wird daher unter sonst gleichen Umständen die Helligkeit des vom Schattencentrum am weitesten abstehenden Elementes der Mondscheibe 200- bis 300 mal grösser sein, als die Helligkeit des dem Schattencentrum zunächst gelegenen Elementes.

Wenn auch das Auge eine Zunahme der Helligkeit in der Richtung gegen die Schattengrenze deutlich wahrnimmt, so ist dieselbe doch nicht so auffällig, als man nach den angeführten Zahlen erwarten sollte. Der Grund hievon dürfte zum Theil in der sehr ungleichen Reflexionsfähigkeit der Mondgebilde liegen, wodurch die Wahrnehmung der Änderung der durchschnittlichen Helligkeit erschwert wird, zum Theil aber auch darin bestehen, dass die Verschiedenheit der durch sehr schwaches Licht hervorgerufenen Gesichtsempfindung mehr von der Differenz als vom Quotienten der Intensitäten abhängt.

Ein besonderes Interesse beansprucht die Lichtvertheilung in der Nähe der Grenze des Kernschattens, nachdem sich aus zahlreichen Beobachtungen unzweifelhaft herausgestellt hat, dass dem Auge des Beobachters die Trennungslinie zwischen Licht und Schatten nicht unbeträchtlich ausserhalb der geometrischen Grenze des Kernschattens zu liegen scheint. Die

Vergrösserungscoëfficienten (= Vergrösserung des Erdschattenradius in Theilen desselben), welche die einzelnen Finsternisse ergaben, weichen sehr bedeutend von einander ab, doch zeigen die von verschiedenen Berechnern in neuerer Zeit angegebenen Mittelwerthe eine befriedigende Übereinstimmung. Maedler[1] fand aus 4 Finsternissen den Werth $\frac{1}{49}$, J. Schmidt aus 6 Finsternissen ebenfalls $\frac{1}{49}$, und in jüngster Zeit Herr Brosinsky aus 20 auf den Zeitraum von 1776—1888 vertheilten Finsternissen den Werth $\frac{1}{55}$.

Die umfassendste Bearbeitung des vorhandenen Beobachtungsmateriales verdanken wir Herrn Hartmann, welcher aus 28 Finsternissen dieses Jahrhunderts, und zwar aus 9 von 1802—1818 (I. Periode) und 19 von 1841—1889 (II. Periode) die Vergrösserung V des Erdschattens durch unabhängige Verwerthung der Eintritts- und Austrittszeiten der Mondkrater bestimmte. Herr Hartmann ist der Ansicht, dass V der Mondparallaxe proportional sei und gibt als Resultat seiner Untersuchungen an:

	V_4	Gewicht	V_5	Gewicht	V_4^0	V_5^0
I. Periode......	55'42	457	52'15	89	53'07	49'85
II. Periode......	49·50	2920	50·53	291	48·62	49·67

V_4 entspricht der Annahme, dass nur die zufälligen Beobachtungsfehler, V_5 dass nur die persönlichen Fehler der Beobachter in Betracht zu ziehen seien, während V_4^0 und V_5^0 aus den Einzelwerthen von V_4 und V_5 durch Multiplication mit $\frac{\Pi_0}{\Pi}$, also durch Reduction auf eine mittlere Mondparallaxe (57′ 2″) gebildet sind.

Als Endresultat wird angenommen $V = 48'62.\frac{\Pi}{\Pi_0}$. Dieser Werth, welcher für die mittlere Parallaxe von Mond und Sonne

[1] Referat des Herrn H. Seeliger in der V. I. S. der Astronomischen Gesellschaft, Jahrgang 27, Heft 3, über die Abhandlungen von A. Brosinsky und J. Hartmann. Referent schliesst hieran eigene Untersuchungen betreffend die scheinbare Vergrösserung des Erdschattens.

den Vergrösserungscoëfficienten $\frac{1}{51}$ gibt, ist aber, wie auch Herr Seeliger hervorhebt, wahrscheinlich zu klein, indem er der kleinste unter allen berechneten Mittelwerthen ist. Für $V = 50$ erhielt man den von Maedler und Schmidt gefundenen Werth $\frac{1}{49}$. Aus den Beobachtungen lässt sich kaum mit Sicherheit entscheiden, ob die Vergrösserung des Schattens von der Mondparallaxe abhängt oder nicht; noch weniger kann daraus geschlossen werden, dass die Reduction auf eine mittlere Parallaxe den Thatsachen besser entspricht, als die Einführung des Vergrösserungscoëfficienten, welche auf der Annahme beruht, dass die Vergrösserung dem Schattenradius proportional ist. Denn aus den Gleichungen

$$\varphi - \sigma = \frac{f}{F}\sigma, \qquad \sigma + s = \Pi, \qquad (F+f)s = (F'+f')s',$$

$$\varphi' - \sigma' = \frac{f'}{F'}\sigma', \qquad \sigma' + s' = \Pi', \qquad f\Pi = f'\Pi'$$

folgt

$$\frac{\Pi'}{\Pi} = \frac{\sigma'}{\sigma}\left[1 - \frac{s'}{\sigma'}\,\frac{\frac{f}{F} - \frac{f'}{F'}}{\frac{f'}{F'}\left(1 + \frac{f}{F}\right)}\right].$$

Da $\frac{\sigma'}{\sigma}$ nahezu gleich ist $\frac{\varphi'}{\varphi}$, so wird (Π = mittlere Parallaxe) der absolute Werth von $\frac{\Pi'}{\Pi} - \frac{\varphi'}{\varphi}$ am grössten, wenn für Π' und F' die grössten oder die kleinsten Werthe, welche diese Grössen annehmen können, substituirt werden. Dieser grösste Werth von $\frac{\Pi'}{\Pi} - \frac{\varphi'}{\varphi} = \mp\frac{1}{36}$. Für $V = 50''$ würde sonach der grösste Unterschied $\mp 1\text{'}4$, das ist ziemlich genau die Hälfte der Reduction auf mittlere Parallaxe, während für eine und dieselbe Parallaxe der Unterschied der Vergrösserungen bei Finsternissen im Aphel und Perihel $= 0\text{'}6$ wäre. Auch theoretische Erwägungen sprechen gegen die Annahme einer Proportionalität zwischen V und Π, indem hiedurch angedeutet

wird, dass die Ursache der scheinbaren Vergrösserung des Schattens im Schattenwurfe der Erdatmosphäre liege, was, wie Herr Seeliger nachweist, gewiss nicht der Fall ist.

Herr Seeliger hält diese Vergrösserung in der Hauptsache für eine physiologische Erscheinung, die sich nicht wesentlich ändern würde, wenn die Erde keine Atmosphäre hätte, und misst der Erdatmosphäre nur einen secundären Einfluss zu, insoferne nämlich hiedurch auch der Kernschatten Licht erhält. Der Einfluss der Atmosphäre ist aber viel bedeutender, wie man aus folgender Tafel ersieht, in welcher sämmtliche Angaben sich auf dieselben Entfernungen Sonne—Erde—Mond beziehen, welche den Werthen der Tafel auf S. 213 zu Grunde liegen. Die Zahlen in der mit log (H) überschriebenen Columne entsprechen der von Herrn Seeliger aufgestellten Näherungsformel zur Berechnung des Intensitätsverhältnisses in der Nähe des Kernschattens, wenn man von Refraction und Absorption absieht; diese Formel lautet für die hier angenommenen Grössen

$$\log (H) = 5\cdot 3723 - 10 + \frac{3}{2} \log (\sigma + s - \Pi);$$

der Fehler beträgt bei $\varphi = 42' 20''$ nur etwa 40 Einheiten der letzten Stelle. Die Werthe von $\log H$ sind nach den Formeln 4) und 5) berechnet. Die Zahlen der drei letzten Columnen drücken in Einheiten der vierten Decimalstelle die Änderungen aus, welche $\log H$ erfahren würde, wenn die Atmosphäre bis zur angegebenen Höhe vollständig undurchsichtig wäre. Bis zu einer Höhe von 7 *km* ist die Änderung durchwegs gleich Null.

Die Differenzen von log (H) nehmen fortwährend ab, so dass die zweiten Differenzen durchaus negativ werden und ihre absoluten Werthe auch eine stetige Abnahme zeigen. Wenn man die Differenzen der Zahlen (H) bildet, so nehmen dieselben fortwährend, aber immer langsamer zu. Bei einem solchen Verhalten der Function log (H) oder (H) könnte man a priori die physiologische Grenze des Schattens kaum nahe genug an die geometrische Grenze desselben verlegen oder man müsste annehmen, dass es eine bestimmte Helligkeitsgrenze

gibt, für welche die Continuität der Gesichtsempfindung aufhört, so dass, wenn diese Grenze überschritten wird, das Auge auch einen ganz anderen Eindruck erhält.

φ	$\log(H)$	Differenz	H	Differenz	Δ .... Kilometer...	0·0014 8·9	0·0016 10·2	0·0018 11·5
41′ 0″	$-\infty$		7·5761			— 8	—25	—55
		∞		376				
10	5·4364		7·6137			— 7	—23	—50
		1·5026		420				
20	6·9390		7·6557			— 6	—20	—44
		4182		493				
30	7·3572		7·7050			— 5	—17	—39
		2527		603				
40	7·6099		7·7653			— 4	— 15	—33
		1816		761				
50	7·7915		7·8414			— 3	—12	—28
		1418		890				
42 0	7·9333		7·9304			— 3	—10	—22
		1165		905				
10	8·0498		8·0209			— 2	— 8	—18
		987		855				
20	8·1485		8·1064			— 2	— 6	—15
		858		795				
30	8·2343		8·1859			— 1	— 5	—12

Da der Kernschatten an seiner Grenze ($\varphi_1 = 41' 8''88$) ungefähr dieselbe Helligkeit hat, welche ohne Wirkung der Atmosphäre erst circa $31''$ ausserhalb der Grenze erreicht würde, so ist schon hiedurch der Einfluss der Atmosphäre von wesentlicher Bedeutung, indem, wenn die weitere Helligkeitszunahme keine Änderung erführe, eine Verschiebung der Schattengrenze um mehr als $31''$ auftreten müsste. Der Einfluss der Atmosphäre äussert sich aber auch darin, dass die Helligkeit selbst in bedeutenden Abständen von der Schattengrenze eine merkliche Änderung erfährt. Ein Blick auf die Differenzen von $\log H$ zeigt, dass die Zunahme des Logarithmus der Helligkeit ein besonders in der Richtung gegen die Schattengrenze deutlich ausgesprochenes Maximum besitzt; es wird daher die scheinbare Schattengrenze schon von vorneherein mit einiger Wahrscheinlichkeit in der Nähe jenes Kreises zu suchen sein, für welchen $\frac{\partial \log H}{\partial \varphi}$ ein Maximum ist. Der dem Maximum entsprechende Werth von φ, welcher mit Φ bezeichnet werden möge, lässt sich aus den gegebenen Zahlen nicht sehr scharf

bestimmen, liegt aber jedenfalls in der Nähe von 42′ 1″, so dass $\Phi - \varphi_1$ nahe gleich 52″ wird. Die Vergrösserung des Schattens ist nach den Beobachtungen beiläufig 50″, der Unterschied daher sehr klein. Wenn nicht eine zufällige Compensation der Wirkungen fehlerhafter Annahmen vorliegt, so könnte man daraus schliessen, dass für die scheinbare Schattengrenze die Function $\frac{\partial \log H}{\partial \varphi}$ vom Maximum nur äusserst wenig entfernt ist und daher die Empfindlichkeit des Auges für Helligkeitsunterschiede in der Nähe der Schattengrenze der Hauptsache nach von $\frac{\Delta H}{H}$ abhängt.

Wenn auch die Sache, wie ich glaube, sich so verhält, ist die Vergrösserung des Schattens doch als eine physiologische Erscheinung zu betrachten, indem bei einer gewissen Helligkeit eine relativ geringe Änderung genügt, um einen wesentlich verschiedenen Eindruck auf das Auge zu machen. Es ist aber immerhin möglich, dass die Schattengrenze nur vom absoluten Werthe der Helligkeit abhängt und da, wie man sieht, $\log(H)$ für $\varphi = \Phi$ fast genau gleich $\log H$ wird, durch die Atmosphäre nur unerheblich beeinflusst wird.

Dass die Vergrösserung des Schattens von der Bewölkung fast ganz unabhängig ist, geht aus den Zahlen der letzten Columnen in überzeugender Weise hervor, nachdem die höchste Wolkenformation, der hohe Cirro-Stratus,[1] eine mittlere Höhe von 9·25 *km* und eine Maximalhöhe von etwa 10·4 *km* besitzt und wahrscheinlich nur ein kleiner Theil der angegebenen Helligkeitsverminderung diesen Gebilden zuzuschreiben ist. Inwieferne locale Trübungen der Atmosphäre in grösseren Höhen (leuchtende Wolken) die Schattengrenze beeinflussen, lässt sich nicht angeben, doch ist ihr Einfluss voraussichtlich sehr gering.

Um einen Anhaltspunkt zur Beurtheilung der Frage zu gewinnen, in welcher Weise die Schattenvergrösserung durch

---

[1] Referat des Herrn Dr. Vettin über den Wolkenatlas von H. Hildebrandsson, W. Köppen und G. Neumayer in der Meteorologischen Zeitschrift, redigirt von J. Hann und W. Köppen, December 1890.

die Mondparallaxe beeinflusst wird, habe ich für die Finsterniss 1891 November 15 die $\log H$ berechnet, welche denselben Abständen von der geometrischen Grenze des Kernschattens entsprechen, wie die Argumente der unmittelbar vorhergehenden Tafel. Das Resultat, welchem ich der Übersichtlichkeit halber die hauptsächlichsten Daten der früheren Rechnung zur Seite stelle, ist folgendes:

Π	57' 2"06		60' 3"20	
s	15 59·55		16 10·49	
φ_1	41 8·88		43 59·25	
$\varphi-\varphi_1$	$\log H$	Differenz	$\log H$	Differenz
— 8"88	7·5761	376	7·5830	368
+ 1·12	6137	420	6198	413
11·12	6557	493	6611	477
21·12	7050	603	7088	576
31·12	7653	761	7664	715
41·12	8414	890	8379	847
51·12	7·9304	905	7·9226	881
61·12	8·0209	855	8·0107	843
71·12	8·1064	795	8·0950	789
81·12	8·1859		8·1739	

$\Phi-\varphi_1$ ist für die grössere Parallaxe etwa 55″ oder 56″, für die kleinere ungefähr 52″. Dieser Unterschied wird durch Reduction auf mittlere Parallaxe (Division durch Π) oder mittleren Schattenradius (Division durch φ_1) nahezu ausgeglichen, indem das Verhältniss der Parallaxen $= \frac{54\cdot 8}{52\cdot 0}$, das der Schattenhalbmesser $= \frac{55\cdot 6}{52\cdot 0}$ ist. Welche von beiden Reductionen den Vorzug verdient, lässt sich wegen der Unsicherheit, mit der die Bestimmung von $\Phi-\varphi_1$ verbunden ist, nicht entscheiden. Da die Helligkeit H eine Function von Π und s ist, so habe ich zur unabhängigen Bestimmung des Einflusses, den eine Änderung dieser Grössen auf die Helligkeit ausübt, auch einige

Werthe von $\log H$ für $\Pi = 60' 3''2$ und $s = 15' 59''55$ berechnet und gefunden.

Π	60' 3"2	60' 3"2	
s	16 10·49	15 59·55	
φ_1	43 59·25	44 10·14	
$\varphi-\varphi_1$	$\log H$	$\log H$	Differenz
— 8"88	7·5830	7·5889	59
+21·12	7·7088	7·7148	60
+51·12	7·9226	7·9287	61

Hieraus folgt, dass eine Änderung von s die Differenzen von $\log H$ für die Argumente $\varphi-\varphi_1$ nicht merklich beeinflusst; es ist daher $\Phi-\varphi_1$ von s fast ganz unabhängig. Soferne die Schattenvergrösserung durch $\Phi-\varphi_1$ bestimmt wird, ist auch die von Herrn Hartmann beantragte Reduction auf eine mittlere Parallaxe gerechtfertigt, indem hiedurch eine wesentlich bessere Übereinstimmung der $\Phi-\varphi_1$ bei verschiedenen Parallaxen erzielt wird. Die Einführung des Vergrösserungscoëfficienten lässt grössere Fehler befürchten, da hiebei die Reduction innerhalb weiterer Grenzen liegen kann und $\Phi-\varphi_1$ mehr von Π als von φ_1 abzuhängen scheint.

Wenn aber die Schattenvergrösserung nur durch den absoluten Werth der Helligkeit bestimmt wird, so ist sie, wie man aus den angeführten Rechnungsresultaten ersieht, viel geringeren Änderungen unterworfen, welche in nahezu demselben Ausmaasse von s wie von Π veranlasst sein können, so dass die Reduction auf mittlere Parallaxe einen Fehler hervorrufen kann, der fast ihrem ganzen Betrage gleichkommt, während durch Reduction auf ein mittleres φ_1 noch grössere Fehler zu gewärtigen sind, indem unter Umständen (siehe vorhergehende Tafel) dem grösseren φ_1 eine wesentlich grössere Helligkeit entspricht.

Die Tafel auf S. 213 gibt für die mittlere Parallaxe von Mond und Sonne die nöthigen Anhaltspunkte, um das Verhältniss der Helligkeit eines Elementes des verfinsterten Mondes zu der desselben Elementes im Volllichte zu bestimmen. Denkt man sich die Mondscheibe durch eine Anzahl von Kreisen aus dem Schattencentrum von Rand zu Rand überzogen und nennt 2μ den Centrumswinkel eines solchen Bogens, längs welchem die Helligkeit $= H$ ist, und R den Radius der Mondscheibe, so ist die Lichtmenge, welche der verfinsterte Mond erhält, wenn die dem Volllichte entsprechende als Einheit angenommen wird,

$$= \frac{1}{2\sin^2\frac{R}{2}}\int\frac{\mu}{\pi}.H.\sin\varphi d\varphi.$$

Dieser Ausdruck stellt auch näherungsweise das Verhältniss der Helligkeit des verfinsterten Mondes zu der des unverfinsterten dar. Dieses Verhältniss ist bei totalen Finsternissen immer grösser, als das dem Mondcentrum entsprechende H.

Einige Vergleichungen der Helligkeit des verfinsterten Mondes mit der von Fixsternen und Planeten sind von den Herren Airy und Safarik[1] angestellt worden, welche eine aussergewöhnliche Ungleichheit der Augen hiezu besonders befähigte. Herr Safarik theilt mit, dass seinem sehr kurzsichtigen rechten Auge Sterne 1. Grösse als verwaschene Lichtscheiben von etwa 1° Durchmesser erscheinen, an Helligkeit und Grösse dem total verfinsterten Monde genügend ähnlich, um (im lateralen Sehen) Stufenvergleichungen zu gestatten. Aus den von Airy während der Finsterniss von 1863 gemachten Aufzeichnungen und den eigenen Beobachtungen der Finsternisse von 1877 und 1891 hat Herr Safarik in erster Näherung ohne Rücksicht auf Extinction, verschiedene Helligkeitsangaben der Cataloge und andere Nebenumstände mit Benützung der Zöllner'schen Werthe für die Helligkeitsverhältnisse Sonne—Mond—Capella—Saturn die Schwächung des Volllichtes während der grössten Verdunklung bei diesen drei Finsternissen

[1] Astronomische Nachrichten, Bd. 129, Nr. 3096.

abgeleitet und gefunden

$$\frac{1}{216100},\quad \frac{1}{143400},\quad \frac{1}{119100}.$$

Da bei dieser Art der Schätzung der Helligkeit des Mondes die Abnahme derselben in der Richtung gegen das Schattencentrum wohl schwerlich gebührend berücksichtigt werden kann und der Einfluss des von den centralen Partien der Mondscheibe ausgehenden Lichtes vorherrschend sein dürfte, habe ich zur Vergleichung der theoretischen Helligkeit mit der durch Beobachtung bestimmten mich auf die Ermittlung von H für das Mondcentrum beschränkt. Bedeutet φ_0 die Entfernung der Centra des Mondes und des Schattens zur Zeit ihrer Conjunction in Rectascension, H_c die Helligkeit, welche dem Schattencentrum entspräche, H_0 die des Mondcentrums und S die von Herrn Safarik bestimmte Helligkeit, so sind deren Werthe folgende.

	Finsterniss		
	1863 Juni 1	1877 Aug. 23	1891 Nov. 15
Π	60' 41"0	53' 59"4	60' 3"2
$\log \frac{f}{F}$	7·3794	7·4318	7·3952
s	15' 45"8	15' 49"1	16' 10"5
φ_0	21 53·0	4 28·0	16 35·0
$1:H_c$	430300	123600	367000
$1:H_0$	32170	105200	66450
$1:S$	216100	143400	119100

Während die Resultate der Beobachtungen des Herrn Safarik durch die Rechnung in befriedigender Weise dargestellt werden, macht sich für Airy's Beobachtungen ein wesentlicher Unterschied zwischen S und H_0 geltend, welcher in Ansehung des grossen Werthes von φ_0 durch Trübungen in unserer Atmosphäre wohl kaum zu erklären ist und, der Ansicht des Herrn Safarik entsprechend, von der geringeren Empfindlichkeit der Augen Airy's für rothes Licht herrühren

dürfte. Aus obigen Werthen von $\frac{1}{H_c}$ ersieht man, dass bei Finsternissen im Apogäum die Helligkeit des Schattencentrums etwa viermal so gross sein kann, als bei Finsternissen im Perigäum.

Folgende Tafel gewährt einen Überblick über den Antheil, welchen gleich dicke Schichten der Atmosphäre in verschiedenen Höhen an dem Zustandekommen der Helligkeit H_0' nehmen. Die Tafel gibt mit dem Argumente Δ die Werthe von

$$10^9.H = \frac{10^9}{2\sin^2\frac{s}{2}} \cdot \frac{\sin^2\Pi}{\cos\Pi} \int_0^\Delta \frac{\lambda}{\pi} . i . \left(\frac{r}{a_0}\cos\Theta\right) Q d\Delta:$$

Finsterniss...	1863 Juni 1		1877 August 23		1891 November 15	
Δ_1..........	0·001592		0·001038		0·001344	
Δ	$10^9.H$	Differenz	$10^9.H$	Differenz	$10^9.H$	Differenz
0·0000	0		0		0	
		1		12		6
1	1		12		6	
		0		37		12
2	1		49		18	
		0		87		36
3	1		136		54	
		23		195		98
4	24		331		152	
		120		413		192
5	144		744		344	
		264		815		349
6	408		1559		693	
		493		1509		593
7	901		3068		1286	
		840		1864		945
8	1741		4932		2231	
		1335		2096		1416
9	3076		7028		3647	
		1997		2037		1988
10	5073		9065		5635	
		2825		441		2601
11	7898		9506		8236	
		3773				3077
12	11671				11313	
		4736				2982
13	16407				14295	
		5503				755
14	21910				15050	
		5634				
15	27544					
		3542				
0·0016	31086					

Der letzte Werth für jede Finsterniss $= 10^9 . H_0$, welcher für $\Delta = \Delta_1$ erreicht wird. Die beigefügten Differenzen stellen die auf eine Luftschicht von 638 *m* Dicke entfallenden Beträge dar. Man sieht daraus, dass nur hohes Gewölk, nach dem früher bezeichneten Wolkenatlas vom falschen Cirrus (mittlere Höhe = 3897 *m*) angefangen, die Helligkeit merklich zu beeinflussen vermag.

Δ	$2\,\Theta$	$\log\left(\frac{r}{a}\cos\Theta\right)$	$\log Q$	$\log 2\vartheta$	$\log i$
0·0000	4182'5	0·000121	9·9065	8·9940	4·6117
1	3896·3	157	9134	9561	5·0507
2	3630·9	193	9198	9184	5·4513
3	3384·8	229	9256	8809	5·8171
4	3156·3	266	9310	8436	6·1508
5	2944·0	303	9360	8064	4561
6	2746·8	341	9406	7694	7353
7	2563·3	379	9448	7325	6·9907
8	2392·6	417	9487	6957	7·2247
9	2233·7	456	9524	6590	4389
10	2085·8	495	9557	6224	6353
11	1948·0	534	9588	5860	8154
12	1819·6	574	9617	5496	7·9806
13	1699·9	614	9644	5133	8·1321
14	1588·3	654	9668	4771	2712
15	1484·2	694	9691	4410	3988
16	1387·0	734	9713	4049	5161
17	1296·4	775	9733	3689	6238
18	1211·8	816	9751	3330	7229
19	1132·8	857	9768	2971	8139
20	1059·1	898	9784	2613	8976
21	990·2	940	9799	2256	8·9746
22	925·9	981	9813	1899	9·0455
23	865·8	1023	9825	1542	1107
24	809·6	1064	9837	1186	1709
25	757·2	1106	9848	0830	2264
26	708·1	1148	9859	0475	2777
27	662·3	1190	9868	8·0121	3251
28	619·5	1232	9877	7·9766	3690
29	579·4	1274	9885	9412	4096
30	542·0	1316	9893	9058	4474
31	507·0	1358	9900	8705	4826
32	474·2	1401	9907	8352	5154
33	443·6	1443	9913	7999	5460
34	415·0	1486	9919	7646	5746
35	388·2	1528	9925	7294	6014
36	363·2	1571	9930	6942	6266
37	339·8	1613	9935	6590	6502
38	317·9	1656	9939	6239	6724
39	297·4	1699	9943	5887	6933
0·0040	278·2	0·001741	9·9947	7·5536	9·7129

Δ	$\log 2\Theta$	$\log\left(\frac{r}{a}\cos\Theta\right)$	$\log Q$	$\log 2\vartheta$	$\log i$
0·0040	2·4444	0·001741	9·9947	7·5536	9·7129
44	3287	1912	60	4134	7807
48	2131	2084	70	2734	8338
52	2·0974	2256	77	7·1336	8751
56	1·9817	2428	82	6·9940	9068
60	8660	2600	87	8547	9309
64	7502	2772	90	7155	9490
68	6344	2944	92	5764	9626
72	5185	3117	94	4374	9726
76	4026	3289	96	2986	9799
80	2865	3461	97	1599	9853
84	1704	3633	97	6·0212	9893
88	1·0543	3805	98	5·8827	9922
92	0·9380	3977	99	7443	9943
96	8217	4149	99	6059	9959
100	7054	4321	99	4676	9970
104	5889	4493	99	3294	9978
108	4724	4665	9·9999	1912	9984
112	3559	4837	0·0000	5·0532	9988
116	2392	5009		4·9151	9992
120	1226	5180		7772	9994
124	0·0058	5352		6393	9995
128	9·8860	5524		5015	9997
132	7722	5695		3637	9998
136	6553	5867		2260	9998
140	5383	6038	0·0000	4·0883	9999
144	4213	6209		3·9507	9999
148	3043	6380		8131	9999
152	1872	6552		6756	9·9999
156	9·0701	6723		5381	0·0000
160	8·9529	6894		4007	0·0000
164	8357	7065		2633	0·0000
0·0168	8·7184	0·007236	0·0000	3·1260	0·0000

IX. SITZUNG VOM 21. MÄRZ 1895.

Der Secretär legt das erschienene Heft II (Februar 1895) des 16. Bandes der Monatshefte für Chemie vor.

Das c. M. Herr Hofrath Prof. Dr. Alexander Bauer überreicht eine Arbeit aus dem chemischen Laboratorium der k. k. Staatsgewerbeschule in Bielitz: »Über das Wesen des Färbeprocesses« von Prof. Dr. G. v. Georgievics und Dr. E. Löwy.

Der Secretär legt folgende eingesendete Abhandlungen vor:

1. »Über die Ellipse vom kleinsten Umfange durch drei gegebene Punkte« (II. Mittheilung), von Prof. Dr. Victor v. Dantscher an der k. k. Universität in Graz.
2. »Zur Theorie der Bewegung eines starren Systems«, von Prof. Eduard Weyr an der k. k. böhmischen technischen Hochschule in Prag.

Das c. M. Herr Hofrath Prof. L. Boltzmann überreicht folgende zwei Abhandlungen:

1. »Über die Transformation des Zwanges in allgemeine Coordinaten«, von Prof. Dr. A. Wassmuth in Graz.
2. »Strömung der Elektricität in Rotationsflächen«, von Leonhard Fleischmann, cand. math. in Archshofen (Württemberg).

Strömung der Elektricität in Rotationsflächen

von

Leonhard Fleischmann,

cand. math.

§. 1. Strömung der Elektricität in einer unendlich grossen ebenen Platte.

Es bestehe in einem ebenen Flächenstück, durch irgend welche Ursachen bedingt, eine stationäre Elektricitätsströmung. Wir legen ein rechtwinkliges Coordinatensystem zu Grunde und bezeichnen das Potential des Punktes (x, y) mit p; dann muss, da wir stationären Zustand voraussetzten, p bekanntlich der Differentialgleichung genügen:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = 0. \tag{1}$$

Die allgemeine Aufgabe besteht nun darin, diese Differentialgleichung unter Berücksichtigung gegebener Bedingungen zu lösen. $p =$ Constans gesetzt stellt uns dann das System der Äquipotentiallinien, die orthogonale Trajectorienschaar des letzteren das System der Strömungslinien dar.

Wir beschäftigen uns nun zunächst mit einem möglichst einfachen Falle: Der Bewegung der Elektricität in einer unendlich grossen ebenen Platte von durchaus gleichem Leitungsvermögen und von gleichmässiger, aber verschwindend kleiner Dicke δ. Wir leiten in einem Punkte E Elektricität zu, dieselbe fliesst nach allen Richtungen gleichmässig ins Unendliche ab. Die Äquipotentiallinien sind dargestellt durch das System der um E als Mittelpunkt gezeichneten Kreise, die Strömungslinien durch die von E ausgehende Geradenschaar. In dem Punkte

(x, y) wirkt, in Richtung der Strömungslinie, die Kraft $K = -\frac{\partial p}{\partial r}$, wenn r den Abstand des Punktes von der Elektrode E bedeutet. Setzen wir nun die Stromintensität, d. h. die durch E in der Zeiteinheit der Platte zugeführte Elektricitätsmenge, gleich J, so trifft in der Entfernung r von E auf die Einheit des längs der Äquipotentialcurve ausgeführten Schnittes die Strommenge $\frac{J}{2\pi r\delta}$; dieser letzteren Grösse ist aber offenbar die Kraft K proportional, somit

$$\frac{\partial p}{\partial r} = -k \cdot \frac{J}{2\pi r\delta},$$

wobei k Proportionalitätsfactor.

Hieraus durch Integration:

$$p = A \,.\, lr + B, \tag{2}$$

wenn nämlich zur Abkürzung $-\frac{k \,.\, J}{2\pi\delta} = A$ gesetzt wird; B ist eine, bei Potentialausdrücken stets auftretende, willkürliche Constante.

Wir suchen nun den Factor A durch bekannte Grössen auszudrücken; es geschieht dies in folgender Weise: Liegt ein leitender Körper von der Form eines senkrechten Cylinders vor, dessen Querschnitt $= q$ und dessen Länge $= l$, und erhalten wir die eine Endfläche auf dem Potentiale p_1, die andere auf dem Potentiale p_0, wobei $p_1 > p_0$, so findet in dem Cylinder eine Strömung von der ersten Fläche zur zweiten statt, und zwar ist die Stromintensität J proportional dem Querschnitte q, ferner dem Potentialgefälle $(p_1 - p_0) : l$ und umgekehrt proportional dem Widerstandscoëfficienten σ des Materials, somit:

$$J = q \cdot \frac{p_1 - p_0}{l} \cdot \frac{1}{\sigma}.$$

Als solchen senkrechten Cylinder von verschwindend kleiner Länge dr können wir in unserem Probleme ein Stück der Platte betrachten, das von zwei benachbarten Äquipotentialcurven r und $r + dr$ begrenzt wird. Hier ist der Querschnitt

des allerdings in Form eines Reifens gebogenen Cylinders gleich $2\pi r \delta$, ferner $p_1 - p_0 = -dp$, daher das Potentialgefälle $= -\frac{dp}{dr} = -\frac{A}{r}$ (nach Formel 2). Somit

$$J = 2\pi r \delta \cdot \frac{-A}{r} \cdot \frac{1}{\sigma} = -2\pi A \cdot \frac{\delta}{\sigma},$$

woraus

$$A = -\frac{J}{2\pi} \cdot \frac{\sigma}{\delta}. \tag{3}$$

Wir gehen nun zu einem etwas allgemeineren Probleme über. Wir denken uns jetzt unsere unendlich grosse Platte in zwei Punkten E_1 und E_2 mit den Poldrähten einer Batterie berührt; das vorhin behandelte Problem geht natürlich aus diesem hervor, wenn wir E_2 im Unendlichen annehmen. Die Elektroden besitzen dann die Gestalt sehr kleiner Kreischen von den Radien ρ_1 und ρ_2; letztere seien der Entfernung $\overline{E_1 E_2} = c$ gegenüber als verschwindend klein vorausgesetzt. Durch die Elektrode E_1 trete der Strom in die Fläche ein, durch E_2 trete er wieder aus. Auf dem Rande der Kreisfläche ρ_1 besitzen dann sämmtliche Punkte das gleiche Potential p_1, auf dem Rande der Kreisfläche ρ_2 das gleiche Potential p_2. Wir suchen zunächst wieder die Vertheilung der Spannung in unserer Platte.

Zufolge des linearen Charakters der Differentialgleichung (1) wird unser Integral die Form annehmen:

$$p = A_1 . lr_1 + A_2 . lr_2 + B,$$

wobei r_1 und r_2 die Abstände des betrachteten Punktes (x, y) von den Elektroden bedeuten. In unmittelbarer Nähe der einen Elektrode wird der Einfluss der anderen fast vollkommen verschwinden; an dieser Stelle geht die Strömung genau so vor sich, als ob sich die andere Elektrode in unendlicher Entfernung befände. Diejenigen Äquipotentiallinien, welche den Elektroden unendlich benachbart sind, werden daher von der Form eines Kreises nur unendlich wenig abweichen. Die Betrachtung des sich unmittelbar an den Rand der ersten Elektrode anschliessenden unendlich kurzen Cylinders ergibt in Folge dessen, wie im ersten Probleme, für die in der Zeiteinheit durch E_1 eintretende Elektricitätsmenge:

$$J_1 = -2\pi A_1 \cdot \frac{\delta}{\sigma}.$$

Analog für die zweite Elektrode:

$$J_2 = -2\pi A_2 \cdot \frac{\delta}{\sigma}.$$

Für den stationären Zustand ist erforderlich, dass $J_2 = -J_1$, also $A_2 = -A_1$ ist. Daher nimmt unser Integral die Form an:

$$p = A \,.\, l \frac{r_1}{r_2} + B, \tag{4}$$

wobei wieder

$$A = -\frac{J}{2\pi} \cdot \frac{\sigma}{\delta}.$$

Als Strömungslinien erhalten wir, wie leicht nachzuweisen, das durch die Punkte E_1 und E_2 gelegte Kreisbüschel, als Curven gleicher Spannung die zu demselben gezeichnete orthogonale Kreisschaar.

Sind die den Elektroden zukommenden Potentialwerthe p_1 und p_2 bekannt, so gestatten die Formeln (3) und (4) die Berechnung der Constanten A, B und der Stromintensität J. Uns interessirt hier die umgekehrte Aufgabe: die Berechnung der Potentialdifferenz $p_1 - p_2$, wenn die Grösse J gegeben ist. Ihrer Herleitung gemäss gilt die Formel (4) nur für Punkte ausserhalb der Elektroden und für Punkte auf dem Rande derselben; für die Punkte innerhalb verliert sie ihre Giltigkeit. Erinnern wir uns daran, dass der Voraussetzung gemäss ρ_1 und ρ_2 sehr klein gegenüber dem gegenseitigen Abstande c der Elektroden, so ist also:

$$p_1 = A \,.\, l \frac{\rho_1}{c} + B$$

$$p_2 = A \,.\, l \frac{c}{\rho_2} + B$$

folglich

$$p_1 - p_2 = A \,.\, l \frac{\rho_1 \rho_2}{c^2}$$

oder, wenn wir für A seinen Werth aus (3) einsetzen:

$$p_1 - p_2 = \frac{J}{2\pi} \cdot \frac{\sigma}{\delta} \cdot l \frac{c^2}{\rho_1 \rho_2}. \tag{5}$$

Für den Gesammtwiderstand, den die Platte der Elektricitätsströmung entgegensetzt, erhalten wir somit nach dem Ohm'schen Gesetze den Werth:

$$W = \frac{p_1 - p_2}{J} = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\sigma}{\delta} \cdot l \frac{c^2}{\rho_1 \rho_2}. \tag{6}$$

Dieser Widerstand hängt also wesentlich von der Grösse der Elektroden ab; er ist umso kleiner, je grösser die Elektrodenradien, d. h. je besser der Contact.

Mit Einführung dieser Grösse W können wir aus Formel (5) die Stromintensität J, deren Werth von W abhängt, also mit Änderung der Berührungsstellen oder des Contactes variirt, eliminiren. Bezeichnen wir die elektromotorische Kraft unserer Batterie mit E und den Widerstand der Poldrähte mit W', so ist $J = \frac{E}{W + W'}$, somit:

$$p_1 - p_2 = J.W = E \frac{W}{W + W'}, \tag{7}$$

worin noch für W sein Werth aus Formel (7) einzusetzen ist.

Nachdem wir diese Formeln, die den in §. 3 anzustellenden Betrachtungen als Grundlage dienen werden, gewonnen haben, wenden wir uns zunächst einem rein mathematischen Probleme zu.

§. 2. Conforme Abbildung von Rotationsflächen.

Es liege eine beliebige Rotationsfläche vor. Zum Zwecke der Coordinatenbestimmung greifen wir irgend einen Meridian und irgend einen Parallelkreis heraus, von denen aus die Abzählung begonnen wird. Die Lage eines Flächenpunktes ist dann eindeutig bestimmt durch seine, von ersterem an gemessene, geographische Länge λ und seinen Abstand s, abgelesen auf dem Meridiane, von jenem Parallelkreise, beide Coordinaten natürlich mit Vorzeichen behaftet.

Die vorliegende Rotationsfläche soll nun conform, d. h. ähnlich in den kleinsten Theilen, auf eine Ebene abgebildet werden. Wir machen zunächst die Annahme, die abzubildende Umdrehungsfläche habe mit ihrer Axe wenigstens einen reellen Schnittpunkt S_1 gemeinsam; derselbe bilde sich nach S_1' ab. Aus den Symmetrieverhältnissen schliessen wir, dass sich jeder Meridian als Strahl durch S_1' und jeder Parallelkreis als Kreis mit Mittelpunkt S_1' abbilden wird; selbstverständlich schliessen dann zwei solche Strahlen denselben Winkel ein wie die entsprechenden Meridiane. Greifen wir nun auf der Rotationsfläche einen Gürtel heraus, der begrenzt ist von den zwei Parallelkreisen s und $s+ds$, so wird sich als Bild desselben ein Kreisring mit den Radien R und $R+dR$ ergeben; beide Gebilde, die wir als unendlich schmale umgebogene Rechtecke betrachten können, sind einander ähnlich, wenn die Proportion besteht:

$$dR : 2\pi R = ds : 2\pi x,$$

wobei nämlich $2x$ den Durchmesser des Gürtels bedeutet. Daher

$$\frac{dR}{R} = \frac{ds}{x}, \text{ somit } lR = \int_{s_0}^{s} \frac{ds}{x}.$$

Hieraus erhalten wir die Abbildungsformel:

$$R = e^{\int_{s_0}^{s} \frac{ds}{x}}, \tag{8}$$

wobei s_0 willkürliche Constante.

Wir werden also damit anfangen, einen beliebigen Parallelkreis s_0 auf den Einheitskreis der Ebene abzubilden; dann ist aber das Bild jedes anderen Parallelkreises von selbst gegeben. Mit Hilfe der Formel (8) können wir also zu jedem Punkte (s, λ) der Fläche seinen Bildpunkt (R, λ) in der Ebene zeichnen. Dass diese Beziehung zwischen den Flächen- und Ebenenpunkten eine vollkommen eindeutige ist, lässt sich aus der Abbildungsformel sofort erkennen.

Ehe wir jedoch ein Beispiel für die Abbildung einer Rotationsfläche vorführen, wollen wir uns über die geometrische

Bedeutung des Ausdruckes $\int_{s_1}^{s_2} \frac{ds}{x}$ Klarheit verschaffen. Wir schalten zu diesem Zwecke zwischen die beiden Parallelkreise s_1 und s_2 weitere $n-1$ Hilfsparallelkreise ein, und zwar so, dass die nun vorliegenden $n+1$ Parallelkreise je in gleichen Abständen, letztere als Bogen auf dem Meridiane gemessen, aufeinander folgen; jeder dieser Abstände wird dann die Grösse $\frac{s_1 - s_2}{n} = \Delta s$ besitzen. Auf dem Parallelkreise s_1 nehmen wir einen beliebigen Punkt A an, der Meridian desselben schneide in A' den folgenden Parallelkreis $s_1 + \Delta s$; auf letzterem bestimmen wir einen Punkt B so, dass Bogen $A'B = \Delta s$ wird. Der Meridian B treffe in B' den Hilfskreis $s_1 + 2\Delta s$; auf diesem bestimme den Punkt C so, dass Bogen $B'C = \Delta s$ wird u. s. f. Schliesslich erreichen wir den Parallelkreis s_2 im Punkte Y', von dem aus wir endlich zu dem Punkte Z gelangen. Bezeichnen wir nun die geographischen Längen der Punkte $A, B, C \ldots Z$ der Reihe nach mit $\alpha, \beta, \gamma \ldots \zeta$, ihre Axenabstände mit $a, b, c \ldots z$, so ist doch, im analytischen Masse gemessen, $\beta - \alpha = \frac{\Delta s}{b}$, dessgleichen $\gamma - \beta = \frac{\Delta s}{c}$ u. s. w. Daher durch Addition:

$$\zeta - \alpha = \sum_{x=b}^{x=z} \frac{\Delta s}{x}.$$

Gehen wir zur Grenze $n = \infty$ über, so wird $\Delta s = ds$, und wir erhalten $\zeta - \alpha = \int_{x=b}^{x=z} \frac{ds}{x}$, oder wenn wir die Grenzen für s einführen:

$$\zeta - \alpha = \int_{s_1}^{s_2} \frac{ds}{x}.$$

Verbinden wir nun die, jetzt mit unendlich kleinem Abstand aufeinander folgenden Punkte $A, B \ldots Z$ durch einen stetigen Linienzug, so erhalten wir eine Anzahl gleichschenklig-rechtwinkliger Dreiecke; jener Linienzug schneidet somit sämmtliche Parallelkreise (und Meridiane) unter einem Winkel von 45°. Wir haben also jetzt folgenden Satz gewonnen:

Zeichnen wir auf unserer Rotationsfläche eine Spirale, welche sämmtliche Parallelkreise unter einem Winkel von 45° schneidet, so begegnet dieselbe den zwei Parallelkreisen s_1 und s_2 in zwei Punkten, deren Längenunterschied gleich $\int_{s_1}^{s_2} \frac{ds}{x}$ ist.

Wir lassen nun zwei Beispiele für die conforme Abbildung von Rotationsflächen folgen:

a) Abbildung eines Rotationsellipsoids. Die Axe $S_1 S_2$ desselben sei $= 2a$, der Äquatordurchmesser $= 2b$; ferner setzen wir $a^2 - b^2 = c^2$. Bezeichnen wir noch den Winkel, den die Flächennormale des Punktes (s, λ) gegen die Umdrehungsaxe bildet, mit ϑ, so ergibt sich nach (8) die Abbildungsformel:

$$R = C.\mathrm{tg}\,\frac{\vartheta}{2} \cdot e^{-\frac{c}{b}\cdot \mathrm{arc\,tg}\left(\frac{c}{b}\cdot\cos\vartheta\right)},$$

wobei C willkürliche Constante.

Lassen wir ϑ von 0° bis 180° wachsen, so durchläuft R sämmtliche Werthe von 0 bis ∞; der Scheitel S_1 bildet sich in den Nullpunkt, der Scheitel S_2 in den unendlich fernen Kreis ab, die Abbildung erstreckt sich eindeutig über die ganze Ebene.

b) Abbildung einer ringförmigen Rotationsfläche. Der Meridian unseres Ringes sei ein Kreis vom Radius a, der Mittelpunkt desselben habe von der Rotationsaxe den Abstand b, wobei $b > a$ vorausgesetzt sei. Denjenigen Parallelkreis, dessen Radius $= a + b$ ist, nennen wir den Parallelkreis $s = 0$; ferner bezeichnen wir den Centriwinkel, den der Punkt $(s, 0)$ mit dem festen Punkte $(0, 0)$ auf dem Meridiankreise $\lambda = 0$ begrenzt, mit φ; dann hat der Radius des Parallelkreises s den Werth $x = b + a.\cos\varphi$, während $ds = a.d\varphi$ ist. Damit wird unsere Abbildungsformel:

$$\frac{dR}{R} = \frac{ds}{x} = \frac{a.d\varphi}{b + a.\cos\varphi};$$

hieraus:

$$R = C.e^{\frac{2a}{\sqrt{b^2 - a^2}}\cdot \mathrm{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{b-a}{b+a}}\cdot \mathrm{tg}\,\frac{\varphi}{2}\right)},$$

wobei wieder C willkürliche Constante.

Lassen wir φ sämmtliche Werthe von 0° bis 360° durchlaufen, so haben wir die ganze Ringfläche einmal, und zwar eindeutig, auf die Ebene abgebildet; dem Werthe $\varphi = 0°$ entspricht dabei der kleinste Werth α, dem Werthe $\varphi = 360°$ der grösste Werth β von R. Die Abbildung dieser ringförmigen Fläche erstreckt sich also nicht über die ganze Ebene, sondern füllt nur das zwischen zwei concentrischen Kreisen α und β liegende Gebiet derselben aus.

Es liegt daher nahe, zu untersuchen, welches die charakteristischen Eigenschaften dafür sind, dass sich die Abbildung einer Rotationsfläche über die ganze Ebene erstreckt. Wir gehen aus von der Abbildungsformel:

$$lR = \int_{s_0}^{s} \frac{ds}{x} \, .$$

Sehen wir zunächst ab von unendlich grossen Werthen von s, d. h. von Flächen, welche sich ins Unendliche erstrecken, so ist, wenn wir uns nur an die Definition des bestimmten Integrales erinnern, sofort klar, dass lR nur für $x = 0$ unendlich werden kann; dass umgekehrt für $x = 0$ der Werth lR in der That stets gleich $\pm\infty$ wird, lässt sich analytisch leicht zeigen. Die Betrachtung für unendlich grosse Werthe von s bietet ebenfalls keine Schwierigkeiten; auch für $s = \pm\infty$ wird lR stets gleich $\pm\infty$. Ausser diesen beiden Fällen gibt es keine andern, in denen lR unendlich grosse Werthe annimmt; geometrisch ist dies sofort evident, wenn wir uns die oben für $lR = \int_{s_0}^{s} \frac{ds}{x}$ vermittelst der Spiralen gegebene Deutung vor Augen halten. Wir können daher den Satz aussprechen:

Die Abbildung einer Rotationsfläche erstreckt sich eindeutig über die ganze Ebene,

1. wenn ihr Meridian, in einem Punkte der Axe beginnend, mit Vermeidung des Unendlichen wieder zu einem Punkte der Axe zurückführt, um hier zu enden (Beispiel: Ellipsoid),

oder 2. wenn ihr Meridian, von einem Punkte der Axe ausgehend, ohne dieselbe nochmals zu treffen, ins Unendliche verläuft (Paraboloid),

oder 3. wenn ihr Meridian, aus dem Unendlichen kommend, ohne die Axe zu schneiden, wieder dem Unendlichen zustrebt (einschaliges Hyperboloid).

Wir wollen sämmtliche Flächen, die zu einer der drei genannten Classen gehören, unter dem Namen »Rotationsflächen erster Art« zusammenfassen, während wir unter einer »Rotationsfläche zweiter Art« eine Fläche verstehen, deren Meridian eine in sich geschlossene, die Axe nicht schneidende Curve bildet. Den Namen »Rotationsgürtel« schliesslich legen wir jedem von zwei Parallelkreisen begrenzten Theile einer Umdrehungsfläche (erster oder zweiter Art) bei. Mit Benützung dieser Definitionen können wir dann die beiden Sätze aussprechen:

1. Die Abbildung einer Rotationsfläche erster Art erstreckt sich eindeutig über die ganze Ebene.

2. Die Abbildung einer Rotationsfläche zweiter Art füllt, ebenso wie die eines Rotationsgürtels, nur einen Kreisring aus.

Es ist nothwendig, diese Sätze mit aller Schärfe auszusprechen, weil sich auf sie die in §. 3 anzustellenden Betrachtungen stützen werden.

Wir wenden uns nun zu der Abbildung der Elektroden. Es sei auf der Umdrehungsfläche ein sphärischer Kreis mit dem Mittelpunkte E gezeichnet, sein Bild wird dann im Allgemeinen durch eine Curve höherer Ordnung dargestellt; nur wenn die Rotationsfläche eine Kugel ist, erhalten wir als Bild des Kreises wieder einen Kreis. Setzen wir jedoch voraus, dass der sphärische Radius ε jenes Kreises verschwindend klein sei gegenüber den Dimensionen der Rotationsfläche, so ergibt sich, da bei der Abbildung die Ähnlichkeit in den kleinsten Theilen gewahrt bleibt, als Bild unseres Kreischens wieder ein Kreis mit dem sehr kleinen Radius ρ. Der Elektrodenmittelpunkt E besitze die Coordinaten (s, λ), sein Abstand von der Rotationsaxe sei gleich x, sein Bild falle nach $E'(R, \lambda)$. Es betrage nun die Grösse des Elektrodenradius, auf dem Parallelkreise von E abgelesen, μ Grade, so muss auch der Radius der Bildelektrode, auf dem Kreise R abgelesen, die Grösse μ Grade besitzen. Es ist also einerseits $\varepsilon = 2\pi x \cdot \frac{\mu}{360}$, anderseits $\rho = 2\pi R \cdot \frac{\mu}{360}$.

Hieraus erhalten wir die Relation zwischen Elektroden- und Bildradius:

$$\frac{\varepsilon}{\rho} = \frac{x}{R}. \tag{9}$$

Zum Schlusse dieses Paragraphen lassen wir noch eine höchst wichtige Betrachtung folgen, welche uns wieder aus dem Gebiet rein mathematischer Erwägungen zu unserem physikalischen Probleme zurückführen wird.

Wie in der Theorie der Functionen einer complexen Variablen gelehrt wird, liegt es im Wesen der conformen Abbildung, dass sich die Curven gleicher Spannung wieder als Curven gleicher Spannung und die Strömungslinien wieder als Strömungslinien abbilden. Unsere Rotationsfläche werde nun von einem Strome von der Intensität J durchflossen; durch die Elektrode E_1 trete derselbe in die Fläche ein, durch E_2 trete er wieder aus. Die Elektrodenradien E_1 und E_2, desgleichen die Dicke δ der Fläche seien verschwindend klein; der specifische Leitungswiderstand des Materials sei gleich σ. Wir greifen nun zwei benachbarte Strömungslinien heraus, dieselben begrenzen auf dem Rande der Elektrode E_1 ein Bogenelement, dessen Centriwinkel den sehr kleinen Werth $d\alpha$ Grade besitzt. Die Elektricitätsmenge, welche dieses Bogenelement in der Zeiteinheit passirt, ist dann $i = \frac{d\alpha}{360} \cdot J$. Aus dem von diesen zwei Strömungslinien begrenzten Flächenstreifen schneiden irgend zwei aufeinander folgende Äquipotentiallinien p und $p + dp$ ein unendlich kleines Rechteck von der Breite db und der Länge dl aus; wir haben also wieder einen senkrechten Cylinder vom Querschnitte $db . \delta$ und der Länge dl, die Potentialdifferenz der Endflächen ist $-dp$, daher nach Früherem:

$$i = -\frac{\delta}{\sigma} \cdot \frac{db}{dl} \cdot dp. \tag{I}$$

Wir bilden nun die Rotationsfläche conform auf eine Ebene ab. Die Mittelpunkte der Elektrodenbilder bezeichnen wir mit E_1' und E_2', ihre Radien mit ρ_1 und ρ_2. Die Ebene besitze ebenfalls die Dicke δ, der specifische Widerstand des Materials sei wieder gleich σ. Durch E_1' soll ein Strom ein-, durch E_2' wieder

austreten; die Intensität desselben habe den gleichen Werth J wie bei der oben betrachteten Rotationsfläche. Das in letzterer gezeichnete Flächenelement ergibt als Bild ein unendlich kleines Rechteck von der Breite db' und der Länge dl'; den begrenzenden Äquipotentiallinien entsprechen die Potentialwerthe p' beziehungsweise $p'+dp'$. Die das Ebenenelement begrenzenden Strömungslinien bestimmen auf der Elektrode E_1' einen Centriwinkel $d\alpha'$, der wegen der Ähnlichkeit der Abbildung gleich $d\alpha$ sein muss. Daher ist auch $i' = i$. Anderseits folgt aus der gleichen Betrachtung wie oben:

$$i' = -\frac{\delta}{\sigma} \cdot \frac{db'}{dl'} \cdot dp'. \tag{II}$$

Berücksichtigen wir noch, dass $\frac{db}{dl} = \frac{db'}{dl'}$ ist, so folgt aus der Gleichsetzung von (I) und (II):

$$dp = dp'.$$

Hieraus ergibt sich, wenn wir bedenken, dass der Begriff des Potentiales nur ein relativer ist, die wichtige Folgerung:

$$p = p'.$$

Lassen wir also die Fläche und ihr Bild von Strömen gleicher Intensität durchfliessen, so besitzt jeder Flächenpunkt das gleiche Potential wie der entsprechende Bildpunkt.

Hieraus folgt sofort, dass die Potentialdifferenz zwischen den Elektroden bei der Fläche genau denselben Werth besitzt wie bei der Abbildung. Da auch die Stromintensität für beide Fälle die nämliche ist, so schliessen wir aus dem Ohm'schen Gesetze, dass auch die Gesammtwiderstände, welche die Fläche beziehungsweise ihr Bild dem Strome entgegensetzen, einander gleich sein müssen, also $W = W'$. Letzteres Resultat hätten wir direct aus der Thatsache ableiten können, dass für jedes einzelne Flächenelement und sein Bild die Gleichung $w = w'$ besteht.

Wir bemerken noch ausdrücklich, dass bei der Herleitung dieser Sätze nicht vorausgesetzt wurde, dass die Abbildung der Fläche die ganze Ebene ausfülle; diese Sätze gelten vielmehr allgemein.

Wir haben jetzt alle erforderlichen Vorbereitungen getroffen und können nun unser eigentliches Problem in Angriff nehmen.

§. 3. Strömung der Elektricität in Rotationsflächen erster Art.

Eine beliebige Rotationsfläche erster Art, von der wir nur voraussetzen, dass ihr Meridian keinen Doppel- oder mehrfachen Punkt besitze, sei in eine Stromleitung vermittelst der Elektroden E_1 und E_2 eingeschaltet. Wir fragen zunächst nach der Potentialvertheilung auf der Fläche.

Wir bilden zu diesem Zwecke die Rotationsfläche in eine Ebene ab; die Abbildung erstreckt sich dann über die ganze Ebene. Die Elektrodenmittelpunkte sollen als Bildpunkte E_1' und E_2' liefern. Die Coordinaten eines beliebigen Flächenpunktes bezeichnen wir wieder mit (s, λ), diejenigen von E_1 und E_2 mit (s_1, λ_1), beziehungsweise (s_2, λ_2); die Axenabstände der beiden letzteren Punkte seien gleich x_1, beziehungsweise x_2. Die entsprechenden Punkte der Bildebene seien dargestellt durch (R, λ), beziehungsweise (R_1, λ_1) und (R_2, λ_2). Die Radien der in Form sehr kleiner Kreise gegebenen Flächenelektroden setzen wir gleich ε_1 und ε_2, die Radien ihrer Bilder gleich ρ_1 und ρ_2, die Entfernung $E_1'E_2'$ sei gleich c. Setzen wir voraus, dass ε_1 und ε_2 verschwindend klein seien gegenüber der gegenseitigen Entfernung der beiden Flächenelektroden, so muss dies auch in Bezug auf ρ_1, ρ_2 und c gelten.

Schicken wir nun durch die Ebene einen Strom von der gleichen Intensität J, wie sie der die Fläche passirende Strom besitzt, so ist nach den Sätzen des vorigen Paragraphen das Potential p eines beliebigen Punktes (s, λ) der Fläche identisch mit dem seines Bildpunktes (R, λ), vorausgesetzt natürlich, dass Fläche und Ebene dieselbe Dicke δ und denselben specifischen Widerstand σ des Materials besitzen. Benützen wir also die in §. 1 für die Potentialvertheilung in einer unbegrenzten Ebene gefundene Formel (4), so erhalten wir:

$$p = A \,.\, l \frac{r_1}{r_2} + B,$$

wenn nämlich r_1 und r_2 die Abstände des betreffenden Bildpunktes von den Bildelektroden bedeuten. Nun ist aber doch:

$$r_1^2 = R^2 + R_1^2 - 2RR_1 \,.\, \cos(\lambda - \lambda_1) =$$

$$= RR_1 \left[\frac{R}{R_1} + \frac{R_1}{R} - 2\cos(\lambda - \lambda_1)\right]$$

und

$$r_2^2 = RR_2 \left[\frac{R}{R_2} + \frac{R_2}{R} - 2\cos(\lambda - \lambda_2)\right]$$

daher

$$\frac{r_1^2}{r_2^2} = \frac{R_1}{R_2} \cdot \frac{\frac{R}{R_1} + \frac{R_1}{R} - 2\cos(\lambda - \lambda_1)}{\frac{R}{R_2} + \frac{R_2}{R} - 2\cos(\lambda - \lambda_2)} \,.$$

Damit wird, wenn wir den constanten Werth $\frac{A}{2} \cdot l \frac{R_1}{R_2}$ gleich in die willkürliche Constante C mit aufnehmen:

$$p = \frac{A}{2} \cdot l \frac{\frac{R}{R_2} + \frac{R_1}{R} - 2\cos(\lambda - \lambda_1)}{\frac{R}{R_2} + \frac{R_2}{R} - 2\cos(\lambda - \lambda_2)} + C.$$

Aus der Abbildungsformel (8) folgt aber unmittelbar:

$$\frac{R}{R_1} = e^{\int_{s_1}^{s} \frac{ds}{x}} \quad \text{und} \quad \frac{R}{R_2} = e^{\int_{s_2}^{s} \frac{ds}{x}},$$

so dass wir für das Potential des Punktes (s, λ) den Werth erhalten:

$$p = \frac{A}{2} \cdot l \frac{e^{\int_{s_1}^{s} \frac{ds}{x}} + e^{\int_{s}^{s_1} \frac{ds}{x}} - 2\cos(\lambda - \lambda_1)}{e^{\int_{s_2}^{s} \frac{ds}{x}} + e^{\int_{s}^{s_2} \frac{ds}{x}} - 2\cos(\lambda - \lambda_2)} + C, \quad (10)$$

wobei $A = -\frac{J}{2\pi} \cdot \frac{\sigma}{\delta}$.

Der für p gefundene Ausdruck enthält die beiden Grössen $\int_{s_1}^{s} \frac{ds}{x}$ und $\int_{s_2}^{s} \frac{ds}{x}$; diese hängen nur von der Form des Gürtels ab, der die beiden Elektroden und den betrachteten Punkt (s, λ) enthält, sie sind jedoch unabhängig von der Gestalt der Rotationsfläche ausserhalb dieses Gürtels. Dies liefert uns den Satz:

»Schalten wir eine Rotationsfläche erster Art vermittelst zweier Elektroden in eine Stromleitung ein und betrachten dann auf derselben einen Gürtel, der die beiden Elektroden enthält, so ist die Potentialvertheilung, und somit auch die Strömung, innerhalb dieses Gürtels vollkommen unabhängig von der Gestalt der Rotationsfläche ausserhalb desselben. Wie wir uns diesen Gürtel auch zu einer Rotationsfläche erster Art ergänzt denken mögen (eine Änderung von δ oder σ natürlich ausgeschlossen), stets ist die Strömung und die Potentialvertheilung innerhalb dieses Gürtels dieselbe.«

Geometrisch ist dieser Satz sofort einleuchtend, wenn wir bedenken, dass für alle so entstandenen Umdrehungsflächen die Abbildung genau dasselbe Bild ergibt.

Wir stellen uns nun die weitere Aufgabe, den Widerstand W zu berechnen, welchen die Rotationsfläche dem Strome entgegensetzt.

Dieser Widerstand ist, wie wir am Schlusse des vorigen Paragraphen gesehen haben, identisch mit dem der unendlich grossen Bildebene; wir erhalten somit gemäss Formel (6):

$$W = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\sigma}{\delta} \cdot l \frac{c^2}{\rho_1 \rho_2} \cdot$$

Nun ist aber nach Formel (9):

$$\rho_1 = \varepsilon_1 \cdot \frac{R_1}{x_1} \quad \text{und} \quad \rho_2 = \varepsilon_2 \cdot \frac{R_2}{x_2},$$

somit:

$$\rho_1 \rho_2 = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \frac{R_1 R_2}{x_1 x_2},$$

während $c^2 = R_1^2 + R_2^2 - 2 R_1 R_2 . \cos(\lambda_1 - \lambda_2)$. Damit wird:

$$W = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\sigma}{\delta} \cdot l \left\{ \frac{x_1 x_2}{\varepsilon_1 \varepsilon_2} \left[\frac{R_1}{R_2} + \frac{R_2}{R_1} - 2 \cos(\lambda_1 - \lambda_2) \right] \right\} \cdot$$

Zufolge der Abbildungsformel (8) ist aber $\frac{R_1}{R_2} = e^{\int_{s_2}^{s_1} \frac{ds}{x}}$;
wir erhalten daher für den Widerstand W den Werth:

$$W = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\sigma}{\delta} \cdot l \left\{ \frac{x_1 x_2}{\varepsilon_1 \varepsilon_2} \left[e^{\int_{s_2}^{s_1} \frac{ds}{x}} + e^{\int_{s_1}^{s_2} \frac{ds}{x}} - 2 \cos(\lambda_1 - \lambda_2) \right] \right\} \cdot \quad (11)$$

Für die Potentialdifferenz zwischen den Elektroden ergibt sich nach dem Ohm'schen Gesetze:

$$p_1 - p_2 = J.W.$$

Wir sehen zunächst wieder, dass der Widerstand, den die Fläche der Elektricitätsbewegung entgegensetzt, wesentlich abhängt von der Grösse der Elektroden; je besser der Contact, desto kleiner der Widerstand.

Weiter bemerken wir, dass der für W gefundene Ausdruck nur Glieder enthält, die durch die Form des von den Parallelkreisen s_1 und s_2 begrenzten Gürtels bedingt sind; er ist jedoch unabhängig von der Gestalt der ausserhalb dieses Gürtels gelegenen Theile der Rotationsfläche. Dies liefert uns den Satz:

»Schalten wir eine Rotationsfläche erster Art vermittelst zweier Elektroden in eine Stromleitung ein, so ist der Widerstand, den die Fläche dem Strome entgegensetzt, und somit auch die Potentialdifferenz zwischen den Elektroden nur abhängig von der Gestalt des durch die Elektroden begrenzten Gürtels. In welcher Weise wir diesen auch zu einer Rotationsfläche erster Art ergänzen mögen, stets erhalten wir für den Widerstand und die Potentialdifferenz denselben Werth.«

So können wir z. B. folgendes Experiment anstellen: Wir verfertigen uns einen Rotationscylinder aus dünnem Kupferblech und versehen denselben oben und unten mit einem Deckel aus demselben Material; diesen Cylinder schalten wir in eine Stromleitung ein und messen dann die Potentialdifferenz zwischen den Elektroden. Dann schneiden wir von dem Cylindermantel oben und unten je einen Streifen ab und setzen die beiden Deckel wieder auf; haben wir dafür gesorgt, dass bei dieser Manipulation der Contact nicht geändert wurde, so muss sich jetzt für den Spannungsunterschied zwischen den beiden Elektroden wieder genau derselbe Werth ergeben wie bei der ersten Ablesung.

Nachdem wir die oben gestellte Aufgabe, die Berechnung des Widerstandes der Fläche, allgemein gelöst haben, wenden wir uns einem speciellen Falle zu. Die Elektroden sollen jetzt nicht mehr beliebig auf unserer Rotationsfläche angebracht sein, sondern sollen auf demselben Parallelkreise liegen. Es

ist also jetzt $s_2 = s_1$ und $x_2 = x_1$ vorausgesetzt. Die in Formel (11) enthaltene Grösse $\int_{s_2}^{s_1} \frac{ds}{x}$ nimmt dann den Werth 0 an, und wir erhalten:

$$W = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\sigma}{\delta} \cdot l \left\{ \frac{x_1^2}{\varepsilon_1 \varepsilon_2} \cdot \left[2 - 2\cos(\lambda_1 - \lambda_2) \right] \right\}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\sigma}{\delta} \cdot l \, \frac{4x_1^2 . \sin^2 \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2}}{\varepsilon_1 \varepsilon_2} .$$

Setzen wir nun die geradlinige Entfernung $\overline{E_1 E_2}$ der beiden Flächenelektroden gleich a, so ist doch $2x_1 . \sin \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2} = a$; wir finden somit für den Widerstand der Rotationsfläche den Werth:

$$W = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\sigma}{\delta} \cdot l \, \frac{a^2}{\varepsilon_1 \varepsilon_2} . \tag{12}$$

Dieser Ausdruck enthält keine Grössen mehr, die von der Gestalt der Umdrehungsfläche abhängen. Genau denselben Werth würden wir auch für W erhalten, wenn die Strömung in einer unendlich grossen Ebene mit den beiden Elektroden ε_1 und ε_2, deren gegenseitige Entfernung $= a$, vor sich ginge; vergleiche hierüber Formel (8).

Wir können somit den Satz aufstellen: »Schalten wir eine Rotationsfläche erster Art so in eine Stromleitung ein, dass die beiden Elektroden auf denselben Parallelkreis zu liegen kommen, so ist der Widerstand, den die Fläche dem Strome entgegensetzt, nur abhängig von der Grösse der Elektroden und deren gegenseitiger, längs der Sehne gemessenen, Entfernung; er ist jedoch vollkommen unabhängig von der Form der Rotationsfläche. Denselben Widerstand würden wir auch erhalten, wenn wir die Umdrehungsfläche durch eine unbegrenzte Ebene ersetzen würden, die Grösse der Elektroden aber und ihre gegenseitige Entfernung ungeändert liessen.«

Wenden wir diesen Satz auf die Kugel an, so gelangen wir zu dem schon früher von Herrn Prof. Boltzmann veröffentlichten, jedoch in anderer Weise abgeleiteten Resultate, dass der Widerstand einer Kugelschale, die wir an zwei

beliebigen Stellen mit den Poldrähten einer Stromquelle berühren, unabhängig ist von dem Kugelradius und denselben Werth besitzt wie der Widerstand einer unendlichen Ebene, auf der sich die Elektroden in derselben Distanz befinden (siehe 52. Bd. dieser Sitzungsberichte, 1865).

Wir wollen damit unsere Untersuchungen über die Bewegung der Elektricität in Rotationsflächen erster Art abschliessen. Es wäre nun noch das gleiche Problem für Rotationsflächen zweiter Art und ausserdem für Rotationsgürtel zu lösen; diese beiden Aufgaben werden wir jedoch a. O. behandeln.

Die Erstarrungswärme in Lösungen

von

O. Tumlirz.

(Mit 1 Textfigur.)

Zwei Flüssigkeiten A und B, welche die Erstarrungspunkte t_1 und $t_2°$ C. haben, wobei t_2 grösser als t_1 ist, mögen bei einer Temperatur t, welche höher als t_2 ist, mit einander gemischt werden. Die Flüssigkeit A habe die Menge $1g$ und die Flüssigkeit B die Menge mg. Wird die Mischung unter t_2 abgekühlt, so wird das fernere Verhalten der Mischung davon abhängen, ob m grösser oder kleiner als ein gewisser Werth m_1 ist. Ist m grösser als m_1, dann wird bei einer gewissen Temperatur $t_2—\Delta$ die Substanz B anfangen, im festen Aggregatzustand aufzutreten. Dabei ist die Depression Δ desto grösser, je kleiner m ist und umgekehrt; für $m = \infty$ wird $\Delta = 0$. Die Flüssigkeit, welche übrig bleibt, bildet eine gesättigte Lösung der Substanz B in A.

Ist m kleiner als m_1, dann wird die Mischung bis zu einer Temperatur $t_1—\Delta'$, welche unter t_1 liegt, flüssig bleiben, worauf bei weiterer Abkühlung die Substanz A anfängt, in festem Aggregatzustande aufzutreten. Je kleiner m ist, desto kleiner ist Δ' und umgekehrt; für $m = 0$ ist $\Delta' = 0$.

Tragen wir demnach auf einem Coordinatensystem die Mengen m als Abscissen und die zugehörigen Temperaturen, bei welchen die Ausscheidung in den beiden Fällen gerade beginnt, als Ordinaten auf, dann erhalten wir im ersten Falle die Curve bc und im letzteren Falle die Curve ab. Die beiden

Curven schneiden sich in dem Punkte *b*, welchem der Werth m_1 angehört.[1]

Dass die Erstarrungswärme der Substanzen *A* und *B* bei ihrer Ausscheidung aus der Lösung eine andere als bei der normalen Erstarrung ist, unterliegt von vornherein keinem Zweifel, und wir wollen es nun unternehmen, den Einfluss der Lösung auf die Erstarrungswärme näher zu bestimmen. Um aber diese Aufgabe durchführen zu können, müssen wir

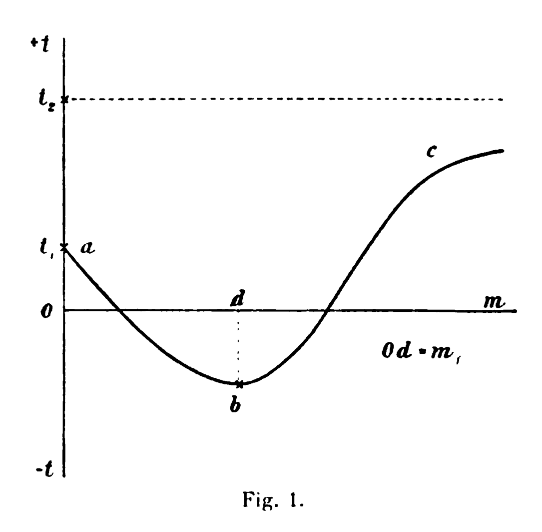


Fig. 1.

zunächst jene Wärme betrachten, welche bei der Mischung der Flüssigkeiten *A* und *B* entsteht.

§. 1.

Wenn wir die Flüssigkeiten *A* und *B* bei der Temperatur *t* mit einander mischen, dann wird die Temperatur der Mischung eine andere, und zwar t'° C. Wollen wir die Mischung auf die ursprüngliche Temperatur *t* zurückbringen, dann haben wir dem Ganzen Wärme zu entziehen oder zuzuführen, je nachdem t' grösser oder kleiner als *t* ist. Im ersteren Falle ist der Wärmegewinn oder, wie man sagt, die Mischungswärme positiv,

[1] Herr Pfaundler hat diese einfache Betrachtung zuerst (1877) angestellt, um die Entstehung der Kryohydrate zu erläutern.

im letzteren negativ. Da die Mischungswärme sowohl von m, als auch von t abhängt, so können wir sie durch

$$Q = \Phi(m, t)$$

ausdrücken; halten wir eine bestimmte Temperatur fest, dann ist Q blos von m abhängig. Es ist klar, dass der Ausdruck für Q eigentlich ein Integral ist, welches auf die folgende Weise entsteht. Haben wir nämlich bei der Temperatur t eine Mischung aus $1\,g$ von der Substanz A und mg von der Substanz B gebildet und fügen wir dann noch von der Substanz B die Menge dm hinzu, dann entwickelt sich eine Wärmemenge, welche wir gleich Fdm setzen können, wo F wieder eine Function von m und t ist. Es ist nun klar, dass die Mischungswärme Q bei der Temperatur t durch

$$\Phi(m, t) = \int_0^m F(m, t)\, dm \tag{1}$$

gegeben ist. Für die Grösse F wollen wir die Bezeichnung »die Bindungswärme pro Masseneinheit« anwenden.

Aus der Gleichung 1) ergibt sich sofort

$$F(m, t) = \frac{\partial \Phi(m, t)}{\partial m}. \tag{2}$$

Was die Abhängigkeit der Mischungswärme $\Phi(m, t)$ von der Temperatur anbelangt, so hat Kirchhoff gezeigt, dass

$$\frac{\partial \Phi(m, t)}{\partial t} = mc' + c - (1+m)C \tag{3}$$

ist, wo c und c' die specifischen Wärmen der Flüssigkeiten A und B und C die specifische Wärme der Mischung bedeuten. Differentiiren wir die erste Gleichung nach t, so wird

$$\frac{\partial \Phi(m, t)}{\partial t} = \int_0^m \frac{\partial F(m, t)}{\partial t}\, dm$$

oder

$$\int_0^m \frac{\partial F(m, t)}{\partial t}\, dt = mc' + c - (1+m)\, C,$$

woraus

$$\frac{\partial F(m,t)}{\partial t} = c' - C - (1+m)\frac{\partial C}{\partial m} \qquad 4)$$

hervorgeht.

Hätten wir umgekehrt $1\,g$ von der Substanz B mit ng von der Substanz A gemischt, dann wäre die Mischungswärme durch

$$\Psi(n,t) = \int_0^n G(n,t)\,dn \qquad 5)$$

gegeben und es wäre wieder

$$G(n,t) = \frac{\partial \Psi(n,t)}{\partial n}; \qquad 6)$$

ferner wäre

$$\frac{\partial \Psi(n,t)}{\partial t} = c' + nc - (1+n)C',$$

wo C' die specifische Wärme der Mischung bedeutet. Verbinden wir diese Gleichung mit der Gleichung 5), so erhalten wir

$$\int_0^n \frac{\partial G(n,t)}{\partial t}\,dn = c' + nc - (1+n)C'$$

und daraus

$$\frac{\partial G(n,t)}{\partial t} = c - C' - (1+n)\frac{\partial C}{\partial n}. \qquad 7)$$

Wäre $n = \frac{1}{m}$, dann wäre

$$\Psi\left(\frac{1}{m}, t\right) = \frac{1}{m}\Phi(m,t) \qquad 8)$$

und daher

$$\int_0^m F(m,t)\,dm = m\int_0^{\frac{1}{m}} G(n,t)\,dn \qquad 8a)$$

und somit

$$F(m,t) = \int_0^{\frac{1}{m}} G(n,t)\,dn - \frac{1}{m}\,G\left(\frac{1}{m}, t\right). \qquad 9)$$

Verbinden wir diese Gleichung mit der Gleichung 8*a*), so wird

$$G\left(\frac{1}{m}, t\right) = \int_0^m F(m, t)\, dm - mF(m, t) \qquad 10)$$

oder

$$G(n, t) = \int_0^{\frac{1}{n}} F(m, t)\, dm - \frac{1}{n} F\left(\frac{1}{n}, t\right). \qquad 10a)$$

§. 2.

Wir wollen jetzt den ersten Fall der Lösung ($m > m_1$) näher untersuchen. Wir kühlen die Mischung, welche aus 1 g von der Substanz A und mg von der Substanz B besteht, von der Temperatur t_2 bis zu jener Temperatur $t_2 - \Delta$ ab, bei welcher die Substanz B eben anfängt, in festem Aggregatzustand aufzutreten, und setzen dann den Abkühlungsprocess noch bis $t_2 - \tau$ fort. Sinkt während des ersten Abschnittes die Temperatur von t_2 auf $t_2 - \Delta$, so entspricht dem eine Wärmeabfuhr von

$$(1 + m) C \Delta, \qquad a_1)$$

wo C die mittlere specifische Wärme der Mischung zwischen $t_2 - \Delta$ und t_2 bedeutet.

Während des zweiten Abschnittes werden Theile der Substanz B im festen Aggregatzustand ausgeschieden, und es besteht zwischen der Menge der erstarrten Theile und der Temperatur eine bestimmte Beziehung. Wir fassen eine Temperatur t innerhalb dieses Abschnittes ins Auge; die Menge der erstarrten Theile sei bei dieser Temperatur $= s$. Sinkt dann bei fortgesetzter Wärmeabfuhr die Temperatur um dt, dann nimmt s um ds zu, und es besteht somit die entsprechende Wärmeabfuhr aus drei Theilen, nämlich aus jener Wärme, durch deren Abfuhr die Flüssigkeit um dt abgekühlt wird, dann aus jener Wärme, durch deren Abfuhr die festen Bestandtheile s um dt abgekühlt werden, und schliesslich aus der Erstarrungswärme des Theiles ds, welche wir mit λds bezeichnen wollen.

Die Flüssigkeit enthält 1 g von der Substanz A und $m - s\, g$ von der Substanz B. Nennen wir ihre specifische Wärme C_{m-s}

und die specifische Wärme der festen Theile $\mathfrak{C}$, dann können wir die abgeleitete Wärme durch

$$(1+m-s)C_{m-s}dt+s\mathfrak{C}dt+\lambda ds$$

ausdrücken. Sinkt nun bei fortgesetzter Wärmeabfuhr die Temperatur von $t_2-\Delta$ bis $t_2-\tau$, dann hat die entzogene Wärme die Grösse

$$\int_{t_2-\tau}^{t_2-\Delta}(1+m-s)C_{m-s}dt+\int_{t_2-\tau}^{t_2-\Delta}s\mathfrak{C}dt+\int_0^S\lambda ds, \qquad a_2)$$

wo S die Menge der erstarrten Theile bei der Temperatur $t_2-\tau$ bedeutet.

Ist die Temperatur $t_2-\tau$ erreicht, dann denken wir uns die festen Theile von der Flüssigkeit getrennt und beide abgesondert auf $t_2°$ C. erwärmt. Die dazu nöthige Wärmezufuhr beträgt

$$(1+m-S)\int_{t_2-\tau}^{t_2}C_{m-S}dt+S\int_{t_2-\tau}^{t_2}\mathfrak{C}dt. \qquad z_1)$$

Hierauf denken wir uns die festen Theile bei der Temperatur t_2 geschmolzen. Dies erfordert eine Wärme von dem Betrage

$$\lambda_0 S, \qquad z_2)$$

wo λ_0 die Schmelzwärme der Substanz B bei dem normalen Schmelzpunkt t_2 bedeutet. Schliesslich denken wir uns die beiden Flüssigkeiten wieder mit einander gemischt. Dabei entwickelt sich Wärme. Wollen wir die Temperatur t_2 erhalten, dann haben wir die Wärmemenge

$$\Phi(m,t_2)-\Phi(m-S,t_2)=\int_{m-S}^{m}F(m,t_2)dm \qquad a_3)$$

zu entziehen.

Wir haben auf diese Weise einen vollständigen Kreisprocess beschrieben und wollen jetzt das Princip der Energie zur Anwendung bringen. Da die den Substanzen von aussen zugeführten Arbeiten gegen die Wärmemengen, welche ins Spiel kommen, verschwindend klein sind, so können wir sie vollständig vernachlässigen und somit die während des Processes aufgenommene Wärme gleich der abgegebenen setzen.

Zugeführt wurden die Wärmemengen z_1 und z_2, dagegen abgegeben die Wärmemengen a_1, a_2 und a_3; wir erhalten demnach die Gleichung

$$(1+m-S)\int_{t_2-\tau}^{t_2} C_{m-S}dt+S\int_{t_2-\tau}^{t_2}\mathfrak{C}dt+\lambda_0 S=(1+m)C\Delta+ \\ +\int_{t_2-\tau}^{t_2-\Delta}(1+m-s)\,C_{m-s}dt \\ +\int_{t_2-\tau}^{t_2-\Delta}s\mathfrak{C}dt+\int_0^S\lambda ds+\int_{m-S}^m F(m,t_2)dm. \qquad 11)$$

Wenn wir die Abkühlung bis $t_2-\tau-d\tau$ vornehmen, d. h. den Kreisprocess zwischen den Grenzen t_2 und $t_2-\tau-d\tau$ durchführen, dann erhalten wir bei Anwendung des Princips der Energie eine analoge Gleichung wie 11). Subtrahiren wir die beiden Gleichungen von einander, so kommen wir zu einer neuen Gleichung, welche, wie man sieht, aus 11) durch einfache Differentiation entsteht. Diese Gleichung ist

$$(1+m-S)C_{m-S}-\frac{dS}{d\tau}\int_{t_2-\tau}^{t_2}C_{m-S}dt+S\mathfrak{C}+ \\ +\frac{dS}{d\tau}\int_{t_2-\tau}^{t_2}\mathfrak{C}dt+\lambda_0\frac{dS}{d\tau} \\ =(1+m-S)C_{m-S}+S\mathfrak{C}+\lambda_S\frac{dS}{d\tau}+F(m-S,t_2)\frac{dS}{d\tau}$$

oder

$$\lambda_S=\lambda_0-\int_{t_2-\tau}^{t_2}(C_{m-S}-\mathfrak{C})dt-F(m-S,t_2). \qquad 12)$$

Hierin bedeutet λ_S die Erstarrungswärme der Substanz B, wenn dieselbe aus der Lösung, welche 1 g von der Substanz A und $m-S\,g$ von der Substanz B enthält, bei der Sättigungstemperatur $t_2-\tau$ in festem Aggregatzustande austritt, während λ_0 die Erstarrungswärme bei dem Schmelzpunkt t_2 ist.

§. 2.

Nun wollen wir auch den anderen Fall näher betrachten, dass $m < m_1$ ist. Wenn wir die Lösung von t_1 an abkühlen, so

wird sie bis zu einer Temperatur $t_1 - \Delta'$ flüssig bleiben, worauf dann bei weiterer Abkühlung Theile von A in festem Aggregatzustand aufzutreten anfangen. Wir nehmen an, dass durch die Wärmeabfuhr die Temperatur auf $t_1 - \tau$ gesunken und von der Substanz A die Menge Σ fest geworden sei. War ursprünglich die Temperatur der Flüssigkeit gleich t_2, dann haben wir zwei Abkühlungsperioden zu unterscheiden, und zwar 1. von t_2 bis $t_1 - \Delta'$ und 2. von $t_1 - \Delta'$ bis $t_1 - \tau$. Bei dem ersten Process wird eine Wärme abgeleitet, welche gleich

$$(1+m)\int_{t_1-\Delta'}^{t_2} C\,dt \qquad a_1)$$

ist. Um die bei dem zweiten Process entzogene Wärme zu finden, betrachten wir wieder eine Zwischentemperatur t. Bei derselben sei die Menge der erstarrten Theile von A gleich σ und demnach die Menge der Flüssigkeit gleich $1+m-\sigma$. Wird jetzt eine unendlich kleine Wärmemenge entzogen, dann sinkt t um dt, während eine Menge $d\sigma$ von A in festem Zustand ausgeschieden wird. Bezeichnen wir die specifische Wärme der Flüssigkeit mit C'_σ, ferner die specifische Wärme der festen Substanz A mit $\mathfrak{c}$ und die Erstarrungswärme von A mit Λ, dann ist die entzogene Wärme durch

$$(1+m-\sigma)C'_\sigma dt + \sigma \mathfrak{c}\, dt + \Lambda d\sigma$$

gegeben. Sinkt also die Temperatur von $t_1 - \Delta'$ bis $t_1 - \tau$, dann beträgt die entzogene Wärme

$$\int_{t_1-\tau}^{t_1-\Delta'} (1+m-\sigma)\, C'_\sigma dt + \int_{t_1-\tau}^{t_1-\Delta'} \sigma \mathfrak{c}\, dt + \int_0^{\Sigma} \Lambda d\sigma. \qquad a_2)$$

Nun trennen wir wieder die feste Substanz von der Flüssigkeit und erwärmen beide gesondert zunächst auf t_1. Dies erfordert eine Wärmezufuhr von der Grösse

$$(1+m-\Sigma)\int_{t_1-\tau}^{t_1} C'_\Sigma dt + \Sigma \int_{t_1-\tau}^{t_1} \mathfrak{c}\, dt. \qquad z_1)$$

Dann lassen wir die Menge Σ schmelzen, wozu wir die Wärme

$$\Sigma \Lambda_0 \qquad z_2)$$

brauchen, und erwärmen hierauf abermals beide Theile von t_1 auf t_2, indem wir die Wärme

$$(1+m-\Sigma)\int_{t_1}^{t_2} C_{\Sigma}^{t} dt + \Sigma\int_{t_1}^{t_2} c\,dt \qquad z_3)$$

zuführen. Schliesslich vereinigen wir wieder beide. Dabei müssen wir Wärme entziehen. Um diese zu finden, müssen wir erwägen, dass in der Lösung, welche die Menge $1+m-\Sigma$ enthält, die Substanz A sich zur Substanz B verhält wie $(1-\Sigma):m$ oder wie $\frac{1-\Sigma}{m}:1$. Wenn $1\,g$ von B mit $\frac{1-\Sigma}{m}\,g$ von A gemischt wird, dann entwickelt sich die Wärme

$$\Psi\left(\frac{1-\Sigma}{m}, t_2\right) = \int_0^{\frac{1-\Sigma}{m}} G(n, t_2)\,dn;$$

mischen wir also $m\,g$ von B mit $1-\Sigma\,g$ von A, dann erhalten wir die Mischungswärme

$$m\Psi\left(\frac{1-\Sigma}{m}, t_2\right) = m\int_0^{\frac{1-\Sigma}{m}} G(n, t_2)\,dn.$$

Und giessen wir dann noch Σ hinzu, dann wird das Verhältniss von A zu B gleich $1:m$, oder es kommt auf $1\,g$ von B $\frac{1}{m}\,g$ von A. Der Mischung von $1\,g$ von B mit $\frac{1}{m}\,g$ von A entspricht die Wärmeentwicklung

$$\Psi\left(\frac{1}{m}, t_2\right) = \int_0^{\frac{1}{m}} G(n, t_2)\,dn;$$

somit entspricht der Mischung von $m\,g$ von B mit $1\,g$ von A die Wärmeentwicklung

$$m\Psi\left(\frac{1}{m}, t_2\right) = m\int_0^{\frac{1}{m}} G(n, t_2)\,dn.$$

Giessen wir also zur Lösung $(1+m-\Sigma)$ noch die Menge Σ von A hinzu, dann entwickelt sich die Wärme

$$m\int_0^{\frac{1}{m}} G(n,t_2)\,dn - m\int_0^{\frac{1-\Sigma}{m}} G(n,t_2)\,dn = m\int_{\frac{1-\Sigma}{m}}^{\frac{1}{m}} G(n,t_2)\,dn. \qquad a_3)$$

Ist diese Wärme entzogen, dann ist der Kreisprocess geschlossen. Das Princip der Energie verlangt, dass die abgegebene Wärme gleich der zugeführten ist oder dass die Gleichung besteht:

$$(1+m)\int_{t_1-\Delta'}^{t_2} C\,dt + \int_{t_1-\tau}^{t_1-\Delta'} (1+m-\sigma)C'_\sigma\,dt + \int_{t_1-\tau}^{t_1-\Delta'} \sigma c\,dt +$$

$$+\int_0^{\Sigma} \Lambda\,d\sigma + m\int_{\frac{1-\Sigma}{m}}^{\frac{1}{m}} G(n,t_2)\,dn =$$

$$= (1+m-\Sigma)\int_{t_1-\tau}^{t_2} C'_\Sigma\,dt + \Sigma\int_{t_1-\tau}^{t_1} c\,dt + \Sigma\Lambda_0 + \Sigma\int_{t_1}^{t_2} c\,dt. \qquad 13)$$

Wenn wir jetzt wieder denselben Kreisprocess zwischen den Grenzen $t_1-\tau-d\tau$ und t_2 betrachten, so erhalten wir eine ganz analoge Gleichung. Ziehen wir nun von dieser neuen Gleichung die Gleichung 13) ab, dann ergibt sich ein Resultat, zu dem wir auch ohne Weiteres durch Differentiation der Gleichung 13) nach τ gelangen, nämlich

$$(1+m-\Sigma)C'_\Sigma + \Sigma c + \Lambda_\Sigma \cdot \frac{d\Sigma}{d\tau} + \frac{d\Sigma}{d\tau}\cdot G\left(\frac{1-\Sigma}{m}, t_2\right) =$$

$$= -\frac{d\Sigma}{d\tau}\int_{t_1-\tau}^{t_2} C'_\Sigma\,dt + (1+m-\Sigma)C'_\Sigma + \frac{d\Sigma}{d\tau}\int_{t_1-\tau}^{t_1} c\,dt + \Sigma c +$$

$$+ \frac{d\Sigma}{d\tau}\cdot\Lambda_0 + \frac{d\Sigma}{d\tau}\int_{t_1}^{t_2} c\,dt$$

oder

$$\Lambda_\Sigma = \Lambda_0 + \int_{t_1}^{t_2} c\,dt + \int_{t_1-\tau}^{t_1} c\,dt - \int_{t_1-\tau}^{t_2} C'_\Sigma\,dt - G\left(\frac{1-\Sigma}{m}, t_2\right). \qquad 14)$$

Hierin bedeutet Λ_Σ die Erstarrungswärme der Substanz A, wenn dieselbe aus der Lösung, welche $1-\Sigma\,g$

von der Substanz A und mg von der Substanz B enthält, bei der Erstarrungstemperatur $t_1 - \tau$ in festem Aggregatzustand austritt, während Λ_0 die Erstarrungswärme bei dem Schmelzpunkt t_1 ist.

§. 3.

Wenn wir sowohl im ersten Fall ($m > m_1$), als auch im zweiten Fall ($m < m_1$) die Abkühlung immer weiter treiben, so gelangen wir endlich zu einem Zustand, bei dem die Lösung die beiden Substanzen A und B in dem Verhältniss $1 : m_1$ enthalten wird. Da dieses Verhältniss jenem Punkte b in der Fig. 1 entspricht, in welchem die beiden Curven ab und bc sich schneiden, so ist ohne Weiteres klar, dass dann die Lösung die den Curven ab und bc zukommenden Eigenschaften vereinigen wird, d. h. dass bei weiterer Wärmeabfuhr sowohl Theile der Substanz A, als auch Theile der Substanz B in festem Aggregatzustand auftreten werden. Es entsteht nun die Frage, welche Zustände die Lösung annimmt, wenn wir die Abkühlung über b hinaus fortsetzen. Nimmt die Lösung tiefere Temperaturen an, dann können die beiden Curven ab und bc sich über b hinaus nur in einer Curve fortsetzen, weil die Lösung von b aus nur eine Reihe stabiler Zustände durchlaufen kann. In Bezug auf den Verlauf dieser Curve sind aber drei Fälle denkbar: 1. die Curve ist derart, dass das Verhältniss von B zu A abnimmt oder 2. dass dieses Verhältniss zunimmt oder 3. dass es constant bleibt.

Es ist leicht zu zeigen, dass die genannten Fälle nicht möglich sind. Stellen wir nämlich eine Lösung her, deren Zustand einem Punkte der Curve ab entspricht und bringen wir sie dann zur Unterkühlung, dann nimmt sie lauter labile Zustände an. Diese labilen Zustände sind, weil dabei das Mischungsverhältniss $m : 1$ constant bleibt und nur die Temperatur niedriger wird, durch die Punkte jener Geraden dargestellt, welche von dem Curvenpunkte aus parallel zur negativen t-Axe gezogen werden kann. Es entsprechen somit alle Punkte unterhalb der Curve ab den labilen Zuständen der Unterkühlung. Und ebenso entsprechen, wie man leicht einsieht, alle Punkte unterhalb der Curve bc den labilen Zuständen

der Übersättigung. Was schliesslich den dritten Fall anbelangt, so entsprechen demselben Zustände, welche durch die Punkte jener Geraden dargestellt sind, die von b aus parallel zur negativen t-Axe gezogen werden kann. Da aber diese Gerade die Grenze zwischen dem Gebiete der Unterkühlung und dem der Übersättigung bildet, so stellen die Punkte derselben labile Zustände sowohl der Unterkühlung als auch der Übersättigung dar. Weil nun derselbe Zustand der Lösung nicht einmal stabil und das andere Mal labil sein kann, so kann es eine Fortsetzung stabiler Zustände über b hinaus gegen die tieferen Temperaturen zu nicht geben. Kommt also die Lösung in den Zustand b, dann bleibt sie auch bei weiterer Wärmeabfuhr in diesem Zustand, während gleichzeitig feste Theile der Substanzen A und B in dem Verhältniss $1 : m_1$ ausgeschieden werden.

§. 4.

Es sollen nun die Formeln 12) und 14) an zwei Beispielen näher erläutert werden. Als erstes Beispiel wählen wir die Mischungen von Schwefelsäurehydrat H_2SO_4 und Wasser. Da das Schwefelsäurehydrat nach Pfaundler und Schnegg seinen Schmelzpunkt bei $+6\cdot 79°$ C. hat, so haben wir $t_1 = 0$ und $t_2 = 6\cdot 79$ zu setzen. Das Wasser ist die Substanz A, das Schwefelsäurehydrat die Substanz B.

Wir wollen nur jene Fälle betrachten, wo das Eis ausgeschieden wird, also Zustände, welche der Curve ab entsprechen. Für diese Fälle gilt die Formel 14), nämlich

$$\Lambda_\Sigma = \Lambda_0 + \int_0^{6\cdot 79} c\,dt + \int_{-\tau}^{0} \mathfrak{c}\,dt - \int_{-\tau}^{6\cdot 79} C'_\Sigma\,dt - G\left(\frac{1-\Sigma}{m}, 6\cdot 79\right).$$

In dieser Formel ist $\Lambda_0 = 79\cdot 24$ (Regnault), $c = 1 + 0\cdot 000307\, t$ (Baumgartner), $\mathfrak{c} = 0\cdot 505$ (Person).

J. Thomsen fand,[1] dass wenn man 1 g Schwefelsäurehydrat H_2SO_4 mit $n\,g$ Wasser mischt, die entwickelte Wärme gleich

$$\frac{n}{n + 0\cdot 3204}\, 177\cdot 1 \text{ Grammcalorien}$$

---

[1] Pogg. Ann., 90, S. 278.

ist. Es ist demnach

$$\Psi(n, t) = \int_0^n G(n, t)\,dn = \frac{n}{n + 0\cdot 3204}\,177\cdot 1$$

oder

$$G(n, t) = \frac{0\cdot 3204 \times 177\cdot 1}{(n + 0\cdot 3204)^2} = \frac{56\cdot 742}{(n + 0\cdot 3204)^2}.$$

Dabei ist zu bemerken, dass die Mischungswärme in diesem Falle sich nur äusserst wenig mit der Temperatur ändert. Ferner fanden Pfaundler und Schnegg,[1] dass, wenn die Mischung p Procent Schwefelsäurehydrat H_2SO_4 enthält, der Gefrierpunkt in folgender Weise herabgedrückt wird:

$p =$	6·45,	25·00,	32·3,	35·20
Gefrierpunkt =	—2·80°,	—21·59°,	—41·6°,	—61·7° C.

In diesen vier Mischungen kommen auf 1 g Schwefelsäurehydrat H_2SO_4 die folgenden Mengen Wasser in Gramm:

14·50, 3·00, 2·09, 1·841.

Da $\frac{1-\Sigma}{m}$ das Verhältniss angibt, in welchem die Substanz A zur Substanz B in der betrachteten Lösung steht, so ist $\frac{1-\Sigma}{m}$ in den genannten vier Fällen den zuletzt angegebenen Zahlen beziehungsweise gleich. Wir erhalten demnach für

$$G\left(\frac{1-\Sigma}{m}, 6\cdot 79\right) = \frac{56\cdot 742}{\left(\frac{1-\Sigma}{m} + 0\cdot 3204\right)^2}$$

in diesen vier Fällen die Zahlen:

0·258, 5·147, 9·766, 12·15.

Und was schliesslich die specifische Wärme C'_Σ anbelangt, so ergeben sich aus den Zahlen, welche J. Thomsen[2] gefunden hat, die folgenden Werthe:

0·946, 0·796, 0·739, 0·718.

---

[1] Sitzb. 71, 2, 1875, S. 362.

[2] Thermochemische Untersuchungen, I, S. 46.

Berechnen wir darnach die Werthe von Λ_Σ, so erhalten wir:

$$\Lambda_0 - 1\cdot 12,\quad \Lambda_0 - 10\cdot 04,\quad \Lambda_0 - 17\cdot 72,\quad \Lambda_0 - 23\cdot 37$$

oder

$$78\cdot 12,\quad 69\cdot 20,\quad 61\cdot 52,\quad 55\cdot 87.$$

Der Übersicht halber sind alle Daten in der folgenden Tabelle zusammengestellt.

Schwefelsäurehydrat in Gramm	Wasser in Gramm	Specifische Wärme	Mischungswärme	Bindungswärme	Gefrierpunkt	Erstarrungswärme
1	14·50	0·946	173·3	0·258	— 2·80	78·12
1	3·00	0·796	160·0	5·147	—21·59	69·20
1	2·09	0·739	153·6	9·766	—41·6	61·52
1	1·841	0·718	150·8	12·15	—61·7	55·87

§. 5.

Als zweites Beispiel wählen wir die Mischungen von Wasser und Äthylalkohol. Da vollkommen wasserfreier Alkohol bei $-130\cdot 5°$ erstarrt, so haben wir hier $t_1 = -130\cdot 5°$ und $t_2 = 0$ zu setzen. Der Alkohol ist jetzt die Substanz A und das Wasser die Substanz B.

Die Mischungswärme von Wasser und Äthylalkohol wurde von mehreren Physikern bestimmt, doch halte ich die Messungen des Herrn Winkelmann[1] für die sorgfältigsten und verlässlichsten und werde desshalb im Folgenden nur diese Messungen zu Grunde legen. Herr Winkelmann hat seine Messungen, ausser bei 0° C., noch bei Temperaturen vorgenommen, welche zwischen 2·4° und 5·1°, 16·9° und 19·2 und zwischen 28·8° und 30·1° C. schwanken. Wir wollen zunächst diese Messungsreihen mittelst der Formel 3) auf die einheitlichen Temperaturen 3·7°, 18·0° und 29·5° C. reduciren.

[1] Pogg. Ann., 150, S. 592, 1873.

Alkohol in Gramm	Wasser in Gramm	Mischungswärme			
		bei 0°	bei 3·7°	bei 18·0°	bei 29·5°
1	$^1/_9$	2·050	1·957	1·441	1·072
1	$^1/_4$	4·161	3·906	2·956	2·151
1	$^3/_7$	7·416	6·780	5·47	3·958
1	$^2/_3$	11·809	11·085	8·80	5·736
1	1	18·11	17·11	13·93	10·93
1	$^3/_2$	27·42	25·95	21·08	16·80
1	$^7/_3$	40·06	38·20	30·96	25·13
1	4	53·40	51·57	41·70	34·69
1	9	63·68	61·95	50·39	42·80

Mischen wir bei der Temperatur t 1 g Alkohol mit mg Wasser, dann ist die Mischungswärme durch

$$q = \int_0^m F(m, t)\, dm$$

gegeben, und mischen wir ein zweites Mal bei derselben Temperatur 1 g Alkohol mit einer grösseren Menge M Wasser, dann ist die Mischungswärme durch

$$Q = \int_0^M F(m, t)\, dm$$

gegeben. Giessen wir also zu der ersten Mischung die Wassermenge $M—m$ hiezu, dann erzeugt die Verdünnung eine Wärme gleich

$$Q—q = \int_m^M F(m, t)\, dm.$$

Aus dieser Gleichung ergibt sich der mittlere Werth der Bindungswärme $F(m, t)$ zwischen m und M in der Form

$$\frac{Q—q}{M—m}.$$

Wir wollen nun diesen mittleren Werth von F aus der früheren Tabelle zwischen den Grenzen 0 und $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{9}$ und $\frac{1}{4}$,

$\frac{1}{4}$ und $\frac{3}{7}$, $\frac{3}{7}$ und $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{3}$ und 1, 1 und $\frac{3}{2}$, $\frac{3}{2}$ und $\frac{7}{3}$, $\frac{7}{3}$ und 4, 4 und 9 berechnen. Die folgende Tabelle enthält die Resultate.

Zunahme des Wassergehaltes in Gramm	Mittlere Bindungswärme			
	bei 0°	bei 3·7°	bei 180°	bei 29·5°
von 0 bis 1/9	18·450	17·613	12·969	9·648
» 1/9 » 1/4	15·199	14·033	10·908	7·769
» 1/4 » 3/7	18·228	16·094	14·084	10·119
» 3/7 » 2/3	18·451	18·081	13·980	7·468
» 2/3 » 1	18·903	18·075	15·390	15·582
» 1 » 3/2	18·62	17·680	14·300	11·740
» 3/2 » 7/3	15·17	14·70	11·356	9·996
» 7/3 » 4	8·004	8·022	6·444	5·736
» 4 » 9	2·056	2·076	1·738	1·622

Während bei den Mischungen von Schwefelsäurehydrat und Wasser die Bindungswärme $G(n, t)$ mit wachsendem n stetig abnimmt, zeigt hier die Bindungswärme ein ganz anderes Verhalten. Wir ersehen nämlich aus der letzten Tabelle, dass die Bindungswärme bei 0° C. von $m = 0$ bis $m = \frac{3}{2}$ um den Werth 18·28 schwankt und dass die Abweichung von diesem Werthe im Mittel nur 0·74 beträgt. Von $m = \frac{3}{2}$ bis $m = 9$ nimmt die Bindungswärme beständig ab.

Bei 3·7° schwankt die Bindungswärme in dem Intervall von $m = 0$ bis $m = \frac{3}{2}$ um den Werth 17·30, wobei die mittlere Abweichung gleich 1·12 ist, und nimmt dann von $m = \frac{3}{2}$ bis $m = 9$ wieder beständig ab.

Bei 18·0° schwankt die Bindungswärme in dem Intervall von $m = 0$ bis $m = \frac{3}{2}$ um den Werth 14·05 bei einer mittleren Abweichung von 0·98 und nimmt hierauf wieder beständig ab.

Bei 29·5° schwankt die Bindungswärme in dem Intervall von $m = 0$ bis $m = \frac{3}{2}$ um den Werth 11·20 bei einer mittleren Abweichung von 2·45, um dann wieder abzunehmen.

Noch merkwürdiger gestalten sich die Zahlenverhältnisse, wenn wir 1 *g* Wasser mit *ng* Alkohol mischen. War früher die Mischung in der Weise durchgeführt worden, dass einem Gramm Alkohol nach und nach Wasser zugegossen wurde, so wollen wir jetzt die Mischung so vornehmen, dass wir einem Gramm Wasser nach und nach Alkohol zusetzen. Die Mischungswärmen sind sehr leicht aus der ersten Tabelle zu berechnen.

Wasser in Gramm	Alkohol in Gramm	Mischungswärme			
		bei 0°	bei 3·7°	bei 18·0°	bei 29·5°
1	1/9	7·076	6·883	5·599	4·755
1	1/4	13·35	12·89	10·43	8·67
1	3/7	17·17	16·37	13·27	10·77
1	2/3	18·28	17·30	14·05	11·20
1	1	18·11	17·11	13·93	10·93
1	3/2	17·71	16·63	13·20	8·60
1	7/3	17·30	15·82	12·76	9·24
1	4	16·64	15·62	11·82	8·60
1	9	18·45	17·61	12·97	9·65

Aus diesen Zahlen ersehen wir schon unmittelbar, dass wenn wir einem Gramm Wasser nach und nach Alkohol zusetzen, die Mischungswärme bis zu dem Alkoholgehalte $\frac{2}{3}$ immer zunimmt; von da an nimmt sie aber wieder ab, um erst von dem Gehalte 4 an wieder anzusteigen. Noch anschaulicher wird das Verhalten durch die Bindungswärme.

Ist die Mischungswärme für die Alkoholmengen N und n beziehungsweise durch

$$Q' = \int_0^N G(n,t)\,dn, \qquad q' = \int_0^n G(n,t)\,dn$$

gegeben, dann ist die Wärme, welche erzeugt wird, wenn wir zu der Mischung, die *ng* Alkohol enthält, noch $N-ng$ Alkohol hinzugiessen, gleich

$$Q'-q' = \int_n^N G(n,t)dn$$

und demnach der mittlere Werth der Bindungswärme $G(n,t)$ zwischen n und N gleich

$$\frac{Q'-q'}{N-n}.$$

Wir wollen nun aus den Zahlen der letzten Tabelle diese mittlere Bindungswärme zwischen 0 und $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{9}$ und $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}$ und $\frac{3}{7}$, $\frac{3}{7}$ und $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{3}$ und 1, 1 und $\frac{3}{2}$, $\frac{3}{2}$ und $\frac{7}{3}$, $\frac{7}{3}$ und 4, 4 und 9 berechnen und die Werthe in der folgenden Tabelle zusammenstellen.

Zunahme des Alkoholgehaltes in Gramm	mittlere Bindungswärme			
	bei 0°	bei 3·7°	bei 18·0°	bei 29·5°
von 0 bis $^1/_9$	+63·68	+61·95	+50·39	+42·80
» $^1/_9$ » $^1/_4$	+45·17	+43·27	+34·75	+28·20
» $^1/_4$ » $^3/_7$	+21·39	+19·48	+15·93	+11·75
» $^3/_7$ » $^2/_3$	+ 4·66	+ 3·90	+ 3·29	+ 1·81
» $^2/_3$ » 1	− 0·51	− 0·57	− 0·37	− 0·81
» 1 » $^3/_2$	− 0·80	− 0·96	− 1·46	− 4·65
» $^3/_2$ » $^7/_3$	− 0·49	− 0·97	− 0·53	+ 0·76
» $^7/_3$ » 4	− 0·40	− 0·12	− 0·56	− 0·38
» 4 » 9	+ 0·36	+ 0·40	+ 0·23	+ 0·21

Wenn wir also einem Gramm Wasser nach und nach Alkohol zusetzen, so nimmt die Bindungswärme von $n = 0$ bis $n = \frac{2}{3}$ stetig ab und wird in der Nähe von $n = \frac{2}{3}$ gleich Null. Giessen wir dann noch weiter Alkohol dazu, dann wird die Bindungswärme sogar negativ. Fand also früher eine Bindung statt, so wird jetzt der fernere Zusatz von Alkohol eine kleine Lockerung bewirken. Erst von $n = 4$ bis $n = 9$ ist $G(n,t)$ wieder positiv. (Bei der Temperatur 29·5° findet sogar ein zweimaliger Zeichenwechsel statt.)

Da die Werthe, welche $G(n,t)$ annimmt, wenn $n = \frac{2}{3}$ überschritten wird, durchwegs sehr klein sind, so können wir daraus schliessen, dass, wenn der Alkoholgehalt $\frac{2}{3}$ über-

schritten wird, die Wirkung der zwischen dem Wasser und dem Alkohol thätigen Kräfte unbedeutend ist. Ferner ist der Umstand ganz besonders hervorzuheben, dass das Grenzverhältniss Alkohol : Wasser $= 2:3$ oder Wasser : Alkohol $= 3:2$ früher jene Grenze war, innerhalb welcher die Bindungswärme $F(m, t)$ um einen bestimmten Werth schwankte.

Der Umstand, dass die Bindungswärme in dem Intervall von $n = \frac{2}{3}$ bis $n = 1$ gleich Null wird, erinnert an die Thatsache, dass die Contraction der Mischung bei dem Verhältniss Alkohol : Wasser $= 46:54$ als ein Maximum gefunden wurde. Da dieses Maximum bei verschiedenen Temperaturen bei demselben Mengenverhältniss auftritt und dieses Mengenverhältniss der Formel $C_2H_6O + H_2O$ entspricht, so hat man daraus den Schluss gezogen, dass die Contraction durch die Bildung einer Verbindung nach festen Verhältnissen innerhalb der Mischung bedingt wird. Diese Ansicht wird also durch das Verhalten der Bindungswärme bestätigt.

Eine fernere Bestätigung erhält die ausgesprochene Ansicht durch das Verhalten der specifischen Wärme der Mischungen.

Gewicht des Alkohols in Gramm	Gewicht des Wassers in Gramm	Specifische Wärme der Mischung bei 0° C.	Mittlere specifische Wärme der Bestandtheile bei 0° C.	Differenz beider	Specifische Wärme der Mischung berechnet	Differenz gegen die Beobachtung
1	0	0·57321	0·57321	±0	0·57321	±0
1	$^1/_9$	0·6448	0·6159	+0·0289	0·6437	−0·0011
1	$^1/_4$	0·7116	0·6586	+0·0530	0·7133	+0·0017
1	$^3/_7$	0·7813	0·7012	+0·0801	0·7816	+0·0003
1	$^2/_3$	0·8446	0·7439	+0·1007	0·8481	+0·0035
1	1	0·9061	0·7866	+0·1195	0·9117	+0·0056
1	$^3/_2$	0·9726	0·8293	+0·1433	0·9700	−0·0026
1	$^7/_3$	1·0106	0·8720	+0·1386	1·0153	+0·0047
1	4	1·0401	0·9146	+0·1255	1·0346	−0·0055
1	9	1·0268	0·9573	+0·0695	1·0276	+0·0008
1	∞	1	1	±0	1	±0

Die Werthe für die specifische Wärme der Mischung bei 0° C. sind von H. Winkelmann bestimmt worden. Dieselben sind, wie wir sehen, immer grösser als die Werthe der mittleren specifischen Wärme der Bestandtheile und die Differenz beider erreicht in der Nähe des Mischungsverhältnisses Alkohol : Wasser $= 2:3$ ein Maximum. Die Berechnung der specifischen Wärme der Mischungen oberhalb des Striches geschah nach der Formel

$$C = \frac{0\cdot 57321+m}{1+m} + \frac{0\cdot 2816\,m - 0\cdot 03139\,m^2}{1+m},$$

dagegen unterhalb des Striches nach der Formel

$$C = \frac{0\cdot 57321+m}{1+m} + 0\cdot 1840 \times 10^{-0\cdot 04644\,m}$$

Hiebei ist das Intervall zwischen $m = \frac{3}{2}$ und $m = \frac{7}{3}$ für beide Formeln ausgenommen. Die erste Formel kann so gedeutet werden, dass die Bestandtheile bei der Mischung eine grössere specifische Wärme erhalten.

Schliesslich wollen wir noch eine empirische Formel für die Bindungswärme $G(n, o)$ zwischen $n = 0$ und $n = \frac{2}{3}$ aufstellen. Mischen wir bei 0° C. 1 g Wasser mit $n\,g$ Alkohol, dann ist die entwickelte Wärme durch

$$q' = \int_0^n G(n, o)\,dn$$

gegeben. Da für

$$n = 0,\ \frac{1}{9},\ \frac{1}{4},\ \frac{3}{7},\ \frac{2}{3}$$

$$q' = 0,\ 7\cdot 076,\ 13\cdot 35,\ 17\cdot 17,\ 18\cdot 28$$

ist, so können wir die dazwischen liegenden Werthe durch die empirische Formel

$$q' = \int_0^n G(n, o)\,dn = 70\cdot 675\,n - 55\cdot 2564\,n^2 - 79\cdot 900\,n^3 + 98\cdot 0\,n^4 \qquad 19)$$

wiedergeben und erhalten daraus durch Differentiation

$$G(n, o) = 70\cdot675 - 110\cdot5128n - 239\cdot7n^2 + 392n^3. \quad 20)$$

Für $n = 0, \frac{1}{9}, \frac{1}{4}, \frac{3}{7}, \frac{2}{3}$ ist

$$G(n, o) = 70\cdot675,\ 55\cdot975,\ 34\cdot191,\ 10\cdot143,\ 6\cdot615.$$

Der letzte Werth 6·615 entspricht nicht mehr ganz den Thatsachen, denn die Function G hat, insofern sie durch die letzte Formel ausgedrückt ist, bei $n = 0\cdot57195$ ein Minimum; von da an wächst sie ins Unendliche. Es kann also die empirische Formel nur zwischen $n = 0$ und $n = 0\cdot57195$ zur Anwendung kommen. Für $n = 0\cdot57195$ erhält $G(n, o)$ den Werth 2·400.

Nach diesen Vorbereitungen sind wir nun im Stande, die Erstarrungswärme des Wassers in den Wasser-Alkoholmischungen zu berechnen. Rosetti[1] hat gefunden, dass wenn a g Alkohol in 100 g Mischung enthalten sind, der Gefrierpunkt in der folgenden Weise herabgedrückt wird:

a	= 0·0,	5·85,	7·80,	9·75,	14·62,	19·50
Gefrierpunkt =	0°,	—2·63,	—3.54,	—4·45,	—7·47,	—12·10.

Für diejenigen Mischungen, welche weniger als 10 Procent Alkohol enthalten, steht die Gefrierpunktserniedrigung im geraden Verhältniss zu der Menge des Alkohols, und zwar beträgt die Erniedrigung für jedes in 100 Gramm der Mischung enthaltene Gramm Alkohol 0·45°. Wenn wir hier die Ausdrücke »Gefrierpunkt« und »Gefrierpunktserniedrigung« gebrauchen, so stehen wir eigentlich nicht in Übereinstimmung mit dem, was wir früher gesagt haben, denn da der Erstarrungspunkt des Alkohols tiefer als der des Wassers liegt, so haben wir correcterweise die Mischungen von Alkohol und Wasser unterhalb 0° C. als »Lösungen von Eis in Alkohol« zu bezeichnen und statt Gefrierpunkt »Sättigungspunkt« zu sagen.

Für die Erstarrungswärme in den genannten Fällen gilt die Formel 12), in welcher $m - S$ die Wassermenge in g angibt,

---

[1] Pogg. Ann., 140, S. 329.

die mit 1 g Alkohol gemischt ist. Wir haben demnach zunächst anzugeben, wie viel Gramm Wasser in den oben genannten Fällen auf 1 g Alkohol kommen. Diese Mengen sind

$$\infty,\ 16\cdot095,\ 11\cdot82,\ 9\cdot257,\ 5\cdot840,\ 4\cdot128.$$

Die zugehörigen specifischen Wärmen für 0° C. sind:

$$1,\ 1\cdot0080,\ 1\cdot0187,\ 1\cdot0252,\ 1\cdot0361,\ 1\cdot0386.$$

Dieselben sind in der Formel mit C_{m-S} bezeichnet. Da $t_2 = o$, $\lambda_0 = 79\cdot24$ und $\mathfrak{C} = 0\cdot505$ ist, so bleibt nur noch das Glied $F(m-S, o)$ zu bestimmen übrig. Nach der Gleichung 9) ist

$$F(m-S, o) = \int_0^{\frac{1}{m-S}} G(n, o)dn - \frac{1}{m-S} G\left(\frac{1}{m-S}, 0\right).$$

In den beobachteten Fällen liegt $\frac{1}{m-S}$ zwischen 0 und $\frac{1}{4\cdot128}$; wir können also die empirischen Formeln 19) und 20) anwenden und erhalten

$$F(m-S, o) = \frac{1}{(m-S)^2}\left(55\cdot2564 + \frac{159\cdot8}{m-S} - \frac{294}{(m-S)^2}\right)$$

oder für

$m-S =$	∞,	16·095,	11·82,	9·257,	5·840,	4·128
$F(m-S, o) =$	0,	0·247,	0·477,	0·806,	2·170,	4·501.

Somit ergibt sich

$$\lambda_S = 79\cdot24,\ 77\cdot670,\ 76\cdot945,\ 76\cdot119,\ 73\cdot103,\ 68\cdot282.$$

Diesen Werthen wollen wir noch einen Werth hinzufügen, den wir aus einer Beobachtung von Bussy[1] ableiten werden. Bussy fand, dass eine Alkoholmischung, welche ungefähr 25 p. C. Wasser enthielt, bei einer Temperatur von ungefähr —68° C. zum Gefrieren gebracht wurde. In dieser Mischung kam also auf 1 g Alkohol $\frac{1}{3}$ g Wasser; demnach war die

[1] Pogg. Ann., 1, S. 239.

specifische Wärme der Mischung nach der ersten der beiden empirischen Formeln gleich 0·7477 und ist ferner $F\left(\frac{1}{3}, o\right)$ nach der auf Seite 262 gegebenen Tabelle gleich 18·228. Wir erhalten also in diesem Falle

$$\lambda_S = 44 \cdot 508.$$

Zur besseren Übersicht wollen wir wieder die Resultate in einer Tabelle zusammenstellen.

Alkohol in Gramm	Wasser in Gramm	Specifische Wärme	Mischungswärme	Bindungswärme	Gefrierpunkt	Erstarrungswärme
1	∞	1	70·675	0	0° C.	79·24
1	16·095	1·0080	66·957	0·247	— 2·63°	77·670
1	11·82	1·0187	65·487	0·477	— 3·54	76·945
1	9·257	1·0252	63·897	0·806	— 4·45	76·119
1	5·840	1·0361	59·362	2·170	— 7·47	73·103
1	4·128	1·0386	53·993	4·501	—12·10	68·282
1	$^1/_3$	0·7477	5·680	18·228	—68	44·508

Die ersten sechs Werthe der Mischungswärme für 0° C. wurden dadurch erhalten, dass die Gleichung 8a) mit der empirischen Formel 19) zu der Gleichung

$$\int_0^{m-S} F(m,o)\, dm = 70 \cdot 675 - \frac{55 \cdot 2564}{m-S} - \frac{79 \cdot 9}{(m-S)^2} + \frac{98}{(m-S)^3}$$

vereinigt wurde, während der letzte Werth 5·680 sich durch Interpolation aus den Zahlen der Tabelle auf Seite 259 ergab.

SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

CIV. BAND. IV. HEFT.

ABTHEILUNG II. a.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE, PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.



X. SITZUNG VOM 4. APRIL 1895.

Die Nomenclatur-Commission der Anatomischen Gesellschaft in Würzburg übermittelt ein Exemplar der von ihr vereinbarten »Nomina anatomica« und spricht den Dank aus für die diesem Unternehmen von Seite der kaiserl. Akademie zu Theil gewordene Unterstützung.

Das w. M. Herr Hofrath L. Schmarda übersendet eine Abhandlung von Dr. Alfred Nalepa, k. k. Gymnasialprofessor in Wien, betitelt: »Beiträge zur Kenntniss der Gattung *Phytoptus* Duj. und *Monaulax* Nal.«

Das w. M. Herr Prof. H. Weidel übersendet eine in seinem Laboratorium ausgeführte Arbeit von Dr. J. Herzig, betitelt: »Studien über Quercetin und seine Derivate« (XI. Abhandlung).

Das c. M. Herr Prof. Franz Exner übersendet eine Arbeit aus dem physikalischen Institute der k. k. Universität in Wien von Dr. Egon R. v. Schweidler: »Über die innere Reibung und elektrische Leitungsfähigkeit von Quecksilber und einigen Amalgamen«.

Das c. M. Herr Prof. Zd. H. Skraup übersendet folgende zwei im chemischen Institute der k. k. Universität in Graz ausgeführte Untersuchungen:

1. »Einige Derivate der Galaktonsäure«, von Emil Kohn.
2. »Über Hydrirungsversuche mit Cinchonin«, von Dr. Fr. Konek v. Norwall.

Prof. Dr. R. v. Wettstein übersendet eine im botanischen Institute der k. k. deutschen Universität in Prag ausgeführte Untersuchung des Herrn Dr. Jos. Rompel, betitelt: »Krystalle von Calciumoxalat in der Fruchtwand der Umbelliferen und ihre Verwerthung für die Systematik«.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. Ad. Lieben überreicht eine Abhandlung aus dem chemischen Laboratorium der k. k. Hochschule für Bodencultur in Wien von B. Welbel und S. Zeisel: »Über die Condensation von Furfurol mit Phloroglucin und eine auf diese gegründete Methode der quantitativen Bestimmung des Furfurols in Pentosen und Pentosanen« (I. Mittheilung).

Das w. M. Hofrath Director J. Hann überreicht eine Abhandlung unter dem Titel: »Die Verhältnisse der Luftfeuchtigkeit auf dem Sonnblickgipfel«.

Ferner legt Hofrath Hann eine Abhandlung von Dr. Fritz v. Kerner in Wien vor, betitelt: »Eine paläoklimatische Studie«.

Herr Dr. Carl Diener, Privatdocent an der k. k. Universität in Wien, überreicht eine Abhandlung: »Ergebnisse einer geologischen Expedition in den Central-Himalaya von Johár, Hundés und Painkhánda«.

Über die innere Reibung und elektrische Leitungsfähigkeit von Quecksilber und einigen Amalgamen

von

Dr. **Egon R. v. Schweidler.**

Aus dem physikalisch-chemischen Institute der k. k. Universität in Wien.

Während Poiseuille das nach ihm benannte Gesetz über den Ausfluss von Flüssigkeiten durch capillare Röhren bei Quecksilber nicht bestätigt fand, liegt jetzt eine Reihe von experimentellen Untersuchungen vor, die zwar in Bezug auf den absoluten Werth des inneren Reibungscoëfficienten theilweise nicht übereinstimmen, aber die Giltigkeit des Poiseuille'schen Gesetzes auch für diese Flüssigkeit ausser Zweifel setzen.

Warburg [Pogg. Ann., 140 (1870)] wies zuerst nach, dass bei Quecksilber keine Gleitung stattfindet, vollkommene Reinheit dieser Substanz, sowie des Capillarrohres vorausgesetzt. Er fand für die Temperatur von 17·0° C. den Coëfficienten der inneren Reibung:

$$\eta_{17} = 0\cdot01602 \frac{g}{cm\,.\,\mathrm{sec}}.$$

F. Villari (Referat: Beibl., I, S. 57) findet für η nahezu den doppelten Werth, allerdings bei starken Abweichungen unter seinen eigenen Resultaten.

S. Koch [Wied. Ann., 14 (1881)] untersucht die Abhängigkeit des inneren Reibungscoëfficienten des Quecksilbers von

der Temperatur im Intervalle von —20° bis +340° C. und erhält die Formel:

$$\eta_t = \eta_0(1+\alpha t+\beta t^2+\gamma t^3),$$

wobei die Constanten folgende Werthe haben:

$$\eta_0 = 0\cdot016969 \frac{g}{cm.\sec}$$
$$\alpha = -0\cdot0038926$$
$$\beta = +0\cdot0000123$$
$$\gamma = -0\cdot0000000144$$

Die Werthe von Warburg und Koch stimmen gut überein; ebenso findet Th. Schmidt (Wied. Ann. 16) nach der Methode der schwingenden Scheiben den nicht sehr abweichenden Werth: $\eta_{17} = 0\cdot01543$.

Emo (Referat: Beibl., 6, S. 730) erhält durchgängig grössere Werthe ($\eta_0 = 0\cdot0224$), aber dieselbe Beziehung zur Temperatur wie Koch.

Da bisher über die innere Reibung von Amalgamen keine Versuche gemacht sind, wandte ich die Methode des Ausflusses durch Capillaren auch auf einige, natürlich nur dünnflüssige Amalgame an.

Während verschiedene Versuchsreihen für reines Quecksilber übereinstimmende Resultate gaben, war die Untersuchung der Amalgame mit vielen Schwierigkeiten verbunden, so dass viele Beobachtungsresultate als zu unsicher ausgeschieden werden mussten. Theils oxydirten die Amalgame und verunreinigten so die Capillare, theils waren sie nicht längere Zeit homogen zu erhalten, so besonders die Zinnamalgame.

Nach verschiedenen Vorversuchen wurde folgende Versuchsanordnung gewählt:

In einem Wasserbade stand eine verticale Capillare, deren unteres Ende in ein wasserdicht verschlossenes Gefäss ragte, welches zur Hälfte mit der zu untersuchenden Flüssigkeit gefüllt war und durch einen Schlauch mit der äusseren Luft in Verbindung stand.

Am oberen Ende der Capillare befanden sich übereinander zwei Kugeln, in die das Quecksilber, respective Amalgam,

mittelst einer Wasserstrahlpumpe aufgesogen wurde; die Ausflusszeit für die untere (grössere) Kugel wurde gemessen, und zwar diente hiezu eine Uhr, welche $^1/_4$ Secunden zeigte und eine Arretirvorrichtung besass.

Die Capillare wurde nach jeder Versuchsreihe durch Hindurchsaugen von verdünnter Salpetersäure, Wasser, Alkohol, Schwefeläther und trockener Luft gereinigt und getrocknet. Das verwendete »käuflich reine« Quecksilber wurde vor den Versuchen mit Schwefeläther (um eventuelle fettige Beimengungen zu entfernen) und mit verdünnter Salpetersäure geschüttelt, dann ausgewaschen, getrocknet und wiederholt durch Schreibpapier filtrirt.

Die Amalgame, welche alle geringe Concentration besassen ($^1/_2$—$3^0/_0$), wurden entweder durch directe Lösung des Metalles in Quecksilber oder auf elektrolytischem Wege hergestellt.

Einige derselben mussten, da sie an freier Luft zu rasch oxydirten, mit einer dünnen Schichte angesäuerten Wassers bedeckt werden; durch Versuche an reinem Quecksilber überzeugte ich mich davon, dass hiebei keine Änderung der Ausflusszeit eintrat, also keine Feuchtigkeit in die Capillare gelangte.

Da der Ausfluss unter dem eigenen Drucke der Flüssigkeit erfolgte, war die Druckhöhe variabel; führt man aber in die Rechnung die mittlere Druckhöhe (den Verticalabstand des Mittelpunktes der Ausflusskugel vom unteren Niveau) als constante Grösse ein, so ist der dadurch gemachte Fehler vollkommen zu vernachlässigen, wie folgende Rechnung zeigt:

Es sei ρ die Dichte, η der Reibungscoëfficient der Flüssigkeit, l die Länge, q der Querschnitt der Capillare, V das Volum, R der Radius der Ausflusskugel, τ die Ausflusszeit, h die Druckhöhe, welche von h_0+R bis h_0-R variirt, wenn h_0 die oben erwähnte mittlere Druckhöhe ist.

Nach der Poiseuille'schen Formel ist für ein Zeitelement dt das ausfliessende Volum dV bestimmt durch:

$$dV = \frac{\rho g q^2}{8\pi\eta l} h\,dt,$$

anderseits ist:

$$dV = -r^2\pi dh$$
$$= [(h-h_0)^2-R^2]\pi dh,$$

wenn $r^2\pi$ der jeweilige Querschnitt am oberen Niveau, $-dh$ die Senkung desselben ist.

Also

$$[(h-h_0)^2-R^2]\frac{dh}{h} = \frac{\rho g q^2}{8\pi^2\eta l}dt = Kdt$$

$$\int_{h_0+R}^{h_0-R}[(h-h_0)^2-R^2]\frac{dh}{h} = K\int_0^\tau dt = K\tau$$

oder

$$\tau = \frac{1}{K}\left[2h_0R+(h_0^2-R^2)\log\text{nat}\frac{h_0-R}{h_0+R}\right].$$

Bei constanter Druckhöhe h_0 hätte die Ausflusszeit den Werth τ' gehabt, wobei

$$\tau' = \frac{1}{K}\cdot\frac{4R^3}{3h_0}.$$

Wenn nun $h_0 = 10R$ ist, so ergibt die Rechnung, dass τ um circa $0\cdot3^0/_0$ grösser als τ' ist, also würde auch η um diesen Betrag zu gross gefunden, wenn man die zweite einfachere Formel benützt. Bei meinem Apparate war $h_0 = 40R$ und daher der Fehler kleiner als $0\cdot1^0/_0$, also zu vernachlässigen.

Die in Betracht kommenden Grössen seien beispielsweise für die eine der Versuchsreihen angeführt:

$l = 42\cdot25\,cm$, $q = 0\cdot001240\,cm^2$, $V = 4\cdot668\,cm^3$, $h_0 = 41\cdot75\,cm$;

τ variirte bei den Temperaturen von 0° bis 40° C. von 97·5 bis 86·5 Sec. Bei den anderen Versuchsreihen waren die Verhältnisse ziemlich die gleichen.

Unter Hinweglassung der unsicheren Resultate führe ich folgende Messungen an:

I. Reines Quecksilber.

$$\eta_0 = 0\cdot01684\,\frac{g}{cm.\sec} \quad (\text{Koch: } 0\cdot01697)$$
$$\eta_{13\cdot5} = 0\cdot01609$$
$$\eta_{20\cdot0} = \begin{Bmatrix} 0\cdot01579 \\ 1597 \end{Bmatrix} \text{ in zwei verschiedenen Capillaren}$$
$$\eta_{40\cdot0} = 0\cdot001483.$$

Drückt man die Beziehung zur Temperatur durch eine Gleichung zweiten Grades aus:

$$\eta_t = \eta_0(1+\alpha t+\beta t^2),$$

so erhält man für

$$\alpha = -0\cdot 00325$$
$$\beta = +0\cdot 0000066$$

Die absoluten Werthe von η stimmen mit denen Koch's bei circa 13° vollkommen überein, bei höheren Temperaturen tritt eine Abweichung ein, so dass nach meinen Messungen α um circa 20% kleiner ist als bei Koch. Möglicherweise beruht diese Nichtübereinstimmung darauf, dass Koch gerade im Intervall von 18° bis 99° C. keine directen Beobachtungen anstellte.

II. Cadmiumamalgam *A* (98 Hg+2 Cd).

$$\eta_{14\cdot 5} = 0\cdot 01679$$
$$\eta_{20\cdot 0} = 0\cdot 01652$$
$$\eta_{40\cdot 0} = 0\cdot 01551$$
$$\alpha = -0\cdot 00364, \qquad \beta = +0\cdot 0000131$$

III. Cadmiumamalgam *B* (97·2 Hg+2·8 Cd).

$$\eta_{12} = 0\cdot 01736$$
$$\eta_{20} = 0\cdot 01691$$
$$\eta_{40} = 0\cdot 01594$$
$$\alpha = -0\cdot 00360, \qquad \beta = +0\cdot 0000153$$

IV. Bleiamalgam *A* (99 Hg+1 Pb).

$$\eta_{13} = 0\cdot 01664$$
$$\eta_{20} = 0\cdot 01627$$
$$\eta_{30} = 0\cdot 01586$$
$$\eta_{48} = 0\cdot 01511$$
$$\alpha = -0\cdot 00365, \qquad \beta = +0\cdot 0000187$$

V. Bleiamalgam *B* (98·5 Hg+1·5 Pb).

$$\eta_{20} = 0\cdot 01656$$
$$\eta_{40} = 0\cdot 01539$$

VI. Bleiamalgam *C* (99·5 Hg+0·5 Pb).

$$\eta_{12\cdot5} = 0\cdot01650$$
$$\eta_{20} = 0\cdot01605$$

VII. Bei Zinnamalgamen trat der bereits erwähnte Übelstand ein, dass sie nicht homogen blieben; nach einiger Zeit schied sich immer ein Amalgam grösserer Concentration als breiartige Masse aus, so dass die Ausflusszeiten sehr ungleichmässig waren, je nachdem diese dickflüssige Masse oder der dünnflüssige Rest die Capillare durchströmten. Für ein 1% Zinnamalgam (99 Hg + 1 Sn) ist annähernd

$$\eta_{20} = 0\cdot01643,$$

nach einer anderen Messung = 0·01658.

VIII. Zinkamalgam (99·4 Hg+0·6 Zn).

$$\eta_{13} = 0\cdot01672$$
$$\eta_{20} = 0\cdot01639$$
$$\eta_{40} = 0\cdot01547 \text{ (unsicher)}$$

$$\alpha = -0\cdot00300, \qquad \beta = +0\cdot0000059.$$

Der Coëfficient α wäre hier im Gegensatz zu den andern Amalgamen kleiner als bei reinem Quecksilber. Dasselbe zeigt sich beim folgenden Amalgam.

IX. Kupferamalgam (99·5 Hg+0·5 Cu).

$$\eta_{10} = 0\cdot01671$$
$$\eta_{20} = 0\cdot01620$$
$$\eta_{40} = 0\cdot01520$$

$$\alpha = -0\cdot00302, \qquad \beta = +0\cdot0000025$$

Eine Zusammenstellung von η_{20}, α, β gibt folgende Tabelle:

Substanz	η_{20}	α	β
Hg	0·01579	—0·00325	+0·0000066
Cd (2%)	0·01652	—0·00364	+0·0000131
Cd (2·8%)	0·01691	—0·00360	+0·0000153
Pb (1%)	0·01627	—0·00365	+0·0000187
Zn (0·6%)	0·01639	—0·00300	+0·0000059
Cu (0·5%)	0·01620	—0·00302	+0·0000025

Die Ergebnisse dieser Untersuchung zusammenfassend kann man sagen, dass der Coëfficient der inneren Reibung bei Amalgamen durchwegs grösser ist als bei reinem Quecksilber, wie es ja auch von vornherein zu erwarten ist.

Die Beziehung zur Temperatur ist wie bei allen Flüssigkeiten derart, dass η mit wachsender Temperatur erst rascher, dann langsamer abnimmt.

Dass der Coëfficient α bei Amalgamen im Allgemeinen grösser ist wie bei Quecksilber, stimmt mit der Thatsache überein, dass auch bei anderen Flüssigkeiten α umso grösser ist, je näher das untersuchte Temperaturintervall dem Erstarrungspunkte der Flüssigkeit liegt.

Blos bei sehr verdünnten Amalgamen (VIII. und IX.) scheint eine Ausnahme stattzufinden, indem hier α kleiner ist als bei Quecksilber.

Im Anschlusse an diese Untersuchung nahm ich bei einigen Amalgamen eine Messung der elektrischen Leitfähigkeit, sowie deren Veränderung mit der Temperatur vor.

Eine in einem Wasserbade befindliche, mit Amalgam gefüllte Capillare wurde mit einer Smee'schen Batterie von sechs Elementen, einem Siemens'schen Universalwiderstandskasten und einem empfindlichen Galvanometer nach dem Schema der Wheatstone'schen Brücke verbunden und so der Widerstand der Amalgamsäule bei verschiedenen Temperaturen bestimmt.

Um die Änderung des Widerstandes mit der Temperatur darzustellen, genügt für das untersuchte Intervall (circa 8° bis 45° C.) eine lineare Formel:

$$w_t = w_0(1+\alpha t).$$

α wurde aus den extremsten Werthen berechnet, dann für die mittleren Temperaturen der daraus abgeleitete Werth mit dem wirklich beobachteten verglichen; die Abweichung derselben betrug im Maximum 0·15%, w_0 ist im Folgenden auf reines Quecksilber als Einheit bezogen.

Reines Quecksilber:

$$w_0 = 1$$
$$\alpha = +0\cdot000928$$

Die von anderen Beobachtern gefundenen Werthe für α schwanken zwischen 0·00087 und 0·00095 je nach der Grösse und Lage des Temperaturintervalles und je nachdem eine lineare oder quadratische Formel zu Grunde gelegt war.

Cadmiumamalgam (2·8%, v. III).

$$w_0 = 0\cdot8294 \qquad \alpha = 0\cdot000873$$

Zinkamalgam (0·6%, v. VIII).

$$w_0 = 0\cdot9308 \qquad \alpha = 0\cdot000950$$

Zinnamalgam (1%, v. VII).

$$w_0 = 0\cdot9559 \qquad \alpha = 0\cdot000901$$

Bleiamalgam (1%, v. IV).

$$w_0 = 0\cdot9666 \qquad \alpha = 0\cdot000854.$$

Es zeigt sich auf den ersten Blick, dass bei den verdünnten Amalgamen die bei vielen Lösungen beobachtete Übereinstimmung des Temperaturcoëfficienten der inneren Reibung und der elektrischen Leitfähigkeit nicht besteht, ja dass diese beiden Coëfficienten von verschiedener Grössenordnung sind.

Zum Schlusse spreche ich noch Herrn Prof. F. Exner meinen besten Dank dafür aus, dass er mich so oft mit seinem bewährten Rath unterstützte.

Über die Transformation des Zwanges in allgemeine Coordinaten

von

Prof. Dr. **A. Wassmuth.**

(Vorgelegt in der Sitzung am 21. März 1895.)

Das von Gauss[1] 1829 gegebene Princip des kleinsten Zwanges, das er selbst ein neues allgemeines Grundgesetz der Mechanik nannte, hat in seiner weiteren Verfolgung ein eigenthümliches Schicksal erlitten. Obwohl die Wichtigkeit dieses Princips vielfach[2] anerkannt wurde, so ist man doch selbst in neueren Lehrbüchern der Mechanik nicht weit über die ursprünglich gegebene Darstellung hinausgekommen. Der Grund mag darin gelegen sein, dass Gauss selbst keine »analytische« Formulirung seines Princips gegeben hat. Allerdings hat schon Scheffler[3] 1858 den Ausdruck für den Zwang Z, das ist für die zu einem Minimum zu machende Function abgeleitet und gefunden, dass

$$Z = \Sigma m \left[\left(x'' - \frac{X}{m}\right)^2 + \left(y'' - \frac{Y}{m}\right)^2 + \left(z'' - \frac{Z}{m}\right)^2\right]$$

sei, wo sich die Summe über alle Massenpunkte m mit den Beschleunigungen x'', y'', z'' und den Kraftcomponenten X, Y, Z erstreckt; doch hat erst Lipschitz[4] 1877 klar nachgewiesen, dass man bei der Aufstellung der Minimumsbedingung von Z die Beschleunigungen x'', y'', z'' als veränderlich, die Coordinaten x, y, z und die Geschwindigkeiten x', y', z' aber als constant

---

[1] Gauss, Werke V. Crelle IV.

[2] Lagrange, Mecan. anal. II, S. 360. Note de M. Bertrand.

[3] Scheffler, Z. f. M. und Ph. III.

[4] Lipschitz, Borch. Journ. Bd. 82, S. 323.

ansehen müsse. Lipschitz war es auch[1], der in Z an Stelle der rechtwinkligen Coordinaten allgemeine Variabeln, das ist solche, die die Bedingungsgleichungen identisch erfüllen, einführte, indem er eine gewisse Covariante aufstellte, die bei dem Princip des kleinsten Zwanges zu einem Minimum zu machen ist. Das Studium dieser so bedeutenden Arbeit verlangt, da sie die Kenntniss zweier Arbeiten desselben Autors über seine Untersuchungen in Betreff der homogenen Functionen von n Differentialen[2] voraussetzt, immerhin ziemliche Mühe, Zeit und Vorkenntnisse; nur so erklärt sich die auffallende Thatsache, dass die physikalische Literatur sich der gebrachten Ideen nicht weiter bemächtigte. Eine unten gegebene, ungemein kurze Ableitung der Transformationsgleichung, die ganz auf physikalischer Grundlage beruht, dürfte daher nicht unwillkommen sein.

Es liege die Aufgabe vor, in dem Ausdrucke für den Zwang

$$Z = \sum_1^n {}_i Z_i = \sum_1^n {}_i m_i \left[\left(x_i'' - \frac{X_i}{m_i}\right)^2 + \left(y_i'' - \frac{Y_i}{m_i}\right)^2 + \left(z_i'' - \frac{Z_i}{m_i}\right)^2\right]$$

statt der rechtwinkligen Coordinaten $x_i y_i z_i$ der n Punkte die von einander unabhängigen, die Bedingungsgleichungen identisch erfüllenden Veränderlichen $p_1 p_2 \ldots p_k$ einzuführen, wobei etwa $x_i = f_1^i(p_1 \ldots p_k), y_i = f_2^i(p_1 \ldots p_k)$ und $z_i = f_3^i(p_1 \ldots p_k)$ gesetzt sei. Setzt man zur Abkürzung: $\frac{\partial x_i}{\partial p_\mu} = f_{1\mu}^i$, $\frac{\partial y_i}{\partial p_\mu} = f_{2\mu}^i$ etc., so werden die Variationen:

$$\delta x_i = f_{11}^i . \delta p_1 + f_{12}^i \delta p_2 + \ldots + f_{1k}^i \delta p_k, \; \delta y_i = \ldots, \delta z_i = \ldots$$

und analog, aber nur wenn die Bedingungen die Zeit explicit nicht enthalten, die Geschwindigkeiten:

$$x_i' = f_{11}^i p_1' + \ldots + f_{1k}^i p_k'$$

u. s. w. und die lebendige Kraft:

$$L = \sum_1^n {}_i L_i = \frac{1}{2} \sum a_{\mu\nu} p_\mu' p_\nu' \qquad (\mu, \nu = 1, 2 \ldots k)$$

[1] L. c. S. 330.

[2] Bd. 70 und 72 desselben Journals.

Man betrachte nun die Variation einer Function H — sie fällt im Falle einer Kräftefunction mit der Energie zusammen — die gegeben ist durch:

$$\delta H = \sum_1^n {}_i [(m_i x_i'' - X_i)\delta x_i + \ldots]$$

so erhält man hieraus bei Einführung der obigen Werthe von δx_i, δy_i, δz_i und Vertauschung der Reihenfolge der Summirungen:

$$\delta H = \sum_1^k {}_\mu \delta p_\mu \sum_1^n {}_i [(m_i x_i'' - X_i) f_{1\mu}^i + \ldots]$$

Nun gilt bekanntlich, wenn $P_{i,\mu} = X_i f_{1\mu} + Y_i f_{2\mu} + Z_i f_{3\mu}$ ist, die Identität:

$$(m_i x_i'' - X_i) f_{1\mu}^i + (m_i y_i'' - Y_i) f_{2\mu}^i + (m_i z_i'' - Z_i) f_{3\mu}^i =$$
$$= \frac{d}{dt} \frac{\partial L_i}{\partial p_\mu'} - \frac{\partial L_i}{\partial p_\mu} - P_{i\mu} = Q_{i\mu}$$

so dass sofort nach Ausführung der Summation, wenn

$$\sum_1^n {}_i Q_{i\mu} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial p_\mu'} - \frac{\partial L}{\partial p_\mu} - \sum_1^n {}_i P_{i\mu} = Q_\mu$$

gesetzt wird, die bekannte Gleichung:

$$\delta H = \sum_1^k {}_\mu \delta p_\mu . Q_\mu = Q_1 \delta p_1 + \ldots + Q_k \delta p_k$$

resultirt.

Es lässt sich nun für δH bei Einführung des Zwanges Z noch ein anderer Ausdruck gewinnen. Die Möglichkeit beruht darauf, dass man hat:

$$f_{1\mu}^i = \frac{\partial x_i}{\partial p_\mu} = \frac{\partial x_i'}{\partial p_\mu'} \text{ auch } = \frac{\partial x_i''}{\partial p_\mu''},$$

weshalb

$$\delta H = \sum_1^k {}_\mu \delta p_\mu \cdot \sum_1^n {}_i [(m_i x_i'' - X_i) f_{1\mu}^i + \ldots] =$$

$$= \sum_1^k {}_\mu \delta p_\mu \cdot \sum_1^n {}_i \left[(m_i x_i'' - X_i) \frac{\partial x_i''}{\partial p_\mu''} + \ldots\right]$$

$$= \frac{1}{2} \sum_1^k {}_\mu \delta p_\mu \sum_1^n {}_i \frac{1}{m_i} \frac{\partial}{\partial p_\mu''} [(m_i x_i'' - X_i)^2 + \ldots]$$

oder es folgt:

$$\delta H = Q_1 \delta p_1 + \ldots + Q_k \delta p_k = \frac{1}{2} \sum_1^k {}_\mu \delta p_\mu \cdot \frac{\partial Z}{\partial p_\mu''} =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\partial Z}{\partial p_1''} \delta p_1 + \ldots + \frac{1}{2} \frac{\partial Z}{\partial p_k''} \delta p_k.$$

Hieraus folgt: »Ist $\delta H = 0$, d. h. gilt das D'Alembert'sche Princip, so ergibt sich hieraus wegen der Unabhängigkeit der δp: $\frac{\partial Z}{\partial p_1''} = 0 \ldots \frac{\partial Z}{\partial p_k''} = 0$, d. h. das Gauss'sche Princip, und umgekehrt folgt aus dem letzteren das erstere; beide Principien sind völlig gleichwerthig«. Des Weiteren ergibt sich:

$$Q_r = \frac{1}{2} \frac{\partial Z}{\partial p_r''}.$$

Nun ist bekanntlich[1]

$$\frac{\partial Q_\rho}{\partial p_r''} = a_{\rho r} = a_{r\rho}$$

und daher:

$$\frac{\partial Z}{\partial p_r''} = \frac{\partial Z}{\partial Q_1} \frac{\partial Q_1}{\partial p_r''} + \ldots = a_{1r} \frac{\partial Z}{\partial Q_1} + \ldots + a_{kr} \frac{\partial Z}{\partial Q_k} = 2 Q_r.$$

Setzt man darin der Reihe nach $r = 1, 2, \ldots k$, so erhält man k lineare Gleichungen, deren Determinante $D = (a_{\mu\nu})$ nicht verschwindet. Ist $A_{\mu\nu} = \frac{\partial D}{\partial a_{\mu\nu}}$ eine der Unterdeterminanten, so gibt die Auflösung:

---

[1] Wassmuth, Über die Anwendung des Principes des kleinsten Zwanges auf die Elektrodynamik. Wied. Ann. 54, S. 166 (oder Sitzber. d. k. bair. Akad. 1894, S. 226 und 222).

$$\frac{1}{2}\frac{\partial Z}{\partial Q_1}=\frac{1}{D}[A_{11}Q_1+A_{12}Q_2+\ldots+A_{1k}Q_k]$$

u. s. w., woraus man schliesst, dass der Zwang

$$Z=\frac{1}{D}\sum A_{\mu\nu}Q_\mu Q_\nu+\varphi(p_1p'_1p_2p'_2\ldots)$$

ist; die Function φ, welche nur die p und ihre ersten Differentialquotienten nach der Zeit enthält, muss dazu kommen, weil bei der früheren Differentiation nur die p'' als veränderlich angesehen wurden. Durch diese Formel ist die Transformation des Zwanges Z in allgemeine Coordinaten insoweit durchgeführt, als es die Anwendung des Gauss'schen Princips verlangt. Auch die (hiezu nicht nöthige) Bestimmung des φ unterliegt keiner Schwierigkeit.

Was nun die Wichtigkeit des Gauss'schen Principes betrifft, so möge noch einmal[1] daran erinnert werden, dass, wenn die virtuelle Arbeit und die lebendige Kraft bei einem physikalischen Problem gegeben sind, die Minimumseigenschaft des Zwanges Z ein Gesetz für das System ausdrückt. Dies wird umso mehr zur Geltung kommen, je mehr das Streben vorherrscht, für eine Reihe von Theorien Beschreibungen durch mechanische Analogie, wie W. Voigt sie nennt, zu geben. Für die Elektrodynamik habe ich die Anwendung schon gegeben und für die Thermodynamik ebenfalls schon aufgestellt.

Da der Zwang Z sämmtliche Lagrange'sche Gleichungen: $Q_1=0\ldots Q_k=0$ in sich vereiniget, so wird das Gauss'sche Princip dann diesen Gleichungen vorzuziehen sein, wenn gerade die Vereinigung derselben angestrebt wird. So z. B. in dem Falle einer Saite, die man sich aus discreten Punkten aufgebaut denkt.

Welchen Werth das Princip als Grundgesetz hat, zeigt wohl am besten die Thatsache, dass Hertz[2] auf dieses Princip und das Trägheitsgesetz seine ganze Mechanik aufbaut.

---

[1] Wassmuth, l. c. 167.

[2] Hertz, Principien der Mechanik. Seite 185, Nr. 391.

Eine paläoklimatologische Studie

von

Dr. Med. **Fritz Kerner von Marilaun.**

Jüngst kam mir der Gedanke, auf die Neumayr'sche Weltkarte der Jurazeit[1] die Forbes'sche Temperaturformel anzuwenden. Da nach Neumayr die Lage der Erdpole zu jener Zeit nicht viel von der heutigen abgewichen sein kann[2] und von ihm nichts darüber gesagt wird, nach welcher Richtung hin eine eventuelle geringe Verschiebung zu denken wäre, habe ich die Procente der Landbedeckung auf seiner Karte längs den heutigen Parallelkreisen abgemessen und hiebei folgende mit n' bezeichnete Relativzahlen erhalten, denen die von Dove[3] für die Jetztzeit ermittelten Werthe von n (auf zwei Decimalen abgekürzt) des Vergleiches wegen beigefügt sind:

	φ	n'	n	$n-n'$
N	70	0·27	0·54	0·27
	60	0·40	0·61	0·21
	50	0·41	0·59	0·18
	40	0·34	0·37	0·03

[1] Melchior Neumayr, Die geographische Verbreitung der Juraformation Karte I. Denkschriften der Wiener Akademie, L. Bd. Verkleinert reproducirt in Neumayr's Erdgeschichte, II. Bd., S. 336 und in Berghaus' Physikalischem Atlas, Abth. I, Nr. 7/8, Carton links unten.

[2] Neumayr schliesst dies aus dem den heutigen Breitengraden ungefähr parallelen Verlaufe seiner homoiozoischen Gürtel (Über klimatische Zonen während der Jura und Kreidezeit. Denkschriften der Wiener Akademie, XLVII. Bd., S. 307) und aus der Allgemeinheit der oberjurassischen Transgression auf der Nordhemisphäre (Die geographische Verbreitung der Juraformation, S. 129).

[3] Dove, Über die Verhältnisse des Festen und Flüssigen auf der Erdoberfläche. Zeitschrift für allgemeine Erdkunde, Neue Folge, Bd. XII.

	φ	n'	n	$n-n'$
N	30	0·34	0·45	0·11
	20	0·38	0·32	—0·06
	10	0·41	0·24	—0·17
	0	0·54	0·21	—0·33
S	10	0·53	0·22	—0·31
	20	0·48	0·24	—0·24
	30	0·43	0·21	—0·22
	40	0·27	0·04	—0·23
	50	0·07	0·02	—0·05

Die Parallelkreistemperaturen bestimmte ich nach der Formel

$$t'_\varphi = l_\varphi n'_\varphi + w_\varphi (1 - n'_\varphi),$$

in welcher für l (Temperatur auf einer Landhemisphäre) und w (Temperatur auf einer Wasserhemisphäre) die Werthe eingesetzt wurden, welche Spitaler erhielt,[1] indem er die mit Zugrundelegung der von ihm aus den Hann'schen Isothermenkarten [2] bestimmten Parallelkreistemperaturen [3] aufgestellte Formel [4]

$$t_\varphi = -2\cdot43 + 17\cdot61 \cos \varphi + 7\cdot05 \cos 2\varphi + 19\cdot29 n \cos 2\varphi,$$

welche von der ursprünglich von Forbes angegebenen Gleichung [5]

$$t_\lambda = 12\cdot5 + 59\cdot2 \cos^{5/4} \lambda + 38\cdot1\, L \cos 2\lambda$$

[1] Spitaler, Die Wärmevertheilung auf der Erdoberfläche. Denkschriften der Wiener Akademie, LI. Bd.

[2] Hann, Atlas der Meteorologie in Berghaus, Physikalischer Atlas, Abth. III.

[3] In neuester Zeit hat auf Grund der Buchan'schen Isothermenkarten (Report on Atmospheric Circulation) S. F. Batchelder die Parallelkreistemperaturen bestimmt: A new series of isanomalous temperature charts, based on Buchan's isothermal charts. American Meteorolog. Journal 1894, March.

[4] Spitaler rechnete die Constanten viermal auf anderer Grundlage und fand, dass diese in seiner Arbeit mit III bezeichnete Formel die Beobachtungen am besten wiedergab.

[5] J. D. Forbes, Inquiries about Terrestrial Temperature, Trans. Edinb. Soc., vol. XXII.

durch Wegfall des Exponenten $^5/_4$ im Cosinusglied und durch Zusatz eines weiteren Gliedes mit dem Cosinus der doppelten Breite in formeller Beziehung differirt, für $n = 1$ und $n = 0$ auflöste. Es ergaben sich folgende mit $t'\varphi$ bezeichnete Werthe, denen wieder des Vergleiches wegen die von Spitaler nach derselben Formel mit den Dove'schen Werthen von n gerechneten Parallelkreistemperaturen $(t\varphi)$ beigefügt sind:

	φ	$t'\varphi$	$t\varphi$	$t\varphi - t'\varphi$
N	70	— 5·8	— 9·8	—4·0
	60	— 1·0	— 3·0	—2·0
	50	6·3	5·7	—0·6
	40	13·5	13·5	0·0
	30	19·6	20·7	1·1
	20	25·1	24·2	—0·9
	10	29·0	25·9	—3·1
	0	32·6	26·2	—6·4
S	10	31·1	25·4	—5·7
	20	26·6	23·0	—3·6
	30	20·5	18·3	—2·2
	40	13·2	12·4	—0·8
	50	7·5	7·6	0·1

Zur Bestimmung der mittleren Hemisphärentemperaturen summirte ich die für successive Zonen von 10° Breite gerechneten Werthe von

$$\frac{1}{2}(t_1+t_2)(\sin\varphi_2-\sin\varphi_1),$$

welche mit den bei Anwendung des Verfahrens der schrittweisen Integration[1] (unter Zugrundelegung der obigen Constanten) für ebensolche Zonen zu bildenden Werthen von

$$\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}(-2\cdot 43+17\cdot 61\cos\varphi+C\cos 2\varphi)\cos\varphi\, d\varphi,$$

[1] Spitaler, l. c. S. 13.

in welchen

$$C = 7\cdot05 + 19\cdot29 \times \frac{1}{2}(n_1 + n_2)$$

zu setzen ist, beinahe ident sind.[1]

Die Summirung bis zum 70. Breitengrad (wobei auf der Südhemisphäre für $\varphi = 60°$ und $\varphi = 70°$ Wasserparallelkreistemperaturen angenommen wurden) ergab für die Nordhemisphäre:

$$5\cdot4 + 4\cdot6 + 3\cdot5 + 2\cdot4 + 1\cdot1 + 0\cdot3 - 0\cdot3 = 17\cdot0$$

und für die Südhemisphäre:

$$5\cdot6 + 4\cdot9 + 3\cdot7 + 2\cdot4 + 1\cdot3 + 0\cdot5 + 0\cdot0 = 18\cdot4.$$

Diese Werthe können wegen des geringen Einflusses der Wärme der vom 70. Grad umgrenzten Calotte auf die Mittelwärme einer Halbkugel als angenäherte mittlere Hemisphärentemperaturen betrachtet werden. Als Mitteltemperatur in der Jetztzeit erhält man für die Nordhemisphäre im Durchschnitte aus den Bestimmungen von Dove,[2] Schoch[3] und Ferrel[4] $Tm = 15\cdot3$ und für die Südhemisphäre im Mittel aus den Berechnungen von Sartorius von Waltershausen,[5] Schoch, Ferrel und Hann[6] $Tm = 15\cdot5$.

Es ergibt sich somit, dass bei der auf der Neumayr'schen Weltkarte der Jurazeit dargestellten Vertheilung von Land und

---

[1] Auf der Südhemisphäre könnte man (jedoch ohne Vortheil) über deren bekannten Zonentheil auf einmal integriren, indem daselbst die Verschmälerung der Continente auf der Neumayr'schen Karte einer Darstellung als Function der geographischen Breite etwa in der Form

$$n = a - b \operatorname{tg} \varphi - c \operatorname{tg}^2 \varphi$$

nicht ungünstig wäre.

[2] Dove, Die Verbreitung der Wärme auf der Oberfläche der Erde, 1852.

[3] Schoch, Darstellung der mittleren Jahrestemperaturen als Function der geographischen Breite und Länge, 1856.

[4] Ferrel, Meteorological Researches for the use of the Coast Pilot, part I, 1877.

[5] Sartorius von Waltershausen, Die Klimate der Gegenwart und Vorwelt, 1865.

[6] Hann, Über die Temperatur der südlichen Hemisphäre. Diese Sitzungsberichte, LXXXV. Bd., I.

Wasser auf die Erdoberfläche die Südhemisphäre um etwa $1^{1}/_{2}$ Grad wärmer wäre als die Nordhemisphäre, während in der Jetztzeit beide Halbkugeln gleich warm sind, und dass bei der auf der genannten Karte dargestellten Gruppirung der Continente und Meere die mittlere Erdoberflächentemperatur um etwas mehr als zwei Grade höher wäre als sie in der Gegenwart ist.

Eine Verwerthbarkeit für die Paläobiologie kommt diesem Resultate kaum zu; es bietet aber Interesse als ziffermässiger Nachweis der Grösse des thermischen Gesammteinflusses, welchen eine bestimmte Änderung eines der den Wärmezustand der Erdoberfläche mitbedingenden Momente (bei Constanz der übrigen) ausüben würde. Über die Temperaturverhältnisse, welche an bestimmten Orten zu bestimmten Zeiten geherrscht haben mögen, erhält man durch die Forbes'sche Temperaturformel überhaupt keinen Aufschluss; doch ist es nicht zutreffend, wenn Neumayr das durch paläontologische Forschungen gewonnene Resultat, dass trotz fundamentaler Änderung der Festlandsvertheilung sich in Mitteleuropa das Klima vom Lias bis in das Oxfordien nicht merklich geändert hat, als einen Beweis dafür ansieht, dass die Gruppirung der Continente ganz ohne Einfluss auf das Klima sei,[1] denn Mitteleuropa breitet sich eben unmittelbar nördlich von jenem Parallelkreise aus, längs welchem auf einer Land- und auf einer Wasserhemisphäre dieselben Temperaturen vorhanden wären.

Im Anschlusse an die Temperaturvertheilung möge hier noch die Luftdruckvertheilung auf der Erdoberfläche zur Zeit des oberen Jura — wie sie sich unter der, wie erwähnt, begründeten Voraussetzung einer der jetzigen analogen Pollage aus der Neumayr'schen Karte theoretisch ableiten lässt — in Kürze skizzirt werden.

Von den drei grossen Festländern der Jurazeit war nur der nearktische Continent der Entwicklung intensiver Winter- und Sommerextreme des Luftdruckes günstig. Über der grossen

---

[1] Neumayr, Erdgeschichte, II. Bd., S. 338 und 339.

brasilianisch-äthiopischen Continentalmasse konnten sich wegen deren vorwiegend innertropischer Lage, über dem sino-australischen Continent wegen dessen relativ geringer Breitenausdehnung keine sehr bedeutenden barometrischen Maxima und Minima bilden.

Auf der Nordhemisphäre dürfte im Winter in der vom Gürtel hohen Luftdruckes umschlossenen Calotte ein vom südlichen Nordamerika über Nordeuropa nach Ostasien hingezogener (im Gebiete des heutigen Russland vielleicht eingeschnürt oder unterbrochen gewesener) barometrischer Rücken eine im damals überflutheten Gebiete Westeuropas gelegene kleine Luftdruckmulde von einer grösseren über das in jener Zeit unter Wasser gestandene Sibirien und über den Nordpacific ausgebreitet gewesenen Mulde getrennt haben. Im Sommer mögen sich zwischen zwei Luftdruckmaxima über dem nordpacifischen Ocean und über dem Meere an Stelle Mitteleuropas ein Hauptminimum im südlichen Nordamerika und ein secundäres Minimum in Südostasien eingeschaltet haben. Auf der Südhemisphäre dürfte der Gürtel hohen Luftdruckes im Nordwinter über Australien und über dem jetzt vom südatlantischen Ocean eingenommenen Gebiete unterbrochen, im Nordsommer dagegen continuirlich und über den genannten Unterbrechungsgebieten verdichtet gewesen sein. Die bedeutendste Abweichung vom jetzigen Isobarenbilde würde sich somit für die winterliche Luftdruckvertheilung auf der Nordhemisphäre ergeben.

Zur Theorie der Bewegung eines starren Systems

von

Eduard Weyr in Prag.

(Vorgelegt in der Sitzung am 21. März 1895.)

Die allgemeinste Bewegung eines ebenen Systems in seiner Ebene kann dadurch hervorgebracht werden, dass man eine Curve auf einer anderen ohne Gleiten fortrollen lässt. Berücksichtigt man hiebei den Umstand, dass die Osculationsebenen beider Curven immerwährend zusammenfallen, so wird man naturgemäss zu der folgenden Verallgemeinerung geführt, bei welcher zwei beliebige, im Allgemeinen nicht ebene Curven auftreten.

Mit dem beweglichen starren System sei eine Curve Γ_1 verbunden, ferner sei eine feste Curve Γ gegeben, welche Γ_1 in einem Punkte O berührt und in diesem Punkte mit Γ_1 überdies die Osculationsebene gemein hat. Rollt die Curve Γ_1 auf Γ ohne zu gleiten derart, dass die Osculationsebenen beider Curven übereinstimmen, so wird dem starren System eine Bewegung ertheilt, die wir Ω nennen wollen; mit ihr wollen wir uns näher befassen.

Es bezeichne M_1 einen beliebigen Punkt von Γ_1 und s die Länge des Bogens OM_1; M sei der correspondirende Punkt von Γ, so dass der Bogen OM gleich s ist. Den Punkt O wählen wir zum Scheitel eines rechtwinkeligen Dreikants, dessen eine Kante Ox mit der Tangente der beiden Curven, dessen zweite Kante Oy mit ihrer Hauptnormale und dessen dritte Kante Oz mit ihrer Binormale im Punkte O zusammenfällt.

Wir wollen nun eine erste Hilfsbewegung auf folgende Art definiren: Es bewege sich das Dreikant $Oxyz$ derart, dass sein Scheitel die Curve Γ_1 durchlauft, die x-Axe die Curve berührt und die y-Axe mit ihrer Hauptnormale zusammenfällt, und es sei $M_1 x_1 y_1 z_1$ oder kurz (M_1) die dem Punkte M_1 entsprechende Lage des Dreikants. Wird überdies der Bogen s der Zeit gleichgesetzt und werden die im Sinne der Axen x_1, y_1, z_1 gemessenen Translations- und Rotationsgeschwindigkeiten mit $\xi_1, \eta_1, \zeta_1, p_1, q_1, r_1$ bezeichnet, so hat man[1] $\xi_1 = 1$, $\eta_1 = 0$, $\zeta_1 = 0$, $q_1 = 0$, und $-p_1$, r_1 geben die Torsion und Krümmung von Γ_1 im Punkte M_1.

Eine zweite Hilfsbewegung sei analog durch die Curve Γ definirt; es sei hiebei $Mxyz$ oder kurz (M) das dem Punkte M zukommende Dreikant und $\xi = 1$, $\eta = 0$, $\zeta = 0$, p, $q = 0$, r seine Translations- und Rotationsgeschwindigkeiten.

Bezeichnet $(M_1 + dM_1)$ das durch die erste Hilfsbewegung zur Zeit $s + ds$ gegebene Dreikant, ebenso $(M + dM)$ das durch die zweite Hilfsbewegung zu derselben Zeit fixirte Dreikant, ist ferner das Dreikant $(M + \delta M)$ gegen (M) in derselben relativen Lage wie $(M_1 + dM_1)$ gegen (M_1), so überführt die Bewegung Ω in der Zeit ds das Dreikant $(M + \delta M)$ in die Position $(M + dM)$. Nun sind die dem Übergange von (M) in $(M + \delta M)$ zukommenden, in der Richtung der Axen Mx, My, Mz gemessenen Geschwindigkeiten $\xi_1, \eta_1, \zeta_1, p_1, q_1, r_1$, jene dem Übergange von (M) in $(M + dM)$ entsprechenden $\xi, \eta, \zeta, p, q, r$ und somit die der Bewegung Ω zukommenden Geschwindigkeiten

$$\xi - \xi_1,\ \eta - \eta_1,\ \zeta - \zeta_1,\ p - p,\ q - q_1,\ r - r_1$$

d. i.

$$0,\ 0,\ 0,\ p - p_1,\ 0,\ r - r_1.$$

Die Bewegung Ω setzt sich daher aus lauter infinitesimalen Rotationen zusammen, und zwar geht zur Zeit s die Rotationsaxe durch den Punkt M und ist in der rectificirenden Ebene der Curve Γ gelegen; die in der Richtung der Tangente, respective

[1] G. Darboux, Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applications géométriques du calcul infinitésimal, t. I.

der Binormale von Γ genommenen Componenten der Rotationsgeschwindigkeit sind $p-p_1$ und $r-r_1$.

Und umgekehrt: Jede Bewegung, die sich aus blossen infinitesimalen Rotationen zusammensetzt, ist eine Bewegung Ω.

In der That sei die Lage der momentanen Rotationsaxe A_u als Function einer Veränderlichen u gegeben und sei vdu die zugehörige infinitesimale Rotation. Die Rotationsaxen A_u erfüllen eine Regelfläche Π; auf dieser ziehen wir irgend eine geodätische Curve Γ und bezeichnen mit M den Punkt, in welchem A_u diese Curve trifft. Die Rotationsaxe A_u liegt dann in der dem Punkte M zukommenden rectificirenden Ebene der Curve Γ. Die Coordinaten von M sind Functionen von u. Wir adaptiren der Curve Γ in der oben angegebenen Weise das Dreikant $Mxyz$ und betrachten die dem Zuwachs du entsprechenden Translationen und Rotationen. Auf Γ wählen wir einen festen Punkt O und führen arc $OM = s$ als neue Veränderliche ein; dadurch möge vdu in wds übergehen und für die Translationen und Rotationen sich ξds, 0, 0, pds, 0, rds ergeben.

Sind Pds, Rds die in der Richtung der Axe x, respective z genommenen Componenten der Rotation wds, so setze man

$$p_1 = p - P, \qquad r_1 = r - R, \qquad \xi = \xi_1$$

und definire eine Hilfsbewegung dadurch, dass für $s = 0$ ein bewegliches Dreikant mit dem Dreikant $Oxyz$ zusammenfällt, und dass die dem Werthe s zukommenden Translations- und Rotationsgeschwindigkeiten, gemessen im Sinne der beweglichen Axen, ξ_1, 0, 0, p_1, 0, r_1 sein mögen. Durch diese Hilfsbewegung wird die Curve Γ_1, als Bahn des Scheitels des Dreikants, fixirt, durch deren Fortrollen auf der Curve Γ, bei immerwährender Übereinstimmung der Osculationsebenen beider Curven, offenbar die gegebene Bewegung hervorgebracht wird.

Zieht man durch den s entsprechenden Punkt M_1 von Γ_1 in der rectificirenden Ebene dieser Curve eine Gerade, die gegen die Tangente und Binormale dieselbe Lage hat wie A_u gegen die Tangente und Binormale von Γ im Punkte M, so erfüllt jene Gerade eine zweite Regelfläche Π_1. Durch die

Bewegung Ω wird die Fläche Π_1 auf die Fläche Π offenbar applicirt, so zwar, dass Π_1 auf Π ohne Gleiten fortrollt, wobei die in den correspondirenden Punkten M_1 und M construirten Erzeugenden zur Deckung kommen.

Es ist nicht ohne Interesse, zuzusehen, unter welcher Bedingung die Flächen Π und Π_1 developpabel werden. Zu dem Ende bemerke man, dass die Rotationsaxe durch die Gleichungen

$$\frac{x}{z} = \frac{p-p_1}{r-r_1}, \qquad y = 0 \tag{1}$$

fixirt ist. Bezeichnen x', y', z' die Kanten von $(M+dM)$, so fixiren die Gleichungen

$$\frac{x'}{z'} = \frac{p-p_1}{r-r_1} + d\left(\frac{p-p_1}{r-r_1}\right), \qquad y' = 0 \tag{2}$$

die Nachbarrotationsaxe. Es seien ferner x', y', z' die bezüglich des Dreikants $(M+dM)$ genommenen Coordinaten irgend eines Punktes und x, y, z die bezüglich (M) genommenen Coordinaten desselben Punktes, so ist klar, dass der im Dreikant (M) festgelegte Punkt x', y', z' durch die zweite Hilfsbewegung $(\xi, \eta, \zeta, p, q, r)$ in die Position x, y, z gelangt, oder umgekehrt, dass der Punkt x, y, z des Dreikants $(M+dM)$ durch die Bewegung $(-\xi, -\eta, -\zeta, -p, -q, -r)$ in die Lage x', y', z' kommt. Man hat somit

$$\begin{aligned} x'-x &= -(\xi+qz-ry)ds \\ y'-y &= -(\eta+rx-pz)ds \\ z'-z &= -(\zeta+py-qx)ds. \end{aligned}$$

Die Gleichungen (2) der Nachbaraxe können also, mit Rücksicht auf $\xi = 1$, $\eta = \zeta = 0$, $q = 0$, geschrieben werden:

$$\frac{x-(\xi-ry)ds}{z-pyds} = \frac{p-p_1}{r-r_1} + d\left(\frac{p-p_1}{r-r_1}\right), \quad y-(rx-pz)ds = 0. \tag{3}$$

Werden die Gleichungen (1) und (3) durch ein Werthsystem x, y, z gleichzeitig befriedigt, so kann man (3) schreiben

$$-\frac{ds}{z} = d\left(\frac{p-p_1}{r-r_1}\right), \qquad rx-pz = 0.$$

Man hat dann

$$\frac{x}{z} = \frac{p}{r}$$

und in Hinblick auf (1)

$$\frac{p}{r} = \frac{p_1}{r_1},$$

was die gesuchte Bedingung ist. Die Bewegung Ω kann somit dann durch das Fortrollen einer developpabelen Fläche Π_1 auf einer zweiten developpabelen Fläche Π hervorgebracht werden, wenn das Verhältniss zwischen Krümmung und Torsion der Curven Γ_1 und Γ in ihren correspondirenden Punkten dasselbe ist; die beiden developpabelen Flächen sind dann offenbar die rectificirenden Flächen der Curven Γ_1 und Γ. Die Coordinaten x, y, z des Schnittpunktes zweier Nachbaraxen, also eines Punktes der Rückkehrkante der Fläche Π, sind bestimmt durch

$$\frac{1}{z} = -\frac{d}{ds}\left(\frac{p-p_1}{r-r_1}\right), \qquad x = \frac{p}{r} z, \qquad y = 0.$$

Es hat keine Schwierigkeit die Tangente der Bahn zu construiren, welche ein mit der beweglichen Curve Γ_1 fest verbundener Punkt bei der Bewegung Ω beschreibt; denn die Krümmungen und Torsionen der Curven Γ_1 und Γ in den correspondirenden Punkten M_1 und M liefern sofort die Componenten $p-p_1$, $r-r_1$ der Rotationsgeschwindigkeit und somit auch die momentane Rotationsaxe. Um auch die Osculationsebene und die Krümmung der Bahn zu finden, stellen wir folgende Betrachtung an:

Die zweite Hilfsbewegung möge das Dreikant (M) in der Zeit ds in die Lage (M') bringen; dann hat der Punkt M' die Coordinaten $x = ds$, $y = 0$, $z = 0$, und die Richtungen der Axen x', y', z' sind aus den Axen x, y, z durch die Rotationen $pds, 0, rds$ abzuleiten. Es sind somit $1, rds, -qds$ die Cosinus der Winkel, welche x mit den Axen x', y', z' respective einschliesst, ebenso $-rds, 1, pds$ die y und endlich $qds, -pds, 1$ die z zukommenden Cosinus.

Im zweiten Zeitdifferential ds besteht die Bewegung Ω in einer Rotation um eine durch den Punkt M' gehende Axe diese Rotation hat bezüglich der Axen x', y', z' die Geschwindigkeiten

$$p-p_1+d(p-p_1),\ 0,\ r-r_1+d(r-r_1).$$

Wir stellen nun die Frage nach dem Deplacement $\xi_0, \eta_0, \zeta_0, p_0, q_0, r_0$ des Dreikants (M''), welches diese Rotation ersetzen kann, wobei wir mit (M'') das Dreikant bezeichnen, in welches (M) im ersten Zeitdifferentiale ds durch Ω übergeführt wird, d. i. durch die Rotationen $p-p_1$, 0, $r-r_1$.

Die Cosinus der Winkel, welche x mit den Axen von (M'') einschliesst, sind 1, $(r-r_1)ds$, 0, jene, welche y zukommen, sind $-(r-r_1)ds$, 1, $(p-p_1)ds$, endlich die z entsprechenden 0, $-(p-p_1)ds$, 1.

Der Punkt M' hat bezüglich des Dreikants (M'') die Coordinaten ds, 0, 0, und da M' bei der betrachteten Rotation fest bleibt, hat man

$$\xi_0 = 0, \qquad \eta_0 + r_0 ds = 0, \qquad \zeta_0 - q_0 ds = 0$$

und durch Zerlegung der Rotation nach den Axen x_0, y_0, z_0 von (M'')

$$p_0 = [p-p_1+d(p-p_1)] \cos(x'x_0) + [r-r_1+d(r-r_1)] \cos(z'x_0)$$
$$q_0 = [p-p_1+d(p-p_1)] \cos(x'y_0) + [r-r_1+d(r-r_1)] \cos(z'y_0)$$
$$r_0 = [p-p_1+d(p-p_1)] \cos(x'z_0) + [r-r_1+d(r-r_1)] \cos(z'z_0)$$

d. i. unter blosser Berücksichtigung der Hauptglieder,

$$p_0 = p-p_1+d(p-p_1)$$
$$q_0 = -(pr_1-rp_1)ds$$
$$r_0 = r-r_1+d(r-r_1)$$
$$\xi_0 = 0 \qquad \eta_0 = -(r-r_1)ds \qquad \zeta_0 = 0.$$

Die Bewegung Ω theilt somit im ersten Zeitdifferential dem Dreikant (M) die Geschwindigkeiten 0, 0, 0, $p-p_1$, 0, $r-r_1$ mit und führt es in die Lage (M'') über; im nächsten Zeitdifferential theilt es diesem Dreikant die Geschwindigkeiten 0, η_0, 0, p_0, q_0, r_0 mit. Definirt man somit eine Bewegung Ω'

durch die Anfangslage (M) des beweglichen Dreikants, welche $u = o$ entsprechen möge und durch die nach den beweglichen Axen gemessenen Geschwindigkeiten

$$\xi' = 0, \qquad p' = p - p_1 + \frac{d(p-p_1)}{ds} u$$
$$\eta' = -(r-r_1)u, \qquad q' = (rp_1 - pr_1)u$$
$$\zeta' = 0, \qquad r' = r - r_1 + \frac{d(r-r_1)}{ds} u$$

wobei u die Zeit bedeutet, so stimmt diese Bewegung in den beiden auf $u = 0$ folgenden Zeitdifferentialen mit der Bewegung Ω überein.

Bezeichnet man mit a, b, c die Cosinus der Winkel, welche zur Zeit u die bewegliche x-Axe mit den Axen der Anfangslage (M) einschliesst, mit a', b', c' die der beweglichen y-Axe, mit a'', b'', c'' die der z-Axe zukommenden Cosinus, ferner mit X_0, Y_0, Z_0 die bezüglich des Dreikants (M) genommenen Coordinaten des beweglichen Anfangspunktes und setzt diese zwölf Grössen in der Form von Potenzreihen voraus, so liefert die Verification der letzten sechs Gleichungen für die ersten Glieder dieser Reihen die Werthe

$$\left.\begin{aligned}
a &= 1 - \frac{l^2}{2} u^2, \quad b = -lu - \frac{l'}{2} u^2, \quad c = \frac{hl+k}{2} u^2 \\
a' &= lu + \frac{l'}{2} u^2, \quad b' = 1 - \frac{h^2+l^2}{2} u^2, \quad c' = -hu - \frac{h'}{2} u^2 \\
a'' &= \frac{hl-k}{2} u^2, \quad b'' = hu + \frac{h'}{2} u^2, \quad c'' = 1 - \frac{h^2}{2} u^2 \\
X_0 &= 0, \quad Y_0 = -\frac{l}{2} u^2, \quad Z_0 = 0,
\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

wobei der Kürze wegen gesetzt wurde

$$h = p - p_1, \qquad h' = \frac{dh}{ds}$$
$$l = r - r_1, \qquad l' = \frac{dl}{ds}$$
$$k = rp_1 - pr_1.$$

Wird ein beliebiger, zur Zeit $u = 0$ bezüglich des Dreikants (M) durch die Coordinaten x, y, z gegebener Punkt A betrachtet, so haben die beiden von ihm in Folge der Bewegungen Ω, respective Ω' beschriebenen Bahncurven im Punkte A offenbar die Tangente, die Osculationsebene und die Krümmung gemein. Die Lage dieses Punktes zur Zeit u ist bezüglich (M) durch die Coordinaten

$$\begin{aligned}
X &= X_0 + ax + by + cz \\
Y &= Y_0 + a'x + b'y + c'z \\
Z &= Z_0 + a''x + b''y + c''z
\end{aligned}$$

gegeben. Mit Berücksichtigung von (4) erschliesst man hieraus, dass der durch die Gleichungen

$$\begin{aligned}
X &= x - lyu + \left(-\frac{l^2}{2}x - \frac{l'}{2}y + \frac{hl+k}{2}z\right)u^2 \\
Y &= y + (lx - hz)u + \left(-\frac{l}{2} + \frac{l'}{2}x - \frac{h^2+l^2}{2}y - \frac{h'}{2}z\right)u^2 \\
Z &= z + hyu + \left(\frac{hl-k}{2}x + \frac{h'}{2}y - \frac{h^2}{2}z\right)u^2
\end{aligned}$$

gegebene Kegelschnitt im Punkte $u = 0$ die Bahncurve des Punktes A osculirt.

Über die Ellipse vom kleinsten Umfange durch drei gegebene Punkte

(II. Mittheilung)

von

Victor v. Dantscher.

(Vorgelegt in der Sitzung am 21. März 1895.)

Dritter Abschnitt.

Wie im ersten Abschnitte[1] S. 7 angedeutet wurde, wird man jetzt darauf ausgehen die sämmtlichen Ellipsen E zu ermitteln, welche ein Dreieck $P'P''P'''$ enthalten, das mit dem gegebenen Dreiecke ABC congruent ist.

Von einer solchen Ellipse E weiss man nach dem Satze III), S. 43, dass ihr Umfang ein Minimum ist; stellt sich dabei heraus, dass es nur eine solche Ellipse gibt — was nur von dem Beweise des Satzes abhängt, dass durch die Forderung des Minimums der Werth des Verhältnisses $\frac{b^2}{a^2}$ der Quadrate der Halbaxen der gesuchten Ellipse im Intervalle $(0\ldots 1)$ eindeutig bestimmt wird — so ist ihr Umfang die gesuchte untere Grenze und mit ihrer Bestimmung die Aufgabe gelöst. Der Beweis des eben angeführten Satzes ist der Gegenstand dieses Abschnittes.

Zur Berechnung der Seiten $P''P'''$, $P'''P'$, $P'P''$ dienen die Formeln 24), II,[2] S. 28, für die Coordinaten der Punkte P'' und P''' als Functionen der Coordinaten x', y' des Punktes P' und der Grössen a^2 und b^2.

---

[1] Diese Sitzungsberichte, Bd. XCIX, Abth. II. a, Jänner 1890.

[2] Die römischen Ziffern I und II bezeichnen den ersten und zweiten Abschnitt.

Mittelst derselben ergibt sich:

$$\overline{P''P'''^2} = (x''-x''')^2+(y''-y''')^2 = \frac{4\mathfrak{c}'}{(\mathfrak{c}'+1)^2}\left[\frac{a^2y'^2}{\mathfrak{b}^2}+\frac{b^2x'^2}{\mathfrak{a}^2}\right] \tag{1}$$

$$\begin{aligned}\overline{P'''P'^2} &= (x'''-x')^2+(y'''-y')^2 \\ &= x'^2+y'^2+\frac{2a}{\mathfrak{c}'+1}\left[\frac{x'^2}{\mathfrak{a}}+\frac{x'y'}{\mathfrak{b}}\sqrt{\mathfrak{c}'}\right]+\frac{a^2}{(\mathfrak{c}'+1)^2}\left[\frac{x'^2}{\mathfrak{a}^2}+\frac{y'^2}{\mathfrak{b}^2}\mathfrak{c}'+\frac{2x'y'}{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}\sqrt{\mathfrak{c}'}\right] \\ &\quad +\frac{2b}{\mathfrak{c}'+1}\left[\frac{y'^2}{\mathfrak{b}}-\frac{x'y'}{\mathfrak{a}}\sqrt{\mathfrak{c}'}\right]+\frac{b^2}{(\mathfrak{c}'+1)^2}\left[\frac{x'^2}{\mathfrak{a}^2}\mathfrak{c}'+\frac{y'^2}{\mathfrak{b}^2}-\frac{2x'y'}{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}\sqrt{\mathfrak{c}'}\right]\end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned}\overline{P'P''^2} &= (x'-x'')^2+(y'-y'')^2 \\ &= x'^2+y'^2+\frac{2a}{\mathfrak{c}'+1}\left[\frac{x'^2}{\mathfrak{a}}-\frac{x'y'}{\mathfrak{b}}\sqrt{\mathfrak{c}'}\right]+\frac{a^2}{(\mathfrak{c}'+1)^2}\left[\frac{x'^2}{\mathfrak{a}^2}+\frac{y'^2}{\mathfrak{b}^2}\mathfrak{c}'-\frac{2x'y'}{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}\sqrt{\mathfrak{c}'}\right] \\ &\quad +\frac{2b}{\mathfrak{c}'+1}\left[\frac{y'^2}{\mathfrak{b}}+\frac{x'y'}{\mathfrak{a}}\sqrt{\mathfrak{c}'}\right]+\frac{b^2}{(\mathfrak{c}'+1)^2}\left[\frac{x'^2}{\mathfrak{a}^2}\mathfrak{c}'+\frac{y'^2}{\mathfrak{b}^2}+\frac{2x'y'}{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}\sqrt{\mathfrak{c}'}\right].\end{aligned} \tag{3}$$

Setzt man wie früher (I, S. 1)

$$\overline{BC^2} = \alpha^2 \qquad \overline{CA^2} = \beta^2 \qquad \overline{AB^2} = \gamma^2,$$

so hat man die Grössen a^2, b^2, x', y' so zu bestimmen, dass z. B.

$$\overline{P''P'''^2} = \alpha^2 \qquad \overline{P'''P'^2} = \beta^2, \qquad \overline{P'P''^2} = \gamma^2 \tag{4}$$

wird.

Führt man wieder ein:

$$x' = a\mathfrak{x}', \qquad y' = b\mathfrak{y}', \qquad (\mathfrak{x}'^2+\mathfrak{y}'^2 = 1), \qquad \mathfrak{a} = ta, \qquad \mathfrak{b} = (1-t)b, \qquad b^2 = (1-\varkappa)a^2,$$

so wird $\mathfrak{e}'+1 = \frac{(1-2t)\mathfrak{x}'^2+t^2}{t^2(1-t)^2}$ und gehen die Formeln 1), 2), 3) nach 4) in die folgenden über:

$$\alpha^2 = \frac{4}{[(1-2t)\mathfrak{x}'^2+t^2]^2}[(1-2t)\mathfrak{x}'^2+t^3(2-t)][(1-2t-(1-t^2)\varkappa)\mathfrak{x}'^2+t^2]a^2 \tag{5}$$

$$\beta^2 = \frac{1}{[(1-2t)\mathfrak{x}'^2+t^2]^2}[G(\mathfrak{x}'^2)+2\mathfrak{x}'\mathfrak{y}'\sqrt{(1-2t)\mathfrak{x}'^2+t^3(2-t)}\,H(\mathfrak{x}'^2)]a^2 \tag{6}$$

$$\gamma^2 = \frac{1}{[(1-2t)\mathfrak{x}'^2+t^2]^2}[G(\mathfrak{x}'^2)-2\mathfrak{x}'\mathfrak{y}'\sqrt{(1-2t)\mathfrak{x}'^2+t^3(2-t)}\,H(\mathfrak{x}'^2)]a^2, \tag{7}$$

wobei gesetzt ist:

$$\begin{aligned} G(\mathfrak{x}'^2) = {} & (1-2t)^2\varkappa\mathfrak{x}'^6+(1-2t)[2(1-2t)(1+t-t^2)-(2-4t-3t^2+2t^3)\varkappa]\mathfrak{x}'^4 \\ & +t^2[2(1-2t)(3-t^2)-(2-t)(2-3t-4t^2+2t^3)\varkappa]\mathfrak{x}'^2+t^4(2-t)[2-(2-t)\varkappa], \end{aligned} \tag{8}$$

$$H(\mathfrak{x}'^2) = (1-2t)[-(1-2t)+(1-t)\varkappa]\mathfrak{x}'^2+t^2[-(1-2t)+(1-t)(2-t)\varkappa]. \tag{9}$$

Diese Gleichungen oder die ihnen äquivalenten:

$$[(1-2t)\mathfrak{x}'^2+t^2]^2\alpha^2 = 4[(1-2t)\mathfrak{x}'^2+t^3(2-t)][(1-2t-(1-t)^2\varkappa)\mathfrak{x}'^2+t^2]a^2 \tag{10}$$

$$[(1-2t)\mathfrak{x}'^2+t^2]^2(\beta^2+\gamma^2) = 2G(\mathfrak{x}'^2)a^2 \tag{11}$$

$$[(1-2t)\mathfrak{x}'^2+t^2]^4(\beta^2-\gamma^2)^2 = 16\mathfrak{x}'^2(1-\mathfrak{x}'^2)[(1-2t)\mathfrak{x}'^2+t^3(2-t)]H^2(\mathfrak{x}'^2)a^4, \tag{12}$$

welche nach Einführung der Bezeichnung N' für den Ausdruck $[(1-2t)\mathfrak{x}'^2+t^2]^2$ vorübergehend in der Form

$$N'\alpha^2 = \varphi(\mathfrak{x}'^2)a^2, \qquad N'(\beta^2+\gamma^2) = \psi(\mathfrak{x}'^2)a^2, \qquad N'^2(\beta^2-\gamma^2)^2 = \chi(\mathfrak{x}'^2)a^4 \tag{13'}$$

geschrieben werden mögen, können nun zur Berechnung der Grössen $\varkappa$, $\mathfrak{x}'^2$, a^2 dienen.

Ihnen gesellen sich aber noch zwei andere Gleichungssysteme derselben Art zu.

Die Gleichungen 24) II bleiben nämlich, wie bereits bei ihrer Bildung bemerkt wurde, bestehen, wenn man die Accente $'$, $''$, $'''$ cyclisch vertauscht, wobei dann unter $\mathfrak{e}''$ und $\mathfrak{e}'''$ die Ausdrücke $\frac{x''^2}{\mathfrak{a}^2}+\frac{y''^2}{\mathfrak{b}^2}-1$ und $\frac{x'''^2}{\mathfrak{a}^2}+\frac{y'''^2}{\mathfrak{b}^2}-1$ zu verstehen sind.

Zur rechnenden Verification dieses Umstandes stehen die Relationen:

$$\frac{x'x''}{a\mathfrak{a}}+\frac{y'y''}{b\mathfrak{b}}+1=0 \qquad \frac{x''x'''}{a\mathfrak{a}}+\frac{y''y'''}{b\mathfrak{b}}+1=0$$
$$\frac{x'''x'}{a\mathfrak{a}}+\frac{y'''y'}{b\mathfrak{b}}+1=0$$

zur Verfügung, welche aus 24) II leicht abgeleitet werden. Es bestehen somit die Gleichungen:

$$\begin{aligned} x'' &= \frac{a}{\mathfrak{e}'+1}\left[-\frac{x'}{\mathfrak{a}}+\frac{y'}{\mathfrak{b}}\sqrt{\mathfrak{e}'}\right] & x''' &= \frac{a}{\mathfrak{e}'+1}\left[-\frac{x'}{\mathfrak{a}}-\frac{y'}{\mathfrak{b}}\sqrt{\mathfrak{e}'}\right] \\ y'' &= \frac{b}{\mathfrak{e}'+1}\left[-\frac{y'}{\mathfrak{b}}-\frac{x'}{\mathfrak{a}}\sqrt{\mathfrak{e}'}\right] & y''' &= \frac{b}{\mathfrak{e}'+1}\left[-\frac{y'}{\mathfrak{b}}+\frac{x'}{\mathfrak{a}}\sqrt{\mathfrak{e}'}\right] \end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned} x''' &= \frac{a}{\mathfrak{e}''+1}\left[-\frac{x''}{\mathfrak{a}}+\frac{y''}{\mathfrak{b}}\sqrt{\mathfrak{e}''}\right] & x' &= \frac{a}{\mathfrak{e}''+1}\left[-\frac{x''}{\mathfrak{a}}-\frac{y''}{\mathfrak{b}}\sqrt{\mathfrak{e}''}\right] \\ y''' &= \frac{b}{\mathfrak{e}''+1}\left[-\frac{y''}{\mathfrak{b}}-\frac{x''}{\mathfrak{a}}\sqrt{\mathfrak{e}''}\right] & y' &= \frac{b}{\mathfrak{e}''+1}\left[-\frac{y''}{\mathfrak{b}}+\frac{x''}{\mathfrak{a}}\sqrt{\mathfrak{e}''}\right] \end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned} x' &= \frac{a}{\mathfrak{e}'''+1}\left[-\frac{x'''}{\mathfrak{a}}+\frac{y'''}{\mathfrak{b}}\sqrt{\mathfrak{e}'''}\right] & x'' &= \frac{a}{\mathfrak{e}'''+1}\left[-\frac{x'''}{\mathfrak{a}}-\frac{y'''}{\mathfrak{b}}\sqrt{\mathfrak{e}'''}\right] \\ y' &= \frac{b}{\mathfrak{e}'''+1}\left[-\frac{y'''}{\mathfrak{b}}-\frac{x'''}{\mathfrak{a}}\sqrt{\mathfrak{e}'''}\right] & y'' &= \frac{b}{\mathfrak{e}'''+1}\left[-\frac{y'''}{\mathfrak{b}}+\frac{x'''}{\mathfrak{a}}\sqrt{\mathfrak{e}'''}\right], \end{aligned} \tag{16}$$

in welchen auf den Zusammenhang zwischen den Vorzeichen der drei Quadratwurzeln zu achten ist.

Fixirt man z. B. das Vorzeichen von $\sqrt{\mathfrak{e}'}$, so sind damit die Grössen $x''|y''$ und $x'''|y'''$ durch 14) eindeutig bestimmt und daher auch durch 15) und 16) die Vorzeichen von $\sqrt{\mathfrak{e}''}$ und $\sqrt{\mathfrak{e}'''}$.

Um diesen Zusammenhang auf seine einfachste Form zu bringen, entwickle man aus 14) und 15) die Relation:

$$\sqrt{\mathfrak{e}''} = \frac{(b\mathfrak{a}-a\mathfrak{b})x'y' + ab\mathfrak{a}\mathfrak{b}\sqrt{\mathfrak{e}'}}{\mathfrak{b}^2 x'^2 + \mathfrak{a}^2 y'^2} \tag{17}$$

und aus 14) und 16) die Relation:

$$\sqrt{\mathfrak{e}'''} = \frac{-(b\mathfrak{a}-a\mathfrak{b})x'y' + ab\mathfrak{a}\mathfrak{b}\sqrt{\mathfrak{e}'}}{\mathfrak{b}^2 x'^2 + \mathfrak{a}^2 y'^2}. \tag{18}$$

Bemerkt man nun, dass

$$a^2 b^2 \mathfrak{a}^2 \mathfrak{b}^2 \mathfrak{e}' - (b\mathfrak{a}-a\mathfrak{b})^2 x'^2 y'^2 =$$

$$= \frac{b^2}{a^2}[(b\mathfrak{a}-a\mathfrak{b})^2 x'^4 - 2a^2 b\mathfrak{a}(b\mathfrak{a}-a\mathfrak{b})x'^2 + a^4\mathfrak{a}^2(b^2-\mathfrak{b}^2)]$$

$$= \frac{b^2}{a^2}[(b\mathfrak{a}-a\mathfrak{b})x'^2 - a^2\mathfrak{a}(b+\mathfrak{b})][(b\mathfrak{a}-a\mathfrak{b})x'^2 - a^2\mathfrak{a}(b-\mathfrak{b})]$$

im Intervalle $0 \leqq x'^2 \leqq a^2$ beständig positiv ist — es ist nämlich $b\mathfrak{a}-a\mathfrak{b} = ab\left(\frac{\mathfrak{a}}{a} - \frac{\mathfrak{b}}{b}\right) = ab\left(1 - 2\frac{\mathfrak{b}}{b}\right) = ab(2t-1)$ wegen $t \geqq \frac{1}{2}$ nicht negativ und wegen $\mathfrak{a} < a$ kleiner als $\mathfrak{a}(b-\mathfrak{b})$ — so ergibt sich aus 17) und 18), dass die Vorzeichen von $\sqrt{\mathfrak{e}''}$ und $\sqrt{\mathfrak{e}'''}$ mit dem von $\sqrt{\mathfrak{e}'}$ übereinstimmen müssen. Setzt man nun auch $x'' = a\mathfrak{x}''$, $y'' = b\mathfrak{y}''$ $(\mathfrak{x}''^2 + \mathfrak{y}''^2 = 1)$, $x''' = a\mathfrak{x}'''$, $y''' = b\mathfrak{y}'''$ $(\mathfrak{x}'''^2 + \mathfrak{y}'''^2 = 1)$, so ist nach 14):

$$\mathfrak{x}'' = \frac{t}{(1-2t)\mathfrak{x}'^2 + t^2}[-(1-t)^2\mathfrak{x}' + \mathfrak{y}'\sqrt{(1-2t)\mathfrak{x}'^2 + t^3(2-t)}] \tag{19}$$

$$\mathfrak{x}''' = \frac{t}{(1-2t)\mathfrak{x}'^2 + t^2}[-(1-t)^2\mathfrak{x}' - \mathfrak{y}'\sqrt{(1-2t)\mathfrak{x}'^2 + t^3(2-t)}], \tag{20}$$

und bleiben diese Relationen bestehen, wenn man die Accente $'$, $''$, $'''$ cyclisch permutirt.

Bezeichnet man die Ausdrücke $[(1-2t)\mathfrak{x}''^2+t^2]^2$ und $[(1-2t)\mathfrak{x}'''^2+t^2]^2$ mit N'' und N''', so stellen sich den Gleichungen 13′) demnach noch die folgenden zur Seite:

$$N''\beta^2=\varphi(\mathfrak{x}''^2)a^2 \qquad N''(\gamma^2+\alpha^2)=\psi(\mathfrak{x}''^2)a^2$$
$$N''(\gamma^2-\alpha^2)^2=\chi(\mathfrak{x}''^2)a^4 \tag{13''}$$

$$N'''\gamma^2=\varphi(\mathfrak{x}'''^2)a^2 \qquad N'''(\alpha^2+\beta^2)=\psi(\mathfrak{x}'''^2)a^2$$
$$N'''^2(\alpha^2-\beta^2)^2=\chi(\mathfrak{x}'''^2)a^4. \tag{13'''}$$

Auch jedes dieser Systeme kann zur Bestimmung der Grössen $\varkappa$, a^2, $\mathfrak{x}'^2$ dienen.

Zunächst soll nur die Gleichung betrachtet werden, durch welche der Modul $\varkappa=\frac{a^2-b^2}{a^2}$ bestimmt wird; dieselbe wird anscheinend erhalten, indem man etwa aus den drei Gleichungen 13′) die Grössen $\mathfrak{x}'^2$ und a^2 eliminirt, oder aus 13″) $\mathfrak{x}''^2$, a^2, oder aus 13‴) $\mathfrak{x}'''^2$, a^2. Die Resultante dieser Elimination stellt gleich Null gesetzt die nothwendige und hinreichende Bedingung dar, welche die Grössen α^2, β^2, γ^2, $\varkappa$, t erfüllen müssen, damit Werthepaare $\mathfrak{x}'^2$, a^2 existiren, welche diese drei Gleichungen erfüllen; es tritt aber hier der besondere Fall ein, dass diese Resultante identisch, d. h. für willkürliche Werthe der Grössen α^2, β^2, γ^2, $\varkappa$, t verschwindet, denn offenbar sind alle drei Gleichungen 13′) durch das Werthepaar $\mathfrak{x}'^2=\frac{t^2}{2t-1}$, $a^2=0$ erfüllt; ebenso die Gleichungen 13″) für $\mathfrak{x}''^2=\frac{t^2}{2t-1}$, $a^2=0$ und die Gleichungen 13‴) für $\mathfrak{x}'''^2=\frac{t^2}{2t-1}$, $a^2=0$.

Man muss daher die Frage so stellen:

Welches sind die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass z. B. die Gleichungen 13′) durch ein von $\frac{t^2}{2t-1}$, 0 verschiedenes Werthepaar $\mathfrak{x}'^2$, a^2 erfüllt werden und erhält die Antwort darauf leicht durch folgende Überlegung.

Wenn die erste und zweite der Gleichungen 13′) erfüllt werden sollen, ohne dass N' und a^2 zugleich verschwinden, so muss die Gleichung:

$$\alpha^2\psi-(\beta^2+\gamma^2)\varphi=0 \tag{21}$$

erfüllt sein, und umgekehrt: wenn die Gleichung 21) erfüllt ist, so gibt es von $\frac{t^2}{2t-1}$, 0 verschiedene Werthepaare $\mathfrak{x}'^2$, a^2, welche die beiden ersten Gleichungen 13′) erfüllen, weil für willkürliche Werthe von α^2, β^2, γ^2 die Gleichung 21) nur dann durch $\mathfrak{x}'^2 = \frac{t^2}{2t-1}$ erfüllt wird, wenn φ und ψ den gemeinsamen Linearfactor $(1-2t)\mathfrak{x}'^2 + t^2$ enthalten, was aber nicht der Fall ist, solange $\varkappa$ und t willkürlich sind.

Wenn ferner die erste und dritte Gleichung 13′) erfüllt werden sollen, ohne dass N' und a^2 zugleich verschwinden, so muss die Gleichung:

$$\alpha^4\chi = (\beta^2-\gamma^2)^2\varphi^2 = 0 \tag{22}$$

erfüllt sein, und umgekehrt: wenn die erste Gleichung 13′) und die Gleichung 22) durch ein Werthepaar $\mathfrak{x}'^2$, a^2 erfüllt werden, so ist dieses Werthepaar von $\frac{t^2}{2t-1}$, 0 verschieden und wird durch dasselbe auch die dritte Gleichung 13′) erfüllt.

Dabei kann in 22) noch der gemeinsame Factor $(1-2t)\,.\,\mathfrak{x}'^2 + t^3(2-t)$ der Functionen φ und χ abgesondert werden, da er für willkürliche α^2, β^2, γ^2 sicher nicht Factor der linken Seite der Gleichung 21) ist.

Man wird daher das System 13′) durch folgende drei Gleichungen ersetzen:

$$\left.\begin{aligned}
&[1-2t)\xi'+t^2]^2\alpha^2- \\
&-4[(1-2t)\xi'+t^3(2-t)][(1-2t-(1-t)^2\varkappa)\xi'+t^2]a^2 = 0 \\
&G(\xi')\alpha^2-2[(1-2t)\xi'+t^3(2-t)]\,. \\
&\qquad .[(1-2t-(1-t)^2\varkappa)\xi'+t^2](\beta^2+\gamma^2) = 0 \\
&\xi'(\xi'-1)H^2(\xi')\alpha^4+[(1-2t)\xi'+t^3(2-t)]\,. \\
&\qquad .[1-2t-(1-t)^2\varkappa)\xi'+t^2]^2(\beta^2-\gamma^2)^2 = 0,
\end{aligned}\right\} \quad 23')$$

wobei für $\mathfrak{x}'^2$ ξ' geschrieben wurde.

Da nun aber die Grösse a^2 nur in der ersten dieser drei Gleichungen vorkommt, so wird die nothwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz von Werthepaaren ξ', a^2, welche diese drei Gleichungen erfüllen, offenbar durch das

Verschwinden der Resultante nach ξ' der zweiten und dritten Gleichung ausgedrückt.

Diese Resultante R' verschwindet sicher nicht identisch — weil für $\alpha^2 > 0$, $\beta^2 = \gamma^2 = 0$ die zweite und dritte Gleichung keine gemeinsame Wurzel haben, solange x und t willkürlich sind —, sie ist eine ganze homogene Function zehnter Dimension der Grössen $\alpha^2, \beta^2, \gamma^2$, symmetrisch in β^2 und γ^2, und enthält offenbar eine Potenz von α^2 als Factor, da für $\alpha^2 = 0$ die zweite und dritte Gleichung durch $(1-2t)\xi'+t^3(2-t) = 0$, oder $(1-2t-(1-t)^2 x)\xi'+t^2 = 0$ zugleich erfüllt werden.

Ganz analog würden die Gleichungen 13″) ein System 23″) liefern, welches aus 23′) dadurch hervorgeht, dass an die Stelle der Grössen $\alpha^2, \beta^2, \gamma^2, \xi'$ die Grössen $\beta^2, \gamma^2, \alpha^2, \xi'' = \mathfrak{x}''^2$ gesetzt werden. Die Resultante R'' der zweiten und dritten Gleichung 23″) nach ξ'' ist eine ganze homogene Function zehnter Dimension der Grössen $\alpha^2, \beta^2, \gamma^2$, symmetrisch in γ^2 und α^2, welche eine Potenz von β^2 als Factor enthält; ebenso würde sich aus 13‴) ein System 23‴) ergeben, welches aus 23″) dadurch erhalten wird, dass man an die Stelle der Grössen $\beta^2, \gamma^2, \alpha^2, \xi''$ die Grössen $\gamma^2, \alpha^2, \beta^2, \xi''' = \mathfrak{x}'''^2$ setzt. Die Resultante R''' der zweiten und dritten Gleichung 23‴) ist eine ganze homogene Function zehnter Dimension der Grössen $\alpha^2, \beta^2, \gamma^2$, symmetrisch in α^2 und β^2, welche eine Potenz von γ^2 als Factor enthält. Da nun nach dem Zusammenhange zwischen ξ', ξ'', ξ''' jedem Werthepaare ξ', a^2, welches die Gleichungen 23′) erfüllt, ein Werthepaar ξ'', a^2 entspricht, welches die Gleichungen 23″) erfüllt und umgekehrt und ebenso ein Werthepaar ξ''', a^2, welches die Gleichungen 23‴) erfüllt und umgekehrt, so müssen die Resultanten R', R'', R''', von überflüssigen Factoren gereinigt, identisch sein. Hieraus folgt aber, dass die nothwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz von Werthepaaren ξ', a^2 z. B., auf ihre einfachste Form gebracht, in den Grössen $\alpha^2, \beta^2, \gamma^2$ symmetrisch ist, wie es nach der Natur der Aufgabe von vorneherein zu erwarten ist.

Nunmehr soll die Resultante R' wirklich berechnet werden. Bezeichnet man die linke Seite der zweiten Gleichung 23′) mit

$$a_0\xi'^3+a_1\xi'^2+a_2\xi'+a_3,$$

die der dritten mit

$$b_0\xi'^4+b_1\xi'^3+b_2\xi'^2+b_3\xi'+b_4,$$

so ist, wenn $a_i b_k - a_k b_i = d_{ik}$ gesetzt wird,

$$R' = \begin{vmatrix} d_{01} & d_{02} & d_{03} & d_{04} \\ d_{02} & d_{03}+d_{12} & d_{04}+d_{13} & d_{14} \\ d_{03} & d_{04}+d_{13} & d_{14}+d_{23} & d_{24} \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}. \qquad 24)$$

Die Ausdrücke für die Coëfficienten a_i, b_k und die Elemente der Determinante sind die folgenden:

$$a_0 = (1-2t)^2\varkappa\alpha^2$$

$$a_1 = (1-2t)[2(1-2t)(1+t-t^2)-(2-4t-3t^2+2t^3)\varkappa]\alpha^2-2(1-2t)[1-2t-(1-t)^2\varkappa](\beta^2+\gamma^2)$$

$$a_2 = t^2[2(1-2t)(3-t^2)-(2-t)(2-3t-4t^2+2t^3)\varkappa]\alpha^2-2t^2[(1-2t)(1+2t-t^2)-t(1-t)^2(2-t)\varkappa](\beta^2+\gamma^2)$$

$$a_3 = t^4(2-t)[2-(2-t)\varkappa]\alpha^2-2t^5(2-t)(\beta^2+\gamma^2)$$

$$b_0 = (1-2t)^2[1-2t-(1-t)\varkappa]^2\alpha^4$$

$$b_1 = (1-2t)[-(1-2t)^2(1-2t-2t^2)+2(1-t)(1-2t)(1-2t-3t^2+t^3)\varkappa-(1-t)^2(1-2t-4t^2+2t^3)\varkappa^2]\alpha^4$$
$$+(1-2t)[1-2t-(1-t)^2\varkappa]^2(\beta^2-\gamma^2)^2$$

$$b_2 = t^2[-(1-2t)^2(2-4t-t^2)+2(1-t)(1-2t)(3-7t+t^3)\varkappa-(1-t)^2(2-t)(2-4t-2t^2+t^3)\varkappa^2]\alpha^4$$
$$+t^2[(1-2t)^2(2+2t-t^2)-2(1-t)^2(1-2t)(1+2t-t^2)\varkappa+t(1-t)^4(2-t)\varkappa^2](\beta^2-\gamma^2)^2$$

$$b_3 = -t^4[1-2t-(1-t)(2-t)\varkappa]^2\alpha^4+t^4[1-2t)(1+4t-2t^2)-2t(1-t)^2(2-t)\varkappa](\beta^2-\gamma^2)^2$$

$$b_4 = t^7(2-t)(\beta^2-\gamma^2)^2$$

(Zur Abkürzung wird im Folgenden die nach steigenden Potenzen von t geordnete ganze Function $c_0+c_1t+c_2t^2+\dots+c_nt^n$ durch $(c_0, c_1, c_2, \dots c_n)$ bezeichnet.)

$$d_{01}=$$

$$(1-2t)^3[-2(1-2t)^3(1,1,-1)+(1-t)(1-2t)^2(5,3,-6)\varkappa-4(1-t)^3(1-2t)(1+t)\varkappa^2+(1-t)^4\varkappa^3]\alpha^6$$
$$+2(1-2t)^3[1-2t-(1-t)^2\varkappa][1-2t-(1-t)\varkappa]^2\alpha^4(\beta^2+\gamma^2)$$
$$+(1-2t)^3[*+(1-2t)^2\varkappa-2(1-t)^2(1-2t)\varkappa^2+(1-t)^4\varkappa^3]\alpha^2(\beta^2-\gamma^2)^2$$

$$d_{02}=$$

$$t^2(1-2t)^2[-2(1-2t)^3(3,0,-1)+2(1-t)(1-2t)^2(7,-1,-5,1)\varkappa-4(1-t)^3(1-2t)(2,2,-1)\varkappa^2+$$
$$+t(1-t)^4(2-t)\varkappa^3]\alpha^6+2t^2(1-2t)^2[(1-2t)(1,2,-1)-t(1-t)^2(2-t)\varkappa][1-2t-(1-t)\varkappa]^2\alpha^4(\beta^2+\gamma^2)$$
$$+t^2(1-2t)^2[*+(1-2t)^2(2,2,-1)\varkappa-2(1-t)^2(1-2t)(1,2,-1)\varkappa^2+t(1-t)^4(2-t)\varkappa^3]\alpha^2(\beta^2-\gamma^2)^2$$

$$d_{03}=$$

$$t^4(1-2t)^2[-2(1-2t)^2(2-t)+(1-t)(1-2t)(11,-11,2)\varkappa-4(1-t)^3(2-t)\varkappa^2]\alpha^6$$
$$+2t^5(1-2t)^2(2-t)[1-2t-(1-t)\varkappa]^2\alpha^4(\beta^2+\gamma^2)$$
$$+t^4(1-2t)^2[*+(1-2t)(1,4,-2)\varkappa-2t(1-t)^2(2-t)\varkappa^2]\alpha^2(\beta^2-\gamma^2)^2$$

$$d_{04}=$$

$$t^7(1-2t)^2(2-t)\varkappa\alpha^2(\beta^2-\gamma^2)^2$$

$$d_{14} =$$

$$t^7(1-2t)(2-t)[2(1-2t)(1,\,1,\,-1)-(2,\,-4,\,-3,\,2)\varkappa]\alpha^2(\beta^2-\gamma^2)^2$$
$$-2t^7(1-2t)(2-t)[1-2t-(1-t)^2\varkappa](\beta^2+\gamma^2)(\beta^2-\gamma^2)^2$$

$$d_{24} =$$

$$t^9(2-t)[2(1-2t)(3,\,0,\,-1)-(2-t)(2,\,-3,\,-4,\,2)\varkappa]\alpha^2(\beta^2-\gamma^2)^2$$
$$-2t^9(2-t)[(1-2t)(1,\,2,\,-1)-t(1-t)^2(2-t)\varkappa](\beta^2+\gamma^2)(\beta^2-\gamma^2)^2$$

$$d_{03}+d_{12} =$$

$$t^2(1-2t)^2[2(1-2t)^2(1,\,-4,\,-2,\,0,\,1)+4t(1-t)(1-2t)(2,\,4,\,-2,\,-3,\,1)\varkappa-2(1-t)^3(3,\,-5,\,10,\,5,\,-6,\,1)\varkappa^2$$
$$+(1-t)^5(1+t)(2-t)^2\varkappa^3]\alpha^6+2t^2(1-2t)^2[(1-2t)^2(1,\,-4,\,6,\,4-3)-2(1-t)(1-2t)(3,\,-11,\,13,\,5,\,-8,\,2)\varkappa$$
$$+(1-t)^2(9,\,-34,\,37,\,10,\,-30,\,14,\,-2)\varkappa^2-(1-t)^5(1+t)(2-t)^2\varkappa^3]\alpha^4(\beta^2+\gamma^2)$$
$$+t^2(1-2t)^2[-2(1-2t)^2(1,\,-4,\,0,\,3,\,-1)$$
$$+(1-2t)(8,\,-32,\,40,\,18,\,-43,\,22,\,-4)\varkappa-2(1-t)^2(5,\,-16,\,13,\,15,\,-19,\,7,\,-1)\varkappa^2$$
$$+(1-t)^5(1+t)(2-t)^2\varkappa^3]\alpha^2(\beta^2-\gamma^2)^2+2t^2(1-2t)^2[-(1-2t)^2+2(1-t)^2(1-2t)\varkappa-(1-t)^4\varkappa^2](\beta^2+\gamma^2)(\beta^2-\gamma^2)^2$$

$$d_{04}+d_{13} =$$

$$t^4(1-2t)[2(1-2t)^2(1,\,-4,\,1)-2(1-t)(1-2t)(1,\,-9,\,7,\,-1)\varkappa-2(1-t)^3(1+t)(2-t)\varkappa^2$$
$$+(1-t)^4(2-t)^2\varkappa^3]\alpha^6+2t^4(1-2t)[(1-2t)^2(1,\,-4,\,5,\,2,\,-2)-(1-t)(1-2t)(5,\,-17,\,16\;8\;-10,\,2)\varkappa$$

$$+2(1-t)^2(2-t)(2,-6,4,2,-1)\varkappa^2-(1-t)^4(2-t)^2\varkappa^3]\alpha^4(\beta^2+\gamma^2)+t^4(1-2t)[2(1-2t)^2(-1,6,1,-6,2)$$
$$+(1-2t)(10,-44,60,10,-47,24,-4)\varkappa-2(1-t)^2(2-t)(3,-9,7,3,-2)\varkappa^2+(1-t)^4(2-t)^2\varkappa^3]\alpha^2(\beta^2-\gamma^2)^2$$
$$+2t^4(1-2t)[-(1-2t)^2(1,2,-1)+(1-t)^2(1-2t)(1,4,-2)\varkappa-t(1-t)^4(2-t)\varkappa^2](\beta^2+\gamma^2)(\beta^2-\gamma^2)^2$$

$$d_{14}+d_{23}=$$
$$t^6[2(1-2t)^2(1,-4,3,-1)+(1-t)(1-2t)(2-t)(-2,13,-15,6)\varkappa-6t(1-t)^4(2-t)^2\varkappa^2+t(1-t)^4(2-t)^3\varkappa^3]\alpha^6$$
$$+2t^6[(1-2t)^2(1,-4,5,0,-1)-(1-t)(1-2t)(2-t)(2,-5,1,6,-2)\varkappa$$
$$+(1-t)^2(2-t)^2(1,0,-7,8,-1)\varkappa^2-t(1-t)^4(2-t)^3\varkappa^3]\alpha^4(\beta^2+\gamma^2)+t^6[2(1-2t)^2(-1,12,-2,-8,3)$$
$$+(1-2t)(2-t)(6,-25,24,28,-32,8)\varkappa-2(1-t)^2(2-t)^2(1,-1,-4,7,-2)\varkappa^2$$
$$+t(1-t)^4(2-t)^3\varkappa^3]\alpha^2(\beta^2-\gamma^2)^2+2t^6[-(1-2t)^2(1,4,2,-4,1)$$
$$+2t(1-t)^2(1-2t)(2-t)(1,2,-1)\varkappa-t^2(1-t)^4(2-t)^2\varkappa^2](\beta^2+\gamma^2)(\beta^2-\gamma^2)^2$$

Von der Determinante 24) kann zunächst der Factor $t^{12}(1-2t)^4(2-t)\alpha^2$ dadurch abgesondert werden, dass man ihre Elemente durch die folgenden ersetzt:

$$c_{11}=\frac{d_{01}}{(1-2t)^3\alpha^2}\qquad c_{12}=\frac{d_{02}}{(1-2t)^2\alpha^2}\qquad c_{13}=\frac{d_{03}}{t^2(1-2t)^2\alpha^2}\qquad c_{14}=\frac{d_{04}}{t^4(1-2t)^2(2-t)\alpha^2}$$

$$c_{21}=\frac{d_{02}}{t^2(1-2t)^2}\qquad c_{22}=\frac{d_{03}+d_{12}}{t^2(1-2t)}\qquad c_{23}=\frac{d_{04}+d_{13}}{t^4(1-2t)}\qquad c_{24}=\frac{d_{14}}{t^6(1-2t(2-t)}$$

$$c_{31} = \frac{d_{03}}{t^4(1-2t)} \qquad c_{32} = \frac{d_{04}+d_{13}}{t^4} \qquad c_{33} = \frac{d_{14}+d_{23}}{t^6} \qquad c_{34} = \frac{d_{24}}{t^8(2-t)}$$

$$c_{41} = \frac{a_0}{1-2t} \qquad c_{42} = a_1 \qquad c_{43} = \frac{a_2}{t^2} \qquad c_{44} = \frac{a_3}{t^4(2-t)}.$$

Man bemerkt ferner, dass die Determinante $\|c_{ik}\|$ den Factor α^4 enthält. Ersetzt man nämlich ihre zweite Horizontalreihe H_2 durch

$$H'_2 = H_2 - [1-2t-(1-t)^2\varkappa](\beta^2-\gamma^2)^2 H_4,$$

(in leicht verständlicher Symbolik) und ihre dritte Horizontalreihe H_3 durch

$$H'_3 = H_3 - [(1-2t)(1,2,-1) - t(1-t)^2(2-t)\varkappa](\beta^2-\gamma^2)^2 H_4,$$

so zeigt sich, dass die Reihen H'_2 und H'_3 den Factor α^2 enthalten.

Bezeichnet man die Elemente der transformirten Determinante mit e_{ik}, so ergibt sich

$$R' = t^{12}(1-2t)^4(2-t)\alpha^6\|e_{ik}\|$$

und sind die Ausdrücke für die e_{ik} die folgenden:

$$e_{1k} = c_{1k} \qquad (k = 1, 2, 3, 4)$$

$$e_{21} =$$

$$[-2(1-2t)^3(3,0,-1)+2(1-t)(1-2t)^2(7,-1,-5,1)\varkappa-4(1-t)^3(1-2t)(2,2,-1)\varkappa^2+t(1-t)^4(2-t)\varkappa^3]\alpha^4$$
$$+2[(1-2t)^3(1,2,-1)-(1-t)(1-2t)^2(2,6,-5,1)\varkappa$$

$$+(1-t)^2(1-2t)(1,6,-7,2)\varkappa^2-t(1-t)^4(2-t)\varkappa^3]\alpha^2(\beta^2+\gamma^2)$$

$$+[*+(1-2t)^2(1,2,-1)\varkappa-(1-t)^2(1-2t)(1,4,-2)\varkappa^2+t(1-t)^4(2-t)\varkappa^3](\beta^2-\gamma^2)^2$$

$$e_{22}=$$

$$(1-2t)[2(1-2t)^2(1,-4,-2,0,1)+4t(1-t)(1-2t(2,4,-2,-3,1)\varkappa-2(1-t)^3(3,-5,10,5,-6,1)\varkappa^2$$

$$+(1-t)^5(1+t)(2-t)^2\varkappa^3]\alpha^4+2(1-2t)[(1-2t)^2(1,-4,6,4,-3)-2(1-t)(1-2t)(3,-11,13,5,-8,2)\varkappa$$

$$+(1-t)^2(9,-34,37,10,-30,14,-2)\varkappa^2-(1-t)^5(1+t)(2-t)^2\varkappa^3]\alpha^2(\beta^2+\gamma^2)$$

$$+(1-2t)[-2(1-t)^2(1-2t)^2(1+t)(2-t)$$

$$+(1-2t)(12,-38,33,26,-45,22,-4)\varkappa-(1-t)^2(2-t)(6,-15,4,18,-10,2)\varkappa^2$$

$$+(1-t)^5(1+t)(2-t)^2\varkappa^3](\beta^2-\gamma^2)^2$$

$$e_{23}=$$

$$[2(1-2t)^2(1,-4,1)-2(1-t)(1-2t)(1,-9,7,-1)\varkappa-2(1-t)^3(1+t)(2-t)\varkappa^2+(1-t)^4(2-t)^2\varkappa^3]\alpha^4$$

$$+2[(1-2t)^2(1,-4,5,2,-2)-(1-t)(1-2t)(5,-17,16,8,-10,2)\varkappa$$

$$+2(1-t)^2(2-t)(2,-6,4,2,-1)\varkappa^2-(1-t)^4(2-t)^2\varkappa^3]\alpha^2(\beta^2+\gamma^2)+(2-t)[-4(1-t)^2(1-2t)^2(1+t)$$

$$+(1-2t)(10,-27,16,19,-16,4)\varkappa-(1-t)^2(8,-21,10,8,-4)\varkappa^2+(1-t)^4(2-t)^2\varkappa^3](\beta^2-\gamma^2)^2$$

$$e_{24}=$$

$$[-2(1-t)^2(1-2t)(1+t)+(4,-11,8,3,-2)\varkappa-(1-t)^2(2-t)\varkappa^2](\beta^2-\gamma^2)^2$$

$$e_{31} =$$

$$(1-2t)[-2(1-2t)^2(2-t)+(1-t)(1-2t)(11, -11, 2)\varkappa-4(1-t)^3(2-t)\varkappa^2]\alpha^4$$
$$+2t(1-2t)(2-t)[(1-2t)^2-2(1-t)(1-2t)\varkappa+(1-t)^2\varkappa^2]\alpha^2(\beta^2+\gamma^2)$$
$$+t(1-2t)(2-t)[*+(1-2t)\varkappa-(1-t)^2\varkappa^2](\beta^2-\gamma^2)^2$$

$$e_{32} =$$

$$(1-2t)[2(1-2t)^2(1, -4, 1)-2(1-t)(1-2t)(1, -9, 7, -1)\varkappa-2(1-t)^3(1+t)(2-t)\varkappa^2+(1-t)^4(2-t)^2\varkappa^3]\alpha^4$$
$$+2(1-2t)[(1-2t)^2(1, -4, 5, 2, -2)-(1-t)(1-2t)(5, -17, 16, 8, -10, 2)\varkappa$$
$$+2(1-t)^2(2-t)(2, -6, 4, 2, -1)\varkappa^2-(1-t)^4(2-t)^2\varkappa^3]\alpha^2(\beta^2+\gamma^2)+(1-2t)(2-t)[-2(1-t)^2(1-2t)^2(1+t)$$
$$+(1-2t)(6, -17, 12, 8, -8, 2)\varkappa-(1-t)^2(6, -16, 10, 3, -2)\varkappa^2+(1-t)^4(2-t)\varkappa^3](\beta^2-\gamma^2)^2$$

$$e_{33} =$$

$$[2(1-2t)^2(1, -4, 3, -1)+(1-t)(1-2t)(2-t)(-2, 13, -15, 6)\varkappa-6t(1-t)^4(2-t)^2\varkappa^2+t(1-t)^4(2-t)^3\varkappa^3]\alpha^4$$
$$+2[(1-2t)^2(1, -4, 5, 0, -1)-(1-t)(1-2t)(2-t)(2, -5, 1, 6, -2)\varkappa$$
$$+(1-t)^2(2-t)^2(1, 0, -7, 8, -1)\varkappa^2-t(1-t)^4(2-t)^3\varkappa^3]\alpha^2(\beta^2+\gamma^2)+(2-t)[-4(1-t)^2(1-2t)^3(1+t)$$
$$+(1-2t)(8, -18, 0, 29, -20, 4)\varkappa-(1-t)^2(2-t)(2, 0, -11, 10, -2)\varkappa^2+t(1-t)^4(2-t)^3\varkappa^3](\beta^2-\gamma^2)^2$$

$$e_{34} =$$

$$[-2(1-t)^2(1-2t)(1+t)+(2-t)(1, 0, -6, 8, -2)\varkappa-t(1-t)^2(2-t)^2\varkappa^2](\beta^2-\gamma^2)^2.$$

$$e_{4k} = c_{4k} \qquad (k = 1, 2, 3, 4).$$

Aber auch die Determinante $\|e_{ik}\|$ enthält noch einmal den Factor α^2. Ersetzt man nämlich ihre erste Verticalreihe V_1 durch

$$V_1' = t^2(1-2t)V_1 - [1-2t-(1-t)^2\varkappa]V_2 + [1-2t-(1-t)^2\varkappa]^2 V_3 - (2-t)[1-2t-(1-t)^2\varkappa]^3 V_4,$$

so zeigt sich, dass alle Elemente von V_1' den Factor

$$(1-t)^4[2(1-2t)-(1-t)(2-t)\varkappa]\varkappa\alpha^2$$

enthalten.

Bezeichnet man die Elemente der Determinante nach dieser Umformung mit f_{ik}, so ist

$$R' = t^{10}(1-t)^4(1-2t)^3(2-t)[2(1-2t)-(1-t)(2-t)\varkappa]\varkappa\alpha^8\|f_{ik}\|.$$

Die Ausdrücke für die Elemente f_{ik} sind die folgenden:

$$f_{11} =$$
$$t^2[2(1-2t)^2-6(1-t)(1-2t)\varkappa+(1-t)(4-5t)\varkappa^2]\alpha^2$$

$$f_{21} =$$
$$[2(1-2t)^2(-1, 2, 1)+2(1-t)(1-2t)(1, -6, -2, 1)\varkappa+(1-t)(2, 1, -2, -5, 2)\varkappa^2-(1-t)^3(2-t)\varkappa^3]\alpha^2$$
$$+[*+4(1-t)^2(1-2t)\varkappa-2(1-t)^2(4, -7, 1)\varkappa^2+2(1-t)^3(2-t)\varkappa^3](\beta^2+\gamma^2)$$

$$f_{31} =$$
$$[-2(1-2t)^3+2(1-t)(1-2t)(2-t)(1-4t)\varkappa-(1-t)(2-t)(1, -10, 16, -6)\varkappa^2-t(1-t)^3(2-t)^2\varkappa^3]\alpha^2$$
$$+[*+4t(1-t)^2(1-2t)(2-t)\varkappa-2t(1-t)^2(2-t)(4, -7, 1)\varkappa^2+2t(1-t)^3(2-t)^2\varkappa^3](\beta^2+\gamma^2)$$

$$f_{41} =$$
$$2(1-2t)-2(1-t)(2-t)\varkappa+(1-t)(2-t)\varkappa^2$$

$$f_{ik} = e_{ik} \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, 3, 4 \\ k = \quad 2, 3, 4 \end{pmatrix}.$$

Bezeichnet man nun mit Θ, Σ, Π die symmetrischen Functionen:

$$\Theta = \alpha^2+\beta^2+\gamma^2 \qquad \Sigma = -\alpha^4-\beta^4-\gamma^4+2(\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2) \qquad \Pi = \alpha^2\beta^2\gamma^2, \tag{25}$$

so ist:

$$\beta^2+\gamma^2 = \Theta-\alpha^2 \qquad (\beta^2-\gamma^2)^2 = -3\alpha^4+2\Theta\alpha^2-\Sigma; \tag{26}$$

die Grössen $\alpha^2, \beta^2, \gamma^2$ sind die Wurzeln der cubischen Gleichung

$$z^3-\Theta z^2+\frac{1}{4}(\Theta^2+\Sigma)z-\Pi = 0,$$

insbesondere ist also:

$$\alpha^6 = \Theta\alpha^4-\frac{1}{4}(\Theta^2+\Sigma)\alpha^2+\Pi. \tag{27}$$

Mittelst der Formel 26) lassen sich daher die Elemente f_{ik} als quadratische Functionen von α^2 darstellen, deren Coëfficienten ganze Functionen von $\varkappa$, t, Θ, Σ, Π sind. Die Ausdrücke für die Elemente f_{ik} in dieser Form sind die folgenden:

$$f_{11} =$$
$$t^2[2(1-2t)^2-6(1-t)(1-2t)\varkappa+(1-t)(4-5t)\varkappa^2]\alpha^2$$

$$f_{12} =$$

$$t^2(1-2t)^2[-4(1-2t)(1+t)(2-t)+(12,-14,-27,24,-4)\varkappa-4(1-t)^2(1,2,-1)\varkappa^2]\alpha^4$$
$$+2t^2(1-2t)[(1-2t)^2(1,2,-1)-t(1-2t)(2,-10,6,-1)\varkappa-(1-t)^2(1,-2,5,-2)\varkappa^2]\Theta\alpha^2$$
$$+t^2[*-(1-2t)^2(2,2,-1)\varkappa+2(1-t)^2(1-2t)(1,2,-1)\varkappa^2-t(1-t)^4(2-t)\varkappa^3]\Sigma$$

$$f_{13} =$$

$$t^2(1-2t)(2-t)[-2(1-2t)(1+t)+(4,-11,-2)\varkappa-4(1-t)^2\varkappa^2]\alpha^4+2t^2[t(1-2t)^2(2-t)$$
$$+(1-2t)(1,0,4,-2)\varkappa-t(1-t)^2(2-t)\varkappa^2]\Theta\alpha^2+t^2[*-(1-2t)(1,4,-2)\varkappa+2t(1-t)^2(2-t)\varkappa^2]\Sigma$$

$$f_{14} =$$

$$-3t^3\varkappa\alpha^4+2t^3\varkappa\Theta\alpha^2-t^3\varkappa\Sigma$$

$$f_{21} =$$

$$[2(1-2t)^2(-1,2,1)-2(1-t)(1-2t)(1,4,2,-1)\varkappa+(1-t)(2-t)(5,-8,3,-2)\varkappa^2-3(1-t)^3(2-t)\varkappa^3]\alpha^2$$
$$+2(1-t)^2[*+2(1-2t)\varkappa-(4,-7,1)\varkappa^2+(1-t)(2-t)\varkappa^3]\Theta$$

$$f_{22} =$$

$$(1-2t)^2(2-t)[2(1-2t)(1+t)(3,-6,-1)-(12,-27,-16,59,-10)\varkappa+(1-t)^2(6,3,-16)\varkappa^2]\alpha^4$$
$$+2(1-2t)[-(1-2t)^2(3,-2,-8,2,1)$$

$$+(1-2t)(6,-10,-15,42,-19,2)\varkappa-(1-t)^2(3,-2,-14,22,-8)\varkappa^2]\Theta\alpha^2$$
$$+(1-2t)[2(1-t)^2(1-2t)^2(1+t)(2-t)-(1-2t)(12,-38,33,26,-45,22,-4)\varkappa$$
$$+(1-t)^2(2-t)(6,-15,4,18,-10,2)\varkappa^2-(1-t)^5(1+t)(2-t)^2\varkappa^3]\Sigma$$

$$f_{23} =$$

$$(1-2t)(2-t)[4(1-2t)(3,-3,-4,2)-(26,-71,36,51,-32,8)\varkappa+(1-t)^2(2-t)(7,-2,-4)\varkappa^2]\alpha^4$$
$$+2[-(1-2t)^2(7,-8,-9,10,-2)$$
$$+(1-2t)(15,-42,26,30,-33,12,-2)\varkappa-(1-t)^2(2-t)(4,-9,2,4,-2)\varkappa^2]\Theta\alpha^2$$
$$+(2-t)[4(1-t)^2(1-2t)^2(1+t)-(1-2t)(10,-27,16,19,-16,4)\varkappa$$
$$+(1-t)^2(8,-21,10,8,-4)\varkappa^2-(1-t)^4(2-t)\varkappa^3]\Sigma$$

$$f_{24} =$$

$$[6(1-t)^2(1-2t)(1+t)-3(4,-11,8,3,-2)\varkappa+3(1-t)^2(2-t)\varkappa^2]\alpha^4$$
$$+[-4(1-t)^2(1-2t)(1+t)+2(4,-11,8,3,-2)\varkappa-2(1-t)^2(2-t)\varkappa^2]\Theta\alpha^2$$
$$+[2(1-t)^2(1-2t)(1+t)-(4,-11,8,3,-2)\varkappa+(1-t)^2(2-t)\varkappa^2]\Sigma$$

$$f_{31} =$$

$$[-2(1-2t)^3+2(1-t)(1-2t)(2-t)(1,-6,2)\varkappa-(1-t)(2-t)(1,-18,38,-22,2)\varkappa^2-3t(1-t)^3(2-t)^2\varkappa^3]\alpha^2$$
$$+2t(1-t)^2(2-t)[* +2(1-2t)\varkappa-(4,-7,1)\varkappa^2+(1-t)(2-t)\varkappa^3]\Theta$$

$$f_{32} =$$

$$(1-2t)^2(2-t)[2(1-2t)(1+t)(3, -6, 1)-(14, -41, 24, 18, -8, 2)\varkappa+(1-t)^2(8, -8, 0, 1)\varkappa^2]\alpha^4$$
$$+2(1-2t)[-(1-2t)^2(3, -2, -7, 4)+(1-2t)(7, -18, 8, 12, -6)\varkappa-(1-t)^2(2-t)(2, -4, 2, -1)\varkappa^2]\Theta\alpha^2$$
$$+(1-2t)(2-t)[2(1-t)^2(1-2t)^2(1+t)-(1-2t)(6, -17, 12, 8, -8, 2)\varkappa$$
$$+(1-t)^2(6, -16, 10, 3, -2)\varkappa^2-(1-t)^4(2-t)\varkappa^3]\Sigma$$

$$f_{33} =$$

$$(1-2t)(2-t)[2(1-2t)(1+t)(6, -12, 5)-(22, -55, 16, 56, -38, 8)\varkappa+(1-t)^2(2-t)(4, 2, -3, 2)\varkappa^2]\alpha^4$$
$$+2[-(1-2t)^2(7, -8, -9, 12, -3)$$
$$+(1-2t)(2-t)(6, -11, -6, 24, -12, 2)\varkappa-(1-t)^2(2-t)^2(1, 0, -4, 2, -1)\varkappa^2]\Theta\alpha^2$$
$$+(2-t)[4(1-t)^2(1-2t)^2(1+t)-(1-2t)(8, -18, 0, 29, -20, 4)\varkappa$$
$$+(1-t)^2(2-t)(2, 0, -11, 10, -2)\varkappa^2-t(1-t)^4(2-t)^2\varkappa^3]\Sigma$$

$$f_{34} =$$

$$[6(1-t)^2(1-2t)(1+t)-3(2-t)(1, 0, -6, 8, -2)\varkappa+3t(1-t)^2(2-t)^2\varkappa^2]\alpha^4+[-4(1-t)^2(1-2t)(1+t)$$
$$+2(2-t)(1, 0, -6, 8, -2)\varkappa-2t(1-t)^2(2-t)^2\varkappa^2]\Theta\alpha^2+[2(1-t)^2(1-2t)(1+t)-(2-t)(1, 0, -6, 8, -2)\varkappa$$
$$+t(1-t)^2(2-t)^2\varkappa^2]\Sigma$$

$$f_{41} =$$

$$2(1-2t)-2(1-t)(2-t)\varkappa+(1-t)(2-t)\varkappa^2$$

$$f_{42} =$$

$$(1-2t)^2(2-t)[2(1+t)-(2+t)\varkappa]\alpha^2$$
$$+2(1-2t)[-(1-2t)+(1-t)^2\varkappa]\Theta$$

$$f_{43} =$$

$$(1-2t)(2-t)[4(1+t)-(2-t)(1+2t)\varkappa]\alpha^2$$
$$+2[-(1-2t)(1,2,-1)+t(1-t)^2(2-t)\varkappa]\Theta$$

$$f_{44} =$$

$$[2(1+t)-(2-t)\varkappa]\alpha^2-2t\Theta.$$

Mittelst der Relation 27) lässt sich nun auch die Determinante $\|f_{ik}\|$ selbst auf die Form

$$\Omega_0+\Omega_1\alpha^2+\Omega_2\alpha^4$$

bringen; dabei zeigt sich, dass Ω_1 und Ω_2 identisch verschwinden, für Ω_0 ergibt sich der Ausdruck:

$$t^2(1-t)^8(1-2t)(1+t)\varkappa[2(1-2t)-(1-t)(2-t)\varkappa]F(\varkappa, t; \alpha^2, \beta^2, \gamma^2);$$

also ist:

$$R' = t^{12}(1-t)^{12}(1-2t)^4(1+t)(2-t)\varkappa^2[2(1-2t)-(1-t)(2-t)\varkappa]^2\alpha^8 F(\varkappa, t; \alpha^2, \beta^2, \gamma^2), \qquad 28)$$

wobei gesetzt ist:

$$F(\varkappa, t;\, \alpha^2, \beta^2, \gamma^2) = \tag{29}$$

$$4\varkappa(1-\varkappa)[2(1-2t)-(1-t)(2-t)\varkappa][1-2t-(1-t)^2\varkappa][1-2t+t(2-t)\varkappa]\Theta^2\Sigma^2$$
$$-32(1-2t)^2(1-\varkappa)^2[2(1-2t)^2+4t(1-2t)(2-t)\varkappa-(1-t)(2-t)(1+2t-2t^2)\varkappa^2]\Theta\Sigma\Pi$$
$$+256(1+t)(1-2t)^4(2-t)(1-\varkappa)^3\Pi^2$$
$$+\varkappa[2(1-2t)-(1-t)(2-t)\varkappa][2(1-2t)-2(1-t)(2-t)\varkappa+(1-t)(2-t)\varkappa^2]^2\Sigma^3.$$

Die nothwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz von Werthepaaren $\mathfrak{x}'^2$, a^2 (verschieden von dem Paare $\frac{t^2}{2t-1}$, 0), welche die Gleichungen 5), 6), 7) erfüllen, wird also, solange die Grössen $\varkappa$, t, $\alpha^2, \beta^2, \gamma^2$ willkürlich sind, durch

$$F(\varkappa, t;\, \alpha^2, \beta^2, \gamma^2) = 0 \tag{30}$$

gegeben.

Es erschien mir unerlässlich, die Richtigkeit des Ausdruckes F durch eine rechnende Controle zu prüfen. Zu dem Ende wurden vermittelst der Formeln 5), 6), 7) die Grössen Θ, Σ, Π als ganze Functionen von $\mathfrak{x}'^2$, a^2, $\varkappa$, t, gebrochen durch eine Potenz von N' dargestellt. Führt man diese Ausdrücke in die Function F ein, so muss das Resultat identisch verschwinden (natürlich ohne Rücksicht auf den transcendenten Zusammenhang zwischen $\varkappa$ und t), wie auch vollständig constatirt wurde.

Die Function F ist, wie zunächst hervorgehoben werden soll, im Rationalitätsbereiche $(\varkappa, t, \alpha^2, \beta^2, \gamma^2)$ irreducibel. Dass sie im Rationalitätsbereiche $(\varkappa, t, \Theta, \Sigma, \Pi)$ irreducibel ist, ist unmittelbar zu übersehen. Sie hat nämlich die Form $C_0\Theta^2\Sigma^2 + C_1\Theta\Sigma\Pi + C_2\Pi^2 + C_3\Sigma^3$, wobei C_0, C_1, C_2, C_3 ganze ganzzahlige Functionen von $\varkappa$ und t sind, ohne einen allen vieren gemeinsamen Theiler, wie man sofort überblickt, wenn man die

Factoren von C_2 betrachtet; als quadratische Function von Π, deren Coëfficienten keinen gemeinsamen Theiler haben, ist sie irreducibel, weil ihre Discriminante $[(4C_0C_2-C_1^2)\Theta^2+4C_2C_3\Sigma]\Sigma^2$ kein Quadrat ist.

Aus der Irreducibilität im Bereiche (Θ, Σ, Π) kann nun aber auch leicht die Irreducibilität im Bereiche $(\alpha^2, \beta^2, \gamma^2)$ erschlossen werden.

Eine reducible ganze symmetrische Function von $\alpha^2, \beta^2, \gamma^2$, welche im Bereiche (Θ, Σ, Π) irreducibel ist, ist nämlich nothwendig eine Potenz einer nicht symmetrischen ganzen Function von $\alpha^2, \beta^2, \gamma^2$, und zwar einer alternirenden Function (siehe E. Netto, Substitutionentheorie, Leipzig, 1882, S. 63, Lehrsatz XVI). Also könnte nur sein $F=C[(\beta^2-\gamma^2)(\gamma^2-\alpha^2)(\alpha^2-\beta^2)]^2$, wobei C eine ganze Function von $\varkappa$ und t bezeichnet; das ist aber ersichtlich nicht der Fall, weil z. B. für $\alpha^2=\beta^2=\gamma^2$, wofür $\Theta=3\alpha^2$, $\Sigma=3\alpha^4$, $\Pi=\alpha^6$ werden, die Function F für willkürliche Werthe von $\varkappa$ und t nicht identisch verschwindet.

Die Function F ist also in der That im Rationalitätsbereiche $(\varkappa, t, \alpha^2, \beta^2, \gamma^2)$ irreducibel, solange diese Grössen willkürlich sind.

Für den Eliminationsprocess kam der transcendente Zusammenhang zwischen $\varkappa$ und t nicht in Betracht, $\varkappa$ und t waren dabei als unabhängige Veränderliche zu betrachten. Damit aber durch die Formeln 5), 6), 7) die Quadrate der Seiten eines Dreiecks $P'P''P'''$ dargestellt werden, muss nach dem Satze I, S. 43, III) t die in I, S. 33 definirte transcendente Function $\frac{-(1-\varkappa)K+E}{\varkappa E}$ sein, deren Entwickelung in der Umgebung der Stelle $\varkappa=0$ mit den Gliedern $\frac{1}{2}+\frac{3}{2^4}\varkappa+\frac{3}{2^5}\varkappa^2\ldots$ beginnt.

Wenn aber $\varkappa$ und t nicht mehr von einander unabhängig sind, so kann auch nicht mehr ohne Weiteres behauptet werden, dass die vier Functionen C_0, C_1, C_2, C_3, die Coëfficienten der Function $F=C_0\Theta^2\Sigma^2+C_1\Theta\Sigma\Pi+C_2\Pi^2+C_3\Sigma^3$, für keinen Werth von $\varkappa$ zugleich verschwinden.

In der That zeigen die Entwickelungen in der Umgebung der Stelle $\varkappa=0$:

$$C_0 = \varkappa^4 \left[\frac{3^2.5}{2^5} - \frac{3^2.5}{2^5}\varkappa - \frac{3^2.13}{2^{13}}\varkappa^2 \ldots \right]$$

$$C_1 = \varkappa^4 \left[\frac{3^4.7}{2^6} - \frac{3^4.7}{2^6}\varkappa - \frac{3^4.17}{2^{10}}\varkappa^2 \ldots \right]$$

$$C_2 = \varkappa^4 \left[\frac{3^6}{2^6} - \frac{3^6}{2^6}\varkappa - \frac{3^6.23}{2^{12}}\varkappa^2 \ldots \right]$$

$$C_3 = \varkappa^4 \left[-\frac{3^5}{2^5} + \frac{3^5}{2^5}\varkappa - \frac{3^4.421}{2^{13}}\varkappa^2 \ldots \right],$$

dass diese vier Functionen für $\varkappa = 0$ sämmtlich, und zwar mit der Ordnungszahl 4 verschwinden.

Die Gleichung $F = 0$ würde daher für willkürliche Werthe von α^2, β^2, γ^2 viermal die Wurzel $\varkappa = 0$ ergeben, die aber offenbar, wenn nicht gerade $\alpha^2 = \beta^2 = \gamma^2$ ist, für das vorliegende Problem ohne Bedeutung ist.

Diese Bemerkung regt ferner die Frage an, ob die vier Functionen C_0, C_1, C_2, C_3 nicht auch noch für andere Werthe von $\varkappa$ sämmtlich verschwinden. Der einfache Bau der Function $C_2 = 256(1+t)(1-2t)^4(2-t)(1-\varkappa)^3$ lässt aber leicht erkennen, dass dies nicht der Fall ist.

Für $t = -1$ nämlich wird $C_1 = -2^6.3^4(1-\varkappa)^4$, verschwindet also nicht, weil für $\varkappa = 1$ $t = 1$ ist.

Für $1-2t = 0$, also $t = \frac{1}{2}$, wird $C_0 = \frac{3^2}{2^4}\varkappa^4(1-\varkappa)$. Dass $\varkappa = 0$ gemeinsame Wurzel der vier Functionen C_0, C_1, C_2, C_3 ist, wurde bereits bemerkt, $\varkappa = 1$ ist aber eine solche nicht, weil dafür $t = 1$ und somit $C_3 = -2^8$ wird.

Für $t = 2$ ist $C_3 = -2^3.3^3\varkappa$, also sicher von Null verschieden, da für $\varkappa = 0$ $t = \frac{1}{2}$ ist.

Damit ist gezeigt, dass C_0, C_1, C_2, C_3 nur für den Werth $\varkappa = 0$ sämmtlich verschwinden.

Um nun aus der Function $F(\varkappa, t; \alpha^2, \beta^2, \gamma^2)$ den Factor $\varkappa^4$ abzusondern, wird an Stelle von t die Function

$$s = \frac{2t-1}{\varkappa} \qquad 31)$$

eingeführt, deren Entwickelung in der Umgebung von $\varkappa = 0$ mit den Gliedern

$$s = \frac{3}{2^3} + \frac{3}{2^4}\varkappa + \frac{3.37}{2^{10}}\varkappa^2 + \frac{3.47}{2^{11}}\varkappa^3 + \frac{3.7.73}{2^{15}}\varkappa^4 + \frac{3.17.43}{2^{16}}\varkappa^5 + \ldots \qquad 32)$$

beginnt und welche für $\varkappa = 1$ zugleich mit t den Werth 1 erhält. Setzt man nun $t = \frac{\varkappa s + 1}{2}$, so ergibt sich:

$$F(\varkappa, t;\, \alpha^2, \beta^2, \gamma^2) = \frac{\varkappa^4}{2^6}\mathfrak{F}(\varkappa, s;\, \alpha^2, \beta^2, \gamma^2),$$

wobei

$$\mathfrak{F}(\varkappa, s;\, \alpha^2, \beta^2, \gamma^2) = \qquad 33)$$

$$4(1-\varkappa)[1+2(2-\varkappa)s+\varkappa^2 s^2][3+4(2-\varkappa)s+\varkappa^2 s^2][3-2(2-\varkappa)s-\varkappa^2 s^2]\Theta^2\Sigma^2$$
$$+256(1-\varkappa)^2 s^2[9+12(2-\varkappa)s-16(1-\varkappa)s^2-4\varkappa^2(2-\varkappa)s^3-\varkappa^4 s^4]\Theta\Sigma\Pi+4096(1-\varkappa)^3 s^4(3+\varkappa s)(3-\varkappa s)\Pi^2$$
$$-[3+4(2-\varkappa)s+\varkappa^2 s^2][3(2-\varkappa)+4(2-2\varkappa+\varkappa^2)s+\varkappa^2(2-\varkappa)s^2]^2\Sigma^3$$

ist.

Die Function $\mathfrak{F}(\varkappa, s;\, \alpha^2, \beta^2, \gamma^2)$ verschwindet für keinen von $\alpha^2, \beta^2, \gamma^2$ unabhängigen Werth von $\varkappa$, und es ist somit

$$\mathfrak{F}(\varkappa, s;\, \alpha^2, \beta^2, \gamma^2) = 0 \qquad 34)$$

die Gleichung, welche zur Bestimmung von $\varkappa$ durch $\alpha^2, \beta^2, \gamma^2$ oder Θ, Σ, Π dient.

Da $\mathfrak{F}(\varkappa, s;\, \alpha^2, \beta^2, \gamma^2)$ in $\alpha^2, \beta^2, \gamma^2$ homogen ist, so hängt $\varkappa$ nur von den Verhältnissen zweier der Grössen $\alpha^2, \beta^2, \gamma^2$ zur dritten ab, wie geometrisch von vorneherein evident ist.

Nun kommt Alles darauf an, zu untersuchen, wie viele Wurzeln $\varkappa$ im Intervalle $0 \leqq \varkappa < 1$ die Gleichung

$$\mathfrak{F}(\varkappa, s; \alpha^2, \beta^2, \gamma^2) = 0$$

für ein eigentliches Dreieck ABC hat.

Ein solches Dreieck ist bekanntlich dadurch charakterisirt, dass der Ausdruck

$$\begin{aligned}\Sigma &= -(\alpha^4+\beta^4+\gamma^4)+2(\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2)\\ &= (\alpha+\beta+\gamma)(-\alpha+\beta+\gamma)(\alpha-\beta+\gamma)(\alpha+\beta-\gamma)\end{aligned}$$

einen positiven Werth hat.

Zunächst lässt sich zeigen, dass die Gleichung

$$\mathfrak{F}(\varkappa, s; \alpha^2, \beta^2, \gamma^2) = 0,$$

wenn $\Sigma > 0$ ist, sicher eine Wurzel im Intervalle $0 \leqq \varkappa < 1$ hat.

Dazu wird diese Gleichung durch Θ^6 dividirt und gesetzt:

$$\frac{\alpha^2}{\Theta} = x \qquad \frac{\beta^2}{\Theta} = y \qquad \frac{\gamma^2}{\Theta} = 1-x-y$$

$$\frac{\Sigma}{\Theta^2} = S \qquad \frac{\Pi}{\Theta^3} = P \tag{35}$$

$$\frac{1}{\Theta^6}\mathfrak{F}(\varkappa, s; \alpha^2, \beta^2, \gamma^2) = f(\varkappa, s; S, P),$$

wofür im Folgenden, wenn es der Zusammenhang gestattet, zur Abkürzung auch nur $f(\varkappa, s)$, $f(\varkappa)$ oder f geschrieben wird.

Dann ist

$$S = -4(x^2+xy+y^2)+4(x+y)-1 \tag{36}$$
$$P = xy(1-x-y) \tag{37}$$

und nach 33)

$$\begin{aligned}f(0) &= 3^2[10S^2+63SP+81P^2-54S^3]\\ f(1) &= -2^9S^3.\end{aligned}$$

Wenn sich daher nachweisen lässt, dass, solange nur $S > 0$ ist, die Function

$$10S^2+63SP+81P^2-54S^3$$

einen positiven Werth hat, oder wenigstens nicht negativ ist, so folgt daraus, dass die im Intervalle $0 \leqq x \leqq 1$ unzweifelhaft stetige Function $f(x, s; S, P)$ mindestens einmal den Werth Null annimmt, wenn x dieses Intervall durchläuft.

Fasst man x, y als rechtwinklige Punktcoordinaten auf, so wird durch $S = 0$ eine Ellipse dargestellt, deren Mittelpunkt in den Punkt $\frac{1}{3} \big| \frac{1}{3}$ fällt und welche die Seiten des Dreieckes der Punkte $0|0$, $0|1$, $1|0$ in ihren Halbirungspunkten berührt.

Für $x = y = \frac{1}{3}$ ist $S = \frac{1}{3}$, somit wird durch $S > 0$ das Innere der Ellipse $S = 0$ dargestellt.

$P = 0$ repräsentirt die drei Geraden $x = 0, y = 0, x+y-1 = 0$. Die Function S erreicht ihre obere Grenze $\frac{1}{3}$ an der Stelle $x = y = \frac{1}{3}$, die Function P ihre obere Grenze $\frac{1}{27}$ an derselben Stelle. Fixirt man einen Werth S_0 im Intervalle $0 \leqq S \leqq \frac{1}{3}$, so wird durch $4(x^2+xy+y^2)-4(x+y)+1+S_0 = 0$ eine Ellipse im Inneren von $S = 0$ gestellt, ähnlich und ähnlich gelegen zur Ellipse $S = 0$.

Die zugehörigen Werthe von P, d. h. diejenigen, welche den Werthepaaren x, y entsprechen, welche die vorstehende Gleichung erfüllen, liegen, wie nach bekannten Regeln leicht ermittelt wird, zwischen den Grenzen

$$\frac{1+9S_0-(1-3S_0)\sqrt{1-3S_0}}{108} \quad \text{und} \quad \frac{1+9S_0+(1-3S_0)\sqrt{1-3S_0}}{108},$$

wobei der $\sqrt{1-3S_0}$ ihr positiver Werth zu ertheilen ist.

Da $\sqrt{1-3S_0} \leqq 1$ ist, so ist, wenn für S_0 nun wieder S geschrieben wird:

$$\frac{S}{9} \leqq P \leqq \frac{1}{54} + \frac{S}{18} \qquad \left(0 \leqq S \leqq \frac{1}{3}\right). \tag{38}$$

Somit ist $10S^2+63SP+81P^2-54S^3 \geqq 18S^2(1-3S)$, also positiv, wenn nicht gerade $S = \frac{1}{3}$ ist; dann ist aber das

Dreieck ABC gleichseitig und $\varkappa = 0$ eben selbst Wurzel der Gleichung 33). Damit ist gezeigt:

Die Gleichung $\mathfrak{F}(\varkappa, s; \alpha^2, \beta^2, \gamma^2) = 0$ oder $f(\varkappa, s; S, P) = 0$ hat für jedes eigentliche Dreieck ABC mindestens eine Wurzel $\varkappa$ im Intervalle $0 \leqq \varkappa < 1$.

Jeder solchen positiven Wurzel $\varkappa$ entspricht nun aber auch eine negative Wurzel $\lambda = \frac{\varkappa}{\varkappa - 1}$.

Vertauscht man nämlich die Grössen a^2 und b^2 untereinander, so tritt an die Stelle von $\varkappa = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$ die Grösse $\lambda = \frac{b^2 - a^2}{b^2}$. Um das Verhalten der Functionen $\mathfrak{F}(\varkappa, s; \alpha^2, \beta^2, \gamma^2)$ und $f(\varkappa, s; S, P)$ bei dieser Vertauschung kennen zu lernen, ist es erforderlich, den Zusammenhang zwischen $t(\varkappa)$ und $t\left(\frac{\varkappa}{\varkappa - 1}\right)$, beziehungsweise $s(\varkappa)$ und $s\left(\frac{\varkappa}{\varkappa - 1}\right)$ zu ermitteln.

Hiezu wird bemerkt: Die Integrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}} \quad \text{und} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}\, d\varphi,$$

in welchen der $\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}$ ihr positiver Werth ertheilt werden soll, bleiben ungeändert, wenn a^2 und b^2 mit einander vertauscht werden; versteht man also unter a und b die positiven Quadratwurzeln aus a^2 und b^2, so ist

$$\frac{1}{a} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \varkappa \sin^2 \varphi}} = \frac{1}{b} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{\varkappa}{\varkappa - 1} \sin^2 \varphi}}$$

und

$$a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \varkappa \sin^2 \varphi}\, d\varphi = b \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \frac{\varkappa}{\varkappa - 1} \sin^2 \varphi}\, d\varphi,$$

wobei den beiden Quadratwurzeln ihre positiven Werthe ertheilt werden sollen.

Setzt man nun $b = a\sqrt{1-\varkappa}$ $(\sqrt{1-\varkappa} = |\sqrt{1-\varkappa}|)$, so ergibt sich

$$K\left(\frac{\varkappa}{\varkappa-1}\right) = \sqrt{1-\varkappa}K \qquad E\left(\frac{\varkappa}{\varkappa-1}\right) = \frac{1}{\sqrt{1-\varkappa}}E(\varkappa);$$

daraus folgt für $t = \frac{-(1-\varkappa)K+E}{\varkappa E}$:

$$t\left(\frac{\varkappa}{\varkappa-1}\right) = t(\lambda) = 1-t(\varkappa)\ [1] \qquad 39)$$

und für $s = \frac{2t-1}{\varkappa}$:

$$s\left(\frac{\varkappa}{\varkappa-1}\right) = s(\lambda) = (1-\varkappa)\,s(\varkappa).[2] \qquad 40)$$

Nun ist es leicht das Verhalten der Functionen $\mathfrak{F}(\varkappa, s; \alpha^2, \beta^2, \gamma^2)$ und $f(\varkappa, s; S, P)$ beim Übergang von $\varkappa$ in λ zu beurtheilen. Setzt man zur Abkürzung:

---

[1] Für die Coëfficienten $\lambda_{2\nu}$ der Entwickelung

$$t = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n \varkappa^n$$

folgt daraus:

$$2\gamma_{2\nu} = \gamma_1 - \binom{2\nu-1}{1}\gamma_2 + \binom{2\nu-1}{2}\gamma_3 - \ldots + \binom{2\nu-1}{2\nu-2}\gamma_{2\nu-1}$$

[2] Für die Coëfficienten $\delta_{2\nu-1}$ der Entwickelung

$$s = \sum_{n=0}^{\infty} \delta_n \varkappa^n$$

folgt daraus:

$$2\delta_{2\nu-1} = \delta_0 - \binom{2\nu-1}{1}\delta_1 + \binom{2\nu-1}{2}\delta_2 - \ldots + \binom{2\nu-1}{2\nu-2}\delta_{2\nu-2}.$$

$$\left.\begin{aligned} D_0(\varkappa, s) &= 4(1-\varkappa)[1+2(2-\varkappa)s+\varkappa^2s^2][3+4(2-\varkappa)s+\varkappa^2s^2][3-2(2-\varkappa)s-\varkappa^2s^2] \\ D_1(\varkappa, s) &= 256(1-\varkappa)^2s^2[9+12(2-\varkappa)s-16(1-\varkappa)s^2-4\varkappa^2(2-\varkappa)s^3-\varkappa^4s^4] \\ D_2(\varkappa, s) &= 4096(1-\varkappa)^3s^4(3+\varkappa s)(3-\varkappa s) \\ D_3(\varkappa, s) &= -[3+4(2-\varkappa)s+\varkappa^2s^2][3(2-\varkappa)+4(2-2\varkappa+\varkappa^2)s+\varkappa^2(2-\varkappa)s^2]^2, \end{aligned}\right\} \tag{41}$$

so ist nach 33)

$$\mathfrak{F}(\varkappa, s;\, \alpha^2, \beta^2, \gamma^2) = D_0\Theta^2\Sigma^2 + D_1\Theta\Sigma\Pi + D_2\Pi^2 + D_3\Sigma^3 \tag{42}$$

und

$$f(\varkappa, s;\, S, P) = D_0S^2 + D_1SP + D_2P^2 + D_3S^3. \tag{43}$$

Beim Übergange von $\varkappa$ zu λ treten an die Stelle von $\varkappa$, $1-\varkappa$, $2-\varkappa$, s, $(2-\varkappa)s$, $\varkappa s$ die Grössen

$$\frac{-\varkappa}{1-\varkappa},\ \frac{1}{1-\varkappa},\ \frac{2-\varkappa}{1-\varkappa},\ (1-\varkappa)s,\ (2-\varkappa)s,\ -\varkappa s;$$

damit ergibt sich aber sofort für die vier Functionen $D_\nu(\varkappa, s)$ $(\nu = 0, 1, 2, 3)$ die Relation:

$$D_\nu\left(\frac{\varkappa}{\varkappa-1},\, (1-\varkappa)s\right) = \frac{1}{(\varkappa-1)^2}\, D_\nu(\varkappa, s), \tag{44}$$

und daher auch für die Functionen $\mathfrak{F}$ und f die bemerkenswerthe Relation:

$$\mathfrak{F}(\lambda, s(\lambda)) = \frac{1}{(\varkappa-1)^2}\,\mathfrak{F}(\varkappa, s(\varkappa)), \quad f(\lambda, s(\lambda)) = \frac{1}{(\varkappa-1)^2}\, f(\varkappa, s(\varkappa)). \tag{45}$$

Jeder von 1 verschiedenen Wurzel $\varkappa$ der Gleichung $\mathfrak{F} = 0$ oder $f = 0$ entspricht somit in der That eine Wurzel $\frac{\varkappa}{\varkappa - 1}$; die Wurzel $\varkappa = 1$ tritt nur auf, wenn $\Sigma = 0$ ist, die Wurzel $\varkappa = 0$, welche mit ihrer entsprechenden zusammenfällt, gehört nur zu dem Falle des gleichseitigen Dreieckes.

Setzt man die Entwickelung der Function f für die Umgebung der Stelle $\varkappa = 0$ an in der Form

$$f = A_0 + A_1\varkappa + A_2\varkappa_2 + \ldots,$$

so muss nach 45) die Relation erfüllt sein:

$$A_n + 2A_{n-1} + 3A_{n-2} + \ldots + (n+1)A_0 =$$
$$= (-1)^n\left[A_n - \binom{n-1}{1}A_{n-1} + \binom{n-1}{2}A_{n-2} - \ldots - (-1)^n A_1\right]. \quad 46)$$

Hieraus folgt: die Coëfficienten der geraden Potenzen von $\varkappa$ werden durch die Relation 45) nicht beeinflusst, die der ungeraden Potenzen aber durch jene der geraden bestimmt; insbesondere ist:

$$\left.\begin{array}{c} A_1 = -A_0,\ A_3 = 0,\ A_5 = A_4,\ A_7 = 2A_6 - A_4, \\ A_9 = 3A_8 - 5A_6 + 3A_4,\ A_{11} = 4A_{10} - 14A_8 + 28A_6 - 17A_4 \end{array}\right\} \quad 47)$$

u. s. w.

Es lässt sich aber ferner auch zeigen, dass die Gleichung $f(\varkappa, s; S, P) = 0$, wenn $S > 0$ ist, also für jedes eigentliche Dreieck ABC, im Intervalle $0 \gtreqless \varkappa < 1$ nicht mehr als eine Wurzel hat, und zwar dadurch, dass man nachweist, die Ableitung $\frac{d}{d\varkappa} f(\varkappa, s; S, P)$ ist unter den angegebenen Voraussetzungen im Intervalle $0 \leqq \varkappa < 1$ beständig negativ. Für die Stelle $\varkappa = 0$ selbst folgt dies, wenn nicht gerade $S = \frac{1}{3}$ ist, aus 45); differentirt man nämlich vollständig nach $\varkappa$, so folgt:

$$-\frac{1}{(\varkappa-1)^2} f'(\lambda) = \frac{-2}{(\varkappa-1)^3} f(\varkappa) + \frac{1}{(\varkappa-1)^2} f'(\varkappa)$$

und daraus für $\varkappa = 0$, also auch $\lambda = 0$,

$$f'(0) = -f(0). \quad 48)$$

Nachdem nun bereits bewiesen ist, dass $f(0)$ für $0 < S < \frac{1}{3}$ positiv ist, so ist damit gezeigt, dass $f'(0)$ negativ ist. Dasselbe zeigt natürlich ebenso die Relation $A_1 = -A_0$, da $f'(0) = A_1$, $f(0) = A_0$ ist.

Für das Innere des Intervalles (0, 1) lässt sich aber dieser Nachweis aus 45) offenbar nicht ableiten, da der Coëfficient A_2, der für jedes n aus 46) wegfällt, im Ausdrucke der Coëfficienten $A_{2\nu-1}$ nicht vorkommt, somit, ohne die übrigen Coëfficienten zu beeinflussen, für sich allein ganz willkürlich bleibt.

Um die Ableitung der Function $f(\varkappa, s; S, P)$ nach $\varkappa$ zu bilden, muss der Zusammenhang zwischen der Function s und ihrer Ableitung s' betrachtet werden.

Zwischen t und t' besteht ein einfacher algebraischer Zusammenhang.

Aus $(1-\varkappa)K+(\varkappa t-1)E = 0$, der Definitionsgleichung für t, folgt durch Differentiation:

$$-K+(1-\varkappa)\frac{dK}{d\varkappa}+(\varkappa t'+t)E+(\varkappa t-1)\frac{dE}{d\varkappa} = 0.$$

Führt man darin ein:

$$\frac{dK}{d\varkappa} = \frac{(\varkappa-1)K+E}{2\varkappa(1-\varkappa)} \qquad \frac{dE}{d\varkappa} = \frac{-K+E}{2\varkappa},$$

so ergibt sich:

$$-(1+t)K+(2\varkappa t'+3t)E = 0,$$

und daraus in Verbindung mit der Definitionsgleichung:

$$2\varkappa(\varkappa-1)t'-\varkappa t^2+2(\varkappa-1)t+1 = 0. \tag{49}$$

Um die moderne Theorie der linearen Differentialgleichungen auf die Function t anzuwenden, hätte man nur zu bemerken, dass die Differentialgleichung 49) durch die Substitution $t = 1+2(1-\varkappa)\frac{z'}{z}$ in die hypergeometrische Differentialgleichung

$$\varkappa(\varkappa-1)z''+(\varkappa-1)z'-\frac{1}{4}z = 0$$

transformirt wird.

Wenn man die bekannten Darstellungen der Functionen K und E in der Umgebung der singulären Stelle $\varkappa = 1$ berücksichtiget, welche logarithmische Glieder enthalten, so überzeugt man sich leicht, dass die Ableitung t' bei der Annäherung von $\varkappa$ an die Stelle 1 logarithmisch unendlich wird.

Beiläufig seien noch die Recursionsformeln angeführt, welche sich aus 49) für die Coëfficienten γ_n der Entwickelung $t = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n t^n$ ergeben.

Für ein gerades $n > 2$ ergibt sich:

$$2(n+1)\gamma_n = (2n-1)\gamma_{n-1} - \left[2\gamma_1\gamma_{n-2} + 2\gamma_2\gamma_{n-3} + \dots + 2\gamma_{\frac{n}{2}-1}\gamma_{\frac{n}{2}}\right],$$

für ein ungerades $n > 3$:

$$2(n+1)\gamma_n = (2n-1)\gamma_{n-1} - \left[2\gamma_1\gamma_{n-2} + 2\gamma_2\gamma_{n-3} + \dots + 2\gamma_{\frac{n-3}{2}}\gamma_{\frac{n+1}{2}} + \gamma^2_{\frac{n-1}{2}}\right]. \qquad 50)$$

Für $s = \dfrac{2t-1}{\varkappa}$ erhält man aus 49) die Differentialgleichung

$$4\varkappa(\varkappa-1)s' - \varkappa^2 s^2 + 2(3\varkappa-4)s + 3 = 0. \qquad 51)$$

Mit t' zugleich wird offenbar auch s' bei der Annäherung von $\varkappa$ an die Stelle 1 logarithmisch unendlich.

Die entsprechenden Recursionsformeln für die Coëfficienten δ_n sind für ein gerades $n \geqq 4$:

$$4(n+2)\delta_n = 2(2n+1)\delta_{n-1} - (2\delta_0\delta_{n-2} + \dots + 2\delta_{\frac{n}{2}-2}\delta_{\frac{n}{2}} + \delta^2_{\frac{n}{2}-1}),$$

für ein ungerades $n \geqq 3$:

$$4(n+2)\delta_n = 2(2n+1)\delta_{n-1} - (2\delta_0\delta_{n-2} + \dots + 2\delta_{\frac{n-3}{2}}\delta_{\frac{n-1}{2}}). \qquad 50')$$

Damit lässt sich nun $\dfrac{d}{d\varkappa} f(\varkappa, s; S, P)$ als ganze Function von s darstellen. Zunächst erhält man:

$$\frac{dD_\nu}{d\varkappa} = \frac{\partial D_\nu}{\partial \varkappa} + \frac{\partial D_\nu}{\partial s} s' \qquad (\nu = 0, 1, 2, 3)$$

und mit Rücksicht auf 51):

$$4\varkappa(1-\varkappa)\frac{dD_\nu}{d\varkappa} = 4\varkappa(1-\varkappa)\frac{\partial D_\nu}{\partial \varkappa} - [\varkappa^2 s^2 + 2(4-3\varkappa)s - 3]\frac{\partial D_\nu}{\partial s} \qquad (\nu = 0, 1, 2, 3).$$

Setzt man:

$$4\varkappa(1-\varkappa)\frac{dD_\nu}{d\varkappa} = 2E_\nu \qquad (\nu = 0, 1, 2, 3), \tag{52)}$$

so ergibt sich:

$$2\varkappa(1-\varkappa)\frac{d}{d\varkappa} f(\varkappa, s; S, P) = E_0 S^2 + E_1 SP + E_2 P^2 + E_3 S^3. \tag{53)}$$

Dabei ist:

$$E_0 = 2^2(1-\varkappa)\{2.3^2(4-3\varkappa) + 3(-2^4.3, 2^4, 3.7)s + 2^2(-2^4.11, 2^8, -2^3.5, 3.7)s^2 + (2^9, 3, -2^8.11, 2^4.7.11, 2^4.7, -3.41)s^3 + 2\varkappa^2(2^6.3^2, -2^4.7^2, 2^8, -3)s^4 + \varkappa^4(2^5.11, -2^6.5, 3.19)s^5 + 2^2.\varkappa^6(13-6\varkappa)s^6 + 3\varkappa^8 s^7\} \tag{54_0)}$$

$$E_1 = 2^8(1-\varkappa)^2\{3^3 s + 2^2.3^2(1-\varkappa)s^2 - 3(2^7, -2^4.7, 3.5)s^3 + 2(2^7, -2^4.11, 0, 2^3.3)s^4 + \varkappa^2(2^5.5, -2^4.3^2, 11)s^5 + 2^2.\varkappa^4(9-4\varkappa)s^6 + 3\varkappa^6 s^7\} \tag{54_1)}$$

$$E_2 = 2^{12}(1-\varkappa)^3\{2.3^3 s^3 - 2.3^2(8-3\varkappa)s^4 - 3^3.\varkappa^2 s^5 + 2^2\varkappa^2(5-2\varkappa)s^6 + 3\varkappa^4 s^7\} \tag{54_2)}$$

$$E_3 = [3(2-\varkappa) + 4(2, -2, 1)s + \varkappa^2(2-\varkappa)s^2]\{-2.3^2(8, -10, 5) + 3(2^5, 0, -2.53, 53)s + 2(2^7.3, -2^6.11, 2^3.3.17, -2^2.11, -29)s^2 + 2^2\varkappa^2(2^5.3, -2^2.3.11, 2.29, -7)s^3 + 2^2.\varkappa^4(20, -19, 5)s^4 + 3\varkappa^6(2-\varkappa)s^5\}. \tag{54_3)}$$

Es sind also die Vorzeichen der Functionen E_0, E_1, E_2, E_3 im Intervalle $0 < \varkappa < 1$ zu untersuchen.

$\frac{E_0}{1-\varkappa}$ verschwindet für $\varkappa = 0$ und $\varkappa = 1$; für das Innere des Intervalles lässt sich zeigen, dass E_0 beständig negativ ist.

Es ist nämlich $D_0 = 4(1-\varkappa)Q Q_1 Q_2$, wenn gesetzt wird:

$$Q = 1+2(2-\varkappa)s+\varkappa^2 s^2 = \frac{5}{2} +0.\varkappa+\alpha_2\varkappa^2+\alpha_3\varkappa^3+\dots$$

$$Q_1 = 3+4(2-\varkappa)s+\varkappa^2 s^2 = 6 +0.\varkappa+\beta_2\varkappa^2+\beta_3\varkappa^3+\dots$$

$$Q_2 = 3-2(2-\varkappa)s-\varkappa^2 s^2 = \frac{3}{2} +0.\varkappa-\alpha_2\varkappa^2-\alpha_3\varkappa^3-\dots$$

Setzt man die Entwickelung des Productes $Q Q_1 Q_2$, welche mit den Gliedern $\frac{45}{4} +0.\varkappa-\frac{3^2.13}{2^9}\varkappa^2-\frac{3^2.13}{2^9}\varkappa^3-\dots$ beginnt, an in der Form: $\mathfrak{C}_0+0.\varkappa+\mathfrak{C}_2\varkappa^2+\dots$, so lässt sich zeigen, dass die Coëfficienten $\mathfrak{C}_n$ von $n = 2$ angefangen negativ sind. Hierzu werden folgende Bemerkungen vorausgeschickt. Für die Coëfficienten δ_n der Entwickelung

$$s = \delta_0+\delta_1\varkappa+\delta_2\varkappa^2+\dots$$

bestehen die Recursionsformeln

$$\delta_n = c_1^2\delta_{n-1}+\frac{c_2^2}{3}\delta_{n-2}+\dots+\frac{c_n^2}{2n-1}\delta_0+\frac{3(n+1)}{(n+2)(2n+1)}c_{n+1}^2 \qquad R_1)$$

$$\left(\text{aus II, S. 35, } \delta_{n-1} = 2\gamma_n,\ c_n = \frac{1.3.5\dots(2n-1)}{2.4.6\dots2n}\right)$$

und

$$\delta_n = \frac{2n+1}{2n+4}\delta_{n-1}-\frac{1}{4(n+2)}\left[2\delta_0\delta_{n-2}+2\delta_1\delta_{n-3}+\dots\right] \qquad R_2)$$

(aus 50′).

Aus R_1) folgt schon, dass die δ_n positive rationale Zahlen sind, aus R_2), dass auch für alle $n \geqq 3$ $\delta_n < \delta_{n-1}$ ist.

Aus R_1) folgt weiter:

$$2\delta_n = c_1^2 2\delta_{n-1} + \frac{c_2^2}{3} 2\delta_{n-2} + \ldots + \frac{c_{n-1}^2}{2n-3} 2\delta_1 + \frac{c_n^2}{2n-1} 2\delta_0 + \\ + \frac{6(n+1)}{(n+2)(2n+1)} c_{n+1}^2$$

$$\delta_{n-1} = c_1^2 \delta_{n-2} + \frac{c_2^2}{3} \delta_{n-3} + \ldots + \frac{c_{n-1}^2}{2n-3} \delta_0 + \frac{3n}{(n+1)(2n-1)} c_n^2.$$

Angenommen nun, es sei bereits constatirt, dass

$$2\delta_{n-1} > \delta_{n-2},\ 2\delta_{n-2} > \delta_{n-3}, \ldots 2\delta_2 > \delta_1,\ 2\delta_1 = \delta_0 = \frac{3}{8}$$

ist, so ist auch $2\delta_n > \delta_{n-1}$ gewiss für solche Werthe von n, für welche

$$\frac{3}{4} \frac{c_n^2}{2n-1} + \frac{6(n+1)}{(n+2)(2n+1)} c_{n+1}^2 > \frac{3n}{(n+1)(2n-1)} c_n^2 \text{ ist.}$$

Setzt man darin $c_{n+1} = \frac{2n+1}{2n+2} c_n$, so folgt die Bedingung $n > 1$.

Nun ist aber in der That $2\delta_2 = \frac{3.37}{2^9} > \frac{3}{2^4} = \delta_1$, also ist für $n > 1$

$$2\delta_n > \delta_{n-1}.$$

In der Entwickelung von $(2-x)s$ ist der Coëfficient von x^n gleich $2\delta_n - \delta_{n-1}$, also positiv; somit sind die Coëfficienten $\alpha_2, \alpha_3, \ldots \beta_2, \beta_3, \ldots$ sämmtlich positiv.

Ferner ist zu bemerken, dass $\alpha_n < \alpha_{n-1}$ und $\beta_n < \beta_{n-1}$ ist für $n > 3$.

Dies folgt — wie wohl kaum hervorgehoben zu werden braucht — auch von einem noch so grossen Werthe des n ab (ebenso wie oben für die Coëfficienten δ_n) keineswegs aus dem Umstande, dass die betreffenden Potenzreihen auch für $x = 1$ noch convergiren.

Bezeichnet man für den Augenblick $(2-x)s$ mit u, s^2 mit v und setzt die Entwickelungen von u und v in der Umgebung der Stelle $x = 0$ an in der Form:

$$u = \varepsilon_0 + \varepsilon_1 x + \varepsilon_2 x^2 + \ldots \qquad v = \Delta_0 + \Delta_1 x + \Delta_2 x^2 + \ldots,$$

so ergeben sich aus den Differentialgleichungen für u und v, welche aus 51) leicht abgeleitet werden, nämlich:

$$4x(1-x)(2-x)u'+x^2u^2+2(8-8x+x^2)u-3(4-4x+x^2)=0$$

und

$$2x(1-x)v'+x^2sv+2(4-3x)v-3s=0$$

Recursionsformeln für die Coëfficienten ε_n und Δ_n.

Aus der Differentialgleichung für u folgt, wenn $n>2$ ist,

$$8(n+2)\varepsilon_n = 4(3n+1)\varepsilon_{n-1}-2(2n-3)\varepsilon_{n-2}-(2\varepsilon_0\varepsilon_{n-2}+\ldots).$$

Angenommen, es sei bereits bekannt, dass $\varepsilon_{n-2}>\varepsilon_{n-1}$ ist, so folgt:

$$8(n+2)\varepsilon_n < 2(4n+5)\varepsilon_{n-1}-(2\varepsilon_0\varepsilon_{n-2}+\ldots),$$

also ist:

$$\varepsilon_n < \varepsilon_{n-1}.$$

Die Rechnung ergibt:

$$\varepsilon_0=\frac{3}{4},\ \varepsilon_1=0,\ \varepsilon_2=\varepsilon_3=\frac{3.5}{2^9},\ \varepsilon_4=\frac{3^4.5}{2^{14}}<\varepsilon_3,$$

also ist die Voraussetzung $\varepsilon_{n-2}>\varepsilon_{n-1}$ für $n\geqq 5$ erfüllt, und gilt $\varepsilon_n<\varepsilon_{n-1}$ für $n\geqq 4$, $\varepsilon_3=\varepsilon_2$.

Aus der Differentialgleichung für v folgt:

$$2(n+4)\Delta_n-2(n+2)\Delta_{n-1}+(\delta_0\Delta_{n-2}+\ldots+\delta_{n-2}\Delta_0)-3\delta_n=0,$$

also ist:

$$\Delta_n=\Delta_{n-1}-\frac{\delta_0\Delta_{n-2}+\ldots+\delta_{n-2}\Delta_0}{2(n+4)}+\frac{3\delta_n-4\Delta_{n-1}}{2(n+4)}$$

$\Delta_{n-1}=2\delta_0\delta_{n-1}+2\delta_1\delta_{n-2}+\ldots$, also ist, wegen $\delta_0=\frac{3}{8}$, für $n\geqq 2$ $4\Delta_{n-1}\geqq 3\delta_{n-1}>3\delta_n$,

somit ist:

$$\Delta_n<\Delta_{n-1} \text{ für } n\geqq 2.$$

Die Rechnung ergibt:

$$\Delta_0=\Delta_1=\frac{3^2}{2^6},\ \Delta_2=\frac{3^2.53}{2^{12}}<\Delta_1.$$

Da nun $\alpha_n = 2\varepsilon_n + \Delta_{n-2}$ und $\beta_n = 4\varepsilon_n + \Delta_{n-2} = \alpha_n + 2\varepsilon_n$ ist, so ist auch $\alpha_n < \alpha_{n-1}$ und $\beta_n < \beta_{n-1}$, wenn $n \geqq 4$ ist. Die Rechnung ergibt:

$$\alpha_2 = \alpha_3 = \frac{3.17}{2^8},\ \alpha_4 = \frac{3^2.151}{2^{13}};\quad \beta_2 = \beta_3 = \frac{3.11}{2^7},\ \beta_4 = \frac{3^2.7^2}{2^{11}}.$$

Jetzt lässt sich zeigen, dass die Coëfficienten $\mathfrak{C}_n$ von $n = 2$ angefangen sämmtlich negativ sind.

Zunächst ergibt sich:

$$\mathfrak{C}_n = \frac{15}{4}\beta_n - 6\alpha_n - (\beta_{n-2}\alpha_2 + \beta_{n-3}\alpha_3 \ldots + \beta_2\alpha_{n-2})$$
$$-[\beta_{n-4}\alpha_2^2 + \beta_{n-5}2\alpha_2\alpha_3 + \beta_{n-6}(2\alpha_2\alpha_4 + \alpha_3^2) + \ldots \beta_2(2\alpha_2\alpha_{n-4} + \ldots)]$$
$$-12\alpha_2\alpha_{n-2} - 12\alpha_3\alpha_{n-3} - \ldots \qquad (n \geqq 5)$$

Für $n \geqq 4$ ist $\beta_{n-2} > \beta_n$, $\beta_{n-3} > \beta_n$, $\alpha_{n-2} > \alpha_n$, also

$$\mathfrak{C}_n < \left(\frac{15}{4} - \alpha_2 - \alpha_3\right)\beta_n - (6 + 12\alpha_2)\alpha_n.$$

Es ist $\alpha_2 + \alpha_3 = 2\alpha_2 = \frac{51}{128} > \frac{1}{4}$ und $12\alpha_2 = \frac{153}{64} > 2$,

also:

$$\mathfrak{C}_n < \frac{7}{2}\beta_n - 8\alpha_n = -\frac{1}{2}(16\alpha_n - 7\beta_n).$$

Aus

$$\alpha_n = 4\delta_n - 2\delta_{n-1} + (2\delta_0\delta_{n-2} + \ldots)$$
$$\beta_n = 8\delta_n - 4\delta_{n-1} + (2\delta_0\delta_{n-2} + \ldots)$$

folgt:

$$16\alpha_n - 7\beta_n = 4(2\delta_n - \delta_{n-1}) + 9(2\delta_0\delta_{n-2} + \ldots),$$

also ist:

$$16\alpha_n - 7\beta_n > 0,\ \text{somit}\ \mathfrak{C}_n < 0,\ \text{für}\ n \geqq 5.$$

Die Rechnung ergibt $\mathfrak{C}_2 = \mathfrak{C}_3 = -\frac{3^2.13}{2^9}$, $\mathfrak{C}_4 = -\frac{3^2.869}{2^{14}}$, also sind in der That die Coëfficienten $\mathfrak{C}_n$ von $\mathfrak{C}_2$ angefangen sämmtlich negativ.

In dem betrachteten Intervalle $0 < x < 1$ sind Q und Q_1 durchaus positive Functionen, Q_2 nimmt beständig ab, erhält für $x = 1$ den Werth 0, ist somit ebenfalls durchaus positiv; also nimmt D_0 beständig ab und ist daher E_0 negativ.

Um das Vorzeichen von E_1 zu beurtheilen, wird der Ausdruck $\frac{1}{2^8} D_1(\varkappa, s)$ betrachtet, welcher vorübergehend mit $(1-\varkappa)^2 s^2 \varphi_1(\varkappa, s)$ bezeichnet wird, wobei

$$\varphi_1(\varkappa, s) = 9+12(2-\varkappa)s-16(1-\varkappa)s^2-4\varkappa^2(2-\varkappa)s^3-\varkappa^4 s^4$$

ist.

Nach Früherem nimmt $(2-\varkappa)s$ zugleich mit $\varkappa$ zu, $(1-\varkappa)s^2$ mit wachsendem $\varkappa$ ab, $\varkappa^2(2-\varkappa)s^3$ und $\varkappa^4 s^4$ zugleich mit $\varkappa$ zu. Also ist $\varphi_1(\varkappa, s) > 9+12\cdot\frac{3}{2^2}-16\cdot\frac{3^2}{2^6}-4-1=\frac{43}{4}$, durchaus — wobei hier immer das Intervall $0<\varkappa<1$ gemeint ist — positiv.

Wenn sich daher zeigen lässt, dass $(1-\varkappa)\varphi_1(\varkappa, s)$ mit wachsendem $\varkappa$ abnimmt, so gilt dies auch vom Producte aus $(1-\varkappa)\varphi_1(\varkappa, s)$ in $(1-\varkappa)s^2$, und folgt daraus, dass E_1 negativ ist. Hiezu ist erforderlich, dass

$$-\varphi_1+(1-\varkappa)\left[\frac{\partial\varphi_1}{\partial\varkappa}+\frac{\partial\varphi_1}{\partial s}s'\right]<0$$

sei, oder dass, wenn man $s' = \frac{-\varkappa^2 s^2-2(4-3\varkappa)s+3}{4\varkappa(1-\varkappa)}$ einführt und $4\varkappa\frac{d}{d\varkappa}(1-\varkappa)\varphi_1$ mit $\psi_1(\varkappa)$ bezeichnet,

$$\psi_1(\varkappa) = 72(1-\varkappa)-24(12-8\varkappa-\varkappa^2)s+16(16-20\varkappa-2\varkappa^2+ \\ +3\varkappa^3)s^2+4\varkappa^2(40-32\varkappa-\varkappa^3)s^3+8\varkappa^4(5-2\varkappa)s^4+4\varkappa^6 s^5<0$$

sei.

Von den hier auftretenden Coëfficienten der Potenzen von s wechselt nur $16-20\varkappa-2\varkappa^2+3\varkappa^3$ zwischen 0 und 1 sein Vorzeichen; er wird deshalb in zwei Theile zerlegt, welche einzeln ihr Vorzeichen nicht wechseln, nämlich

$$16-17\varkappa-2\varkappa^2+3\varkappa \text{ und } -3\varkappa.$$

Nun wird von dem Umstande Gebrauch gemacht, dass die Potenzreihe $\delta_0+\delta_1\varkappa+\delta_2\varkappa^2+\ldots$ auch für $\varkappa=1$ noch convergirt und die Summe der Coëfficienten gleich 1 ist; offenbar gilt dasselbe auch von allen ganzen positiven Potenzen der Reihe. Setzt man

$$1-(\delta_0+\delta_1+\ldots+\delta_{i-1}) = \vartheta_i,$$

so ist:

$$\delta_0+\delta_1\varkappa+\ldots+\delta_{i-1}\varkappa^{i-1}+\delta_i\varkappa^i<s<\delta_0+\delta_1\varkappa+\ldots+\delta_{i-1}\varkappa^{i-1}+\vartheta_i\varkappa^i$$

und bestehen analoge Begrenzungen für die ganzen positiven Potenzen von s.

Damit ergibt sich:

$$\psi_1(\varkappa)<72(1-\varkappa)-24(12-8\varkappa-\varkappa^2)\left[\frac{3}{2^3}+\frac{3}{2^4}\varkappa+\frac{3.37}{2^{10}}\varkappa^2+\frac{3.47}{2^{11}}\varkappa^3+\frac{3.7.73}{2^{15}}\varkappa^4+\frac{3.17.43}{2^{16}}\varkappa^5\right]$$

$$+16(16-17\varkappa-2\varkappa^2+3\varkappa^3)\left[\frac{3^2}{2^6}+\frac{3^2}{2^6}\varkappa+\frac{3^2.53}{2^{12}}\varkappa^2+\frac{3^3.7}{2^{11}}\varkappa^3+\frac{2089}{2^{12}}\varkappa^4\right]$$

$$-48\varkappa\left[\frac{3^2}{2^6}+\frac{3^2}{2^6}\varkappa+\frac{3^2.53}{2^{12}}\varkappa^2+\frac{3^3.7}{2^{11}}\varkappa^3+\frac{3^2.5.1693}{2^{20}}\varkappa^4+\frac{3^2.6707}{2^{20}}\varkappa^5+\frac{3^2.687781}{2^{27}}\varkappa^6\right]$$

$$+4\varkappa^2(40-32\varkappa-\varkappa^2)\left[\frac{3^3}{2^9}+\frac{3^4}{2^{10}}\varkappa+\frac{3^5.23}{2^{16}}\varkappa^2+\frac{51307}{2^{16}}\varkappa^3\right]$$

$$+8\varkappa^4(5-2\varkappa)\left[\frac{3^4}{2^{12}}+\frac{3^4}{2^{11}}\varkappa+\frac{3853}{2^{12}}\varkappa^2\right]+4\varkappa^6\left[\frac{3^5}{2^{15}}+\frac{32525}{2^{15}}\varkappa\right]$$

$$=-3^2.7\varkappa+\frac{3^4}{2^5}\varkappa^2+0.\varkappa^3+\frac{226307}{2^{11}}\varkappa^4-\frac{1525771}{2^{16}}\varkappa^5-\frac{4628973}{2^{16}}\varkappa^6+\frac{74305177}{2^{23}}\varkappa^7$$

$$<\varkappa[-63+3\varkappa+111\varkappa^3-23\varkappa^4-70\varkappa^5+9\varkappa^6]$$

$$<\varkappa[-60+112\varkappa^3-84\varkappa^6]=-4\varkappa[15-28\varkappa^3+21\varkappa^6].$$

Nun ist aber, da $14^2-15.21<0$ ist, $15-28\varkappa^3+21\varkappa^6$ beständig positiv, somit auch E_1 negativ.

Die Anwendbarkeit dieses Verfahrens beruht wesentlich auf dem Umstande, dass $\psi_1(1)$ von Null verschieden ist. Um das Vorzeichen von E_2 zu beurtheilen, wird der Ausdruck dafür auf die Form gebracht:

$$E_2=2^{12}(1-\varkappa)^3 s^3\{2.3^2[3-(2^3-3\varkappa)s]-\varkappa^2 s^2(3^3-2^2.5s)-\varkappa^3 s^3(2^3-3\varkappa s)\},$$

aus der man sofort ersieht: wenn $3-(2^3-3\varkappa)s$ im Intervalle $0<\varkappa<1$ negativ ist, so gilt dies auch von E_2.

Nun ist aber, da $2^3-3\varkappa>0$ ist,

$$3-(2^3-3\varkappa)s<3-(2^3-3\varkappa)\left[\frac{3}{2^3}+\frac{3}{2^4}\varkappa+\frac{3.37}{2^{10}}\varkappa^2\right]=$$

$$=-\frac{3}{2^3}\varkappa-\frac{3.13}{2^7}\varkappa^2+\frac{3^2.37}{2^{10}}\varkappa^3=-\frac{3}{2^{10}}\varkappa[128+104\varkappa-111\varkappa^2]$$

Der Ausdruck $128+104\varkappa-111\varkappa^2$ ist im betrachteten Intervalle, wie unmittelbar evident ist, positiv, also ist in der That auch E_2 negativ.

Es ist also jetzt nachgewiesen, dass die Functionen E_0, E_1 und E_2 im Intervalle $0<\varkappa<1$ beständig negativ sind.

Wäre auch E_3 negativ, so wäre damit nach 53) die Frage nach dem Vorzeichen von $\frac{d}{d\varkappa}f(\varkappa, s; S, P)$ schon erledigt; das ist aber eben nicht der Fall.

Der erste Factor von E_3 $3(2-\varkappa)+4(2-2\varkappa+\varkappa^2)s+\varkappa^2(2-\varkappa)s^2$ ist ersichtlich durchaus positiv; der zweite Factor

$$-2.3^2(8,-10,5)+3(2^5,0,-2,53,53)s+\ldots$$

verschwindet für $\varkappa=0$ und $\varkappa=1$, seine Entwickelung in der Umgebung von $\varkappa=0$ beginnt mit $2^2.3^3\varkappa$, er ist daher für hinreichend kleine Werthe von $\varkappa$ positiv. Für $\varkappa=0{\cdot}6$, $0{\cdot}7$, $0{\cdot}8$, $0{\cdot}9$ ergibt die Rechnung die Werthe $7{\cdot}1\ldots$, $-0{\cdot}3\ldots$, $-9{\cdot}6\ldots$, $-6{\cdot}8\ldots$, die Function E_3 verschwindet daher für $\varkappa=0$ und $\varkappa=1$, nimmt aber im Inneren des Intervalles $0>\varkappa>1$ sowohl positive als negative Functionswerthe an.

Man kann daher nur Folgendes behaupten: wenn ABC ein eigentliches Dreieck ist, d. h. $0 < S \leqq \frac{1}{3}$, $0 < P \leqq \frac{1}{27}$, so ist für diejenigen Werthe von $\varkappa$ des Intervalles $0 < \varkappa < 1$, für welche E_3 negativ ist, sicher auch

$$2\varkappa(1-\varkappa)\frac{d}{d\varkappa}f(\varkappa, s; S, P) = E_0 S^2 + E_1 SP + E_2 P^2 + E_3 S^3$$

negativ; für diejenigen Werthe von $\varkappa$, für welche E_3 positiv ist, ist, da E_1 und E_2 negativ sind, nach 38):

$$2\varkappa(1-\varkappa)\frac{d}{d\varkappa}f(\varkappa, s; S, P) \leqq E_0 S^2 + \frac{1}{3^2}E_1 S^2 + \frac{1}{3^4}E_2 S^2 + \frac{1}{3}E_3 S^2 = \frac{S^2}{3^4}(3^4 E_0 + 3^2 E_1 + E_2 + 3^3 E_3). \tag{55}$$

Es bleibt daher jetzt noch das Vorzeichen der Function $3^4 E_0 + 3^2 E_1 + E_2 + 3^3 E_3$ im Intervalle $0 < \varkappa < 1$ zu untersuchen. Führt man aus den Formeln 54) für E_0, E_1, E_2, E_3 ihre Ausdrücke ein und ordnet das Resultat nach Potenzen von s, so ergibt sich eine ganze Function in s vom siebenten Grade, deren Coëfficienten sämmtlich den Factor $\varkappa^2$ enthalten.

Bezeichnet man nach Absonderung dieses Factors das Resultat mit $G(\varkappa, s)$, so ist:

$$3^4 E_0 + 3^2 E_1 + E_2 + 3^3 E_3 = \varkappa^2 G(\varkappa, s), \tag{56}$$

$$G(\varkappa, s) = g_0(\varkappa) + g_1(\varkappa)s + g_2(\varkappa)s^2 + g_3(\varkappa)s^3 + g_4(\varkappa)s^4 + g_5(\varkappa)s^5 + g_6(\varkappa)s^6 + g_7(\varkappa)s^7, \tag{57}$$

$$\left.\begin{aligned}
g_0 &= -2.3^6(8-5\varkappa)\\
g_1 &= -3^6(2^4.5,\ -2^5.3,\ 31)\\
g_2 &= -2^2.3^5(2^4.5,\ -2^5.5,\ 3.37,\ -5^2)\\
g_3 &= 3^3(2^9.5,\ -2^9.5,\ -2^4.3.17,\ 2^4.85,\ -307)\\
g_4 &= 2.3^3(2^{10}.5,\ -2^8.3^2.5,\ 2^7.77,\ -2^5.5^3,\ 2^2.193,\ -3.19)\\
g_5 &= 3^2(2^{12}.7,\ -2^{14}.5,\ 2^8.3.127,\ -2^{10}.61,\ 2^4.1421,\ -2^6.3.23,\ 3^3.13)\\
g_6 &= 2^2(2^{12}.5,\ -2^{12}.17,\ 2^8.3.139,\ -2^9.187,\ 2^4.3311,\ -2^4.3^2.121,\ 3^3.113,\ -2^3.3^3)\\
g_7 &= 3(0,\ 0,\ 2^{12},\ -2^{12}.3,\ 2^8.3.19,\ -2^9.17,\ 2^4.3^2.19,\ -2^4.3^3,\ 3^3).
\end{aligned}\right\}\quad 58)$$

Für $\varkappa=0$, also $s=\frac{3}{8}$, ist $G\left(0,\frac{3}{8}\right)=-\frac{3^{12}}{2^4}$; für $\varkappa=1$, also $s=1$, ist $G(1,1)=0$. Der Umstand, dass $G(1,1)$ verschwindet, macht es unmöglich, zur Untersuchung des Vorzeichens von $G(\varkappa,s)$ dasjenige Verfahren zu benützen, welches für die Beurtheilung der Vorzeichen von E_1 und E_2 angewendet wurde, nämlich dadurch, dass man s und die Potenzen von s durch zwei ganze rationale Functionen von $\varkappa$ begrenzte, eine ganze rationale Function $\Gamma(\varkappa)$ zu bilden, so beschaffen, dass für $0<\varkappa<1$ durchaus $G(\varkappa,s)<\Gamma(\varkappa)<0$ ist. Für $\varkappa=1$ erhalten nämlich die oberen Begrenzungen von s und seinen Potenzen den Werth 1, die unteren aber Werthe, welche kleiner sind als 1, folglich ist $\Gamma(1)$ positiv und daher auch $\Gamma(\varkappa)$ in der Nähe von $\varkappa=1$ positiv.

Das Verfahren, welches hier eingeschlagen wird, um zu zeigen, dass in der That $G(\varkappa,s)$ für das betrachtete Intervall von $\varkappa$ negativ ist, lässt sich vielleicht am besten in der geometrischen Einkleidung auseinandersetzen.

An Stelle von s wird eine von $\varkappa$ unabhängige Veränderliche z eingeführt, $\varkappa$ und z werden als rechtwinkelige Punktcoordinaten in einer Constructionsebene aufgefasst.

Wenn es nun gelingt in dieser Ebene ein Flächenstück $\mathfrak{G}$ so zu begrenzen, dass die Curve $z = s(\varkappa)$ $(0 < \varkappa < 1)$ ganz im Inneren von $\mathfrak{G}$ liegt und dass überall im Inneren von $\mathfrak{G}$ $G(\varkappa, z)$ negativ ist, dann ist damit gewiss auch gezeigt, dass $G(\varkappa, s)$ im Intervalle $0 < \varkappa < 1$ durchaus negativ ist.

Nach 57) ist

$$G(\varkappa, z) = g_0 + g_1 z + g_2 z^2 + g_3 z^3 + g_4 x^4 + g_5 z^5 + g_6 z^6 + g_7 z^7, \qquad 59)$$

wobei zur Vereinfachung das Argument $\varkappa$ bei den Functionen g, wie in 58) weggelassen wird.

Über die Vorzeichen dieser ganzen Functionen g im Intervalle $0 < \varkappa < 1$ ist Folgendes zu bemerken.

g_0 ist ersichtlich durchaus negativ, ebenso g_1, weil

$$2^8.3^2 - 2^4.5.31 < 0$$

ist; ebenso g_2, denn es ist

$$2^4.5 - 2^5.5\varkappa + 3.37\varkappa^2 - 5^2\varkappa^3 > 2^4.5 - 2^5.5\varkappa + (3.37 - 5^2)\varkappa^2 =$$
$$= 2[2^3.5 - 2^4.5\varkappa + 43\varkappa^2];$$

dieser Ausdruck ist aber positiv, weil $2^6.5^2 - 2^3.5.43 < 0$ ist.

g_3 ist durchaus positiv, denn

$$\frac{1}{3^3} g_3' = -2^9.5 - 2^5.51\varkappa + 2^4.3.85\varkappa^2 - 2^2.307\varkappa^3$$
$$< -2^4(2^5.5 + 2.51 - 3.85)\varkappa^2 - 2^2.307\varkappa^3$$

ist ersichtlich negativ und der kleinste Werth von g_3, nämlich $g_3(1) = 3^4.79$ ist positiv.

g_4 ist durchaus positiv, denn

$$\frac{1}{2.3^3} g_4' = -2^8.3^2.5 + 2^8.77\varkappa - 2^5.3.5^3\varkappa^2 + 2^4.193\varkappa^3 - 3.5.19\varkappa^4$$
$$= -2^8.3^2.5 + 2^8.77\varkappa - 2^4.557\varkappa^2 - 2^4.193\varkappa^2(1-\varkappa) - 3.5.19\varkappa^4$$

ist beständig negativ, da $2^{14}.77^2 - 2^{12}.3^2.5.557 = -2^{12}.1349$ negativ ist. Der kleinste Werth von g_4 ist somit $g_4(1) = 2.3^5.19$, und da dieser positiv ist, so ist g_4 durchaus positiv.

g_5 ist durchaus positiv, denn es ist

$$\frac{1}{3^2.5!}g_5^{(5)} = -2.3[736-351\varkappa] < 0,$$

$\frac{1}{3^2.4!}g_5^{(4)}(1) = 5921$, also ist $g_5^{(4)}$ durchaus positiv; ferner ist $\frac{1}{3^2.3!}g_5'''(1) = -2^2.5.433$, also ist g_5''' durchaus negativ; ferner ist $\frac{1}{2.3^2}g_5''(1) = 3.5.511$, also ist g_5'' durchaus positiv; ferner ist $\frac{1}{3^2}g_5'(1) = -2.3.5.109$, also ist g_5' durchaus negativ; endlich ist $\frac{1}{3^2}g_5(1) = 3^2.55$, also g_5 durchaus positiv.

g_6 ist durchaus positiv, denn es ist

$$\frac{1}{2^2.6!}g_6^{(6)} = 3^3[113-2^3.7\varkappa] > 0,$$

$$\frac{1}{2^2.5!}g_6^{(5)}(1) = -2.3^2.203,\ \frac{1}{2^2.4!}g_6^{(4)}(1) = 4061,$$

$$\frac{1}{2^2.3!}g_6'''(1) = -2^2.1155,\ \frac{1}{2^3}g_6''(1) = 3^2.485,$$

$$\frac{1}{2^2}g_6'(1) = -2.3^4.11,\ \frac{1}{2^2}g_6(1) = 3^5.$$

g_7 ist durchaus positiv, denn setzt man für den Augenblick $g_7 = 3\varkappa^2\mathfrak{g}$, so ist

$$\frac{1}{5!}\mathfrak{g}^{(5)} = -3^3[2^4-6\varkappa] < 0,\ \frac{1}{4!}\mathfrak{g}^{(4)}(1) = 3^2.109,$$

$$\frac{1}{3!}\mathfrak{g}'''(1) = -2^2.5.7.11,\ \frac{1}{2}\mathfrak{g}''(1) = 3^2.109,$$

$$\mathfrak{g}'(1) = -2.3^3.5,\ \mathfrak{g}(1) = 3^3.$$

Hieraus folgt unmittelbar, dass für positive Werthe von z die dritte partielle Ableitung von G nach z, welche durch $G_{0,3}(\varkappa, z)$ bezeichnet wird, für alle betrachteten Werthe von $\varkappa$ positiv ist. Die Function $G_{0,2}(\varkappa, z)$ wächst daher mit z zugleich.

Wenn sich also zeigen lässt, dass $G_{0,2}\left(x, \frac{3}{8}\right)$ für jeden der betrachteten Werthe von x positiv ist, so ist $G_{0,2}(x,z)$ sicher positiv für $0 < x < 1$, $z \geqq \frac{3}{8}$.

Es ist

$$G_{0,2}\left(x, \frac{3}{8}\right) = 2g_2 + \frac{3^2}{2^2} g_3 + \frac{3^3}{2^4} g_4 + \frac{3^3.5}{2^7} g_5 + \frac{3^5.5}{2^{11}} g_6 + \\ + \frac{3^6.7}{2^{14}} g_7 = \frac{3^2}{2^{14}} \Phi(x), \qquad 60)$$

wobei

$$\Phi(x) =$$

$$2^{17}.3^3.5 - 2^{17}.3^2.35x + 2^{12}.3^5.41x^2 - 2^{12}.5843x^3 + \\ + 2^8.35719x^4 - 2^{13}.265x^5 + 2^4.3^3.683x^6 - 2^4.3^2.143x^7 + 3^4.7x^8$$

ist.

Der Beweis, dass $\Phi(x)$ im Intervalle $0 \leqq x \leqq 1$ positiv ist, lässt sich ganz analog wie für die Functionen g_5, g_6, g_7 erbringen; es ist nämlich

$$\frac{1}{7!} \Phi^{(7)}(x) = -2^3.3^2[286 - 63x] < 0, \quad \frac{1}{6!} \Phi^{(6)}(1) = 2^2.3^2.4633,$$

$$\frac{1}{5!} \Phi^{(5)}(1) = -2^3.100153, \quad \frac{1}{4!} \Phi^{(4)}(1) = 2.3.339079,$$

$$\frac{1}{3!} \Phi'''(1) = -2^3.3.160555, \quad \frac{1}{2} \Phi''(1) = 2^2.1543633,$$

$$\Phi'(1) = -2^3.3.171541, \quad \Phi(1) = 530775.$$

Somit ist in der That $G_{0,2}(x,z)$ positiv, wenn $0 \leqq x \leqq 1$, $z \geqq \frac{3}{8}$ ist. Hieraus folgt aber, dass die Function $G(x,z)$, für jeden Werth von x des Intervalles $0 \leqq x \leqq 1$, in einem Intervalle $\frac{3}{8} \leqq z \leqq \zeta$ ihre obere Grenze nur in einem der Begrenzungspunkte des Intervalles erreicht; wenn also $G\left(x, \frac{3}{8}\right)$ für $0 \leqq x \leqq 1$ durchaus negativ ist, und wenn sich eine

Function ζ von $\varkappa$ angeben lässt, so beschaffen, dass für jeden der betrachteten Werthe von $\varkappa$

$$\frac{3}{8} < s < \zeta \text{ ist und } G(\varkappa, \zeta)$$

negativ ist, so folgt daraus sicher, dass auch $G(\varkappa, s)$ für $0 < \varkappa < 1$ durchaus negativ ist, also nach 56) und 55), dass $\frac{d}{d\varkappa} f(\varkappa, s;\ S, P)$ für jedes eigentliche Dreieck im Intervalle $0 < \varkappa < 1$ durchaus negativ ist.

Es ist

$$G\left(\varkappa, \frac{3}{8}\right) = \sum_{\nu=0}^{7} \frac{3^\nu}{2^{3\nu}} g_\nu = \frac{3^9}{2^{21}} \Psi(\varkappa),$$

wobei

$$\Psi(\varkappa) = \sum_{\nu=0}^{7} 2^{3(7-\nu)} 3^{\nu-9} g_\nu =$$

$$-2^{17}.3^3 + 2^{17}.3^3\varkappa - 2^{12}.3^2.19\varkappa^2 - 2^{12}.109\varkappa^3 +$$
$$+ 2^8.1057\varkappa^4 - 2^{12}.3.5\varkappa^5 + 2^4.439\varkappa^6 - 2^4.5^2\varkappa^7 + 3^2\varkappa^8 \text{ ist.}$$

Von dieser ganzen Function ist aber sofort zu ersehen, dass sie für $0 \leqq \varkappa \leqq 1$ beständig negativ ist, wenn man sie auf die Form bringt:

$$-2^{17}.3^3(1-\varkappa) - 2^{12}.3^2.19\varkappa^2 - 2^8(2^4.109 - 1057\varkappa)\varkappa^3$$
$$- 2^4(2^8.3.5 - 439\varkappa)\varkappa^5 - (2^4.5^2 - 3^2\varkappa)\varkappa^7.$$

Bezeichnet man die Punkte mit den Coordinaten $0 \left| \frac{3}{8} \right.$, $1 \left| \frac{3}{8} \right.$, $1 | 1$ mit den Buchstaben L, M, N, so ist demnach die Function $G(\varkappa, z)$ auf den geraden Strecken LM und MN, mit Ausnahme des Punktes N, wo sie verschwindet, überall negativ. Wenn es also noch gelingt, eine von L nach N führende Begrenzung LTN so zu bestimmen, dass $G(\varkappa, z)$ im Inneren des Flächenstückes $LMNTL$ überall negativ ist und die Curve $z = s(\varkappa)$ für $0 < \varkappa < 1$ im Inneren verläuft, so ist damit ein Flächenstück $\mathfrak{G}$ gefunden, wie es oben beschrieben wurde.

Eine solche Begrenzung LTN liefert aber eben die jetzt zu bestimmende Function ζ.

Man wird sich zunächst an die für das Intervall $0<\varkappa<1$ geltende Begrenzung erinnern:

$$\frac{3}{8}<s<\delta_0+\delta_1\varkappa+\ldots+\delta_{i-1}\varkappa^{i-1}+\vartheta_i\varkappa^i \quad (\delta_0+\ldots+\delta_{i-1}+\vartheta_i=1)$$

und nun den kleinsten Werth von i zu ermitteln suchen, für welchen $G(\varkappa, \delta_0+\delta_1\varkappa+\ldots+\vartheta_i\varkappa^i)$ durchaus negativ ist.

Dazu betrachte man die Lage der Tangente $\mathfrak{T}$ an die Curve $G(\varkappa, z)=0$ und der Tangente $\mathfrak{t}_i$ an die Curve $z= =\delta_0+\delta_1\varkappa+\ldots+\vartheta_i\varkappa^i$ im Punkte N.

Die Gleichung der Tangente $\mathfrak{T}$ ist:

$$z-\mathfrak{t}=\frac{4}{3}(\varkappa-1)$$

und nun zeigt sich, dass für $i=3$ es zuerst eintritt, dass die Tangente $\mathfrak{t}_i$ innerhalb des Dreieckes LMN in der Nähe des Punktes N auf derjenigen Seite von $\mathfrak{T}$ verläuft, auf welcher $G(\varkappa, z)<0$ ist.

Um aber eine recht deutlich negative Function zu erhalten, wurde $i=4$, also

$$\zeta=\frac{3}{2^3}+\frac{3}{2^4}\varkappa+\frac{3.37}{2^{10}}\varkappa^2+\frac{3.47}{2^{11}}\varkappa^3+\frac{533}{2^{11}}\varkappa^4 \qquad 62)$$

gesetzt.

Nun ist nachzusehen, ob in der That $G(\varkappa, \zeta)$ im Intervalle $0<\varkappa<1$ durchaus negativ ist; diese Function ist in $\varkappa$ vom 36. Grade, verschwindet für $\varkappa=1$ und enthält daher den Factor $\varkappa-1$. Setzt man

$$G(\varkappa, \zeta)=(\varkappa-1)H(\varkappa), \qquad 63)$$

so ist $H(\varkappa)$ eine ganze Function 35. Grades in $\varkappa$, welche durch $\sum_{\nu=0}^{35} a_\nu\varkappa_\nu$ bezeichnet wird, wobei die a_ν rationale Zahlen sind, deren Nenner nur Potenzen von 2 sind. Die in der folgenden Tabelle angegebenen Zahlen $\mathfrak{a}_\nu$ stehen mit den a_ν in dem Zusammenhange, dass für ein positives a_ν $\mathfrak{a}_\nu<a_\nu$ dadurch

gemacht wurde, dass die auf die letzte beibehaltene Stelle von a_ν folgenden Decimalen weggelassen wurden, für ein negatives a_ν aber $-\mathfrak{a}_\nu > -a_\nu$ dadurch gemacht wurde, dass die letzte beibehaltene Stelle von a_ν um eine Einheit erhöht wurde.

Bezeichnet man also die ganze Function $\sum_{\nu=0}^{35} \mathfrak{a}_\nu x^\nu$ mit $\mathfrak{H}(x)$, so ist für positive Werthe von x

$$H(x) > \mathfrak{H}(x). \tag{64}$$

Tabelle der Coëfficienten $\mathfrak{a}_\nu$.

ν	$\mathfrak{a}_\nu$	ν	$\mathfrak{a}_\nu$	ν	$\mathfrak{a}_\nu$	ν	$\mathfrak{a}_\nu$
0	33215	9	5978	18	—2796	27	36
1	0	10	— 307	19	1027	28	—20
2	3805	11	— 198	20	— 330	29	4
3	4757	12	— 9276	21	525	30	— 0·7
4	5008	13	10907	22	— 569	31	0·7
5	—13881	14	— 4594	23	340	32	— 0·9
6	788	15	757	24	— 110	33	0·4
7	448	16	— 1949	25	36	34	— 0·09
8	—17555	17	3794	26	— 41	35	0·006

Nun ist aber sehr leicht zu sehen, dass die Function $\mathfrak{H}(x)$ im betrachteten Intervalle $0 < x < 1$ beständig positiv ist.

Es ist nämlich:

$$\sum_{\nu=0}^{5} \mathfrak{a}_\nu x^\nu > (46785-13881)x^5 = 32904x^5,$$

$$\sum_{\nu=0}^{8} \mathfrak{a}_\nu x^\nu > (32904+788+448-17555)x^8 = 16585x^8,$$

$$\sum_{\nu=0}^{9} \mathfrak{a}_\nu x^\nu > (16585+5978)x^9 = 22563x^9.$$

Ferner bemerke man, dass die Summe der negativen Coëfficienten, welche auf $\mathfrak{a}_9$ folgen, nämlich

$$\mathfrak{a}_{10}+\mathfrak{a}_{11}+\mathfrak{a}_{12}+\sum_{\lambda=7}^{17}\mathfrak{a}_{2\lambda}=-20191\cdot 69$$

dem absoluten Betrage nach kleiner ist als 22563, also ist

$$\mathfrak{H}(\varkappa)>(22563-20192)\varkappa^9=2371\varkappa^9.$$

Daraus folgt nach 64) und 63), dass $G(\varkappa,\zeta)$ für alle betrachteten Werthe von $\varkappa$ durchaus negativ ist und weiter nach den früheren Ausführungen, dass auch die Function $G(\varkappa, s)$ beständig negativ ist.

Damit ist nun vollständig bewiesen, — wie schon oben hervorgehoben wurde — dass die Ableitung $\frac{d}{d\varkappa}f(\varkappa, s;\, S, P)$ für jedes eigentliche Dreieck ABC im Intervalle $0<\varkappa<1$ beständig negativ ist, also auch der im zweiten Abschnitte S. 43 vorausgesetzte Satz: Die Gleichung $\mathfrak{F}(\varkappa, s;\, \alpha^2, \beta^2, \gamma^2)=0$, oder $f(\varkappa, s;\, S, P)=0$ hat für jedes eigentliche Dreieck ABC im Intervalle $0\leqq\varkappa<1$ eine und nur eine Wurzel $\varkappa$.

Der Fall des gleichseitigen Dreieckes erledigt sich auch leicht direct: einerseits folgt aus

$$f\left(0, \frac{3}{8};\, S, P\right)\geqq 2.3^4 S^2(1-3S),$$

dass die Wurzel $\varkappa=0$ nur dem Werthe $S=\frac{1}{3}$ entspricht, anderseits zeigt die Zerlegung

$$f\left(\varkappa, s;\, \frac{1}{3}, \frac{1}{27}\right)=-\frac{1}{3^6}\varkappa^2[3+(4-\varkappa)s]^3[3+(4-3\varkappa)s]^3,$$

dass dem gleichseitigen Dreiecke im Intervalle $0\leqq\varkappa<1$ nur die eine, doppelt zu zählende, Wurzel $\varkappa=0$ entspricht.

Die Verhältnisse der Luftfeuchtigkeit auf dem Sonnblickgipfel

von

J. Hann,

w. M. k. Akad.

(Mit 3 Textfiguren.)

Seit dem September 1893 functionirt auf dem Sonnblickgipfel ein Richard'sches registrirendes Hygrometer neuerer Construction (hygroskopische Substanz ein Bündel Haare statt einer Membrane wie früher) in vollkommen zufriedenstellender Weise. Das Instrument ist vor der Absendung am meteorologischen Institute in Wien justirt und geprüft worden.

Ein gleiches Instrument, das an der k. k. Centralanstalt in Verwendung steht, zeigt eine stetige sehr gute Übereinstimmung mit einem Koppe'schen Haarhygrometer und mit dem Psychrometer; in Fällen der Nichtübereinstimmung mit letzteren bei Frost darf man wohl dem Haarhygrometer die grössere Verlässlichkeit zuschreiben. Auf dem Sonnblickgipfel ist leider die Controle des registrirenden Hygrometers durch das Psychrometer nur in den seltensten Fällen möglich, weil bei den fast stets unter dem Gefrierpunkte bleibenden Lufttemperaturen das Psychrometer zu unverlässlich ist. Im Sommer bei Temperaturen über dem Gefrierpunkte ist auch die Luftfeuchtigkeit fast constant so hoch und der Sättigung nahe, dass aus diesem Grunde die Vergleichungen des Hygrometers mit dem Psychrometer von geringer Bedeutung sind. Nur im Juli und August 1894 gab es an einigen Tagen bei relativ hoher Temperatur grössere Lufttrockenheit, welche einigermassen eine Vergleichung zwischen Psychrometer und Hygrometer gestatten. Leider war

damals die Bedienung des Psychrometers, von welcher ja so viel abhängt, durch den neuen, noch recht ungeübten Beobachter keine zuverlässige, so dass die Fälle der Nichtübereinstimmung zwischen Hygrometer und Psychrometer auch nicht ersterem zur Last geschrieben werden können. Ich will diese Fälle und die daran angeschlossene Vergleichung hier folgen lassen.

	t	t'	Psychrometer e	Psychrometer e/E	Hygrometer Richard	Hygrometer Koppe
25. Juli 7h	9·6	5·6	5·1	57%	50%	62%
2	11·2	7·4	6·1	62	66	64
9	10·2	8·2	7·3	78	54	72
26. Aug. 7h	7·8	4·4	4·8	61	45	55
2	9·6	5·6	5·1	57	45	54
9	8·6	5·4	5·4	64	52	55

Da an beiden Tagen fast Windstille herrschte, so wird das Psychrometer schon desshalb eine etwas zu grosse Feuchtigkeit angegeben haben. Die mittleren Differenzen sind:

Richard—Koppe = — 8%
Richard—Psychrometer = —11
Koppe—Psychrometer = — 3

hiernach muss es scheinen, dass das Hygrometer Richard eine zu kleine Luftfeuchtigkeit angegeben habe.

Während der im Winter öfter eintretenden grossen Trockenheit der Luft war aber die Übereinstimmung zwischen dem Hygrographen und dem Koppe'schen Haarhygrometer zumeist eine vollständig befriedigende.[1] Allerdings aber nicht immer. Zu Beginn der Trockenheit, wie derselbe durch den Hygrographen angegeben wird, bleibt das Koppe'sche Haarhygrometer anfänglich zurück und holt erst nach einiger Zeit den Hygrographen ein. Die Ursache ist leicht einzusehen. Der Mechanismus des Koppe'schen Haarhygrometers, das sonst

---

[1] Auch die Gegenüberstellung der ersten eingesendeten Registrirungen von August 1893 mit den Angaben des justirten Haarhygrometers ergaben schon dieses Resultat.

als ein ganz vortreffliches Instrument bezeichnet werden muss, ist ziemlich delicater Natur. Durch geringen Ansatz von Eis, Eisnadeln und Rauhfrost kann derselbe lahmgelegt werden, das Instrument kann den Feuchtigkeitsänderungen dann nicht mehr folgen. Herr Ekholm hat desshalb mit demselben während des Winters auf Spitzbergen keine Vergleichungen ausführen können. Wenn also das Koppe'sche Haarhygrometer hinter dem Hygrographen zurückbleibt, so spricht dies durchaus noch nicht gegen den letzteren, der in der jetzigen Form einen viel kräftigeren Mechanismus hat; in Fällen, wo die beiden Instrumente bei grösserer Lufttrockenheit übereinstimmen, also wohl das Koppe'sche Instrument freie Bewegung hatte, spricht dies aber ganz entschieden auch für die Richtigkeit der Angaben des Hygrographen. Die Graduirung ist ja bei beiden ganz unabhängig erfolgt, und sie ist bei den Koppe'schen Hygrometern mit grosser Sorgfalt ausgeführt, wofür schon vielfache Erfahrungen vorliegen. Diese Erfahrungen kommen also dann auch den Richard'schen Hygrographen zu Gute, welche, wenigstens bei uns, noch weniger erprobt sind. Übrigens weiss ich aus mündlichen Mittheilungen von Herrn k. u. k. Oberstlieutenant Hartl, der einen Hygrographen zu Argos in Griechenland durch häufige tägliche Ablesungen des Psychrometers bei den grossen Lufttrockenheiten des Sommers dort einige Monate hindurch einer sorgfältigen Controle unterzogen hat, dass der Hygrograph Richard dort tadellos functionirt hat, die Scalen desselben also richtig angefertigt sind.

So dürfen wir wohl auch dem gleichen Instrumente, das auf dem Sonnblickgipfel functionirt, das vollste Vertrauen entgegenbringen, wenngleich es leider bisher unmöglich gewesen ist, genügende directe Vergleichungen desselben ausführen zu können, und die wenigen, die oben mitgetheilt worden sind, gegen die Richtigkeit der Angaben desselben zu sprechen scheinen. Um den Zweifel zu beheben, ob nicht doch gerade das auf dem Sonnblick functionirende Instrument bei grösseren Trockenheitsgraden der Luft einer gewissen erheblichen positiven Correction bedarf, habe ich in der nachfolgenden kleinen Tabelle die correspondirenden Angaben des Hygrographen

Richard und eines Koppe'schen Haarhygrometers während einiger Fälle sehr grosser Trockenheit der Luft im Winter 1893/94 zusammengestellt. Es ist vielleicht nicht übel angebracht, auch eine kleine Probe der Leistungsfähigkeit eines anderen derartigen Instrumentes, das am meteorologischen Institute in Wien in Verwendung steht, daran anzuschliessen und die Angaben desselben jenen eines Psychrometers gegenüberzustellen. *R* bedeutet in der Tabelle Hygrograph Richard, *K* Koppe'sches Haarhygrometer, Pschr. bedeutet Psychrometer.

Vergleichung des Hygrographen Richard (*R*) mit dem Koppe'schen Haarhygrometer (*K*) und dem Psychrometer.

	7h		2h		9h	
	R	*K*	*R*	*K*	*R*	*K*
			December 1893 Sonnblick			
7.	14	69	45	65	29	45
8.	35	34	65	67	58	61
17.	32	70	27	48	39	53
18.	33	36	50	47	45	44
19.	38	38	43	44	58	60
20.	95	96	93	100	92	100
			Jänner 1894 Sonnblick			
13.	71	75	60	62	47	50
14.	38	39	39	42	42	46
15.	46	48	56	54	50	52
16.	32	35	43	43	36	36
17.	50	52	52	58	78	84
			Juli 1894 Wien			
	R	Pschr.	*R*	Pschr.	*R*	Pschr.
22.	81	83	46	39	53	56
23.	75	75	37	34	62	60
24.	76	77	40	37	70	68
25.	74	73	35	27	56	50

Man sieht, dass beim Einsetzen grösserer Lufttrockenheit das Koppe'sche Haarhygrometer noch grössere Luftfeuchtig-

keit angibt, dann aber mit dem Hygrographen sich in Übereinstimmung setzt. Lässt man desshalb die ersten beiden Tage, den 7. und 17. December weg, so erhält man folgende Mittelwerthe:

7h		2h		9h		Mittel	
R	*K*	*R*	*K*	*R*	*K*	*R*	*K*
Sonnblick. December 1893, 4 Tage							
50	51	63	64	63	66	59	60
Sonnblick. Jänner 1894, 5 Tage							
47	50	50	52	51	53	49	52

Die Übereinstimmung ist also eine fast vollständige, im Mittel ist der Unterschied beider Instrumente bloss 2%. Wir dürfen desshalb den Angaben des Hygrographen Richard auf dem Sonnblickgipfel das vollste Zutrauen schenken.

Für das Wiener Instrument erhalten wir folgende correspondirende Angaben mit jenen eines Psychrometers im Mittel von 4 Julitagen:

7h		2h Nachm.		9h Abends	
R	Pschr.	*R*	Pschr.	*R*	Pschr.
76%	77%	39%	34%	60%	59%

der mittlere Unterschied ist 2%.

Nach diesen Erörterungen über die Zuverlässigkeit der Angaben des Hygrographen Richard können wir nun zu den aus den Registrirungen desselben sich ergebenden Resultaten übergehen, die umsomehr Interesse beanspruchen dürfen, als, soviel ich weiss, noch keine derartigen Daten von einem Berggipfel vorliegen, die sich über ein ganzes Jahr erstrecken.

I. Der jährliche Gang der Luftfeuchtigkeit auf dem Sonnblickgipfel.

Die folgende Tabelle enthält die aus den stündlichen Aufzeichnungen der relativen Feuchtigkeit und der Temperatur sich ergebenden Monatsmittel der Luftfeuchtigkeit auf dem Sonnblickgipfel, wohl die ersten verlässlichen derartigen Daten, die von einem hohen Berggipfel überhaupt vorliegen.

Absolute und relative Feuchtigkeit auf dem Sonnblickgipfel.

(Hygrograph Richard).

Jahr 1893/94	24-stünd. Mittel	Mittlere tägliche Extreme		Tägliche Schwankung		Absolutes Minimum	Temperatur	Dampfdruck
				aperiodisch	period.		24-stündiges Mittel	
September..	87·2	93·5	77·5	16·0	4·4	33	— 1°1	3·64
October....	78·7	88·3	67·5	20·8	6·2	25	— 3·5	2·81
November..	79·3	90·9	63·5	27·4	7·1	27	— 8·1	2·01
December..	67·0	80·9	50·5	30·4	3·8	11	—10·9	1·37
Jänner.....	74·4	83·5	61·8	21·7	4·0	30	—12·2	1·37
Februar....	72·5	86·0	59·8	26·2	5·8	27	—13·5	1·22
März......	77·5	90·2	63·6	26·6	7·2	35	—11·7	1·50
April......	83·6	94·5	72·5	22·0	9·0	33	— 6·4	2·39
Mai.......	86·8	93·0	79·1	13·9	6·0	38	— 3·5	3·08
Juni.......	89·0	92·5	84·5	8·0	2·0	56	— 3·0	3·31
Juli.......	85·9	92·3	76·8	15·5	7·2	45	2·7	4·79
August....	82·6	90·3	72·7	17·6	8·5	36	1·0	4·10
(September.	83·7	92·2	74·1	18·1	4·9	25	— 1·6	3·44)
Herbst.....	81·7	90·9	69·5	21·4	5·9	25	— 4·3	2·82
Winter.....	71·3	83·5	57·4	26·1	4·5	11	—12·2	1·32
Frühling....	82·6	92·6	71·7	20·8	7·4	33	— 7·2	2·32
Sommer....	85·8	91·7	78·0	13·7	5·9	36	0·2	4·07
Jahr.......	80·3	89·7	69·1	20·5	5·9	11	— 5·9	2·63

Der jährliche Gang der relativen Feuchtigkeit auf den höheren Berggipfeln ist in unseren Gegenden der entgegengesetzte von jenem in der Niederung, das Minimum, die grösste Trockenheit, tritt im Winter ein, das Maximum im Frühling und Sommer. Das wusste man schon aus früheren Feuchtigkeitsmessungen an Hochstationen der Alpen, welche aber alle an der Unsicherheit des Psychrometers bei tiefen Temperaturen leiden und desshalb ziemlich unverlässlich sind. Die Unsicherheit der Psychrometerangaben liegt zum grösseren Theile in der Schwierigkeit der zweckmässigen

Bedienung desselben, wenn die nasse Thermometerkugel mit Eis überzogen ist. Die Aufmerksamkeit, welche das Psychrometer unter diesen Verhältnissen erfordert, ist von den Beobachtern auf hohen Berggipfeln bei den dort herrschenden Witterungsverhältnissen nicht immer zu erwarten. Die beiden Thermometer zeigen meist die gleiche Temperatur oder es steht sogar das mit Eis überzogene Thermometer höher. Es nützt da auch nicht die von Herrn Ekholm empfohlene Anbringung einer constanten Correction von —0·45, weil oft die Eishülle zu dick, mit Rauhfrost überzogen etc. Man kommt trotzdem immer auf eine zu grosse Feuchtigkeit, wie ich mich selbst an den Psychrometer-Beobachtungen auf dem Sonnblickgipfel überzeugt habe. Das Psychrometer müsste unter so schwierigen Verhältnissen fast möchte man sagen unter der Obsorge eines Physikers stehen, um wenigstens richtige Mittelwerthe der Luftfeuchtigkeit zu liefern. Mit Hinblick auf diese Verhältnisse tritt der Vortheil der Richard'schen selbstregistrirenden Hygrometer erst recht deutlich zu Tage.

Ein anderer Übelstand der aus den Psychrometer-Angaben auf grossen Höhen abgeleiteten Mitteln der Feuchtigkeit liegt auch darin, dass man meist übersehen hat, dass die gewöhnlichen Psychrometertafeln zur genaueren Auswerthung der ersteren nicht ausreichen, sondern mit der Höhe wachsender, nicht unerheblicher Correctionen bedürfen. Die Hygrometer-Angaben sind natürlich von diesem Übelstande frei.

Die einjährigen Feuchtigkeitsbeobachtungen auf dem Theodulpass in 3330 *m* sind durch die Angaben eines Haarhygrometers controlirt worden und daher vielleicht einigermassen vergleichbar. Die Mittel der Jahreszeiten sind:

Relative Feuchtigkeit					Absolute Feuchtigkeit				
Winter	Frühling	Sommer	Herbst	Jahr	Winter	Frühling	Sommer	Herbst	Jahr
Sonnblick 3100 *m*									
71	83	86	82	80%	1·3	2·3	4·1	2·8	2·63
Theodulpass 3330 *m*									
79	89	80	83	83%	1·7	2·1	3·9	2·9	2·65

Die grösste Lufttrockenheit haben beide Stationen im Winter, der December 1865 hatte auf dem Theodulpass 69% relative Feuchtigkeit, der December 1893 auf dem Sonnblickgipfel 67%.

Während in der Niederung bloss der Dampfdruck mit der Temperatur im jährlichen Gange ziemlich parallel geht, die relative Feuchtigkeit aber den entgegengesetzten Gang zeigt, gehen auf unseren Berggipfeln die relative wie die absolute Feuchtigkeit mit der Temperatur im Laufe des Jahres nahezu parallel, wie folgende Gleichungen des jährlichen Ganges zeigen (hier ist der September 1894 mit benützt worden).

Temperatur:

$$-5\cdot88+7\cdot22\sin(255\cdot0+x)+0\cdot08\sin(270\cdot0+2x)$$

Dampfdruck:

$$2\cdot63+1\cdot55\sin(259\cdot6+x)+0\cdot17\sin(66^\circ4+2x)$$

Relative Feuchtigkeit:

$$80\cdot23+8\cdot04\sin(282\cdot6+x)+1\cdot92\sin(252\cdot4+2x)$$

Temperatur und Dampfdruck gehen auf dem Sonnblickgipfel fast genau parallel; jedem Grad Celsius Temperatur-Änderung im jährlichen Gange entspricht eine Änderung des Dampfdruckes um 0·214 *mm* im gleichen Sinne. Bei der relativen Feuchtigkeit tritt das Maximum früher ein, als bei der Temperatur und beim Dampfdruck. Der berechnete jährliche Gang der relativen Feuchtigkeit ist folgender:

Jährlicher Gang der relativen Feuchtigkeit auf dem Sonnblickgipfel.

December	Jänner	Februar	März	April	Mai	Juni	Juli	August	September	October	November
Procente											
72·1	70·6*	72·9	78·2	83·8	87·1	**87·5**	86·3	84·7	83·0	80·3	76·2
Abweichungen vom Mittel											
−8·1	−9·7	−7·3	−2·0	3·6	6·8	7·3	6·0	4·5	2·8	0·1	−4·0

Der trockene Winter hat zwar die kleinste tägliche Schwankung der Luftfeuchtigkeit nach den Stundenmitteln (periodische tägliche Amplitude), 4·5⁰/₀ bloss, dagegen die grösste aperiodische tägliche Amplitude (Mittel der täglichen Extreme, diese den Stundenwerthen entnommen), d. i. 26⁰/₀ im Mittel und 30⁰/₀ im December. Die aperiodischen, unregelmässigen Schwankungen der relativen Feuchtigkeit sind im Winter sehr gross, im Sommer am kleinsten, bloss 14⁰/₀ im Mittel. Das Verhältniss der aperiodischen zur periodischen täglichen Amplitude der relativen Feuchtigkeit ist im Winter 5·8, im Sommer dagegen bloss 2·3. Im Winter sinken die Minima der relativen Feuchtigkeit häufig unter 30⁰/₀ hinab, im Sommer kaum unter 40⁰/₀, im Juni 1894 war das absolute Minimum bloss 56⁰/₀, im December dagegen 11⁰/₀ und diese letztere grosse Trockenheit der Luft hielt längere Zeit an.

II. Der tägliche Gang der relativen und der absoluten Feuchtigkeit auf dem Sonnblickgipfel.

Die folgenden zwei Tabellen enthalten die Stundenmittel der relativen Feuchtigkeit von September 1893 bis September 1894 inclusive, und zwar die erste die Werthe der relativen Feuchtigkeit selbst in Procenten der Sättigung, die zweite die Abweichungen der Stundenmittel vom Monatsmittel. Jene des September sind die Mittel der zwei Septembermonate 1893 und 1894.

Die Tabelle II lässt die wesentlichen Charakterzüge des täglichen Ganges der relativen Feuchtigkeit in den einzelnen Monaten deutlich überblicken. Von den drei Wintermonaten abgesehen finden wir sonst in allen Monaten eine geringe Feuchtigkeit in den Vormittagsstunden und eine grosse Feuchtigkeit in den Abend- und Nachtstunden. Das Minimum der relativen Feuchtigkeit tritt zwischen 7^h und 10^h Vormittags ein, das Maximum weniger regelmässig in den ersten oder späteren Abend- und Nachtstunden. Die tägliche Amplitude war am grössten in den Frühlings- und Herbstmonaten, April und Mai mittlere Ordinate 2·6⁰/₀, October, November 2·2⁰/₀, am kleinsten im Winter 1·1 und im Sommer 1·4, der feuchteste Monat Juni (89⁰/₀) hatte die kleinste tägliche Schwankung.

I. Stunden- und Monatsmittel der relativen Feuchtigkeit auf dem Sonnblickgipfel

in Procenten der Sättigung.

	Sept.	Octob.	Nov.	Decbr.	Jänner	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	August	Sept.
	1893				1894								
Mitternacht	86·1	80·2	82·1	67·3	73·0	74·4	77·8	87·6	89·2	89·9	89·1	83·5	85·0
1	86·2	79·4	82·1	65·7	73·1	75·0	77·6	87·0	89·5	89·4	88·7	83·1	84·6
2	86·4	79·4	81·2	65·6	72·6	75·2	77·7	85·0	89·9	88·9	87·8	82·8	84·1
3	86·3	78·4	80·4	65·5	73·0	75·1	77·6	84·3	89·8	88·6	87·9	82·3	83·0
4	86·7	79·2	80·1	66·7	73·7	74·5	77·1	83·3	88·9	88·2	87·2	82 1	83·1
5	86·4	76·9	79·2	66·9	73·2	74·3	77·5	83·4	88·4	88·1	86·2	81·6	82·1
6	86·7	76·1	79·1	67·7	73·1	73·7	77·3	82·5	88·1	88·0	83·4	80·7	82·2
7	86·5	76·0	77·7	67·2	73·1	72·9	77·4	80·9	86·1	88 3	82·2	79·2	81·7
8	85·5	75·5	76·3	66·9	74·7	72·3	76·3	79·4	84·3	87·8	81·9	78·1	81·3
9	85·6	76·2	76·2	66·6	75·7	70·3	75·1	79·1	83 9	88·3	82·8	78·4	81·2
10	85·9	75·4	76·6	66·9	76·5	69·4	75·0	79·3	84·5	88·7	83·9	79·1	81·7
11	86·4	75·4	76·7	67·4	76·6	71·3	75·3	81·6	84·3	89·0	84·4	80·2	82·1
Mittag	87·3	75·5	76·5	68·2	76·2	73·2	74·3	81·6	84·6	89·0	85·0	81·0	82·9
1	87·8	76·9	76·3	69·3	74·8	72·0	74·5	81·4	84·7	89·0	85·7	82·3	83·5
2	87·9	78·2	76·2	69·2	75·1	72·3	76·3	81·7	84·3	88·9	85·1	82·5	84·2
3	88·2	80·3	76·6	68·6	75·4	71·8	77·6	81·4	84·4	88·9	85·2	83·0	84·1
4	88·4	80·6	77·0	66·9	74·6	71·8	79·0	81·6	84·9	88·9	85·5	83·8	84·5
5	88·9	81·1	78·6	66·4	74·3	71·5	79·9	82·1	85·5	89·1	85·8	84·5	84·4
6	89·9	81·6	80·9	66·2	75·2	71·3	81·1	84·4	86·3	89·5	86·3	85·5	85·2
7	89·5	80·9	82·3	67·2	75·3	70·1	81·5	86·6	87·1	90·1	86·5	86·2	86·1
8	88·4	81·2	82·8	67·0	74·8	70·2	81·2	87·5	88·3	90·0	86·7	86·6	85·8
9	87·9	81·3	83·3	66·6	74·7	71·0	78·5	88·0	88·8	90·0	87·2	85·9	86·0
10	87·6	81·2	82·1	65·3	73·6	72·7	77·5	88·1	88·6	89·6	88·3	85·1	85·6
11	86·4	81·1	81·9	65·8	73·1	73·8	78·1	88·1	88·5	89·8	88·7	84·9	85·0
Mittel	87·2	78·7	79·3	67·0	74·4	72·5	77·5	83·6	86·8	89·0	85·9	82·6	83·7

II. Täglicher Gang der relativen Feuchtigkeit auf dem Sonnblickgipfel,
dargestellt durch Abweichungen der Stundenmittel von dem zugehörigen Monatsmittel.

	Jänner	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	August	Sept.	Octob.	Nov.	Decbr.	Jahr
Mitternacht	—1·4	1·9	0·3	4·0	2·4	0·9	3·2	0·9	0·1	1·5	2·8	0·3	1·41
1	—1·3	2·5	0·1	3·4	2·7	0·4	2·8	0·5	0·0	0·7	2·8	—1·3	1·11
2	—1·8	2·7	0·2	1·4	3·1	—0·1	1·9	0·2	—0·2	0·7	1·9	—1·4	0·72
3	—1·4	2·6	0·1	0·7	3·0	—0·4	2·0	—0·3	—0·8	—0·3	1·1	—1·5	0·40
4	—0·7	2·0	—0·4	—0·3	2·1	—0·8	1·3	—0·5	—0·5	0·5	0·8	—0·3	0·27
5	—1·2	1·8	0·0	—0·2	1·6	—0·9	0·3	—1·0	—1·2	—1·8	—0·1	—0·1	—0·23
6	—1·3	1·2	—0·2	—1·1	1·3	—1·0	—2·5	—1·9	—1·0	—2·6	—0·2	0·7	—0·72
7	—1·3	0·4	—0·1	—2·7	—0·7	—0·7	—3·7	—3·4	—1·3	—2·7	—1·6	0·2	—1·47
8	0·3	—0·2	—1·2	—4·2	—2·5	—1·2	—4·0	—4·5	—2·0	—3·2	—3·0	—0·1	—2·15
9	1·3	—2·2	—2·4	—4·5	—2·9	—0·7	—3·1	—4·2	—2·0	—2·5	—3·1	—0·4	—2·22
10	2·1	—3·1	—2·5	—4·3	—2·3	—0·3	—2·0	—3·5	—1·6	—3·3	—2·7	—0·1	—1·97
11	2·2	—1·2	—2·2	—2·0	—2·5	0·0	—1·5	—2·4	—1·2	—3·3	—2·6	0·4	—1·36
Mittag	1·8	0·7	—3·2	—2·0	—2·2	0·0	—0·9	—1·6	—0·3	—3·2	—2·8	1·2	—1·04
1	0·4	—0·5	—3·0	—2·2	—2·1	0·0	—0·2	—0·3	0·2	—1·8	—3·0	2·3	—0·85
2	0·7	—0·2	—1·2	—1·9	—2·5	—0·1	—0·8	—0·1	0·6	—0·5	—3·1	2·2	—0·58
3	1·0	—0·7	0·1	—2·2	—2·4	—0·1	—0·7	0·4	0·7	1·6	—2·7	1·6	—0·28
4	0·2	—0·7	1·5	—2·0	—1·9	—0·1	—0·4	1·2	1·0	1·9	—2·3	—0·1	—0·14
5	—0·1	—1·0	2·4	—1·5	—1·3	0·1	—0·1	1·9	1·2	2·4	—0·7	—0·6	0·22
6	0·8	—1·2	3·6	0·8	—0·5	0·5	0·4	2·9	2·1	2·9	1·6	—0·8	1·09
7	0·9	—2·4	4·0	3·0	0·3	1·1	0·6	3·6	2·4	2·2	3·0	0·2	1·57
8	0·4	—2·3	3·7	3·9	1·5	1·0	0·8	4·0	1·7	2·5	3·5	0·0	1·72
9	0·3	—1·5	1·0	4·4	2·0	1·0	1·3	3·3	1·5	2·6	4·0	—0·4	1·63
10	—0·8	0·2	0·0	4·5	1·8	0·6	2·4	2·5	1·2	2·5	2·8	—1·7	1·33
11	—1·3	1·3	0·6	4·5	1·7	0·8	2·8	2·3	0·3	2·4	2·6	—1·2	1·40
Mittel	1·04	1·44	1·42	2·57	1·97	0·53	1·65	1·97	1·05	2·07	2·28	0·80	1·08

Da die Zahlenwerthe der Tabelle II bloss auf einjährigen Beobachtungen beruhen, so sind sie natürlich noch weit davon entfernt, die mittleren oder normalen Verhältnisse zur Darstellung zu bringen. Um zu wahrscheinlicheren und präciseren Werthen des täglichen Ganges zu gelangen, empfiehlt es sich desshalb, Mittel für die Jahreszeiten zu bilden. Dies ist in der Tabelle III geschehen. Da bei den Registrirungen des Februar die letzten Tage fehlen (der Apparat war vom 24.—28. eingefroren), so wurde das Mittel des Winters in der Art gebildet, dass dem Mittel December und Jänner (61 Tage) das Gewicht 3, jenem des Februar das Gewicht 1 gegeben wurde, was hinreichend genau der Anzahl der Tage, von denen in jedem Monate Registrirungen vorliegen, entspricht.

Der tägliche Gang der relativen Feuchtigkeit im Winter ist sehr verschieden von jenem in den übrigen Jahreszeiten. Von 6^h Abends bis 7^h Morgens bleibt die relative Feuchtigkeit unter dem Mittel, von 9^h Morgens bis 5^h Nachmittags ist sie über dem Mittel. Die grösste relative Feuchtigkeit tritt um Mittag und in den ersten Nachmittagsstunden ein, die kleinste in den ersten Nachtstunden. Die Amplitude der täglichen Variation ist aber im Winter so klein, dass mehrjährige Beobachtungen nöthig sein werden, um diese Verhältnisse festzustellen. Doch wird sich aus später Folgendem ergeben, dass die grössere Lufttrockenheit der Nachtstunden im Winter nicht bloss ein zufälliges Ergebniss der kurzen Beobachtungsreihe ist. Sie ist sehr wahrscheinlich physikalisch begründet in dem Umstande, dass die herabsinkende Bewegung der Luft, welche den Berggipfeln Trockenheit bringt, in den Nachtstunden am wirksamsten ist, weil die nächtliche Wärmeausstrahlung ein Abwärtsfliessen der Luft von den erkalteten Bergabhängen in die Thäler hinab erzeugt, was den herabsinkenden Luftstrom im Gebiete eines Barometermaximums beschleunigt. In den Nachmittagsstunden dagegen kann sich doch auch im Winter die Erwärmung der Thäler fühlbar machen durch einen Stillstand oder sogar eine Umkehrung dieser Luftcirculation, daher die relativ beträchtliche Steigerung der Luftfeuchtigkeit in den ersten Nachmittagsstunden.

III. Täglicher Gang der relativen Feuchtigkeit auf dem Sonnblickgipfel
im Mittel der vier Jahreszeiten.

	A. Beobachtet				B. Berechnet				
	Winter	Frühling	Sommer	Herbst	Winter	Frühling	Sommer	Herbst	Jahr
Mitternacht	·03	2·23	1·67	1·47	— ·33	2·30	1·85	1·71	1·43
1	— ·35	2·07	1·23	1·17	— ·23	2·01	1·51	1·26	1·21
2	— ·53	1·57	·67	·80	— ·18	1·64	·99	·79	·88
3	— ·47	1·27	·43	·00	— ·17	1·19	·30	·28	·48
4	·13	·47	·00	·27	— ·21	·66	— ·45	— ·25	·00
5	·00	·47	— ·53	—1·03	— ·24	·07	—1·20	— ·79	— ·50
6	·08	·00	—1·80	—1·27	— ·24	— ·59	—1·83	—1·33	— ·98
7	— ·35	—1·17	—2·60	—1·87	— ·16	—1·26	—2·27	—1·83	—1·39
8	·03	—2·63	—3·23	—2·73	— ·02	—1·91	—2·46*	—2·26	—1·69
9	— ·17	—3·27	—2·67	—2·53	·19	—2·48	—2·40	—2·56	—1·85*
10	— ·02	—3·03	—1·93	—2·53	·44	—2·86	—2·12	—2·68*	—1·84
11	·70	—2·23	—1·30	—2·37	·67	—3·04*	—1·67	—2·59	—1·69
Mittag	1·30	—2·47	— ·83	—2·10	·83	—2·94	—1·15	—2·27	—1·41
1	1·03	—2·43	— ·17	—1·53	·89*	—2·59	— ·61	—1·74	—1·03
2	1·00	—1·87	— ·33	—1·00	·82	—2·00	— ·13	—1·05	— ·60
3	·80	—1·50	— ·13	— ·13	·63	—1·23	·28	— ·26	— ·16
4	— ·10	— ·80	·23	·20	·35	— ·38	·61	·55	·26
5	— ·47	— ·13	·63	·97	·04	·47	·88	1·29	·64
6	— ·30	1·30	1·27	2·20	— ·26	1·23	1·13	1·89	·96
7	— ·15	2·43	1·77	2·53	— ·50	1·84	1·37	2·31	1·21
8	— ·43	3·03	1·93	2·57	— ·62	2·27	1·60	2·52	1·41
9	— ·45	2·47	1·87	2·70	— ·65*	2·52	1·82	2·54*	1·53
10	— ·85	2·10	1·83	2·17	— ·58	2·58*	1·96	2·38	1·58*
11	— ·65	2·27	1·97	1·77	— ·47	2·50	1·99*	2·09	1·55
Mittel	·43	1·80	1·29	1·58	·40	1·77	1·36	1·63	1·10

Die niedrige relative Luftfeuchtigkeit des Winters ist ja auch sicherlich in der um diese Zeit vorherrschenden Tendenz zu herabsinkender Luftbewegung begründet. Anders ist es aber in den Jahreszeiten, wo die Sonne kräftiger die Thäler erwärmt, aus denen der Sonnblick sich erhebt.

Im Frühlinge, Sommer und Herbst tritt das Minimum der relativen Feuchtigkeit am Vormittage ein: im Frühlinge um 11^h, im Sommer schon zwischen 8^h und 9^h, und im Herbst um 10^h. Das Maximum fällt in die späteren Nachtstunden (10^h, 11^h, 9^h). Die täglichen Amplituden sind im Frühlinge und Herbst etwa viermal grösser als im Winter, im Sommer mehr als dreimal. Nimmt man den Unterschied zwischen Maximum und Minimum als tägliche Amplitude, so erhält man als Maass der Grösse der täglichen Variation der relativen Feuchtigkeit

Winter	1·5%
Frühling	5·6
Sommer	4·5
Herbst	5·2

Die tägliche Variation der relativen Feuchtigkeit auf dem Sonnblickgipfel ist demnach das ganze Jahr hindurch sehr gering.

Im Jahresmittel fällt das Minimum auf $9^1/_2{}^h$ Vormittags (etwa —1·9%), das Maximum auf 10^h Abends (+1·6%).

Bevor ich auf eine Erörterung über die wahrscheinliche Ursache des täglichen Ganges der relativen Feuchtigkeit in der wärmeren Jahreszeit eintrete, will ich noch vorerst einige andere Rechnungsergebnisse zur Vergleichung hieher stellen.

Um die jährliche Änderung im täglichen Gange der relativen Feuchtigkeit etwas präciser beurtheilen zu können, als dies die Tabelle II gestattet, habe ich die Constanten der Bessel'schen Formel für die einzelnen Monate berechnet und diese wieder zur schärferen Darstellung ihrer jährlichen Periode gleichfalls derselben Berechnung unterzogen. Auf diese Weise wurde erhalten:

IV. Jährlicher Gang der relativen Feuchtigkeit auf dem Sonnblickgipfel.

	Die Constanten der Bessel'schen Formel							
	p_1	q_1	p_2	q_2	p_1	q_1	p_2	q_2
	roh				ausgeglichen			
Jänner ...	—1·33	—0·54	0·20	—0·54	—0·70	—0·19	0·29	0·21
Februar ..	1·25	1·21	0·50	1·32	0·13	—0·84	0·21	0·46
März	1·41	—1·53	—1·60	0·03	1·92	—1·45	0·08	0·42
April	3·60	—1·60	0·68	—0·04	3·25*	—1·49*	0·10	0·17
Mai	2·83	0·41	—0·02	0·38	3 19	—1·07	0·27	0·01
Juni	0·41	—0 64	0·28	—0·22	2·15	—0·82	0 40	0·13
Juli......	2·43	—0·98	1·02	0·80	1·34	—1·17	0·29	0·41
August ..	1·22	—2·74	—0·25	0·30	1·55	—1·90	—0·05	0·56
September	0·52	—1·61	—0·30	0·22	2 34	—2·31*	—0·38	0·38
October ..	2·11	—2·37	—0·47	0·47	2·55*	—1·91	—0·44	0·01
November	3·26	—1·00	—0·17	—0·55	1·57	—0·95	—0·19	—0·23
December	—1·04	—0·17	0·15	0·27	0·03	—0·18	0·15	—0·13
Jahr	1·39	—0·96	0·00	0·20	1·61	—1 19	0·06	0·20

Aus den ausgeglichenen p und q ergibt sich:

	A_1	A_2	a_1	a_2
Jänner	254°8*	54·1	0·72	0·36
Februar	171·2	24·5	0·85	0·50
März	127·1	10·8	2·41	0·43
April.........	114·6	30·5	3·57*	0·20
Mai..........	108·5*	87·9	3·36	0·27
Juni	110·9	72·0	2·30	0·42
Juli	131·1	35·3	1·78	0 35
August	140·8	354·9	2·45	0·56
September	134·6	315·0	3·29*	0·54
October	126·8	271·3	3·16	0·44
November	121·2	219·6	1·84	0·30
December.....	170·5	130 9	0·18	0·20

In der Reihe der p_1 wurde nach der Bessel'schen Formel mit zwei Gliedern für Juni erhalten + 1·72, für September + 1·88. Mit diesen Werthen und den übrigen 10 ungeänderten wurde die Rechnung wiederholt und gefunden:

$$p_1 = 1\cdot61+1\cdot08\sin(288\cdot9+x)+1\cdot30\sin(263\cdot4+2x).$$

Auf gleiche Weise wurde in der Reihe der q_1 für Februar erhalten —0·28, für Mai —0·86, und mit diesen Werthen die Rechnung wiederholt. Sie ergab

$$q_1 = -1\cdot19+0\cdot53\sin(66\cdot8+x)+0\cdot71\sin(134\cdot4+2x).$$

In der Reihe der p_2 ergab sich für März —0·44 und für Juli +0·57; mit diesen Werthen wurde erhalten:

$$p_2 = +0\cdot06+0\cdot27\sin(0+x)+0\cdot26\sin(115\cdot6+2x);$$

endlich für q_2 ohne Interpolation anderer Werthe:

$$q_2 = +0\cdot20+0\cdot13\sin(308\cdot7+x)+0\cdot31\sin(20\cdot8+2x).$$

Diese vier Gleichungen ergaben die ausgeglichenen p und q der Tabelle, und diese die Winkelconstanten und Coëfficienten. Man sieht, dass die p und q, sowie die Winkelconstanten und numerischen Coëfficienten eine sehr ausgesprochene jährliche Periode haben.

Die Phasenzeiten des ersten, weitaus überwiegenden Gliedes schreiten vom Jänner zum Mai regelmässig zurück und dann wieder vor. Um die Wintermitte fällt der Eintritt des Minimums der relativen Feuchtigkeit etwa auf 5^h a. (etwas ausgeglichen der Jänner), im Mai und Juni auf 10^h a., die Maxima auf 5^h und 10^h Abends. Die Amplituden sind am grössten im April und September, am kleinsten im December und Juli, haben also eine sehr ausgesprochene doppelte jährliche Periode. Auch die Amplituden der doppelten täglichen Periode zeigen Maxima im Februar und März, und im August und September.

Bildet man aus den p_1 und q_1 und p_2 und q_2 Mittel für die vier Jahreszeiten, so erhält man folgende Gleichungen für den täglichen Gang während derselben:

Winter . . . $0\cdot44 \sin(204\cdot2+x)+0\cdot28 \sin(50\cdot7+2x)$
Frühling . . $3\cdot10 \sin(115\cdot6+x)+0\cdot25 \sin(36\cdot9+2x)$
Sommer . . $2\cdot13 \sin(127\cdot7+x)+0\cdot43 \sin(29\cdot6+2x)$
Herbst . . . $2\cdot75 \sin(128\cdot7+x)+0\cdot34 \sin(278\cdot4+2x)$

Jahr. . . . . . $2\cdot00 \sin(126\cdot5+x)+0\cdot21 \sin(16\cdot7+2x)$

Mittelst dieser Gleichungen ist die folgende kleine Tabelle berechnet worden, welche den täglichen Gang darstellt, wie er durch die Ausgleichung der Monatsmittel erhalten wird.

V. Täglicher Gang der relativen Feuchtigkeit nach den einem jährlichen Gang unterworfenen Stundenmitteln berechnet.

	Winter	Frühling	Sommer	Herbst	Jahr
Mitternacht	·04	2·94	1·89	1·81	1·67
1	·00	2·58	1·66	1·36	1·40
2	— ·08	2·00	1·24	0·83	1·00
3	— ·23	1·22	0 64	0·35	·49
4	— ·42	0·34	—0·07	—0·21	— ·09
5	— ·53	—0·60	—0·82	—0·79	— ·67
6	— ·62*	—1·49	—1·51	—1·38	—1·25
7	— ·62*	—2·24	—2·06	—1·95	—1·72
8	— ·53	—2·80	—2·40	—2·40	—2·03
9	— ·34	—3·12	—2·48*	—2·79	—2·18*
10	— ·06	—3·19*	—2·31	—2·93*	—2·12
11	·17	—3·01	—1·96	—2·84	—1·91
Mittag	·40	—2·64	—1·47	—2·49	—1·55
1	·56	—2·12	—0·92	—1·90	—1·10
2	·62*	—1·50	—0·38	—1·17	— ·61
3	·59	—0·82	0·10	—0·25	— ·09
4	·46	—0·14	0·49	0·63	·36
5	·33	0·54	0·82	1·43	·78
6	·18	1·19	1·09	2·06	1·13
7	·06	1·78	1·32	2·49	1·41
8	— ·01	2·30	1·54	2·74*	1·64
9	— ·02	2·72	1·74	2·69	1·78
10	·02	2·99	1·89	2·51	1·85*
11	·03	3·07*	1·96*	2·20	1·81
Mittel	·29	1·97	1·37	1·76	1·28

Im Frühling, Sommer und Herbst stimmt der auf diese Art berechnete tägliche Gang so gut wie vollkommen überein mit jenem in Tabelle III, im Winter ist der Unterschied allerdings beträchtlich, aber nur in Bezug auf den Eintritt des Minimums. Länger fortgesetzte Beobachtungen erst werden ergeben, welche der beiden Tabellen den normalen Gang der täglichen Feuchtigkeit im Winter richtiger darstellt.

Um auch den täglichen Gang des Dampfdruckes ableiten zu können, wurden die correspondirenden Stundenmittel der Temperatur und der relativen Feuchtigkeit gebildet und aus diesen dann der Dampfdruck berechnet. Es mag hiezu bemerkt werden, dass sich Thermograph und Hygrograph in derselben Beschirmung auf der Nordseite des Thurmes des Sonnblickhauses befinden.

VI. Täglicher Gang der Temperatur und der relativen Feuchtigkeit auf dem Sonnblickgipfel.
Jahr 1893/94.

	Temperatur				Relative Feuchtigkeit			
	Winter	Frühling	Sommer	Herbst	Winter	Frühling	Sommer	Herbst
Mitternacht	—12·2	—7·9	—0·3	—4·7	71·6	84·9	87·5	82·8
1	—12·2	—8·0	—0·4	—4·7	71·3	84·7	87·1	82·6
2	—12·1	—8·3	—0·6	—4·7	71·1	84·2	86·5	82·3
3	—12·2	—8·4	—0·7	—4·7	71·2	83·9	86·3	81·7
4	—12·3	—8·5	—0·8	—4·8	71·6	83·1	85·8	82·0
5	—12·3	—8·6	—0·9	—4·8	71·5	83·1	85·3	80·8
6	—12·3	—8·5	—0·8	—4·7	71·5	82·6	84·0	80·6
7	—12·3	—8·2	—0·7	—4·6	71·1	81·5	83·2	80·1
8	—12·2	—7·6	—0·3	—4·5	71·3	80·0	82·6	79·1
9	—12·1	—7·2	0·0	—4·3	70·9	79·4	83·2	79·3
10	—11·9	—6·8	0·2	—4·1	70·9	79·6	83·9	79·3
11	—11·9	—6·6	0·5	—3·9	71·8	80·4	84·5	79·5
Mittag	—11·7	—6·3	0·8	—3·7	72·5	80·2	85·0	79·8
1	—11·5	—5·9	1·1	—3·5	72·0	80·2	85·7	80·3
2	—11·4	—5·8	1·2	—3·3	72·2	80·8	85·5	80·8
3	—11·4	—5·7	1·5	—3·4	71·9	81·1	85·7	81·7
4	—11·5	—5·7	1·5	—3·5	71·1	81·8	86·1	82·0
5	—11·7	—6·0	1·4	—3·7	70·7	82·2	86·5	82·9
6	—12·0	—6·4	1·2	—4·0	70·9	83·9	87·1	84·1
7	—12·1	—6·8	1·0	—4·2	70·9	85·1	87·6	84·2
8	—12·2	—7·2	0·7	—4·3	70·8	85·7	87·8	84·1
9	—12·2	—7·4	0·3	—4·4	70·8	85·1	87·7	84·2
10	—12·1	—7·6	0·1	—4·6	70·5	84·7	87·7	83·6
11	—12·2	—7·7	—0·1	—4·7	70·9	84·9	87·8	83·1
Mittel	—12·0	—7·2	0·2	—4·2	71·3	82·6	85·8	81·7

VII. Täglicher Gang des Dampfdruckes auf dem Sonnblickgipfel.

	Beobachteter Dampfdruck					Berechneter Gang des Dampfdruckes				
	Winter	Frühling	Sommer	Herbst	Jahr	Winter	Frühling	Sommer	Herbst	Jahr
Mitternacht	1·32	2·18	3·96	2·71	2·54	— ·02	— ·07	— ·09	— ·05	— ·06
1	1·32	2·17	3·89	2·70	2·52	— ·02	— ·10	— ·15	— ·06	— ·08
2	1·32	2·11	3·82	2·69	2·48	— ·01	— ·14	— ·22	— ·08	— ·11
3	1 32	2·09	3·78	2·67	2·46	— ·02	— ·17	— ·27	— ·10	— ·14
4	1·32	2·04	3·73	2·67	2·44	— ·02	— ·19	— ·32	— ·12	— ·16
5	1·32	2·03*	3·69	2·62	2·41	— ·03	— ·21*	— ·36	— ·13	— ·18
6	1·31*	2·03	3·65*	2·63	2·40*	— ·04*	— ·20	— ·37*	— ·15*	— ·19*
7	1·31	2·06	3·66	2·63*	2·41	— ·03	— ·18	— ·35	— ·14	— ·17
8	1·32	2·11	3·73	2·62	2·45	— ·03	— ·15	— ·30	— ·13	— ·15
9	1·32	2·17	3·84	2·66	2·50	— ·01	— ·09	— ·23	— ·10	— ·11
10	1·35	2·23	3·93	2·72	2·56	·01	— ·03	— ·12	— ·06	— ·05
11	1·37	2·29	4·05	2·77	2·62	·04	·04	— ·01	·00	·02
Mittag	1·40	2·33	4·15	2·82	2·67	·06	·11	·11	·05	·08
1	1·41	2·40	4·27	2·87	2·74	·07*	·16	·22	·11	·14
2	**1·42**	2·44	4·31	2·93	2·78	·07*	·20	·31	·15	·18
3	1·42	2·47	4·40	**2·96**	**2·81**	·06	·22*	·37	·17	·20
4	1·39	**2·49**	**4·48**	2·92	**2·81**	·05	·22	·39*	·18*	·21*
5	1·36	2·44	4·43	2·93	2·79	·03	·19	·38	·16	·19
6	1·33	2·41	4·39	2·91	2·76	·00	·16	·34	·14	·16
7	1·32	2·38	4·35	2·86	2·73	— ·02	·13	·28	·10	·12
8	1·31	2·33	4·25	2·83	2·68	— ·03	·09	·21	·06	·08
9	1·31	2·28	4·15	2·82	2·64	— ·04	·04	·14	·03	·04
10	1·32	2·24	4·08	2·77	2·60	— ·04	·00	·06	·00	·00
11	1·31	2·22	4·02	2·73	2·57	— ·03	— ·03	— ·02	— ·03	— ·03
Mittel	1·34	2·25	4·04	2·77	2·60	·03	·13	·24	·10	·12

Der tägliche Gang des Dampfdruckes ist in allen Jahreszeiten nahezu der gleiche. Das Minimum fällt auf 5^h oder 6^h Morgens, das Maximum auf die frühen Nachmittagsstunden, Winter $1^1/_2{}^h$ p., Frühling $3^1/_2{}^h$ p., Sommer und Herbst 4^h p. Die Grösse der täglichen Variation ist sehr gering, die Amplitude beträgt selbst im Sommer kaum 0·8 *mm*. Von 11^h Nachts bis 10^h Vormittags bleibt der Dampfdruck unter dem Mittel, von 11^h Vormittags bis nach 9^h Abends hält er sich über dem Mittel.

Wir wollen nun die Gleichungen, nach denen der tägliche Gang der relativen Feuchtigkeit auf Tabelle III, sowie jener des Dampfdruckes auf Tabelle VII berechnet worden ist, mit jenen, welche den täglichen Gang der Temperatur darstellen, vergleichend nebeneinandersetzen.

Gleichungen des täglichen Ganges der Temperatur, der absoluten und relativen Feuchtigkeit auf dem Sonnblickgipfel.

I. Winter.

Temperatur .... $-12°0 + 0°36 \sin(232·5 + x) + 0°20 \sin(32·9 + 2x)$.

Dampfdruck .... $1·34 + 0·04 \sin(244·0 + x) + 0·03 \sin(35·3 + 2x)$.

Relative Feuchtigkeit .. $71\ 3 + 0·58 \sin(271·5 + x) + 0·34 \sin(47·4 + 2x)$.

Die Übereinstimmung im täglichen Gange aller drei Elemente ist bemerkenswerth, doch sind die Phasenzeiten des ersten Gliedes etwas verschieden, indem die Extreme bei der relativen Feuchtigkeit um mehr als drei Stunden, beim Dampfdrucke um nicht ganz eine volle Stunde früher eintreten, als bei der Temperatur. Die Amplituden der täglichen Variation sind aber bei allen drei Elementen so gering, dass der tägliche Gang keinerlei Bedeutung beanspruchen kann.

II. Frühling.

Temperatur .... $-7°2 + 1°43 \sin(223·8 + x) + 0°23 \sin(52·1 + 2x)$.

Dampfdruck .... $2·25 + 0·20 \sin(205·2 + x) + 0·03 \sin(38·7 + 2x)$.

Relative Feuchtigkeit . $82·6 + 2·77 \sin(109·2 + x) + 0·32 \sin(266·4 + 2x)$.

Hier ist die Übereinstimmung der Phasenzeiten weniger gross. Das Minimum und Maximum des Dampfdruckes ver-

späten sich, so weit das erste Glied allein in Betracht kommt, um mehr als eine Stunde, bei der relativen Feuchtigkeit nahezu um 8 Stunden gegen jene der Temperatur. Das zweite, doppelt periodische Glied ist bei allen drei Elementen von ganz untergeordneter Bedeutung, die einmalige tägliche Periode spielt weitaus die Hauptrolle.

III. Sommer.

Temperatur .... $0°2 + 1°12 \sin(211 \cdot 0 + x) + 0 \cdot 11 \sin(11 \cdot 7 + 2x)$.

Dampfdruck .... $4 \cdot 04 + 0 \cdot 37 \sin(195 \cdot 8 + x) + 0 \cdot 05 \sin(15 \cdot 8 + 2x)$.

Relative Feuchtigkeit.. $85 \cdot 8 + 2 \cdot 11 \sin(134 \cdot 6 + x) + 0 \cdot 45 \sin(50 \cdot 4 + 2x)$.

Die gegenseitigen Verhältnisse des täglichen Ganges der drei meteorologischen Elemente sind nahe die gleichen wie im Frühlinge. Die täglichen Extreme treten beim Dampfdrucke um eine Stunde später ein als bei der Temperatur, bei der relativen Feuchtigkeit um etwas mehr als 5 Stunden. Die einmalige tägliche Schwankung ist bei allen drei Elementen die weitaus vorherrschende.

IV. Herbst.

Temperatur .... $-4°2 + 0 \cdot 66 \sin(232 \cdot 4 + x) + 0 \cdot 17 \sin(2 \cdot 8 + 2x)$.

Dampfdruck .... $2 \cdot 77 + 0 \cdot 15 \sin(199 \cdot 9 + x) + 0 \cdot 04 \sin(6 \cdot 2 + 2x)$.

Relative Feuchtigkeit... $81°7 + 1 \cdot 72 \sin(124 \cdot 3 + x) + 0°16 \sin(2 \cdot 5 + 2x)$.

Zu dieser Jahreszeit verspätet sich der Eintritt der täglichen Extreme beim Dampfdruck um mehr als 2 Stunden, bei der relativen Feuchtigkeit um 7 Stunden gegen jene der Temperatur. Bemerkenswerth ist die Übereinstimmung in den Phasenzeiten des zweiten Gliedes trotz der Kleinheit der Coëfficienten. Das gilt auch für den Sommer.

Wie man sieht, folgt der tägliche Gang des Dampfdruckes sehr nahe jenem der Temperatur mit einer Verspätung von etwas mehr als einer Stunde. Einer Zunahme der Temperatur entspricht auch eine Zunahme des Dampfdruckes, und diese Zunahme wächst mit der Höhe der Temperatur. Im Winter entspricht einer Temperaturänderung von 1° im täglichen Gange eine gleichsinnige Änderung des Dampfdruckes um 0·12 *mm*, im Frühlinge um 0·14, im Sommer um 0·33 und im Herbste um 0·23 *mm*.

Der Gang des Dampfdruckes auf den Berggipfeln unterscheidet sich nicht erheblich von jenem in der Niederung, er geht im Allgemeinen hier wie dort mit dem Gange der Temperatur ziemlich parallel. Anders verhält es sich beim täglichen Gange der relativen Feuchtigkeit. Während derselbe auf den Berggipfeln auch dem Temperaturgange, wenngleich mit einer erheblichen Verspätung, folgt, ist in der Niederung das Umgekehrte der Fall, die relative Feuchtigkeit sinkt, wenn die Temperatur steigt.

Vergleichen wir noch den täglichen Gang der absoluten und der relativen Feuchtigkeit auf dem Sonnblickgipfel mit jenem auf anderen Berggipfeln. Ein solcher Vergleich ist aber nur für die Sommermonate möglich, weil, soviel ich weiss, für die kältere Jahreszeit kein brauchbares Beobachtungsmateriale vorliegt. Vor einiger Zeit habe ich die circa zweimonatlichen Beobachtungen und Registrirungen der Feuchtigkeit an zwei mit dem Sonnblick nahe gleich hohen Punkten bearbeitet und discutirt, nämlich jene bei den Grands Mulets, 3010 *m*, von Vallot und jene auf dem Gipfel des Ontake, 3055 *m*, in Japan. Beide Beobachtungsreihen beziehen sich auf den Hochsommer.[1]

Kämtz hat seinerzeit auf dem Faulhorngipfel während circa 2 Monaten September und October (wohl nicht während des ganzen Monates) stündliche Beobachtungen angestellt (einige Nachtstunden aber interpolirt). Später haben Bravais und Martins eine auch alle Nachtstunden umfassende Reihe stündlicher Beobachtungen des Psychrometers daselbst gemacht (30 Tage). Die Ergebnisse dieser Aufzeichnungen sind in sehr knapper Form in Kämtz's »Vorlesungen über Meteorologie« und in der französischen Übersetzung dieses Buches von Martins[2] mitgetheilt worden. Ich habe dieselben durch die bekannten periodischen Reihen ausgedrückt und in einen Mittelwerth zusammengefasst, da die Übereinstimmung des Ganges hiezu eine vollkommen genügende ist, wie die folgenden Constanten zeigen.

---

[1] Hann, Beiträge zum täglichen Gange der meteorologischen Elemente in den höheren Luftschichten. Diese Sitzungsber., II. a., Bd. 103, Jänner 1894.

[2] Cour complet de Météorologie. Paris, 1843.

Constanten des täglichen Ganges des Dampfdruckes und der relativen Feuchtigkeit auf dem Faulhorngipfel (Spätsommer, circa 3 Monate im Ganzen).

	a_0	p_1	q_1	p_2	q_2
Kämtz	4·12 *mm*	—0·57	—0·49	+0·19	+0·20 *mm*
Bravais	5·00	—0·64	—0·66	—0·02	+0·23
Mittel	4·56	—0·60	—0·58	+0·08	+0·22

$$4 \cdot 56 + 0 \cdot 83 \sin(226 \cdot 0 + x) + 0 \cdot 23 \sin(20^\circ 0 + 2x).$$

	a_0	p_1	q_1	p_2	q_2
Kämtz	74·42%	—0·31	—4·20	—0·81	+1·65%
Bravais	79·92	+0·40	—6·10	—3·50	+2·90
Mittel	77·17	+0·05	—5·15	—2·16	+2·28

$$77 \cdot 17 + 5 \cdot 15 \sin(179 \cdot 5 + x) + 3 \cdot 15 \sin(316 \cdot 7 + 2x).$$

Die Formeln zeigen, dass sich im täglichen Gange bei der relativen Feuchtigkeit die Extreme nach dem ersten Gliede um 3 Stunden, nach dem zweiten um 2 Stunden gegen jene des Dampfdruckes verspäten.

Mittelst dieser Formeln und jenen, die in meiner früher citirten Abhandlung mitgetheilt worden sind, wurde folgende vergleichende Übersicht über den täglichen Gang der Luftfeuchtigkeit auf grösseren Höhen im Sommer erhalten.[1]

---

[1] Die Constanten der Formeln, nach welchen die folgenden Tabellen gerechnet wurden, sind:

	A_1	A_2	a_1	a_2
		Dampfdruck (*mm*)		
Sonnblick	195°8	15°8	0·37	0·05
Grands Mulets	201·5	344·1	0·71	0·29
Ontake	246·7	43·6	1·12	0·28
Faulhorn	226·0	20·0	0·83	0·23
		Relative Feuchtigkeit (%)		
Sonnblick	134°6	50°4	2·11	0·45
Grands Mulets	138·2	296·5	7·98	2·60
Ontake	168·4	272·5	0·88	3·28
Faulhorn	179·5	316·7	5·15	3·15

VIII. Täglicher Gang des Dampfdruckes im Sommer.

Millimeter.

	Sonnblick 3106 *m*	Grands Mulets 3010 *m*	Faulhorn 2673 *m*	Ontake 3055 *m*	Mittel 2960 *m*
Mitternacht	—0·09	—0·34	—0·52	—0·84	—0·45
2	—0·22	—0·36	—0·58	—0·84*	—0·50
4	—0·32	—0·42	—0·65	—0·82	—0·55
6	—0·37*	—0·58	—0·66*	—0·63	—0·56*
8	—0·30	—0·64*	—0·43	—0·14	—0·38
10	—0·12	—0·39	0·08	0·59	0·04
Mittag	0·11	0·18	0·68	1·22	0·55
2	0·31	0·76	1·04*	1·38*	0·87*
4	0·39*	0·98*	0·95	0·98	0·83
6	0·34	0·74	0·50	0·25	0·46
8	0·21	0·24	—0·03	—0·40	0 00
10	0·06	—0·17	—0·38	—0·75	—0·31
Mittel	4·04	4·36	4·56	6·78	4·93

Der tägliche Gang des Dampfdruckes auf den Berggipfeln scheint allerorten sehr übereinstimmend zu sein. Das Minimum tritt in den frühen Morgenstunden ein, im Mittel um 6^h, ganz so wie in der Niederung; das Maximum stellt sich zwischen 2^h und 4^h Nachmittags ein, also früher als in der Niederung, wo es auf den Abend fällt, und um diese Zeit, wenigstens um 2^h herum, häufig ein secundäres Minimum sich bemerkbar macht, nach einem Vormittagsmaximum um 10^h herum. Die Amplitude der täglichen Variation des Dampfdruckes auf den Bergen ist relativ gross, der Quotient $de:e$ ist im Mittel unserer Tabelle 0·29; die tägliche Variation in Zürich war nach den Beobachtungen von Horner bloss 0·12, in den correspondirenden 4 Monaten auf dem Rigi und Faulhorn aber nach Kämtz 0·28, also mehr als zweimal so gross. Auf den Bergen wirken die zunehmende Temperatur und die aufsteigende Bewegung der Luft zusammen, um eine Steigerung der Wasserdampfmenge in den Nachmittagsstunden zu erzeugen, in der Niederung

entführt die aufsteigende Luftbewegung einen Theil des Dampfzuschusses, den die steigende Tageswärme erzeugt, und der Dampfdruck kann nicht zunehmen oder zeigt sogar eine kleine Abnahme zur Zeit der höchsten Tageswärme. Erst gegen den Abend hin, wo der Luftaustausch zwischen den unteren und oberen Luftschichten allmälig aufhört, nimmt die Dampfmenge der untersten Luftschichten wieder zu und erreicht örtlich selbst ein absolutes Maximum.

IX. Täglicher Gang der relativen Feuchtigkeit im Sommer (Procente).

	Sonnblick 3106 *m*	Grands Mulets 3010 *m*	Faulhorn 2673 *m*	Ontake 3055 *m*	Mittel Alpen[1] 2930 *m*
Mitternacht	1·8	3·0	—2·1	—3·1	0·4
2	1·0	1·5	—1·6	—1·8	0·1
4	—0·4	—0·3	—1·4	1·1	—0·7
6	—1·8	—3·6	—3·0	2·4	—2·2
8	—2·5	—7·7	—5·4	0·7	—3·9
10	—2·1	—9·7	—5·7	—2·4	—4·2
Mittag	—1·2	—7·7	—2·2	—3·5	—2·5
2	—0·1	—1·8	3·4	—1·2	0·8
4	0·6	4·7	7·5	2·4	3·5
6	1·1	8·3	7·3	4·2	4·2
8	1·6	7·9	3·6	2·4	3·1
10	2·0	5·4	—0·4	—1·2	1·4
Mittel	85·8	68·3	77·2	79·0	78·2

Der tägliche Gang der relativen Feuchtigkeit auf den Berghöhen ist, wie man aus der Tabelle ersieht, überall charakterisirt durch ein Vormittagsminimum, das zwischen 8^h und 10^h eintritt, nur der Gipfel des Ontake in Japan macht eine kleine Ausnahme, indem um 6^h Morgens ein secundäres Maximum sich

[1] Sonnblick, Faulhorn, Grands Mulets, letztere nur mit halben Amplituden zur Mittelbildung beigezogen.

zeigt. Ob dies auf Rechnung der bloss einen Monat der Regenzeit umfassenden Beobachtungen geschrieben werden darf, muss vorläufig unentschieden bleiben.

Das Maximum der relativen Feuchtigkeit, die grösste Sättigung der Luft mit Wasserdampf tritt in den Abendstunden ein im Mittel um 6^h, auf dem Sonnblickgipfel erst um 10^h, wo auf dem Faulhorn und Ontake die Luft schon wieder relativ trocken wird. Dieses Maximum der relativen Feuchtigkeit in den Abendstunden fällt zusammen mit der gesteigerten Wolkenbildung auf und über den Berggipfeln, ebenso wie das Minimum derselben am Vormittage mit der heitersten Tagesstunde auf grossen Höhen.

In den Niederungen tritt bekanntlich die grösste relative Feuchtigkeit am frühen Morgen ein, die kleinste am Nachmittage zur heissesten Tagesstunde. Die Ursachen, welche die Verschiedenheit des täglichen Ganges der Feuchtigkeit oben und unten bewirken, liegen zu Tage. Dass die aufsteigenden Thalwinde den Höhen gegen Abend grosse Feuchtigkeit zuführen, die sich bis zur Wolkenbildung steigert, ist bekannt. Hingegen ist das Vormittagsminimum der relativen Feuchtigkeit zwischen 8^h und 10^h nicht so selbstverständlich. Wenn das Minimum (im Sommer) sehr früh am Morgen eintreten würde, so könnte man annehmen, dass es die um diese Zeit am kräftigsten thalabwärts wehenden Nachtwinde sind, die demselben zu Grunde liegen, denn sie müssen herabsinkende Luftbewegung an den Berghängen bewirken, die der Natur der Sache nach relativ trocken sind. So ist es ja in der That im Winter der Fall, wo das Minimum (auf dem Sonnblick) in der Nacht und am frühen Morgen eintritt und deshalb auch dieser Ursache zugeschrieben werden darf.

Dass das Minimum der relativen Feuchtigkeit erst gegen den Mittag hin eintritt und nicht am frühesten Morgen, wird wohl darin seinen Grund haben, dass die Oberfläche der Berge sich um diese Zeit rasch erwärmt, wodurch die aufruhende und umgebende Luft relativ trocken wird, da die vom Thale aufsteigende Luftbewegung und damit die Dampfzufuhr noch nicht die grossen Höhen erreicht hat. Diese Stunden der grössten relativen Trockenheit sind ja auch die Stunden der grössten

Frequenz des Sonnenscheins, also der stärksten Insolationswirkung auf die Berghänge.

Frequenz des Sonnenscheins und relative Feuchtigkeit auf dem Sonnblickgipfel im Sommer.

	6^h	7^h	8^h	9^h	10^h	11^h	Mittag	1^h	2^h	3^h	4^h	5^h	6^h
Sonnenschein[1]	4·5	11·2	14·3	14·7*	13·9	12·9	11·4	10·5	9·9	9·3	8·7	8·0	6·0
Relative Feuchtigkeit (Abweichung vom Mittel)	—1·8	—2·3	—2·5*	—2·4	—2·1	—1·7	—1·2	—0·6	—0·1	0·3	0·6	0·9	1·1

Die sonnigsten Stunden sind auch die trockensten Stunden, aber gleicher Dauer des Sonnenscheins Vor- und Nachmittags entspricht keineswegs die gleiche relative Feuchtigkeit, denn am Nachmittage bringt die aufsteigende Luftbewegung so viel Wasserdampf, dass die Luft der Sättigung bald näher kommt. Die trockenste Stunde geht der heitersten Stunde voraus, kann also nicht ganz allein von dem Gange der Erwärmung der Bergoberfläche abhängen. Es wirken offenbar drei Ursachen zusammen: absteigende Luftbewegung, steigende Erwärmung der Bergoberfläche, noch mangelnde grössere Dampfzufuhr. Da in der Nacht die Oberfläche des Berges durch Wärmeausstrahlung unter die Temperatur der umgebenden freien Atmosphäre sich abkühlt, so muss die relative Feuchtigkeit steigen, wenn nicht durch eine sehr lebhafte niedersinkende Luftbewegung diese natürliche Tendenz unterdrückt wird. Diese kann dadurch sogar mehr als bloss neutralisirt werden und einer relativen Trockenheit Platz machen, wie auf dem Faulhorn und Ontake, wenn die absteigende Luftbewegung sehr kräftig auftritt, was von der Örtlichkeit und vom durchschnittlichen Witterungszustande abhängt. Dass die Grands Mulets auf dem Montblanc auch in der Nacht eine grosse relative Feuchtigkeit haben, ist durch die Lage dieses Schutzhauses in

[1] Die Zahlen bedeuten die mittlere Häufigkeit des Sonnenscheins in dem der angeschriebenen Stunde vorausgegangenen Stundenintervall. Durchschnittlich scheint also auf dem Sonnblick die Sonne im Sommer während eines Monates $4^1/_2$-mal zwischen 5^h und 6^h Morgens und 14·7-mal zwischen 8^h und 9^h Morgens, oder es gibt zu dieser Stunde 4·5, respective 14·7 Stunden Sonnenschein im Monat, also nahe die halbe Zeit im letzteren Falle.

mittlerer Höhe des Berges rings von Gletschern umgeben, wohl zu erklären. Doch hat auch die Sonnblickstation trotz ihrer Gipfellage in den Nachtstunden eine grosse relative Feuchtigkeit (nicht aber im Winter).

Es schien mir von Interesse, im Anschlusse hieran die Verhältnisse der absoluten und relativen Feuchtigkeit zusammen mit jenen der Temperatur, des Luftdruckes und des Sonnenscheins in einer Periode mit ausgesprochenem einheitlichen Witterungscharakter zu untersuchen.

Der Sommer 1894 hatte zwei mehrtägige Perioden der heitersten und wärmsten Sommerwitterung. Es waren dies die 10 Tage vom 22.—25. Juli und vom 25.—29. und dem 31. August. Es wurden eben nur ganz heitere Tage gewählt, um den Einfluss der Insolation und der kräftigsten Entwicklung der dadurch geförderten aufsteigenden Luftbewegung untersuchen zu können. Um constatiren zu können, wie sich unter den ganz gleichen Verhältnissen der Gang der meteorologischen Elemente in der Niederung gestaltet, wurden für dieselben 10 Tage die Stundenmittel für Luftdruck, Temperatur, absolute und relative Feuchtigkeit und Dauer des Sonnenscheins auch für Wien gebildet, der einzigen Station, für welche alle diese Elemente zugleich erhältlich waren. Derart ist die nachfolgende Tabelle entstanden, welche wohl keiner weiteren Erläuterung bedarf. Die Zeit des Sonnenscheins gilt für das der vorgeschriebenen Stunde vorausgegangene Stundenintervall. Auf dem Sonnblick hat z. B. von 5^h—6^h Morgens die Sonne während dieser 10 Tage durchschnittlich an jedem Tage 0·2 Stunden, also $^1/_5$ des Intervalls ausgeschienen, in Wien 0·4 Stunden, also nahe während der Hälfte des Intervalls. Von 7^h a. bis Mittag war alle 10 Tage hindurch auf dem Sonnblickgipfel voller Sonnenschein, zu Wien gilt das Gleiche von 10^h a. bis 3^h. Es hatte demnach wie gewöhnlich der Berggipfel Vormittags, die Niederung Nachmittags mehr Sonnenschein. Die fast vollkommene Übereinstimmung in der Dauer des Sonnenscheins an den beiden Stationen ist gewiss bei der beträchtlichen Entfernung derselben sehr bemerkenswerth und beweist die weite Verbreitung der schönen, ruhigen Witterung während der in Vergleich gezogenen 10 Tage.

X. Täglicher Gang der meteorologischen Elemente an zehn heiteren und sehr warmen Sommertagen auf dem Sonnblickgipfel und in Wien.

(1894 Juli 22—25, August 25—29 und 31).

	Sonnblickgipfel				Wien				Sonnblick	Wien
	Temperatur	Dampfdruck	Relative Feucht.	Sonnenschein	Temperatur	Dampfdruck	Relative Feucht.	Sonnenschein	Luftdruck	
Mittern.	5·8	5·18	75·6	—	19·6	12·7	74·7	—	·02	·07
1	5·3	4·67	70·3	—	18·9	12·7	78·2	—	—·11	·15
2	5·2	4·51	68·2	—	18 6	12·5	78·1	—	—·21	·16
3	5·2	4·43	67·1	—	18·2	12·2	78·2	—	—·31	·18
4	5·0	4·21	64·7	—	17·6	12·0	80·3	—	—·39	·21
5	4·9*	4·08	63·0	—	16·8*	11·8*	83·1	—	—·42*	·34
6	5·3	4·02	60·7	0 2	16·9	11·9	83·6*	0·4	—·38	·55
7	5·8	4·02	58·4	0·8	18·1	12·3	79·7	0·8	—·31	·77
8	6·3	4·00*	56·1*	1·0	19·9	12·0	69·6	0·9	—·24	·86
9	6·7	4·28	58·4	1·0	22 0	12·4	63·3	0·9	—·10	·91*
10	7·1	4·53	60·2	1·0	23·5	12·9	60·0	0·9	·05	·77
11	7·3	4·71	62·0	1·0	24·9	12·7	54·3	1·0	·17	·60
Mittag	7·3	4·84	63·5	1 0	26·2	13·3	52·6	1·0	·25	·32
1	7·4	5·06	65·8	0·9	27·1	13·2	49·7	1·0	·30	·00
2	7·7	5·09	64·8	0·8	28·3	13·2	46·2	1·0	·34*	— ·37
3	8 2	5·32	65·8	0·8	**28·6**	13·1	45·1*	1·0	·31	— ·69
4	**8·5**	5·62	68·0	0·9	28·4	13·3	46·3	0·9	·23	— ·93
5	8·5	5·82	70·6	0·8	27·9	13·8	49·4	0·8	·09	—1·15*
6	8·1	**6·08**	74·6	0·7	26·6	14·3	55·2	0·6	·05*	—1·03
7	7·6	5·97	**76·8**	0·4	25·0	**14·4**	61·0	0·4	·06	— ·87
8	7·2	5·77	76·3	—	23·6	14·1	65·4	—	·06	— ·50
9	6·6	5·46	75·3	—	22·5	13·6	67·0	—	·18	— ·26
10	6 2	5·31	75·2	—	21·6	13·1	68·3	—	·18*	— ·13
11	5·9	5·27	76·0	—	20·6	12·8	71·3	—	·14	— ·02
Mittel	6·6	4·92	67·4	11·3	22·6	12·9	65·0	11·6	530·39	745·37

Die Tabelle X zeigt uns folgende Thatsachen. Zunächst bemerken wir, dass die mittlere Temperatur der 10 Tage sehr hoch war und desgleichen der Luftdruck. Auf dem Sonnblick stand das Barometer 5·3 *mm* über dem Mittel, zu Wien 1·8 *mm*. Die absolute Feuchtigkeit erhob sich auf dem Sonnblick über den Mittelwerth, die relative Feuchtigkeit lag beträchtlich unter demselben. Die Luft war relativ trocken.

Betrachten wir nun den täglichen Gang im Vergleiche gegen die mittleren Verhältnisse bei gemischtem Wetter zunächst auf dem Sonnblickgipfel. Der Gang der Temperatur ist fast ganz mit dem Sommermittel übereinstimmend (Tabelle VI), nur der Eintritt des Maximums zeigt eine Verspätung von kaum einer Stunde, wie dies für heiteres, sonniges Wetter charakteristisch ist. Der Eintritt der Extreme beim Dampfdruck und der relativen Feuchtigkeit folgt erst nach circa 3 Stunden jenem der Temperatur. Minimum wie Maximum des Dampfdruckes traten viel später ein als im Mittel (siehe Tabelle VII), und zwar um etwa 2 Stunden verzögert. Dagegen ist der Eintritt des Minimums der relativen Feuchtigkeit normal um 8^h; das Maximum, das im Sommermittel erst gegen 11^h eintritt, stellte sich an diesen heissen, heiteren Tagen schon um 7^h Abends ein, allerdings bleibt dann die Feuchtigkeit bis gegen Mitternacht ziemlich gleich hoch.

Das bemerkenswertheste Moment im täglichen Gange der relativen Feuchtigkeit ist aber folgendes. Schon vor 3^h Morgens, also noch in der Nacht, lange vor jeder Wirkung der Sonne, sinkt die relative Feuchtigkeit auf dem Sonnblickgipfel unter den Mittelwerth und um 6^h Morgens, wo die Sonne kaum den Berg oder die Thermometerbeschirmung etwas erwärmt haben kann, ist die relative Feuchtigkeit schon fast $7^0/_0$ unter das Tagesmittel gesunken. Wir sehen in dieser wichtigen Thatsache einen Beweis dafür, dass die relative Lufttrockenheit des Vormittags auf den Berggipfeln nicht der Hauptsache nach durch eine Erwärmung der Berges erklärt werden kann, sondern nur durch eine herabsinkende Bewegung der Luft, die durch die thalabwärts wehenden nächtlichen Bergwinde hervorgerufen wird, d. h. durch die nächtliche Abkühlung der Berghänge. Von 5—6^h Morgens schien die Sonne während

der 10 Tage auf dem Sonnblickgipfel durchschnittlich nur 12 Minuten, die relative Feuchtigkeit war aber um 6^h um $7^0/_0$, um 8^h schon um $9^0/_0$ unter dem Mittel. Dagegen hebt sich um 4^h Nachmittags trotz vollen Sonnenscheins die relative Feuchtigkeit schon etwas über das Tagesmittel. Während bei durchschnittlichem Sommerwetter die tägliche Amplitude der relativen Feuchtigkeit bloss $5 \cdot 2^0/_0$, war sie während der 10 heissen, trockenen Tage $20 \cdot 7^0/_0$! Die mittlere Feuchtigkeit war dabei etwa $17^0/_0$ unter dem Mittel. Im Ganzen kann man sagen, dass die 10 heiteren, heissen Sommertage auf dem Sonnblickgipfel nur durch einen excessiven täglichen Gang des Dampfdruckes und der relativen Feuchtigkeit sich von der Durchschnittswitterung unterschieden haben.

Betrachten wir nun die correspondirenden Verhältnisse in der Niederung, und zwar in Wien. Der Gang der Temperatur stimmt mit jenem auf dem Sonnblick fast ganz überein, das Maximum tritt um eine Stunde früher ein. Das Minimum des Dampfdruckes fällt in Wien zeitlich mit jenem der Temperatur zusammen, während es sich auf dem Sonnblick fast um 3 Stunden gegen jenes verspätet; dagegen tritt das Maximum des Dampfdruckes zu Wien erst gegen 7^h Abends ein. Der Dampfdruck steigt hier langsam mit Rückfällen innerhalb 14 Stunden um $2 \cdot 6$ *mm*, auf dem Sonnblick rasch in 10 Stunden um nahe den gleichen Betrag. Der Quotient $de : e$ ist auf dem Sonnblick $0 \cdot 41$, zu Wien dagegen nur $0 \cdot 20$.

Der Gang der relativen Feuchtigkeit ist in Wien nahezu der umgekehrte wie auf dem Sonnblickgipfel. Das Maximum tritt am Morgen ein, um 6^h, fast zugleich mit dem Minimum der Temperatur und des Dampfdruckes, wie dies ja in den Niederungen normal ist; das Minimum fällt zusammen mit dem Maximum der Temperatur. Die Amplitude der täglichen Variation ist sehr gross: $38 \cdot 5^0/_0$.

Auf die fast völlige Übereinstimmung in der Frequenz des Sonnenscheins zu Wien und auf dem Sonnblickgipfel haben wir bereits hingewiesen. Nach den Tageszeiten zeigt sich jedoch selbst bei klarem Wetter der bekannte Unterschied in der Insolation unten und oben. Wien hatte bis Mittag $5 \cdot 9$ Stunden, Nachmittags $5 \cdot 7$ Stunden Sonnenschein; Sonnblick bis Mittag

6·0, nach Mittag 5·3 Stunden, also Vormittags einen kleinen Überschuss (namentlich wenn man erst von 6^h an die Dauer zählt, 5·8 gegen 5·5), Nachmittags bleibt er dagegen fast um eine halbe Stunde zurück.

Sehen wir uns schliesslich noch den täglichen Gang des Luftdruckes an. Die Nebeneinanderstellung der Abweichungen der Stundenmittel vom Tagesmittel auf dem Sonnblick und zu Wien zeigt in schlagender Weise die Unterschiede im täglichen Gange des Barometers auf einem hohen Berggipfel und in der Niederung (im Sommer).

Auf dem Sonnblickgipfel ist der tägliche Gang des Barometers im Mittel der 10 Tage nur wenig von dem normalen Gange im Sommer verschieden, es fällt nur die Kleinheit des Abendmaximums gegenüber dem starken Hervortreten des normal verspäteten Morgenmaximums auf. In Wien hatte während dieser heiteren, heissen Tage der tägliche Gang des Barometers ganz den continentalen Charakter angenommen durch die ausserordentliche Verstärkung der einmaligen täglichen Barometerschwankung. Das Morgenminimum ist völlig unterdrückt, der Luftdruck steigt in Einem Zuge von dem tiefen, fast tropisch verstärkten Nachmittagsminimum um 5^h zu dem Vormittagsmaximum kurz vor 9^h Vormittags; die Amplitude dieser einmaligen täglichen Schwankung ist sehr gross: 2·1 *mm*. Nur um Mitternacht nähern sich die Barometercurven der beiden Stationen, sonst gehen sie weit auseinander.

Berechnet man die Constanten der harmonischen Reihen, durch welche diese Luftdruckcurven ausgedrückt werden können, und vergleicht sie mit den mittleren Werthen derselben, so gelangt man zu folgenden Resultaten.

Sonnblick	A_1	A_2	a_1	a_2
I. 10 heisse Sommertage..	204°7	97°6	0·290	0·157 *mm*
II. Normal (Sommer)......	181·7	110·3	0·318	0·179

Die Phasenzeiten der einmaligen täglichen Oscillation sind in den 10 heiteren, heissen Sommertagen um mehr als $1^1/_2$ Stunden verspätet aufgetreten, bei der doppelten täglichen Oscillation beträgt die Verspätung nicht einmal eine halbe Stunde. Die Amplituden der beiden Oscillationen bleiben merk-

würdigerweise ein wenig unter dem normalen Werth. Das ist vielleicht nur eine in der Kürze der Beobachtungszeit und der daraus folgenden Unsicherheit des Mittels begründete Erscheinung. Man dürfte wohl mit Recht voraussetzen, dass an heiteren, heissen Tagen das von dem täglichen Gange der Lufttemperatur abhängige erste Glied verstärkt wird.[1]

---

[1] Das im Texte constatirte etwas auffallende Ergebniss hat mich zu der folgenden vorläufigen kleinen Untersuchung veranlasst, welche als eine Art Controle betrachtet werden kann.

Seit August 1894 befindet sich auf dem Sonnblick ein Barograph Richard grosses Modell (Umdrehung der Trommel in 2 Tagen, 1 *mm* Luftdruck = 2 *mm* im Barogramm), welches eine viel grössere Genauigkeit der Reduction der Registrirungen ermöglicht. Ich habe überdies die grossen Barographen (ein zweiter befindet sich auf dem Obirgipfel) mit einem Thermographen in der Art verbinden lassen, dass derselbe continuirlich gleichzeitig unter dem Barogramm die Temperatur innerhalb des gemeinsamen die Instrumente umschliessenden Holzkastens registrirt. So wird es möglich, den Einfluss der periodischen Temperaturänderungen im Barographenkasten auf das den Druck registrirende Dosensystem gänzlich zu eliminiren. Die Temperaturcorrection hat sich allerdings als sehr klein herausgestellt, $-0\cdot 05\, t$, aber sie ist doch nicht ganz zu vernachlässigen, selbst im Sommer, wo wenig geheizt wird.

Es wurden die Registrirungen von 10 schönen, sehr warmen Augusttagen vom 23.—31. sammt dem 1. September 1894 genommen. Die mittlere Temperatur auf dem Sonnblick während dieser 10 Tage war 4°7, die mittlere Bewölkung 4·3. An dessen Fuss in Rauris, 1000 *m*, war die Temperatur 16·7, die mittlere Bewölkung 3·2.

Diese 10 täglichen Registrirungen bei schönem, heiterem Wetter gaben nun folgende Gleichungen ($x = 0$ für Mitternacht):

Gang des Luftdruckes (Millimeter)

$$-0\cdot 183 \cos x - 0\cdot 295 \sin x + 0\cdot 180 \cos 2x - 0\cdot 007 \sin 2x. \qquad \text{(I)}$$

Gang der Temperatur im Barographenkasten (Grade Celsius)

$$0^\circ 15 \cos x - 1^\circ 19 \sin x - 0^\circ 03 \cos 2x + 0\cdot 13 \sin 2x.$$

Multiplicirt man die Coëfficienten der letzteren Gleichung mit 0·05, so erhält man den täglichen Gang des Luftdruckes, den die Aneroiddosen vermöge der periodischen Temperaturänderungen im Kasten registriren und der sich auf den wirklichen Gang des Luftdruckes supponirt.

Die Gleichung der Curve, welche bloss in Folge des Temperaturganges im Kasten von den registrirenden Barometern gezeichnet wird, ist demnach:

$$-0\cdot 008 \cos x + 0\cdot 060 \sin x + 0\cdot 002 \cos 2x - 0\cdot 007 \sin 2x. \qquad \text{(II)}$$

Wien	A_1	A_2	a_1	a_2
I. 10 heisse Sommertage..	351°4	141°6	0·770	0·361 *mm*
II. Sommermittel.........	354·6	136·5	0·357	0·294

Hier stimmen die Phasenzeiten merkwürdig gut miteinander, sie sind auch an den heissen, heiteren Tagen ungeändert geblieben. Die Amplitude der einmaligen täglichen Oscillation ist dagegen mehr als doppelt so gross wie im Mittel, sie hat eine Grösse erreicht, wie sie sonst im Sommer in Gebirgsthälern wärmerer Klimate oder in den Tropen angetroffen wird. Die Amplitude der doppelten täglichen Oscillation dagegen ist fast normal, sie hat nur eine geringe Verstärkung erfahren.

Als Schlussergebniss dieser Untersuchung über den täglichen Gang der meteorologischen Elemente während heisser trockener Sommerwitterung muss noch einmal hervorgehoben werden, dass die Trockenheit der Morgenstunden auf dem Sonnblickgipfel schon vor Sonnenaufgang sich bemerkbar macht, also wohl nur in einer absteigenden Luftbewegung begründet sein kann. Der Gang der übrigen meteorologischen Elemente zeigt keine besonderen Eigenthümlichkeiten.

Man sieht, dass die einmalige tägliche Barometerschwankung durch den Temperaturgang nicht unwesentlich gefälscht wird, auf die doppelte tägliche Oscillation hat sie nur wenig Einfluss.

Zieht man diese Gleichung II von der Gleichung I ab, so erhält man die Gleichung der wahren täglichen Barometerschwankung.

Ich stelle hier den durch die Temperaturcoëfficienten der registrirenden Aneroide gestörten, sowie den corrigirten wahren täglichen Gang des Luftdruckes nebeneinander:

Gestörter Luftdruckgang (mit Temperatureinfluss)

$$0·347 \sin(211·8+x)+0·180 \sin(92·2+2x).$$

Wahrer corrigirter Barometergang

$$0·303 \sin(219·1+x)+0·183 \sin(94·4+2x).$$

Der Temperatureinfluss vergrössert auf dem Sonnblickgipfel die Amplitude der einmaligen täglichen Schwankung und lässt die Phasenzeiten derselben um circa $^1/_2$ Stunde verspätet eintreten.

Was aber endlich das Hauptergebniss anbelangt, so gibt auch der grosse Barograph mit Temperaturcorrection keine vergrösserte Amplitude der einmaligen täglichen Barometerschwankung während der 10 heiteren, heissen Sommertage.

Perioden grosser Trockenheit auf dem Sonnblickgipfel.

Eine der markantesten Erscheinungen im Gange der relativen Feuchtigkeit auf dem Sonnblickgipfel ist das oft plötzliche Eintreten grosser relativer Trockenheit, das sich namentlich im Winter häufig wiederholt. Um von der Art des Auftretens dieser Erscheinungen ein deutlicheres Bild zu geben,

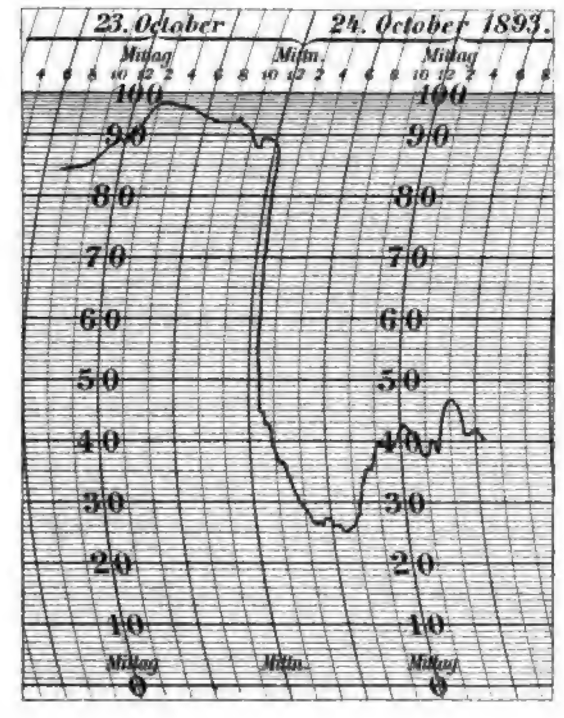


Fig. 1.

sind hier drei Fälle nach den Aufzeichnungen des Hygrographen reproducirt worden.

Fig. 1 zeigt den Gang der relativen Feuchtigkeit vom 23./24. October 1893. Um Mitternacht ist die relative Feuchtigkeit noch $90^0/_0$, dann sinkt sie plötzlich, in einer Stunde um mehr als $40^0/_0$, und erreicht bis 7^h Morgens des 24. $25^0/_0$.

Am 22. Abends war auf dem Sonnblick ein Barometermaximum eingetreten mit 528·5 *mm*, dann sinkt der Luftdruck bis zum 24. Morgens auf 525·1, um bis zum Abend neuerdings

das Maximum von 528·5 zu erreichen. Die Temperatur war gesunken, ist aber nach Mitternacht im Steigen begriffen (von —8·7 bis —4·8). Der Himmel heiter, der Wind mässiger N und NNE.

Das Koppe'sche Haarhygrometer zeigte am 23. Abends 9^h 96%, am 24. zu den drei Terminbeobachtungen (7, 2, 9) 28, 40, 42%. Das 24-stündige Tagesmittel der Feuchtigkeit des 24. October war 37%.

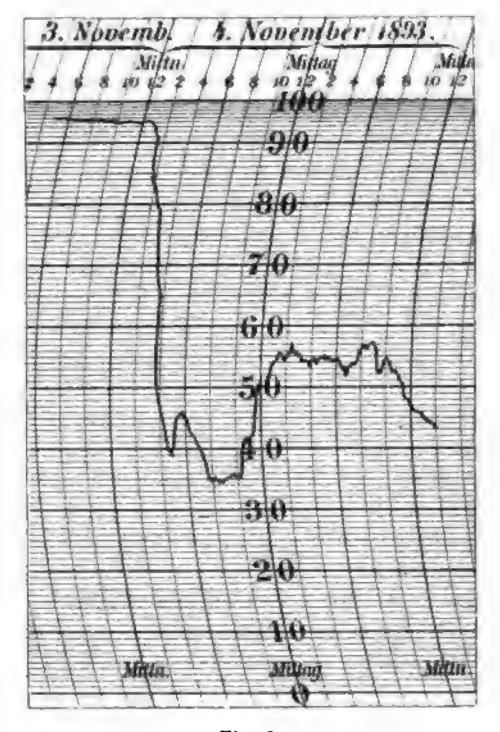


Fig. 2.

Die Wetterkarte zeigt ein hohes Barometermaximum am 22. Morgens über Mitteleuropa (770 *mm*), am 23. hat der Druck abgenommen, es zieht aber noch ein breites Band hohen Luftdruckes von NW (wo der Druck 775 *mm* ist) über Mitteleuropa nach SE hin. Das Minimum liegt im Norden (735). Am 24. 7^h a. liegt das Maximum schon wieder über Mitteleuropa mit 770 *mm*, und zugleich tritt auf dem Sonnblick die extreme Trockenheit und steigende Temperatur ein.

Fig. 2 zeigt den Gang der relativen Feuchtigkeit am 3./4. November 1893. Die Luft war am Vortage mit Feuchtigkeit nahezu gesättigt. Nach 1^h a. tritt plötzlich grosse Trockenheit ein, die Luftfeuchtigkeit sinkt bis 8^h a. unter $35^0/_0$, bleibt 3 Stunden bei diesem Trockenheitsgrad und steigt dann wieder etwas. Der Luftdruck war an diesem Tage hoch, es tritt ein Maximum ein (7^h a. 522·5), die Temperatur steigt rasch von —5·4 bis auf 0°, der Himmel ist ganz heiter, mit etwas Cirrus, der Wind mässig aus NW.

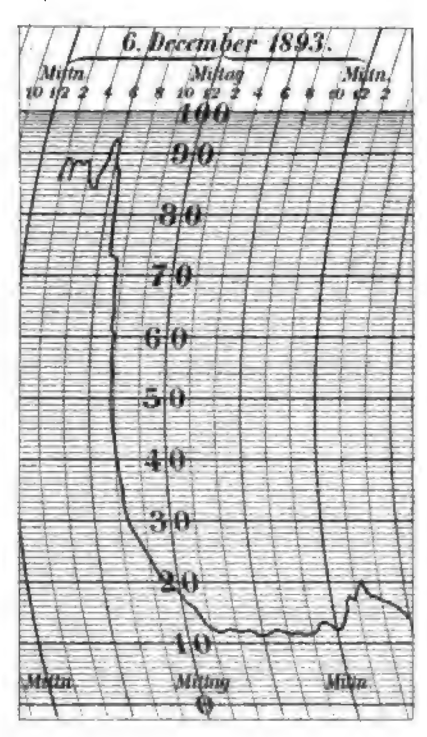


Fig. 3.

Die Wetterkarte des 4. Novembers zeigt ein Barometermaximum in SE Europa (765 *mm*), ein Minimum über Skandinavien (745). Die Winde über Mitteleuropa sind stark aus SW, die Temperatur ist namentlich in Norddeutschland für die Jahreszeit ungewöhnlich hoch. — Der Säntis hat WSW 9.

Fig. 3 zeigt den Beginn einer der grössten Trockenperioden, die im Winter 1893/94 und überhaupt im ganzen Jahre vorgekommen sind. Es ging derselben auch schon am 4. und 5. eine Trockenzeit voraus, vom Abend des 5. zum Morgen des 6. steigt aber die Feuchtigkeit wieder bis $93^0/_0$, dann sinkt sie plötzlich bis 10^h auf $24^0/_0$ und bis Abends 6^h auf $11^0/_0$, das Jahresminimum. Das 24-stündige Tagesmittel der Feuchtigkeit von 10^h a. des 6. bis 9^h a. des 7. December ist $15^0/_0$!

Am 3. Abends war ein Barometermaximum auf dem Sonnblick eingetreten (518·5), dann fällt das Barometer bis 5. Morgens auf 514·4 und steigt dann wieder rasch, um am 6. Mittags aber-

mals ein Maximum (518·5) zu erreichen. Die Temperatur, die am Vortage bis auf —16° gefallen war, steigt am 6. continuirlich und erreicht am 7. Morgens —8·4; der Himmel ist vom 5. bis 8. continuirlich heiter, der Wind schwach aus N und NE.

Während der ganzen Trockenperiode liegt hoher Luftdruck über Mitteleuropa, speciell am 6. Morgens befinden sich die Ostalpen im Centrum eines localen Barometermaximums (770 *mm*), auch in NE und W liegen Barometermaxima bei 775, der Luftdruck ist im hohen NW und im S tief. Diese Situation hält auch noch mit geringer Variation am 7. December an. Am 6. Abends und am 7. ist es zu einer Temperaturumkehrung gekommen, der Sonnblick hat —8·4, Salzburg —9·8, Ischl —8·2, Klagenfurt —10·2.

Derart zeigen also schon diese drei Fälle, dass die grossen Trockenheiten auf dem Sonnblickgipfel bei hohem Barometerstand eintreten und mit einem Steigen der Temperatur auf demselben verbunden sind, während die Winde eine nördliche Richtung haben (vielleicht eine aus dem im Norden lagernden Barometerminimum herabsinkende Luftströmung anzeigen).

Um der Sache noch näher zu treten, habe ich zunächst 14 durch ihr rasches Eintreten besonders stark hervortretende Trockenperioden auf dem Sonnblickgipfel etwas näher in Bezug auf die begleitenden Umstände untersucht. Die folgende kleine Tabelle enthält die Hauptergebnisse dieser Untersuchung in knappster Form.

Man ersieht aus dieser kleinen Zusammenstellung, dass die vorstehenden 14 Fälle rasch eintretender grosser Trockenheit fast durchgängig in einem Gebiete hohen Barometerstandes, in der Mitte oder am Rande eines Barometermaximums aufgetreten sind. Bloss 2 Fälle scheinen eine Ausnahme zu machen, der 26. November und der 10. December. Am 26. November ist hoher Druck im Süden (765), ein tiefes Minimum über Dänemark (740 *mm*) im Norden. Der Wind auf dem Sonnblick ist schwacher W, der Himmel heiter, die Temperatur steigend. Am 27. rückt von W her rasch ein Maximum gegen den Continent vor. Vielleicht stand der Sonnblick schon am 26. unter dem Einflusse desselben, worauf die steigende Temperatur hinzudeuten scheint. Am 10. December hinwieder liegen die Ostalpen

im Gebiete einer nach SW hin vorgestreckten Zunge hohen Barometerstandes, der in NE 770 *mm* erreicht. Dieser Fall bietet also jedenfalls keine Ausnahme; der Luftdruck am Meeresniveau ist zwar nicht absolut, aber relativ hoch. So können wir also wohl allgemein behaupten, dass die Fälle grosser Trockenheit auf dem Sonnblick inmitten oder am Rande von Barometermaximis auftreten.

XI. Zusammenstellung einiger Fälle rasch eintretender grosser Trockenheit auf dem Sonnblickgipfel nebst den begleitenden Luftdruck- und Temperaturverhältnissen.

Datum	Relative[1] Feuchtigkeit Proc.		Entsprechend				
			Luftdruck			Temperatur	
	Beginn	Min.	Meeresniveau 700+	Sonnblick 500+			
October							
23. Mn.—**24.** 8^h a.	90	26	73	25·4	25·5	— 8·1	— 6·8
28. 4^h a.—1^h p.	88	29	68	18·5	21·6	—12·5	— 9·0
November							
4. 1^h a.—10^h a.	93	35	64	22·2	22·9	— 6·0	— 0·8
21. 9^h p.—**22.** 3^h a.	90	31	70	19·1	20·0	—14·8	—10·7
26. 4^h a.—10^h a.	70	35	61	14·3	14·3	—13·2	— 9·0
28. 4^h a.—9^h a.	90	27	77	21·0	23·2	—14·4	— 9·7
December							
6. 6^h a.—3^h p.	93	11	71	16·4	17·5	—15·2	—10·9
10. 3^h p.—11^h p.	95	22	62	15·3	17·0	—10·2	— 7·6
15. 8^h p.—**16.** 1^h a.	90	27	81	27·5	28·6	—12·3	— 9·0
16. 8^h p.—**17.** 2^h a.	99	40	78	29·7	29·6	— 6·6	— 5·0
24. 8^h p.—**25.** 8^h a.	70	30	71	22·2	21·6	—10·8	— 9·0
26. 3^h a.—7^h a.	90	38	72	20·5	19·2	—15·3	—15·4
Jänner 1894							
21. 5^h p.—**22.** 2^h a.	96	41	68	18·9	19·3	—12·2	—11·6
Februar 1894							
7. 2^h a.—11^h a.	89	37	73	24·7	25·1	— 9·7	— 6·6
Mittel	89	31	771	21·1	21·8	—11·5	— 8·7

[1] Unter Beginn und Minimum stehen die den linkerhand angegebenen Stunden entsprechenden Grade der relativen Feuchtigkeit.

Wie man aus den Columnen 5 und 6 der Tabelle XI sieht, ist der Barometerstand auf dem Sonnblick während der raschen Abnahme der relativen Feuchtigkeit im Steigen begriffen, desgleichen die Temperatur. Die erste der Luftdruckangaben für den Sonnblick bezieht sich auf den Beginn des Sinkens der Feuchtigkeit, die zweite entspricht dem Höhepunkt der Trockenheit, correspondirend mit den links stehenden Angaben der relativen Feuchtigkeit. Dasselbe gilt von den beiden Columnen der Temperatur, so dass man also im Mittel hat:

Beginn der Trockenperiode	89% bei	521·1 *mm* und	—11°5 C.
Höhepunkt der »	31 »	521·8 »	— 8·7

Der mittlere Luftdruck im Meeresniveau für die Trockenzeit ist rund 771 *mm*.

Die Abweichung des Luftdruckes von den normalen Werthen auf dem Sonnblick ist circa +4·5 *mm*, jene der Temperatur +2°0. Also auch auf dem Sonnblick selbst treten die Trockenperioden bei hohem Luftdruck und hoher Temperatur ein. Die relative Feuchtigkeit sinkt dabei in einigen Stunden (7 im Mittel) um 58%.

Die anderen begleitenden Witterungserscheinungen können so charakterisirt werden: Die Windrichtung war in 11 Fällen (von 14) nördlich, meist stark, 1-mal S bis SW, 1-mal E, 1-mal W, der Himmel heiter oder in Ausheiterung begriffen. Die Durchsicht der Windautogramme ergab nichts Bemerkenswerthes; es ist nur zu bemerken, dass der Wind um die Zeit des Eintretens der Trockenheit häufig auffrischt und an Stärke zunimmt; jedoch nicht immer. Eine bestimmte Drehung der Windfahne, wie sie unten in der Niederung uns zumeist eine Änderung der Feuchtigkeit bringt, konnte ich nicht bemerken. Ich möchte annehmen, dass es nicht so sehr die Änderung der Windrichtung, sondern eine nach abwärts gerichtete Componente derselben ist, welche den Berggipfeln Trockenheit bringt, oder das Zuströmen von Luft, die aus einem Barometerminimum stammt und in den Gebieten hohen Luftdruckes herabkommt. Könnte ein Fachmann selbst die Vorgänge beobachten, welche den Eintritt grosser Trockenheit auf dem Sonn-

blickgipfel begleiteten, so dürfte es demselben wohl leichter werden, die in causaler Beziehung wichtigen Erscheinungen herauszufinden und deren Zusammenhang zu constatiren.

Ich habe ferner für die angeführten 14 Fälle die Stundenmittel der relativen Feuchtigkeit, des Luftdruckes und der Temperatur ausgeschrieben, und zwar für die Stunde unmittelbar vor dem Eintritt der Trockenheit und für die darauffolgenden 7 Stunden. Diese 14 Daten für jede Stunde und jedes Element wurden dann zu einem Mittel vereinigt. Man erhält auf diese Weise die folgenden Zahlenreihen.

Gang der relativen Feuchtigkeit, der Temperatur und des Luftdruckes beim Eintritt einer Trockenperiode.

	Stunde								
	0	1	2	3	4	5	6	7	
Relative Feuchtigkeit	83	64	50	43	38	36	36	38	%
Dampfdruck.......	1·63	1·29	1·05	0·95	0·86	0·84	0·86	0·92	*mm*
Temperatur	—11·5	—11·1	—10·5	—9·9	—9·6	—9·2	—8·9	—8·8	°C.
Luftdruck 500*mm*+	21·1	21·1	21·2	21·3	21·4	21·6	21·7	21·8	*mm*

Zur Bildung dieser Mittel sind unbekümmert um die Tageszeit die dem Eintritte der Trockenheit unmittelbar vorausgehende Registrirung und die dann darauffolgenden Registrirungen von 7 Stunden nebeneinander und die 14 Fälle untereinander geschrieben worden. Da diese Fälle einer Jahreszeit entnommen worden sind, wo der periodische tägliche Gang der Temperatur ganz unbedeutend ist, so kann man die Folge der obigen Zahlen als vom täglichen Gange unabhängig ansehen. Es fällt auch der Beginn der Trockenheit fast auf alle Tageszeiten.[1]

Die relative Feuchtigkeit fällt erst in raschem Tempo, dann langsamer, in 5 Stunden im Mittel um 47%. Zugleich steigt die Temperatur und der Luftdruck. Die relative Feuchtigkeit sinkt aber nicht etwa bloss in Folge der zunehmenden Temperatur

[1] Mitternacht, 1ʰ a., 2ʰ a., 3ʰ a., 4ʰ a. (3-mal), 6ʰ a., 3ʰ p., 5ʰ p., 8ʰ p. (3-mal), 9ʰ p. Die frühesten Morgen- und späten Abendstunden sind allerdings am häufigsten vertreten.

bei constant bleibendem Dampfdruck, es nimmt gleichzeitig auch die absolute Feuchtigkeit ab, d. h. es ist wasserdampfärmere Luft zugeführt worden. Es bleibt kaum ein Zweifel übrig, dass dieselbe aus grösserer Höhe herabgesunken ist, denn selbst bei horizontal wehenden Winden steigt die Feuchtigkeit auf den Berggipfeln, weil dabei immer Luft an den Berghängen aufsteigt, welche dampfreicher ist. Dagegen hat in unseren Fällen der Dampfdruck bis auf die Hälfte seines ursprünglichen Werthes abgenommen. Luft mit einem Dampfdruck von 0·84 *mm* wäre erst bei —22° C. gesättigt,[1] also bei einer um circa 13° niedrigeren Temperatur als der herrschenden. Wäre die schon vor dem Eintritt der Trockenheit vorhandene Luft bloss von —11·5 auf —8·9 erwärmt worden, so hätte die relative Feuchtigkeit bloss auf 68% herabsinken können, während sie in Wirklichkeit bis auf 36% abgenommen hat.

Vom 6. zum 7. December 1893, wo das Tagesmittel der relativen Feuchtigkeit 15% war, betrug der Dampfdruck (Tagesmittel der Temperatur —10·2) bloss 0·32 *mm*. Die Luft wäre erst bei einer Temperatur von circa —33° mit Dampf gesättigt gewesen, kann also aus einer Höhe von mindestens relativ 2300 *m*, absolut 5400 *m* gekommen sein.

Da der tägliche Gang der relativen Feuchtigkeit auf dem Sonnblickgipfel eigentlich nur von jener Minderzahl von Tagen bestimmt wird, an denen grössere Trockenheit eintritt, während an der weitaus überwiegenden Mehrzahl der Tage die Luft den ganzen Tag über fast gleichmässig mit Feuchtigkeit gesättigt bleibt, so schien es mir nöthig, den täglichen Gang der Feuchtigkeit an trockenen Tagen separat zu berechnen und damit die eigentlich dem mittleren täglichen Gange zu Grunde liegende Erscheinung von den sie abschwächenden Einflüssen befreit zu Tage treten zu lassen.

Zu diesem Zwecke wurden aus den 13-monatlichen Registrirungen (September 1893 bis inclusive September 1894) jene Tage herausgesucht, an welchen die Feuchtigkeit wenigstens einmal auf oder unter 50% herabgesunken ist. Solche Tage

[1] Ich habe hier überall die von Juhlin für Wasserdampf unter dem Gefrierpunkt angegebenen Spannungen eingesetzt.

gab es im December 13, im Jänner 9, im Februar 10 (Wintersumme 32), im März 7, im April 2, im Mai 1, im Juni keinen, im Juli 1, im August 3, im September 1893 deren 3, im September 1894 auch 3,[1] im October 7, im November 5. Wir haben somit nach Jahreszeiten trockene Tage: Winter 32, Frühling 10, Sommer 4, Herbst 15. Die trockenen Tage gehören also der Mehrzahl dem Winter an, im Sommer sind sie äusserst selten. Nimmt man auf die Zahl der Tage[2] Rücksicht, so ist die Wahrscheinlichkeit eines trockenen Tages im Winter 0·37, im Frühlinge 0·11, im Sommer kaum 0·05, im Herbste aber wieder etwas über 0·16.

In diesen Zahlen sprechen sich in ganz charakteristischer Weise die Feuchtigkeitsverhältnisse hoher Alpengipfel aus.

Um gute Mittel bilden zu können, mussten diese Tage anders als nach den vier Jahreszeiten gruppirt werden. Es wurden December, Jänner, Februar in ein Wintermittel zusammengefasst, October, November, März und April in ein Mittel für Herbst und Frühling, dann Mai, Juni, Juli, August, September in ein Mittel für die sommerliche Jahreszeit. Dieses letztere Mittel besteht allerdings fast nur aus September- und Augusttagen.

Es wurden ferner auch die correspondirenden Daten für Temperatur und Luftdruck ausgeschrieben und in ganz gleicher Weise zu Mittelwerthen vereinigt. Jedes Stundenmittel der Temperatur und des Luftdruckes entspricht also genau dem gleichzeitigen Feuchtigkeitsmittel. Auf diese Weise ist die folgende Tabelle XII entstanden.

Der tägliche Gang der relativen Feuchtigkeit an trockenen Tagen unterscheidet sich fast nur durch die viel grösseren Amplituden von jenem, wie er im Mittel der Jahreszeiten auf Tabelle III zu finden ist. Im Winter ist das nächtliche Minimum das Hauptminimum, das Maximum tritt zwischen 2^h und 3^h Nachmittags ein. Ein zweites secundäres Minimum tritt um 10^h Vormittags ein. Im Frühling und Sommer fällt das Minimum

[1] Den 21. September nicht mitgenommen, weil die Trockenheit bloss zwei Stunden anhielt.

[2] Von denen Registrirungen vorliegen.

XII. Täglicher Gang der relativen Feuchtigkeit, sowie der Temperatur und des Luftdruckes an sehr trockenen Tagen (Minimum $\gtrless 50\%$) auf dem Sonnblick.

	Relative Feuchtigkeit			Temperatur			Luftdruck		
	Winter Dec.—Feb. (32)	Frühling und Herbst (21)	Sommer Mai—Sept. (11)	Winter Dec.—Feb. (32)	Frühling und Herbst (21)	Sommer Mai—Sept. (11)	Winter Dec.—Feb. (32)	Frühling und Herbst (21)	Sommer Mai—Sept. (11)
Mitternacht	48·1	56·9	59·2	— 9·8	— 7·5	0·7	520·36	522·32	527·19
1	48·5	56·1	57·9	— 9·8	— 7·7	0·7	20·18	22·47	27·07
2	48·6	54·0	58·2	· 10·0	— 7·6	0·8	20·08	22·38	26·95
3	49·1	52·0	58·8	—10·0	— 7·5	0·5	19·90	22·22	26·84
4	49·7	53·6	57·0	—10·0	— 7·7	— 0·2	20·08	22·19	26·55
5	50·0	50·8	52·8	—10·1	— 7·5	— 0·1	19·93	22·10	26·50
6	49·7	50·4	52·7	—10·1	— 7·7	— 0·3	19·82	21·94	26·47
7	49·9	48·5	49·5	—10·0	— 7·3	0·1	19·77	21·95	26·55
8	49·3	47·9*	46·2*	— 9·8	— 6·9	0·5	19·73	22·05	26·66
9	47·8	48·6	47·1	— 9·7	— 6·7	1·0	19·99	22·19	26·86
10	47·7	47·8	47·6	— 9·5	— 6·4	1·3	20·06	22·30	27·10
11	48·3	50·1	48·8	— 9·3	— 6·3	1·4	20·27	22·41	27·31
Mittag	49·8	51·1	51·3	— 9·1	— 6·4	1·6	20·10	22·36	27·41
1	50·3	52·5	53·2	— 8·9	— 6·2	1·9	19·87	22·22	27·59
2	51·6	54·0	54·8	— 8·9	— 5·9	2·4	19·86	22·08	27·65
3	**51·6**	57·6	57·0	— 8·9	— 5·9	2·9	19·81	22·03	27·29
4	51·0	59·8	60·1	— 8·9	— 6·1	3·2	20·14	21·93	27·28
5	50·5	60·6	61·0	— 9·1	— 6·1	3·5	20·16	21·90	27·27
6	50·8	61·3	63·0	— 9·4	— 6·4	3·3	20·17	21·87	27·39
7	50·2	61·9	62·8	— 9·5	— 6·7	2·9	20·18	21·95	27·38
8	48·7	**64·6**	**63·1**	— 9·6	— 7·2	2·2	20·25	21·73	27·41
9	48·2	62·8	61·3	— 9·7	— 7·3	1·9	20·54	21·95	27·50
10	46·7	59·0	59·9	— 9·7	— 7·1	0·7	20·52	22·09	27·45
11	46·7*	57·2	58·0	— 9·7	— 7·3	0·7	20·46	22·22	27·24
Mittleres Min.	34·2	36·9	38·8	— 9·6	— 6·9	1·4	20·09	22·12	27·12

auf 8^h Vormittags, das Maximum auf 8^h Abends. Die Amplitude der täglichen Variation ist dann sehr gross, fast 17%, während sie im allgemeinen Mittel auch in diesen Jahreszeiten wenig über 5% beträgt. Die Eintrittszeiten der täglichen Extreme sind wenig verschieden von jenen im Mittel aller Tage. Das Maximum tritt allerdings schon um 8^hp. ein, während dasselbe im Mittel aller Tage erst zwischen 9^h und 11^hp. sich einstellt. Die Nachtstunden und namentlich die Morgenstunden sind trockener als im allgemeinen Mittel.

Die folgenden Gleichungen stellen den täglichen Gang der relativen Feuchtigkeit auf dem Sonnblickgipfel an sehr trockenen Tagen dar.

Winter (32 Tage):

$$49\cdot 28+1\cdot 02 \sin(242\cdot 7+x)+1\cdot 46 \sin(323\cdot 9+2x).$$

Frühling und Herbst (21 Tage):

$$54\cdot 96+6\cdot 92 \sin(152\cdot 3+x)+1\cdot 20 \sin(274\cdot 4+2x).$$

Sommer (11 Tage):

$$55\cdot 89+6\cdot 93 \sin(139\cdot 9+x)+2\cdot 22 \sin(324\cdot 9+2x).$$

Im Mittel von 64 Tagen:[1]

$$52\cdot 29+3\cdot 77 \sin(158\cdot 1+x)+1\cdot 27 \sin(305\cdot 7+2x).$$

Mittelst dieser Formeln sind die Zahlenwerthe der Tabelle XIII berechnet worden, sowohl in Form von absoluten Werthen, wie auch in Form der Abweichungen der Stundenmittel vom Tagesmittel.

Am Rande der Tabelle XIII, letzte Columne rechts, ist der durchschnittliche Gang der relativen Feuchtigkeit im Jahresmittel überhaupt wiederholt aus Tabelle III zum bequemen Vergleiche mit dem mittleren Gange an trockenen Tagen.

---

[1] Das Mittel der obigen drei Gleichungen ohne Rücksicht auf die Verschiedenheit der Anzahl der Tage, aber natürlich aus den p_1, q_1 und p_2, q_2 gerechnet, ist davon wenig verschieden:

$$4\cdot 56 \sin(150\cdot 0+x)+1\cdot 51 \sin(312\cdot 9+2x).$$

XIII. Berechneter täglicher Gang der relativen Feuchtigkeit auf dem Sonnblickgipfel an sehr trockenen Tagen.

	Winter	Frühling und Herbst	Sommer	Allgemeines Mittel	Winter	Frühling und Herbst	Sommer	Allg. Mittel (trockene Tage)	Jahres-mittel überhaupt [1]
Mitternacht	47·5	57·1	59·2	52·7	— 1·8	2 1	3·3	0·4	1·4
1	48·1	55·5	58·7	52·2	— 1·2	0·5	2·8	— 0·1	1·2
2	48·9	54·2	58·1	51·9	— 0·4	— 0·8	2·3	— 0·4	0·9
3	49·5	53·0	57·2	51·5	0·2	— 2·0	1·3	— 0·7	0·5
4	49·9	51·9	55·9	51·1	0·6	— 3·0	0·0	— 1·2	0·0
5	**49·9**	51·0	54·0	50·5	**0·6**	— 4·0	— 1·9	— 1·8	— 0·5
6	49·7	49·9	51·9	49·8	0·4	— 5·0	— 4·0	— 2·5	— 1·0
7	49·2	49·2	50·0	49·1	0·0	— 5·8	— 6·0	— 3·2	— 1·4
8	48·7	48·6	48·1	48·4	— 0·5	— 6·4	— 7·7	— 3·9	— 1·7
9	48·4*	48·3*	47·2*	48·1*	— 0·9*	— 6·7*	— 8·7	— 4·2*	— 1·8*
10	48·4	48·4	47·1*	48·2	— 0·9*	— 6·5	— 8·8*	— 4·1	— 1·8*
11	48·7	49·2	48·1	48·8	— 0·6	— 5·8	— 7·8	— 3·5	— 1·7
Mittag	49·3	50·6	50·1	49·8	0·1	— 4·3	— 5·8	— 2·4	— 1·4
1	50·1	52·5	52·7	51·3	0·8	— 2·5	— 3·2	— 1·0	— 1·0
2	50·9	54·7	55·5	53·0	1·6	— 0·3	— 0·4	0·7	— 0·6
3	51·4	57·1	58·2	54·5	2·2	2·2	2·3	2·2	— 0·2
4	**51·6**	59·3	60·4	55·8	**2·3**	4·4	4·5	3·5	0·3
5	51·3	61·1	61·8	56·6	2·0	6·2	5·9	4·3	0·6
6	50·6	62·2	**62·4**	**56·8**	1·3	7·3	**6·5**	**4·5**	1·0
7	49·7	**62·7**	62·3	56·6	0·4	**7·7**	6·4	4·3	1·2
8	48·6	62·4	61·8	55·9	— 0·6	7·4	5·9	3·6	1·4
9	47·8	61·5	61·0	55·0	— 1·5	6·5	5·1	2·7	1·5
10	47·3	60·1	60·1	54·1	— 2·0	5·2	4·3	1·8	**1·6**
11	47·2*	58·6	59·6	53·3	— 2·1*	3·6	3·7	1·0	1·5
Mittel	49·3	55·0	55·9	52·3	1·0	4·4	4·5	2·4	1·1

[1] Alle Tage, nicht bloss die trockenen.

Der Eintritt des Minimums ist in beiden Zahlenreihen der gleiche, er fällt zwischen 9^h und 10^h Vormittags, das Maximum jedoch tritt an trockenen Tagen schon um 6^h Abends ein, im allgemeinen Mittel aber erst um 10^h Abends. Nach 10^h wird die Luft an trockenen Tagen auch relativ zum Tagesmittel trockener, als im allgemeinen Mittel. An trockenen Tagen sinkt die Feuchtigkeit schon um 1^ha. unter das Tagesmittel, im allgemeinen Durchschnitt erst um 5^ha. Die mittlere Abweichung der Nachtstunden von Mitternacht bis inclusive 6^ha. ist an trockenen Tagen $-0 \cdot 9^0/_0$, im allgemeinen Mittel $+0 \cdot 4^0/_0$. Die trockenen Tage sind aber zugleich die heiteren Tage gegenüber dem allgemeinen Mittel. An heiteren Tagen sind demnach die Nachtstunden auch relativ (gegenüber dem Tagesmittel) trockener als durchschnittlich. Es ist dies offenbar eine Wirkung der absteigenden Bewegung der Luft, welche in heiteren Nächten in Folge der Wärmeausstrahlung am meisten gefördert wird. Man sieht, dass die Wirkung der nächtlichen Abkühlung des Berggipfels, welche die relative Feuchtigkeit der Luft auf demselben vergrössern muss, zurücktritt gegen die Wirkung der durch diese Abkühlung eingeleiteten niedersinkenden Luftbewegung.

Vergleichen wir noch den täglichen Gang der relativen Feuchtigkeit an trockenen Tagen und im allgemeinen Mittel mit Hilfe der Constanten der harmonischen Reihen.

	A_1	A_2	a_1	a_2
Trockene Tage Winter	242·7	323·9	1·02	1·46
Allgemeines Mittel Winter ...	271·5	47·4	0·58	0·34

Hier ist der Unterschied beträchtlich, abgesehen von den viel grösseren Amplituden an trockenen Tagen. Die Differenz der Winkelconstanten A_1 um nahe 30° bedeutet eine Verspätung des Eintrittes der Extreme an trockenen Tagen um 2 Stunden, beim zweiten Gliede beträgt die Verspätung sogar nahe 3 Stunden.

	A_1	A_2	a_1	a_2
Trockene Tage Sommer	139·9	324·9	6·93	2·22
Allgemeines Mittel Sommer...	134·6	50·4	2·11	0·45

Hier unterscheidet sich das erste Glied nur durch die grössere Amplitude, die mehr als dreimal grösser ist. Das zweite Glied zeigt für trockene Tage die gleiche Verspätung des Eintrittes der Extreme, wie im Winter (um nahezu 3 Stunden). Die Amplitude dieses Gliedes ist nahezu fünfmal grösser an trockenen Tagen gegenüber dem allgemeinen Mittel.

	A_1	A_2	a_1	a_2
Trockene Tage Mittel	158·1	305·7	3·77	1·27
Allgemeines Mittel	126·5	16·7	2·00	0·21

Hier zeigt das erste Glied eine Acceleration der Phasenzeiten an trockenen Tagen um 2 Stunden, das zweite Glied ein Zurückbleiben um mehr als 2 Stunden, aber der Einfluss dieses Gliedes ist gering im allgemeinen Mittel. Die Phasenzeiten der doppelten täglichen Oscillation der relativen Feuchtigkeit bleiben, wie man sieht, in allen Jahreszeiten gegen jene im allgemeinen Mittel zurück. Besonders bemerkenswerthe Ergebnisse hat aber dieser Vergleich der Gleichungen nicht geliefert.

In einer letzten Tabelle XIV findet man den correspondirenden täglichen Gang der relativen Feuchtigkeit, der Temperatur und des Luftdruckes im Mittel aller 64 trockenen Tage zum bequemen Vergleich nebeneinandergestellt, und zwar sowohl die Stundenwerthe der genannten Elemente selbst, als auch die Abweichungen derselben vom Tagesmittel.

Auf Grund dieser Tabelle habe ich versucht, den täglichen Gang der relativen Feuchtigkeit mit jenem des Luftdruckes zu vergleichen, da man doch die Ansicht nicht von vorneherein gänzlich abweisen kann, dass eine Beziehung zwischen den beiden Elementen im täglichen Gange bestehen könnte. An trockenen Tagen mit ihrer stark ausgeprägten täglichen Periode der Feuchtigkeit könnte wohl eine derartige Beziehung am ersten zu Tage treten. Da der Gang der relativen Feuchtigkeit von aufsteigenden und niedersinkenden Luftbewegungen stark beeinflusst wird, so könnte auch der tägliche Gang des Barometers zu denselben einige Beziehungen aufweisen. Man könnte vermuthen, dass bei steigendem Barometer in der täg-

lichen Periode eine Abnahme der relativen Feuchtigkeit sich bemerkbar macht, bei sinkendem Barometer eine Zunahme. Sehen wir zu, ob sich etwas Derartiges zu erkennen gibt.

XIV. Sonnblickgipfel. Täglicher Gang der meteorologischen Elemente an trockenen Tagen im Mittel aller Fälle (64 Tage).

	Relative Feuchtigkeit	Temperatur	Luftdruck	Relative Feuchtigkeit	Temperatur	Luftdruck	Berechnet	
							Relative Feucht.	Luft-druck
Mitternacht	53·4	—7·2	722·18	1·1	—0·4	·22	0·4	·24
1	52·0	—7·3	2·11	—0·3	—0·5	·15	—0·1	·15
2	51·4	—7·4	2·01	—0·9	—0·6	·05	—0·4	·04
3	51·3	—7·4	1·85	—1·0	—0·6	—·11	-0·7	—·08
4	51·9	—7·5	1·88	—0·4	—0·7	—·08	—1·2	—·19
5	50·4	—7·5	1·78	—1·9	—0·7	—·18	—1·8	—·26
6	50·2	—7·6	1·66	—2·1	—0·8*	—·30	—2·5	—·28
7	49·2	—7·4	1·65*	—3·1	—0·6	—·31*	—3·2	—·24
8	48·1	—7·1	1·68	—4·2	—0·3	—·28	—3 9	—·17
9	47·8	—6·8	1·89	—4·5	0·0	—·07	—4·2	—·09
10	47·6	—6·6	2·00	—4·7*	0·2	·04	—4·1	·01
11	48·9	—6·5	**2·18**	—3·4	0·3	·22*	—3·5	·07
Mittag	50·5	—6·3	2·09	—1·8	0·5	·13	—2·4	·08
1	51·5	—6·1	1·97	—0·8	0·7	01	—1·0	·07
2	53·0	—5·9	1·93	0·7	0·9	—·03	0·7	·02
3	54·6	—5·9	1·83*	2·3	0·9*	—·13*	2·2	—·02
4	55·6	—5·9	1·95	3·3	0·9	—·01	3·5	—·07
5	55·8	—6·0	1·95	3·5	0·8	—·01	4·3	—·08
6	56·6	—6·3	1·97	4·3	0·5	·01	4·5	—·04
7	56·5	—6·5	2·00	4·2	0·3	·04	4·3	·02
8	56·7	—6·8	1·97	4·4*	0·0	·01	3·6	·11
9	55·7	—6·9	2·20	3·4	—0·1	·24	2·7	·19
10	53·5	—7·1	**2·23**	1·2	—0·3	·27*	1·8	·25
11	52·6	—7·1	2·21	0·3	—0·3	·25	1·0	·27
Mittel	52·29	—6·8	21·96	2·4	0·5	·13	2·42	·13

Während der 13 Tagesstunden, während welcher der Luftdruck durchschnittlich 0·12 *mm* über dem Mittel sich hält, ist die Feuchtigkeit kaum 0·2% über dem Mittel; während der 11 Stunden, während welcher der Luftdruck im Mittel 0·13 *mm* unter dem Mittel ist, sinkt die relative Feuchtigkeit circa 0·3% unter das Mittel. Ein Einfluss der täglichen Periode des Luftdruckes auf die relative Feuchtigkeit ist demnach nicht wahrscheinlich, da die kleinen Änderungen der letzteren im entgegengesetzten Sinne auftreten, als man erwarten müsste, wenn ein Einfluss des Luftdruckes bestehen würde.

Der Einfluss der täglichen Periode der Temperatur ist dagegen deutlich ausgesprochen. Während der Zeit, wo die Temperatur unter dem Tagesmittel sich hält, von 9^h Abends bis 8^h Morgens (mittlere Abweichung —0°5), bleibt auch die Feuchtigkeit unter dem Tagesmittel (im Mittel um 0·7%). Von 9^h a. bis 8^h p. dagegen, wo die Temperatur im Mittel um einen halben Grad über dem Tagesmittel sich hält, ist auch die relative Feuchtigkeit über dem Mittel, und zwar um 0·6%. Während der 6 trockensten Tagesstunden von 6^h a. bis 11^h a. (Abweichung —3·7%) ist die Temperatur 0°2 unter dem Mittel; während der 6 feuchtesten Tagesstunden von 4^h bis 9^h Abends (Abweichung +3·9%) erhebt sich die Temperatur um 0°4 über das Tagesmittel.

Dem mittleren täglichen Gange der relativen Feuchtigkeit, der Temperatur und des Luftdruckes an trockenen Tagen auf dem Sonnblickgipfel entsprechen folgende Gleichungen:

Relative Feuchtigkeit

$$52{\cdot}3 + 3{\cdot}77 \sin(158{\cdot}1 + x) + 1{\cdot}27 \sin(305{\cdot}7 + 2x).$$

Temperatur

$$-6{\cdot}8 + 0{\cdot}78 \sin(222{\cdot}4 + x) + 0{\cdot}14 \sin(33{\cdot}7 + 2x).$$

Luftdruck

$$521{\cdot}96 + 0{\cdot}140 \sin(147{\cdot}0 + x) + 0{\cdot}169 \sin(107{\cdot}9 + 2x).$$

$x = 0$ für Mitternacht, wie in allen Gleichungen für den täglichen Gang in dieser Abhandlung.

Der tägliche Gang der Temperatur bietet nichts Bemerkenswerthes. Die mittlere Temperatur selbst hält sich an trockenen

Tagen über dem Mittel, mittlere Abweichung circa +2°5, ebenso der Luftdruck, mittlere Abweichung +4·0 *mm*. Die trockenen Tage auf dem Sonnblickgipfel treten demnach ein bei hohem Barometerstande und hoher Temperatur, sie sind Begleiterscheinungen der Barometermaxima.

Vergleichen wir schliesslich noch den täglichen Gang des Luftdruckes an trockenen Tagen mit dem mittleren Gange desselben überhaupt. Dieser in Vergleich gezogene allgemeine mittlere Gang wurde dadurch erhalten, dass den Constanten des normalen täglichen Ganges im Winter (mit 32 trockenen Tagen) das dreifache Gewicht, jener des Frühlings und Herbstes (mit 21 trockenen Tagen) das doppelte und jener des Sommers (mit bloss 11 trockenen Tagen) das einfache Gewicht gegeben wurde. Man erhält dann:

Täglicher Gang des Barometers an trockenen Tagen

$$0\cdot140 \sin(147\cdot0+x)+0\cdot169 \sin(107\cdot9+2x).$$

Täglicher Gang im allgemeinen Mittel (normaler Gang)

$$0\cdot191 \sin(169\cdot2+x)+0\cdot156 \sin(111\cdot4+2x).$$

Die Phasenzeiten der einmaligen täglichen Oscillation des Barometers treten an trockenen Tagen um circa $1^1/_2$ Stunden später ein und die Amplitude ist wesentlich kleiner. Das zweite Glied, die doppelte tägliche Oscillation, ist an trockenen Tagen fast ganz normal, nur ist die Amplitude etwas (aber innerhalb der Fehlergrenzen) grösser. Bemerkenswerth und mit dem Ergebniss auf S. 382 übereinstimmend ist es, dass auch hier die Amplitude der einmaligen täglichen Barometerschwankung kleiner gefunden wird, obgleich die trockenen Tage sehr warme Tage sind. Man hätte, wie schon bemerkt, das Umgekehrte erwarten mögen. Während in den Thälern und Niederungen die Amplitude der einmaligen täglichen Barometerschwankung an warmen Tagen grösser ist als im Mittel, scheint hiernach in Sonnblickhöhe diese Amplitude eher kleiner zu sein. Dieses vielleicht doch zufällige Ergebniss wäre aber erst zu constatiren und dann näher zu untersuchen.

XI. SITZUNG VOM 25. APRIL 1895.

Herr Vicepräsident der Akademie, Prof. E. Suess, führt den Vorsitz.

Der Vorsitzende gibt Nachricht von dem Verluste zweier correspondirender Mitglieder dieser Classe im Auslande, und zwar des Herrn Prof. J. D. Dana, dessen Ableben am 14. April l. J. in New Haven, und des Herrn Geheimrathes Prof. Dr. Carl Ludwig, dessen Ableben am 24. April l. J. zu Leipzig erfolgte.

Die anwesenden Mitglieder erheben sich zum Zeichen des Beileides über diese Verluste von ihren Sitzen.

Der Secretär legt das erschienene Heft I und II (Jänner und Februar 1895), Abtheilung II. b. des 104. Bandes der Sitzungsberichte, ferner das Heft III (März 1895) des 16. Bandes der Monatshefte für Chemie vor.

Das k. u. k. Ministerium des Äussern übermittelt als Fortsetzung des Werkes: »Voyage of H. M. S. Challenger 1873—1876« die eben erschienenen Schlussbände I und II: »A Summary of the Scientific Results«.

Herr Prof. Dr. R. v. Lendenfeld in Czernowitz spricht den Dank aus für die ihm von der kaiserl. Akademie zum Abschlusse seiner Arbeiten: »Monographie der adriatischen Spongien« gewährte Subvention.

Das c. M. Herr Regierungsrath Prof. C. Freiherr v. Ettingshausen in Graz übersendet eine Abhandlung, betitelt: »Beiträge zur Morphologie der Eichenblätter auf phytopaläontologischer Grundlage«.

Der Secretär legt folgende eingesendete Abhandlungen vor:

1. »Aktinische Wärmetheorie und Elektrolyse«, von Herrn P. C. Puschl, Stifts-Capitular in Seitenstetten.
2. »Zur synthetischen Theorie der Kreis- und Kugelsysteme«, von Prof. Otto Rupp an der k. k. technischen Hochschule in Brünn.

Das w. M. Herr Hofrath Director A. Kerner Ritter v. Marilaun überreicht eine Abhandlung von Prof. Dr. J. Steiner in Wien, betitelt: »Ein Beitrag zur Flechtenfauna der Sahara«.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. V. v. Lang überreicht eine Mittheilung von Dr. Victor Schumann in Leipzig: »Zur Photographie der Lichtstrahlen kleinster Wellenlängen. Vom Luftspectrum jenseits 185·2 μμ.«

Schliesslich überreicht der Vorsitzende eine Abhandlung von Prof. Ch. Depéret in Lyon: »Über die Fauna von miocänen Wirbelthieren aus der ersten Mediterranstufe von Eggenburg«.

Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:

Voyage of H. M. S. Challenger 1873—1876. A Summary of the Scientific Results. Published by Order of Her Majesty's Government. Part I and II (with Appendices). London, 1895; 4°.



SITZUNGSBERICHTE

DER

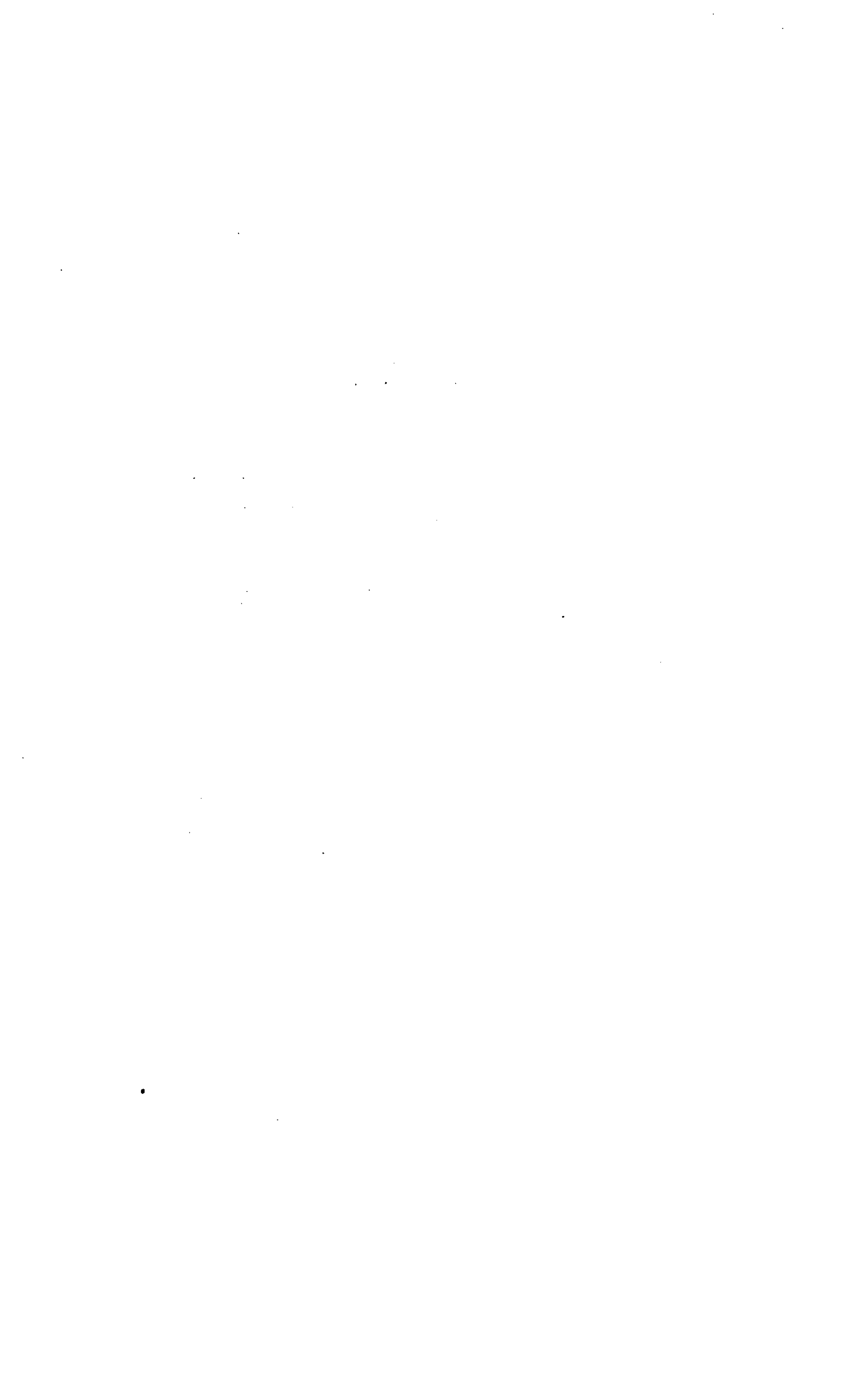
KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

CIV. BAND. V. HEFT.

ABTHEILUNG II. a.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE, PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.



XII. SITZUNG VOM 9. MAI 1895.

Der siebenbürgische Verein für Naturwissenschaften in Hermannstadt ladet die kaiserliche Akademie zur Theilnahme an der am 12. d. M. stattfindenden Eröffnungsfeier seines neuen Museumgebäudes ein.

Herr Prof. Dr. L. Weinek, Director der k. k. Sternwarte in Prag, übermittelt weitere Fortsetzungen seiner neuesten Mondarbeiten.

Der Secretär legt eine Abhandlung von Prof. Karl Zulkowski an der k. k. deutschen technischen Hochschule in Prag vor, betitelt: »Zur Chemie des Corallins und Fuchsins«.

Ferner legt der Secretär ein versiegeltes Schreiben behufs Wahrung der Priorität von Herrn Franz Pabisch in Wien vor, welches die Aufschrift führt: »Neuer Flugapparat mittelst Explosionsturbine«.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. Ad. Lieben überreicht eine Abhandlung von Dr. Victor Kulisch in Wien: »Zur Kenntniss der Condensationsvorgänge zwischen *o*-Toluidin und *α*-Diketonen, sowie *α*-Ketonsäureestern«.

Das w. M. Herr Hofrath A. Kerner v. Marilaun überreicht eine Abhandlung von Dr. Karl Fritsch, Privatdocent an der k. k. Universität in Wien: »Über einige *Orobus*-Arten und ihre geographische Verbreitung«.

Herr Dr. Gustav Jäger überreicht eine Abhandlung: »Über die elektrolytische Leitfähigkeit von wässerigen Lösungen, insbesondere deren Abhängigkeit von der Temperatur«.

Über die elektrolytische Leitfähigkeit von wässerigen Lösungen, insbesondere deren Abhängigkeit von der Temperatur

von

Dr. **Gustav Jäger.**

Es ist eine einfache Erklärung der Erniedrigung des Gefrierpunktes von Lösungen anzunehmen, dass der Zusatz von sich lösender Substanz eine Energieerhöhung des Lösungsmittels zur Folge hat. Diese Energieerhöhung wird sich genau so äussern, als würde die Temperatur des Lösungsmittels entsprechend gesteigert. Soll daher eine Lösung irgend eine charakteristische Eigenschaft des Lösungsmittels aufweisen, so wird dazu eine Temperaturerniedrigung der Lösung nothwendig sein, welche genau der Energieerhöhung der Molekeln des Lösungsmittels durch die gelöste Substanz entspricht. Es wird also z. B. das Dichtemaximum einer wässerigen Lösung bei einer entsprechend tieferen Temperatur eintreten als im reinen Wasser, und zwar wird die Temperaturerniedrigung parallel laufen mit der Erniedrigung des Gefrierpunktes, natürlich immer nur verdünnte Lösungen vorausgesetzt, bei welchen die Eigenthümlichkeiten des Lösungsmittels allein nicht durch entgegengesetzt wirkende der gelösten Substanz verdeckt werden können. Ich habe diese Ansicht bereits zu wiederholtenmalen ausgesprochen und bewiesen und sie mit verschiedenen Erscheinungen an Lösungen in Zusammenhang gebracht.[1] Im Folgenden will ich zeigen, dass auch bei der elektrolytischen Leitfähigkeit, insbesondere bei deren Abhängigkeit von der

[1] Diese Sitzungsber., C. (2), 512. — CIII. (2), 251.

Temperatur die oben geäusserte Ansicht der Energieerhöhung der Molekeln des Lösungsmittels eine augenfällige Rolle spielt.

Es ist eine Ansicht, welche wohl kaum mehr bezweifelt werden dürfte, dass die Leitfähigkeit einer Lösung in erster Linie von zwei Umständen abhängt, erstens von der Zahl der freien Ionen und zweitens vom Widerstand, welchen die Lösung den Ionen auf ihrer Wanderung entgegensetzt. Dieser zweite Umstand hängt aber innig mit der inneren Reibung der Lösung zusammen. Je grösser dieselbe ist, desto grösser ist auch der Widerstand, desto kleiner die Leitfähigkeit. In der Abhandlung: »Über die innere Reibung der Lösungen«[1] habe ich nachgewiesen, dass bei verdünnten Lösungen die innere Reibung wesentlich von den Eigenschaften des Lösungsmittels abhängt. Analoge Abhängigkeit werden wir auch bei der elektrolytischen Leitfähigkeit der Lösungen finden.

Nach Poiseuille können wir die Beziehung zwischen der inneren Reibung η des Wassers und der Temperatur t durch die Formel

$$\eta = \frac{\eta_0}{1+at+bt^2}$$

darstellen, wenn wir

$$a = 0\cdot03368, \quad b = 0\cdot000221$$

setzen, wobei η_0 demnach die innere Reibung bei der Temperatur des schmelzenden Eises ist. Nun können wir die Leitfähigkeit einer Lösung verkehrt proportional der inneren Reibung setzen. Mithin wäre, falls sich die Reibung einer verdünnten Lösung mit der Temperatur in derselben Weise wie die des reinen Lösungsmittels ändern würde, die Leitfähigkeit

$$l = l_0(1+at+bt^2)$$

zu setzen, unter l_0 entsprechend dem Früheren die Leitfähigkeit bei 0° verstanden. Dass dem nicht so sein kann, geht unmittelbar aus der Annahme hervor, dass durch den Zusatz von gelöster Substanz die Energie der Molekeln des Lösungs-

[1] Diese Sitzungsber., CIII. (2), 251—265 (1894).

mittels erhöht wird, und zwar entspricht dies, wie wir bereits erwähnt haben, einer Temperaturerhöhung, welche gleich ist der Gefrierpunktserniedrigung Δ der Lösung. Daraus folgt für die Leitfähigkeit

$$l = l_0[1+a(t+\Delta)+b(t+\Delta)^2] =$$
$$= l_0(1+a\Delta+b\Delta^2)]\left[1+\frac{a+2b\Delta}{1+a\Delta+b\Delta^2}t+\frac{b}{1+a\Delta+b\Delta^2}t^2\right] =$$
$$= l_0'(1+a_1t+b_1t^2),$$

wenn wir

$$\frac{a+2b\Delta}{1+a\Delta+b\Delta^2} = a_1, \quad \frac{b}{1+a\Delta+b\Delta^2} = b_1 \qquad (1)$$

setzen.

Ändert sich die Zahl der freien Ionen einer Lösung mit der Temperatur nicht oder nur wenig, so werden die Temperaturcoëfficienten a_1 und b_1 nahezu den wirklichen Verhältnissen entsprechen. Aus den numerischen Werthen von a und b ist ohneweiters ersichtlich, dass immer

$$a_1 < a, \quad b_1 < b$$

sein muss. Wir haben also bereits ein Resultat, welches sich an den meisten, insbesondere an verdünnten Lösungen bestätigt: Die Temperaturcoëfficienten a_1 und b_1 einer verdünnten Lösung nehmen mit wachsender Concentration ab, da ja die Gefrierpunktserniedrigung Δ mit der Concentration zunimmt. Allerdings setzen wir da voraus, dass die Energieerhöhung Δ des Lösungsmittels von der Temperatur unabhängig ist. Das wird nicht der Fall sein, jedoch wird diese Abhängigkeit von der Art sein, wie die Änderung des osmotischen Druckes oder des Gasdruckes mit der Temperatur, da ja die Gefrierpunktserniedrigung in innigem Zusammenhang mit dem osmotischen Druck steht. Es wird also die Grösse Δ einen Temperaturcoëfficienten von der Grössenordnung des Ausdehnungscoëfficienten der Gase haben. Eine derartige Änderung mit der Temperatur kann aber bei unseren Untersuchungen vernachlässigt werden.

Von der Richtigkeit unserer Folgerung überzeugen wir uns am besten durch folgende, den Beobachtungen F. Kohlrausch's[1] entnommene Tabelle.

Lösung		a_1	b_1
NaCl	24·92%	0·0304	0·000133
NaCl	25·90	307	142
LiCl	30·0	254	216
NH_4NO_3	49·3	233	24
BaN_2O_6	4·18	317	121
NaOH	2·61	295	16
$KHSO_4$	5·0	181	149

Also selbst an Lösungen von mitunter beträchtlicher Concentration können wir noch deutlich den Einfluss der Energieerhöhung sehen, welche das Lösungsmittel durch die gelöste Substanz erfährt. Selbstverständlich stimmen die Werthe von a_1 und b_1 nur für wenig Lösungen mit jenen überein, welche man aus den Gleichungen (1) erhält, da sich auch bei verdünnten Lösungen zeigt, dass die innere Reibung nicht nur dadurch eine Änderung erleidet, dass die Energie des Lösungsmittels eine andere wird, sondern dass auch das Vorhandensein der gelösten Substanz selbst in dem Sinne wirkt, dass eine Erhöhung der inneren Reibung eintritt.[2]

Sind für zwei verschiedene Lösungen ein und desselben Elektrolyten die Leitungsfähigkeiten durch die Gleichungen

$$l_1 = l_0'(1+a_1t+b_1t^2), \quad l_2 = l_0''(1+a_2t+b_2t^2)$$

gegeben, so folgt für den Fall, als l_1 die Leitfähigkeit der Lösung kleinerer Concentration und t positiv ist, dass

$$\frac{1+a_1t+b_1t^2}{1+a_2t+b_2t^2} > 1,$$

und zwar gilt dies umso mehr, je grösser t ist, d. h. mit wachsender Temperatur wird auch das Verhältniss der Leitfähigkeiten $\frac{l_1}{l_2}$ wachsen. Es ist hier ganz gleichgiltig, ob wir

[1] Wied. Ann., VI, 23 (1879).

[2] Siehe diese Sitzungsber., CIII, 256.

unter l_1 und l_2 die wirklichen oder die sogenannten specifischen Leitfähigkeiten verstehen, da ja für alle die Änderung mit der Temperatur in derselben Art und Weise vor sich geht. Auch diese Folgerung bestätigt sich bei den meisten Lösungen, so dass wir daraus ersehen können, dass der Einfluss der Temperatur auf die Dissociation des Elektrolyten nicht sehr erheblich ist.

Zur Bestätigung unseres Resultates sei in den folgenden Tabellen für mehrere Salze die specifische Leitfähigkeit für Lösungen von 1 und 0·5 bezüglich 0·5 und 0·25 Grammmolekeln Gehalt auf den Liter nebst deren Quotienten $\frac{l_1}{l_2}$ bei verschiedenen Temperaturen zusammengestellt, wie sie von Krannhals[1] beobachtet wurden. Dabei ist zu beachten, dass l_1 die Leitfähigkeit der Lösung kleinerer Concentration ist.

	m	18·0°	50·3°	82·0°	99·4°
KCl	1	916	1505	2101	2400
	0·5	949	1602	2250	2606
	$\frac{l_1}{l_2} =$	1·036	1·064	1·071	1·086

	m	18·0°	50·3°	82·0°	99·4°
NaCl	1	694	1210	1745	2044
	0·5	752	1322	1908	2252
	$\frac{l_1}{l_2} =$	1·084	1·093	1·093	1·102

	m	18·0°	50·3°	99·4°
$^1/_2\,Ba(NO_3)_2$	0·5	626	1130	1900
	0·25	704	1271	2155
	$\frac{l_1}{l_2} =$	1·125	1·125	1·134

	m	18·0°	50·8°	82·0°	99·4°
$KClO_3$	0·5	857	1464	2070	2395
	0·25	910	1559	2214	2614
	$\frac{l_1}{l_2} =$	1·050	1·065	1·070	1·091

[1] Zeitschr. für physik. Chemie, V, 254 (1890).

	m	18·0°	50·3°	82·0°	99·4°
KNO_3	1	751	1263	1753	2058
	0·5	831	1413	1971	2322
	$\frac{l_1}{l_2} =$	1·107	1·119	1·124	1·128

	m	18·0°	50·8°	82·0°	99·4°
$NaNO_3$	1	611	1056	1524	1737
	0·5	698	1199	1724	1995
	$\frac{l_1}{l_2} =$	1·142	1·135	1·131	1·149

	m	18·0°	50·3°	82·0°	99·4°
$^1/_2\ NaSO_4$	1	474	857	1260	1432
	0·5	553	1008	1480	1707
	$\frac{l_1}{l_2} =$	1·167	1·176	1·175	1·192

	m	18·0°	50·3°	82·0°
$^1/_2\ BaCl_2$	1	655	1110	1540
	0·5	720	1230	1730
	$\frac{l_1}{l_2} =$	1·099	1·108	1·123

	m	18·0°	50·3°	82·0°	99·4°
KBr	1	961	1556	2080	2467
	0·5	982	1639	2218	2631
	$\frac{l_1}{l_2} =$	1·022	1·053	1·066	1·066

Diese Tabellen, welche noch bedeutend weiter geführt werden könnten, zeigen zur Genüge die Berechtigung unserer Ansicht. Immer ist der Quotient $\frac{l_1}{l_2} > 1$, immer ist er für 18·0° kleiner als für 99·4°, und er zeigt in den meisten Fällen für die Zwischentemperatur ein regelmässiges Anwachsen. Krannhals pflegt dies so auszudrücken: »Je höher die Temperatur ist, umso rascher wächst die moleculare Leitfähigkeit mit der Verdünnung. Bei den meisten der untersuchten Lösungen nimmt das moleculare Leitvermögen fast geradlinig mit zunehmendem Gehalt ab«.

Ziehen wir ein nicht allzu grosses Temperaturintervall in Betracht, so lässt sich die Gleichung für die innere Reibung einer Flüssigkeit mit genügender Annäherung durch

$$\eta = \frac{\eta_0}{1 + at},$$

mithin die elektrolytische Leitfähigkeit analog dem Früheren durch

$$l = l_0[1 + a(\Delta + t)] \tag{2}$$

darstellen. Wir wollen diese Gleichung noch dahin abändern, dass wir auch die Zahl der freien Ionen, also den Dissociationsgrad in Betracht ziehen. Dividiren wir die Leitfähigkeit einer Lösung durch die Zahl m der im Liter gelösten Grammmolekeln, so erhalten wir die sogenannte specifische Leitfähigkeit μ. Diese strebt bei zunehmender Verdünnung einem Grenzwerth zu, der sogenannten molecularen Leitfähigkeit μ_∞. Es ist demnach

$$\mu_\infty = \frac{l}{m} = \frac{l_0}{m}(1 + at),$$

da für eine unendlich verdünnte Lösung die Gefrierpunktserniedrigung

$$\Delta = 0$$

wird. In diesem Falle nehmen wir auch an, dass sämmtliche Molekeln dissociirt seien. Es ist dann auch

$$\frac{l_0}{m} = \mu'_\infty$$

die moleculare Leitfähigkeit bei 0°.

Ist die Dissociation des Elektrolyten, wie es gewöhnlich der Fall ist, nur eine theilweise, und sei die Zahl der im Liter enthaltenen dissociirten Grammmolekeln m_1, so nehmen natürlich nur diese an der elektrolytischen Leitung theil. Es ist demnach

$$\frac{l_0}{m} = \mu'_\infty \frac{m_1}{m}$$

oder

$$l_0 = \mu'_\infty m_1$$

zu setzen. Darnach erhalten wir für die Leitfähigkeit

$$l = \mu'_\infty m_1[1+a(\Delta+t)] = \mu'_\infty m_1(1+a\Delta)\left(1+\frac{a}{1+a\Delta}t\right) =$$

$$= \mu' m\left(1+\frac{a}{1+a\Delta}t\right). \quad (3)$$

Dabei ist also μ' nichts Anderes als die specifische Leitfähigkeit der Lösung bei 0°, folglich

$$\mu' m = \mu'_\infty m_1(1+a\Delta)$$

und analog

$$\mu m = \mu_\infty m_1(1+a\Delta), \quad (4)$$

indem jetzt μ und μ_∞ die entsprechenden Leitfähigkeiten bei der Temperatur t bedeuten.

Nehmen wir an, es zerlege sich bei der Dissociation eine jede Molekel in n neue, so ist die Zahl der im Liter enthaltenen freien Grammmolekeln $m+(n-1)m_1$, und da die Gefrierpunktserniedrigung Δ proportional der Zahl der freien Molekeln ist, so muss sie auch proportional $m+(n-1)m_1$ sein, also

$$\Delta = \delta[m+(n-1)m_1],$$

wenn wir unter δ jene Gefrierpunktserniedrigung verstehen, welche eine Grammmolekel einer nichtdissociirten Substanz hervorbringt. Nach van't Hoff können wir auch so schreiben:

$$\Delta = \delta m i,$$

wobei i den sogenannten Dissociationscoëfficienten darstellt. Es ist also

$$i = \frac{m+(n-1)m_1}{m} = 1+(n-1)\frac{m_1}{m}. \quad (5)$$

Aus Gleichung (4) finden wir nun, dass

$$\frac{m_1}{m} = \frac{\mu}{\mu_\infty(1+a\Delta)},$$

folglich

$$i = 1+(n-1)\frac{\mu}{\mu_\infty(1+a\Delta)} = 1+(n-1)\frac{\mu}{\mu_\infty(1+am\delta i)}$$

ist. Wir erhalten demnach für i eine quadratische Gleichung, in welcher alle Grössen der Messung zugänglich sind, so dass man i daraus berechnen kann.

Da diese Gleichung natürlich nur auf verdünnte Lösungen mit Berechtigung angewendet werden kann, so ist m eine kleine Zahl. Dasselbe wissen wir auch von a, so dass das ganze Glied $am\delta i$ vernachlässigt werden kann, ohne dass wir durch die neue Gleichung die Beobachtungsfehler überschreiten. Wir erhalten dann

$$i = 1 + (n-1)\frac{\mu}{\mu_\infty},$$

eine Formel, die schon Arrhenius[1] zur Berechnung des i mit Erfolg benützt hat. Bekanntlich ergibt sich ja diese Gleichung ohneweiters, wenn man von vornherein die Erhöhung der Energie des Lösungsmittels durch die gelöste Substanz nicht in Betracht zieht.

Nehmen wir an, unsere Lösung sei so verdünnt, dass bereits sämmtliche Molekeln dissociirt sind, so würde aus Gleichung (3) für die Leitfähigkeit folgen

$$l = \mu'_\infty m(1 + a\delta im)\left(1 + \frac{a}{1 + a\delta im}\,t\right).$$

Daraus würde sich ergeben, dass die Leitfähigkeit bei sehr grosser Verdünnung nicht linear mit m zunimmt, sondern etwas rascher, da ja noch ein positives Glied mit m^2 hinzukommt. Dies zeigt sich bei vielen sehr stark verdünnten Lösungen in der That.[2] Doch wird diese Erscheinung durch unsere Gleichung durchaus nicht erklärt, da für derartige Verdünnungen das Glied mit m^2 so klein ausfallen würde, dass es sich der Beobachtung vollständig entzieht, so dass die hier erwähnte Erscheinung, wie es auch F. Kohlrausch gethan hat, auf andere Ursachen zurückzuführen ist.

Es zeigt sich also, dass die Dissociation des Elektrolyten sehr von der Concentration abhängig ist, so dass dadurch

---

[1] Zeitschr. für physik. Chemie, I, 633 (1887).

[2] Siehe F. Kohlrausch, Wied. Ann., XXVI, 195—197 (1885).

die Wirkung, welche durch die Erhöhung der Energie des Lösungsmittels hervorgebracht wird, vollständig verdeckt wird.

Weniger abhängig ist, wie wir bereits an einem Beispiel gesehen haben, die Dissociation von der Temperatur. Schreiben wir demnach Gleichung (2)

$$l = l_0[1 + a(\Delta + t)] = l_0'\left(1 + \frac{a}{1 + a\Delta}\,t\right) = l_0'(1 + a_1 t).$$

Diese Formel ist natürlich nur insofern giltig, als wir es mit einem constanten Dissociationsgrad zu thun haben und die innere Reibung von der Anwesenheit der gelösten Substanz unabhängig erklären können. Beides ist nicht der Fall, doch vernachlässigen wir vorläufig diesen Umstand, so ergibt sich auch aus folgender Gleichung

$$a_1 = \frac{a}{1 + a\Delta} = \frac{a}{1 + a i \delta m},$$

dass der Temperaturcoëfficient der elektrolytischen Leitfähigkeit einer Lösung mit wachsender Concentration abnehmen muss, wobei natürlich unsere jetzigen Formeln nur für kleinere Temperaturintervalle anzuwenden sind. Dieses Resultat wird durch die Beobachtung sehr gut bestätigt. So folgert F. Kohlrausch aus seinen zahlreichen Messungen:[1] »Mit steigendem Salzgehalt nehmen anfangs die Temperaturcoëfficienten aller Salze mit einbasischen Säuren ab.« »Es bleiben die Temperaturcoëfficienten abnehmend bis zu den stärksten untersuchten Lösungen bei sämmtlichen Kali- und Ammoniaksalzen.« Diese Sätze werden schliesslich[2] dahin erweitert, »dass der Temperaturcoëfficient von äusserster Verdünnung an bei allen Elektrolyten zunächst abnimmt«.

Aus bereits angeführten Gründen ist der Temperaturcoëfficient in den wenigsten Fällen genau $\frac{a}{1 + a i \delta m}$, doch genügt in der Regel eine geringe Änderung der Werthe von a

[1] Wied. Ann., VI, 194, 195 (1879).

[2] Wied. Ann., XXVI, 223 (1885).

und $a i \delta$, um Übereinstimmung zwischen Theorie und Beobachtung herzustellen. Wir wollen desshalb

$$a_1 = \frac{a'}{1+bm}$$

setzen, wobei a' und b Constanten sind, die wenig von a bezüglich $a i \delta$ abweichen. Nach dieser Formel sind die Werthe von a_1 für verschiedene Substanzen und Concentrationen berechnet und in den folgenden Tabellen zusammengestellt. Diejenigen Concentrationen, aus welchen a' und b bestimmt wurden, sind immer in Klammern bei der betreffenden Substanz angegeben. Die beobachteten Werthe entstammen den Tabellen von F. Kohlrausch.[1]

	m	a_1 beob	a_1 ber.
KCl (0·5, 3·5) $a'_1 = 0{\cdot}0215$ $b = 0{\cdot}0892$	0·5	0·0206	0 0206
	1	199	197
	1·5	188	189
	2	182	182
	2·5	176	176
	3	170	170
	3·5	164	164
NH_4Cl (0·5, 5) $a' = 0{\cdot}02114$ $b = 0{\cdot}0728$	0·5	0·0204	0·0205
	1	198	197
	1·5	192	192
	2	186	185
	2·5	179	179
	3	172	173
	3·5	166	168
	4	162	164
	4·5	158	159
	5	155	155
NaCl (0·5, 2) $a' = 0{\cdot}02221$ $b = 0{\cdot}0189$	0·5	0·0220	0·0220
	1	218	218
	1·5	216	216
	2	214	214

[1] Wied. Ann., VI, 148—150 (1879).

	m	a_1 beob.	a_1 ber.
LiCl	0·5	0·0229	0·0229
(0·5, 3)	1	225	226
$a' = 0·02313$	2	220	222
$b = 0·0204$	3	218	218
	0·5	0·0214	0·0214
$^1/_2\,BaCl_2$	1	207	209
(0·5, 2)	1·5	202	204
$a' = 0·02195$	2	199	199
$b = 0·0515$	2·5	196	195
	3	193	190
$^1/_2\,SrCl_2$	0·5	0·0217	0·0217
(0·5, 2)	1	212	212
$a' = 0·02216$	1·5	208	208
$b = 0·0434$	2	204	204
$^1/_2\,CaCl_2$	0·5	0·0218	0·0218
(0·5, 2)	1	213	214
$a' = 0·02219$	2	207	207
$b = 0·0361$	3	203	200
	0·5	0·0205	0·0205
KBr	1	193	195
(0·5, 2·5)	1·5	184	186
$a' = 0·02160$	2	177	178
$b = 0·107$	2·5	171	171
	3	166	164
KJ	0·5	0·0203	0·0203
(0·5, 3)	1	194	192
$a' = 0·02155$	2	172	173
$b = 0·123$	3	156	157
	4	147	144
NH_4J	0·5	0·0205	0·0205
(0·5, 3)	1	199	199
$a' = 0·02120$	2	188	187
$b = 0·0672$	3	176	176

	m	a_1 beob.	a_1 ber.
NaJ (0·5, 2) $a' = 0·02257$ $b = 0·0615$	0·5	0·0219	0·0219
	1	212	213
	2	201	201
LiJ (0·5, 2) $a' = 0·02227$ $b = 0·0432$	0·5	0·0218	0·0218
	1	214	214
	1·5	209	209
	2	205	205
	2·5	202	201
KNO_3 (0·5, 2) $a' = 0·02118$ $b = 0·0269$	0·5	0·0209	0·0209
	1	206	206
	1·5	204	204
	2	201	201
NH_4NO_3 (0·5, 3) $a' = 0·02127$ $b = 0·0650$	0·5	0·0206	0·0206
	1	199	200
	2	187	188
	3	178	178
	4	170	169
$^1/_2\, MgN_2O_6$ (0·5, 3) $a' = 0·02203$ $b = 0·0215$	0·5	0·0218	0·0218
	1	215	216
	2	211	211
	3	207	207
$AgNO_3$ (0·5, 3) $a' = 0·02203$ $b = 0·0215$	0·5	0·0218	0·0218
	1	216	216
	2	211	211
	3	207	207
$^1/_2\, (NH_4)_2SO_4$ (0·5, 2) $a' = 0·02286$ $b = 0·0686$	0·5	0·0221	0·0221
	1	212	214
	2	201	201

Wir sehen in dem Vorhergehenden also thatsächlich unsere Aussage bestätigt, ja es zeigt sich, dass in den meisten Fällen unsere Formel für a_1 sogar bis zu ziemlich beträchtlichen Concentrationen giltig ist.

Für manche Lösungen genügt nun schon eine geringe Änderung des a allein, um Beobachtung und Theorie zur Übereinstimmung zu bringen. Natürlich muss für diese Lösungen der jeweilige Dissociationscoëfficient i bekannt sein. Wir werden also dann

$$a_1 = \frac{a'}{1 + a' i \delta m}$$

setzen. Nach Arrhenius[1] ist z. B.

	m	$i\delta$
$CaCl_2$	0·199	5·01
	0·331	5·16
$SrCl_2$	0·356	5·03

Wir sehen, dass sich die Dissociationsconstante mit der Concentration bei $CaCl_2$ nicht erheblich ändert. Wir wollen sie daher für die Concentrationen 0·25, 0·5 und 1 des $CaCl_2$ gleich 5·16, ferner für die Concentrationen 0·25—1 des $SrCl_2$ gleich 5·03 setzen. Es ergeben sich dann für a_1 die Werthe der folgenden Tabellen. Dazu wollen wir noch die Ergebnisse für KCl und $BaCl_2$ fügen, wobei zur Berechnung von $i\delta$ vollständige Dissociation angenommen wurde.

	m	a_1 beob.	a_1 ber.
$CaCl_2$, $a' = 0·02243$	0·25	0·0218	0·0218
	0·5	213	212
	1	207	201
$SrCl_2$, $a' = 0·02231$	0·25	0·0217	0·0217
	0·5	212	211
	0·75	208	206
	1	204	201
KCl, $a' = 0·0213$	0·5	0·0206	0·0204
	1	199	196
	1·5	188	189
	2	182	182
	2·5	176	176
	3	170	170
	3·5	164	164

[1] Zeitschr. für physik. Chemie, II, 496 (1888).

	m	a_1 beob.	a_1 ber.
$BaCl_2$	0·25	0·0214	0·0216
$a' = 0·0223$	0·5	207	209
	0·75	202	203
	1	199	197

Wie die Tabellen zeigen, ist die Übereinstimmung zwischen Theorie und Beobachtung nicht schlecht.

Damit ist erwiesen, dass die Abhängigkeit des Temperaturcoëfficienten der elektrolytischen Leitfähigkeit einer Lösung von der Concentration in erster Linie durch die Energieerhöhung des Lösungsmittels sich erklärt. Damit ist aber auch ein directer Zusammenhang zwischen dieser Änderung des Temperaturcoëfficienten und der Gefrierpunktserniedrigung der Lösung, somit auch mit dem osmotischen Druck, der Dampfspannungserniedrigung, Siedepunktserhöhung, Änderung der Capillaritätsconstanten und anderer Eigenschaften der Lösungen gegeben.

Wir wollen jetzt noch einen Blick auf den Zusammenhang zwischen der Leitfähigkeit und deren Temperaturcoëfficienten werfen. Wiederum sollen uns nur verdünnte Lösungen beschäftigen. Dann können wir, um den Gang der Leitfähigkeit mit der Concentration m zu constatiren, in erster Annäherung $a\Delta$ gegen Eins vernachlässigen, wodurch wir

$$l = \mu'_\infty m_1 (1+at)$$

erhalten. Beachten wir ferner, dass wir nach Gleichung (5)

$$m_1 = \frac{i-1}{n-1} m$$

setzen können, so wird

$$l = \frac{\mu'_\infty}{n-1}(i-1)m(1+at) = C(i-1)m,$$

wenn wir

$$\frac{\mu'_\infty(1+at)}{n-1} = C,$$

d. i. einer neuen Constanten setzen, was erlaubt ist, wenn wir den Gang der Leitungsfähigkeit mit der Concentration bei constanter Temperatur in Betracht ziehen. Darnach wird

$$\frac{dl}{dm} = C\left(i - 1 + m\,\frac{di}{dm}\right), \tag{6}$$

indem wir den Dissociationscoëfficienten i als eine Function der Concentration m annehmen müssen.

Als Temperaturcoëfficient der Leitungsfähigkeit ergibt sich aus Gleichung (3)

$$a_1 = \frac{a}{1 + a\Delta} = \frac{a}{1 + a\delta i m},$$

mithin

$$\frac{da_1}{dm} = -\frac{a^2\delta}{(1 + a\delta i m)^2}\left(i + m\,\frac{di}{dm}\right) = -C'\left(i + m\,\frac{di}{dm}\right). \tag{7}$$

Auch hier können wir nämlich wie früher für verdünnte Lösungen $a\delta i m$ gegen Eins vernachlässigen und

$$a^2\delta = C'$$

einer neuen Constanten setzen. Durch Elimination von $m\,\frac{di}{dm}$ aus den Gleichungen (6) und (7) erhält man leicht die neue Beziehung

$$\frac{dl}{dm} + C = -k\,\frac{da_1}{dm}, \tag{8}$$

wenn wir

$$\frac{C}{C'} = k$$

setzen. Aus dieser Gleichung ergibt sich unmittelbar, dass die Änderung der Leitfähigkeit mit der Concentration eine ganz bestimmte Änderung des Temperaturcoëfficienten zur Folge hat. Da sowohl C, als k wesentlich positive Grössen sind, da ferner von der Concentration Null angefangen die Leitfähigkeit ebenfalls von Null ausgehend für verdünnte Lösungen beständig zunimmt, so folgt aus Gleichung (8), dass $\frac{da_1}{dm}$ negativ sein muss, oder, was wir ja bereits auch auf andere Weise festgestellt haben, dass von der Concentration Null ausgehend der Temperaturcoëfficient für alle Lösungen zunächst mit wachsender Temperatur abnehmen muss. Für jene Lösungen, welche ein Maximum der Leitfähigkeit haben, wird ein Mini-

mum des Temperaturcoëfficienten eintreten können. Thatsächlich erreichen, wie aus F. Kohlrausch's Beobachtungen[1] hervorgeht, für sämmtliche Elektrolyte, deren Leitfähigkeit bei wachsender Concentration ein Maximum erreicht, die Temperaturcoëfficienten einen kleinsten Werth, um sodann wieder zu wachsen. Dass eine zahlenmässige Übereinstimmung hier zwischen unserer Theorie und der Beobachtung nicht erwartet werden kann, wird durch die von uns gemachten Einschränkungen hinlänglich gerechtfertigt. Beachten wir, dass C' für alle Elektrolyte dieselbe Grösse ist, ferner, dass auch C für die meisten nicht erheblich von einander abweichende Werthe annimmt, so ergibt sich, dass bei grossen Werthen von $\frac{dl}{dm}$ auch der absolute Betrag von $\frac{da_1}{dm}$ gross ausfallen muss und umgekehrt. Tragen wir also in ein rechtwinkeliges Coordinatensystem die Concentrationen m als Abscissen, die Leitfähigkeit als Ordinaten, in ein zweites entsprechend die Temperaturcoëfficienten als Ordinaten auf, so müssen die beiden Curvensysteme entgegengesetzt gerichtet sein. Wir lassen zur Bestätigung dessen am besten F. Kohlrausch[2] selbst reden: »Bei der Betrachtung von irgend einer der Zeichnungen« — nämlich der Leitungscurven und der darunter befindlichen Temperaturcurven — »wird man leicht bemerken, dass die Reihenfolge der Elektrolyte, wenn auch nicht ausnahmslos, aber doch fast durchgängig oben und unten vertauscht ist. Die Temperaturcurven bilden sozusagen eine Art von verzerrtem Spiegelbild der Leitungscurven«. »Also je besser ein Körper leitet, desto langsamer wächst im Allgemeinen sein Leitungsvermögen mit der Temperatur; mit anderen Worten: die Unterschiede des Leitungsvermögens verschiedener Körper vermindern sich im Allgemeinen in höherer Temperatur«.

Differenziren wir die Gleichung (8) noch einmal nach m, so ergibt sich

$$\frac{d^2l}{dm^2} = -k\frac{d^2a_1}{dm^2}.$$

---

[1] Wied. Ann., VI, 195.

[2] Ebenda 196.

Daraus erhellt ohneweiters, dass die Leitungscurven immer die entgegengesetzte Krümmung der Temperaturcurven haben müssen. In der That erfahren wir darüber aus F. Kohlrausch's Messungen Folgendes:[1] »Sämmtliche (Leitungs-) Curven krümmen sich, vom Nullpunkt des reinen Wassers anfangend, zunächst der Abscisse zu.« »So gut wie alle Temperaturcurven sind nach oben gekrümmt.«

Mannigfache Schlüsse lassen sich also aus unserer einfachen Erklärung für die Gefrierpunktserniedrigung einer Lösung auf das Verhalten der elektrolytischen Leitfähigkeit derselben ziehen, und in allen Fällen steht Theorie und Beobachtung in guter Übereinstimmung.

---

[1] Ebenda 184, 195.

XIII. SITZUNG VOM 16. MAI 1895.

Der Secretär legt das erschienene Heft I—II (Jänner-Februar 1895), Abtheilung I, des 104. Bandes der Sitzungsberichte vor.

Se. Excellenz der Herr Curator-Stellvertreter setzt die kaiserliche Akademie in Kenntniss, dass Se. k. und k. Hoheit der durchlauchtigste Herr Erzherzog Rainer in der diesjährigen feierlichen Sitzung am 30. Mai zu erscheinen und dieselbe als Curator der Akademie mit einer Ansprache zu eröffnen geruhen werde.

Der Secretär überreicht eine Abhandlung von Prof. Dr. J. M. Pernter in Innsbruck: »Über die Häufigkeit, Dauer und die meteorologischen Eigenschaften des Föhn in Innsbruck«.

Über die Häufigkeit, die Dauer und die meteorologischen Eigenschaften des Föhns in Innsbruck

von

J. M. Pernter.

Nachdem hauptsächlich durch die Untersuchungen von Hann der Föhn als Fallwind endgiltig erkannt und die physikalische Ursache für seine auffallende Wärme und Trockenheit festgestellt worden, hat das wissenschaftliche Interesse für diesen Wind sich bedeutend verringert. Und doch ist diese merkwürdige Erscheinung noch lange nicht vollständig untersucht, ja es erübrigt vielleicht noch der grössere Theil der Arbeit, um einen erschöpfenden Einblick in die Natur und Ursache des Föhns zu erlangen. Da steht in erster Linie die Frage nach den dynamischen Vorgängen beim Herabstürzen der Luft und dem Abfliessen derselben in den Tiefen der Thäler, über welche wir ziemlich gar keinen Aufschluss zu geben vermögen und deren Kenntniss nicht nur für die volle Erklärung des Föhns von Wichtigkeit ist, sondern eine allgemeine Bedeutung für die Dynamik der Atmosphäre beansprucht. Um diese wissenschaftlich wichtigste Frage beantworten zu können, werden wir aber vorerst genöthigt sein, sowohl die Häufigkeit, Dauer und Heftigkeit des Föhns, das Verhalten und den Gang des Barometers, des Thermometers und des Hygrometers vor, während und nach demselben in allen Einzelheiten kennen zu lernen, als auch die Luftdruckvertheilung, welche die unmittelbare Ursache desselben ist, eingehend zu untersuchen.

Da nun das meteorologische Observatorium der Innsbrucker Universität im Föhngebiete liegt, so ist mir vielfache Anregung und ausgedehntes Beobachtungsmateriale zu diesen Untersuchungen geboten, und ich beginne dieselben mit der vorliegenden Arbeit, in welcher ich mich auf die im Titel gegebenen Punkte beschränke und auch diese nur nach den dreimal täglichen Beobachtungen der letzten 25 Jahre zur Darstellung bringe; in Kürze wird es mir möglich sein, weitere Beiträge zur Kenntniss des Föhns zu liefern.

I. Häufigkeit und Dauer des Föhns.

Um die Häufigkeit des Föhns in Innsbruck zu erhalten, habe ich die Tage, an welchen Föhn herrschte — hier nennt man ihn den »warmen Wind« — aus den Beobachtungsbögen der Jahre 1870 bis 1894 einschliesslich ausgezogen. Ich habe dann die Tage mit Föhn in jedem Monate zusammengezählt und in eine Tabelle (siehe Tabelle I) gebracht, und ich verstehe daher unter Häufigkeit des Föhns die Zahl der Tage mit Föhn. Aus der so erhaltenen Tabelle ergibt sich folgende Vertheilung der Föhntage über das Jahr:

Durchschnittliche Anzahl der Föhntage

Jän.	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	Aug.	Sept.	Oct.	Nov.	Dec.	Jahr
3·12	3·40	5·98	5·88	5·12	1·48	2·21	1·37	2·04	4·75	4·33	3·00	42·68

oder in Procenten der Gesammtzahl der Tage im Jahre

Jän.	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	Aug.	Sept.	Oct.	Nov.	Dec.
7	8	14	14	12	4	5	3	5	11	10	7

Die eigentlichen Föhnmonate sind daher März, April, Mai und October, November, also Frühling und Herbst; im Winter sinkt die Häufigkeit des Föhns fast auf die Hälfte derjenigen des Frühlings herab, am seltensten ist er in den warmen Monaten Juni, Juli, August und September. Das Maximum der Häufigkeit fällt — mit Rücksicht darauf, dass der April nur 30, der März aber 31 Tage hat — auf den April (20 Procent der Tage), mit dem allerdings der März fast gleiche Häufigkeit aufweist (19 Procent der Tage); das Minimum weist der August

auf. Eigentlich haben wir ein durch den Juli in zwei Hälften getheiltes Minimum, wovon das weniger tiefe auf den Juni, das tiefere auf den August fällt. Interessant ist die Stellung des Septembers, der die herabgedrückte Häufigkeit der warmen Monate besitzt und sich so von den Herbstmonaten abtrennt.

In den einzelnen Jahren finden wir sehr grosse Unterschiede der Häufigkeit; es gibt nicht einen einzigen Monat, der in den untersuchten 25 Jahren nicht wenigstens in einem Jahre ganz ohne Föhn blieb, selbst der April macht hierin keine Ausnahme, da 1893 während des ganzen Monates kein Föhn auftrat. Anderseits gab es Jahre, in welchen die Hälfte der Tage des Monates Föhntage waren. Folgende Zusammenstellung der Monate ohne Föhn und der Maxima der Föhntage für die einzelnen Monate wird die grosse Veränderlichkeit der Häufigkeit des Föhns von Jahr zu Jahr deutlich zum Ausdrucke bringen.

Kein Föhn im Monate

Jän.	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	Aug.	Sept.	Oct.	Nov.	Dec.
4	3	3	1	4	6	10	10	7	2	1	6mal

Maximum der Zahl der Föhntage im Monate

Jän.	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	Aug.	Sept.	Oct.	Nov.	Dec.
9	7	17	15	15	5	7	5	6	10	10	9 Tage

Man sieht hieraus, dass man für März eine Föhnprognose auf das Intervall: den ganzen Monat kein Föhn bis 17 Tage des Monates Föhn, zu stellen hätte; auch April und Mai können im einen Jahre ohne Föhn bleiben, im anderen während des halben Monates Föhn haben. In der That war der Mai 1871 föhnlos und gleich im folgenden Jahre 1872 stellten sich im selben Monate 15 Föhntage ein.

Bei diesen grossen Schwankungen ist es daher nicht zu verwundern, wenn auch der jährliche Gang der Häufigkeit des Föhns in einzelnen Jahren erheblich von dem mittleren abweicht. Dennoch finden sich in den 25 Jahren nur zwei, welche die Maxima des Frühlings und Herbstes verschieben, nämlich 1886, wo der December, und 1893, wo der Februar der föhnreichste Monat war. Fünf von den untersuchten 25 Jahren

geben eine grössere mittlere Häufigkeit für October—November als für die drei Frühlingsmonate.

Aber nicht nur die Vertheilung der Häufigkeit des Föhns über die Monate des Jahres ist veränderlich, auch die absolute Anzahl der Föhntage im Jahre unterliegt bedeutenden Schwankungen. So hatte das ganze Jahr 1875 nur 14 Föhntage, während wir 1891 es auf 63 brachten; diese zwei Jahre stellen die beiden Extreme dar. Im Durchschnitte der untersuchten 25 Jahre fallen auf das Jahr 42·7 Föhntage. Man kann also sagen, dass von den zwölf Monaten des Jahres fast anderthalb Monate Föhn herrscht.

Die auf das Jahr treffende Anzahl der Föhntage ist nun aber nicht in einzelne Tage zerfällt über das ganze Jahr zerstreut, sondern in bald längere, bald kürzere Föhnperioden vereint. Bezeichnet man als Dauer des Föhns die Anzahl der aufeinanderfolgenden Föhntage, so finden wir Föhn von der Dauer 1 Tages bis zur Dauer von 8 Tagen. Tabelle II gibt über die Dauer des Föhns in den einzelnen Monaten und im Jahre Aufschluss; sie gibt an, wie oft diese Dauer 1, 2, 3, . . . 8 Tage betrug. In den untersuchten 25 Jahren kam nie eine ununterbrochene Dauer von mehr als 8 Tagen vor. Die Jahressumme für die 25 Jahre ergibt folgende Vertheilung der Dauer:

Dauer von	1	2	3	4	5	6	7	8 Tagen
	214	170	61	29	22	5	4	2 mal

Es ergibt sich hieraus, dass fast ein Drittel (2 × 170) der 1046 Föhntage der 25 untersuchten Jahre in der Dauer von 2 Tagen, fast ein Fünftel derselben in der Dauer von 1 Tag und somit etwas mehr als die Hälfte in der Dauer von 1 oder 2 Tagen auftrat, die kleinere erübrigende Hälfte vertheilt sich in ziemlich rasch abnehmender Zahl über die Perioden längerer Dauer, wie aus folgender Gruppirung ersichtlich ist:

Auf die Dauer von

	1	2	3	4	5	6	7	8 Tagen
entfallen	214	340	183	120	115	30	28	16 Föhntage.

Die längste Dauer von 8 Tagen kam also nur 2mal, und zwar im Jänner 1877 und im Mai 1872 vor. Beim Hereinbruch des Föhns wird man also mit einer Wahrscheinlichkeit von 0·75 auf eine Dauer von 1 bis 3 Tagen rechnen können. Längere Dauer als von 3 Tagen kommt nur in den Frühlingsmonaten häufiger vor.

Wenn ich so die Dauer des Föhns behandle, so muss ich vor einer falschen Auffassung warnen. Es ist höchst selten, dass man behaupten kann, ein und derselbe Föhn dauere 3 Tage an, oft ist sogar der Föhn des zweiten Tages schon ein zweiter, neuer Föhn. Die Dauer eines Föhns zu bestimmen, ist recht schwierig, doch werde ich bei einer kommenden Gelegenheit, wo von der erzeugenden Ursache des Föhns die Rede sein wird, den Versuch machen, die Dauer auch in diesem Sinne zu bestimmen.

Aus dieser ganzen Zusammenstellung über die Häufigkeit und Dauer des Föhns ergibt sich auch, dass, obwohl durchschnittlich ein deutlich ausgeprägter jährlicher Gang der Häufigkeit des Föhns vorhanden ist, das Auftreten des Föhns dennoch nicht die Regelmässigkeit auch nur der meteorologischen Jahreszeiten erreicht, obwohl er offenbar sich denselben anschmiegt, indem er den Frühling und Herbst besonders bevorzugt, den Sommer auffallend vernachlässigt.

II. Die meteorologischen Eigenschaften des Föhns.

Die meteorologischen Eigenschaften des Föhns ergeben sich aus dem Verhalten der meteorologischen Elemente während des Föhns. Um nun den Stand und Gang dieser Elemente zur Föhnzeit richtig zu erkennen und zu beurtheilen, war es nothwendig, vorerst das allgemeine Mittel des Luftdruckes, der Temperatur, der Feuchtigkeit und der Bewölkung, sowie Wind und Regen für die 25 Jahre, welche ich der Untersuchung unterzog, zu ermitteln, um den Vergleichspunkt für dieselben Mittel an den Föhntage zu erhalten. Dieser eine Vergleichspunkt schien mir aber nicht hinreichend, ich hielt es für nothwendig, dieselben Mittel auch für die dem Föhn vorhergehenden Tage einerseits und für die dem Föhn nachfolgenden Tage

anderseits zu bilden, um so ein volles Bild des Standes und Ganges der meteorologischen Elemente bei Föhn entwerfen zu können. Ich schrieb daher 1. jeden einem Föhn vorhergehenden Tag, 2. alle Föhntage und 3. jeden einem Föhn oder einer Föhnperiode nachfolgenden Tag in Tabellenform und nach Monaten getrennt heraus und erhielt so drei Reihen von Tabellen für jedes meteorologische Element, die ich bezeichne als: Vortage des Föhns, Föhntage und Folgetage des Föhns. Die Mittelwerthe jedes meteorologischen Elementes 1. im 25jährigen allgemeinen Durchschnitt, 2. für die Vortage des Föhns, 3. für die Föhntage, 4. für die Folgetage des Föhns finden sich im Anhange unter den Tabellen.[1] Die Ergebnisse meiner Untersuchung mögen nun kurz hier zur Darstellung kommen. Es sei mir nur noch hier gestattet zu bemerken, dass ich selbstverständlich alle Mittelwerthe, die aus Beobachtungen von einer verschiedenen Zahl von Monaten oder Tagen zu ermitteln waren, mit richtiger Einführung des Gewichtes der Daten berechnete. Dies gilt ohne Ausnahme für alle folgenden Mittel und es sei dies ein- für allemal festgestellt.

a) Luftdruck.

Die Luftdruckbeobachtungen während der untersuchten 25 Jahre sind nicht durchwegs von tadelloser Beschaffenheit.

---

[1] Die Tabellenköpfe geben die drei Beobachtungszeiten folgendermassen an: Morgens, 2^h p., Abends. Es wurde nämlich bis 1875 einschliesslich und dann wieder von 1891 bis 1894 um 7^h a., 2^h p. und 9^h p., in den dazwischen liegenden Jahren aber um 8^h a., 2^h p. und 8^h p. beobachtet. Ein Reduciren der 8^h-Werthe auf die Stunden 7^h a. und 9^h p. wäre nur nach den Resultaten der selbstregistrirenden Apparate und auch da nur für die allgemeinen Mittel aus den 25 Jahren möglich gewesen; für die Mittelwerthe der Vortage, Föhntage und Folgetage aber wäre dies ganz unthunlich, da die 4 Jahre, seit welchen selbstregistrirende Apparate hier thätig sind, noch keine genügenden Mittel an die Hand geben, um eine solche Reduction für den an Föhntagen gänzlich gestörten täglichen Gang vorzunehmen. Um daher wenigstens relativ vergleichbare Werthe für alle Tabellen zu erhalten, habe ich überall die 7^h a. und 8^h a., 8^h p. und 9^h p. erhaltenen Werthe einfach zu einem Mittel vereinigt und bezeichne daher die einen mit »Morgenbeobachtung«, die anderen mit »Abendbeobachtung«. Für den Zweck der Vergleichung ist dies gewiss gestattet, ohne fürchten zu müssen, dass bei Vornahme der Reduction auf dieselbe Stunde merklich andere Ergebnisse erhalten würden.

Ich musste daher da, wo der Fehler nicht auffindbar war, Monate ausscheiden. Aber auch so möchte ich nicht für die volle Exactheit der absoluten Höhe der Werthe einstehen, wohl aber ist es zweifellos, dass der Fehler so gering ist, dass er beim Vergleiche der in den Tabellen gegebenen Werthe untereinander von keinem störenden Einflusse ist.

Vergleichen wir nun zuerst die Jahresmittel, so ergibt sich

25 Jahre	Vortage	Föhntage	Folgetage
710·0	709·1	705·8	706·9 *mm*

Der Föhn tritt also meist bei tiefem Barometerstande ein, und zwar ist derselbe im Durchschnitte um 4·2 *mm* niedriger als das 25jährige Mittel. Schon am Vortage steht das Barometer niedriger, erreicht den tiefsten Stand an den Föhntagen, um am Folgetage wieder zu steigen. Dies ergibt sich noch deutlicher, wenn wir fortlaufend den Gang des Barometers für Vortag, Föhntag und Folgetag betrachten:

	Vortag			Föhntag			Folgetag		
	Mo.	2^h	Ab.	Mo.	2^h	Ab.	Mo.	2^h	Ab.
700 +	9·9	8·5	8·8	6·8	5·1	5·4	6·4	6·5	7·9

Obwohl noch eine Spur des täglichen Ganges, wie er im 25jährigen Mittel zu Tage tritt (10·5, 9·4, 10·1), am Vortage und wohl auch am Föhntage, ja sogar noch am Folgetage zu erkennen ist, tritt das Fallen des Barometers am Vortage und Föhntage und das Steigen desselben am Folgetage sehr deutlich hervor.

Die Erniedrigung des Luftdruckes an Föhntagen unter das allgemeine Mittel des betreffenden Monates ist aber in den verschiedenen Monaten verschieden. So beträgt der Unterschied im

Jän.	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	Aug.	Sept.	Oct.	Nov.	Dec.
6·1	5·1	4·0	2·9	2·8	2·8	2·4	1·8	2·2	3·5	5·4	3·9 *mm*

Wie man sieht, ist die Erniedrigung in den kalten Monaten am grössten, in den warmen Monaten am kleinsten. Letzteres trifft mit der geringsten Häufigkeit zusammen, ersteres aber nicht mit der grössten Häufigkeit. Es ist zwar nicht selbst-

verständlich, liegt aber nahe, die Grösse des Unterschiedes als direct proportional mit der Intensität des Föhns anzunehmen. Dafür spricht die Erfahrung und werden wir bei dem Verhalten der Temperatur während des Föhns ein weiteres Motiv für diese Annahme finden. Allein die Entscheidung können wir erst bei der Untersuchung über die erzeugende Ursache des Föhns treffen.

Die aus den Mittelwerthen gezogenen Schlüsse bedürfen aber einer Ergänzung, um Missverständnisse hintanzuhalten. Der Föhn weht nicht nur während des fallenden Luftdruckes. Im Allgemeinen beginnt er noch bei fallendem Barometer, dauert aber beim darauffolgenden Steigen desselben noch an, ja manchmal beginnt er sogar erst bei steigendem Barometer. Die Ursache des Föhns liegt eben nicht in der Abnahme des Luftdruckes, sondern, wie wir in einer folgenden Arbeit beweisen werden, in besonderen Arten der Luftdruckvertheilung, deren Wirkung auf die Luftbewegung auf der Nordseite der Alpen nicht vom Vorüberziehen einer Depression an sich, sondern von der Gestaltung und der Lage, sowie dem Verlauf der Isobaren abhängt; nur bei gewissen Formen und Lagen der in gewissen Richtungen verlaufenden Isobaren tritt Föhn auf. Das werden wir, wie gesagt, ein anderesmal eingehend darstellen.

b) Temperatur.

Die charakteristischeste Eigenschaft des Föhns ist die bedeutende Erwärmung der Luft bei demselben. In Innsbruck heisst er im Allgemeinen schlechtweg der »warme Wind«. Bei der gegenwärtigen Bearbeitung der 25jährigen Terminbeobachtungen will ich vorerst den mittleren Temperaturüberschuss der Föhntage zur Darstellung bringen, um dann den Wärmeeinfluss des Föhns auf die Temperatur von Innsbruck zu berechnen. Die hiezu nöthigen Daten finden sich in Tabelle IV zusammengestellt. Ich habe neben dem 25jährigen Mittel, das ich auf die in der Anmerkung, S. 432, dargelegte Weise berechnete, die wahren 30jährigen Mittel nach Hann gesetzt, um zu zeigen, dass die Abweichung, trotz der Verschiedenheit der Morgen- und Abendtermine und obwohl keine Correction zur

Reducirung auf wahre Mittel angebracht wurde, eine geringe ist. Im Jahresdurchschnitt erhalten wir folgende Temperaturen:

	Morgens	2^h p.	Abends	Mittel
25 Jahre.....	5·2	11·8	7·5	8·2
Vortage.....	3·5	10·5	6·1	6·7
Föhntage....	6·9	15·0	11·4	11·1
Folgetage....	6·7	10·9	6·9	8·2

Man sieht hieraus, dass das Tagesmittel eines Föhntages im Durchschnitte 2·9° über dem allgemeinen Mittel liegt. An den drei Terminen erscheint die Temperatur Morgens am wenigsten erhöht, nämlich um 1·7°, Abends am meisten, nämlich 3·9° und Mittags um 3·2°. Die geringe Temperaturerhöhung am Morgen der Föhntage hat aber ihren Grund darin, dass der Föhn sehr häufig nach 8 Uhr Morgens einfällt, so dass dann am ersten Föhntage die Morgentemperatur noch sehr niedrig steht. Vergleicht man die Mittel der Vortage mit den allgemeinen Mitteln, so sieht man sofort, dass die Temperatur der Vortage durchwegs unter dem allgemeinen Mittel liegt, und dass gerade die Morgentemperatur am stärksten herabgedrückt erscheint. Wenn nun der Föhn erst nach 8^h a. einfällt, ist die an diesem Föhntage beobachtete Morgentemperatur sehr niedrig. Aus dem Gesagten erklärt sich die geringe Temperaturerhöhung, welche die Morgenbeobachtung der Föhntage ausweist. Anderseits zeigt ein Vergleich der Mittel der Folgetage mit den übrigen, dass an den Folgetagen des Föhns zur Zeit der Morgenbeobachtung die Temperatursteigerung häufig noch anhält, so dass das Temperaturmittel der Morgenbeobachtung an den Folgetagen fast ebenso hoch ist wie an den Föhntagen, während die Mittags- und Abendbeobachtung für die Folgetage unter die allgemeinen Mittel bedeutend herabgedrückt erscheinen.

Um nun die durch den Föhn verursachte Temperatursteigerung der allgemeinen Mittelwerthe zu erhalten, habe ich für alle Monate die folgende Rechnung gemacht. Es sei y der Werth der Temperatur, welcher Innsbruck zukäme, wenn es keinen Föhn hätte. S die Anzahl aller Tage oder aller Beobachtungen zu der bestimmten Tagesstunde der ganzen unter-

suchten 25jährigen Periode, W die entsprechende Anzahl der Föhntage und m der Werth der allgemeinen Temperaturmittel, a der entsprechende Werth an den Föhntagen. Dann ist offenbar $S.m = (S-W).y+W.a$. Da der Einfluss des Föhns auch an den Folgetagen bei der Morgenbeobachtung deutlich vorhanden ist, so musste für die Morgenbeobachtung noch ein Glied eingeführt werden, nämlich das Product aus der Anzahl der entsprechenden Folgetage und dem zugehörigen Temperaturmittel, (d. h. $Sm = [S-(W+f)]y+Wa+fb$). Das auf diese Weise ermittelte y habe ich in der folgenden Tabelle wiedergegeben und die entsprechenden Mittelwerthe gleichzeitig beigefügt.

Normaltemperaturen für föhnlose Jahre.

	Mo.	2h	Ab.	Mittel
Jänner	—7·0	—1·1	—4·7	—4·3
Februar	—4·1	2·6	—1·5	—1·0
März	—0·1	7·3	2·6	3·3
April	5·5	12·9	7·6	8·7
Mai	9·5	17·1	11·7	12·8
Juni	13·6	20·3	15·3	16·4
Juli	14·9	22·0	17·6	18·2
August	13·8	21·1	16·3	17·1
September	10·7	17·2	13·1	13·7
October	4·9	11·4	7·0	7·8
November	—0·1	4·9	1·6	2·1
December	—5·3	—1·1	—3·8	—3·5
Jahr	4·7	11·2	6·9	7·6

Ich nenne diese so erhaltenen Temperaturen normale. Dabei ist vorausgesetzt, dass, wenn der Föhn ausbliebe, die Tage, welche bisher Föhn hatten, auf dieselbe mittlere Temperatur herabsinken würden, wie die föhnlosen Tage gegenwärtig sie haben, welche Voraussetzung gewiss vollauf berechtigt ist.

Es lässt sich nun mit Hilfe dieser Normaltemperaturen leicht die durchschnittliche Temperaturerhöhung angeben, welche durch den Föhn, zur Zeit während er weht, bewirkt wird, man hat nur die Angaben dieser Tabelle der Normaltemperaturen von denen der Tabelle für die Föhntage abzuziehen. Man gelangt so zu den folgenden Werthen:

Durchschnittliche Temperaturerhöhung durch den Föhn an Föhntagen.

	Mo.	2h	Ab.	Mittel
Jänner	6·3	6·4	8·5	7·1
Februar	4·5	5·9	7·0	5·8
März	3·6	4·7	5·4	4·5
April	2·3	3·9	5·0	3·7
Mai	2·8	3·4	4·3	3·5
Juni	2·1	4·1	4·5	3·6
Juli	1·5	3·7	3·6	2·9
August	1·2	4·0	4·4	3·2
September	1·0	4·6	4·7	3·4
October	3·7	5·6	6·6	5·3
November	4·0	6·0	6·8	5·6
December	5·8	7·1	7·5	6·0
Jahr	2·2	3·8	4·5	3·5

Dass sich hienach die Temperatursteigerung an Föhntagen Morgens bedeutend geringer ergibt als selbst Mittags, erklärt sich daraus, dass wir die Differenz der Föhntage und Normaltage genommen haben und, wie wir wissen, an den Föhntagen Morgens sehr häufig eben noch kein Föhn herrscht und daher das Morgenmittel an Föhntagen nicht reine Föhntemperatur angibt. Die Grösse des Föhneinflusses auf die Morgentemperaturen im Vergleich zu denen der anderen Tageszeiten ersieht man besser, wenn man untersucht, um wie viel die thatsächliche Mitteltemperatur von Innsbruck dadurch erhöht erscheint, dass es so vielfach vom Föhn heimgesucht wird. Um dies zu erfahren, brauchen wir nur die Differenz

der Tabelle der 25jährigen Mittel und der obigen Tabelle der Normaltemperaturen zu nehmen. Wir erhalten dann:

Temperaturerhöhung der Mittelwerthe für Innsbruck durch den Föhn.

	Mo.	2^h	Ab.	Mittel
Jänner	0·9	0·6	0·9	0·8
Februar	0·8	0·7	0·8	0·8
März	0·9	0·8	1·0	0·9
April	0·6	0·8	1·0	0·8
Mai	0·6	0·6	0·7	0·6
Juni	0·1	0·2	0·2	0·2
Juli	0·1	0·3	0·3	0·2
August	0·1	0·2	0·2	0·1
September	0·1	0·3	0·3	0·2
October	0·8	0·9	1·0	0·9
November	0·9	0·8	1·0	0·9
December	0·9	0·7	0·7	0·8
Jahr	0 5	0·6	0·6	0·6

Man würde von vorneherein wohl geneigt sein, dem Föhn einen grösseren Einfluss auf die Jahrestemperatur von Innsbruck zuzuschreiben. Wie man aus vorstehender Tabelle sieht, beträgt er nur 0·6° C., was etwa einer Erniedrigung der Seehöhe von Innsbruck um 120 *m* oder einer Verschiebung der geographischen Lage um 0·83 Meridiangrade oder wenig über 100 *km* nach Süden entspricht. Es wäre aber dennoch unrichtig, wenn man hiemit den klimatischen Einfluss des Föhns erschöpft wähnen würde. Sein Einfluss auf die Vegetation liegt besonders in der Thatsache, dass er in den Frühlingsmonaten und im October sowohl sehr häufig auftritt, als auch gerade in diesen Monaten eine beträchlich grosse Temperaturzunahme bewirkt.

Dass die Temperaturerhöhung in den warmen Monaten am geringsten und in den kältesten am grössten, ist eine unmittelbare Folge der Temperaturunterschiede der Nord- und Südseite der Alpen zu diesen Jahreszeiten. In den warmen

Monaten ist zur föhnlosen Zeit die Temperatur der (durch den Föhn nach Innsbruck gebrachten) Luft der Südseite nicht so bedeutend grösser als in Innsbruck selbst, wie dies im Winter der Fall ist.

Die wirkliche Temperatur des Föhns erfährt man aber nur, wenn man die Mitteltemperatur aller Beobachtungsstunden nimmt, zu welchen der Föhn thatsächlich ging. Streng genommen müsste man dann aber während des Föhns stündlich beobachten. Ich bearbeite hier von den ganzen 25 Jahren nur die Terminbeobachtungen — die Aufzeichnungen des Thermographen zählen noch nicht 5 Jahre — und so habe ich die Mitteltemperatur des Föhns selbst dadurch bestimmt, dass ich das Mittel aller Beobachtungsstunden nahm, an welchen Föhn herrschte. Ich setze die erhaltenen Resultate hieher, gleichzeitig gebe ich unter Δ die Differenz: Föhntemperatur—Normaltemperatur.

Mittlere Föhntemperatur.

	Jän.	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	Aug.	Sept.	Oct.	Nov.	Dec.	Jahr
	4·5	6·3	9·3	13·7	17·4	21·1	22·2	22·3	18·9	14·5	9·3	5·0	12·6
Δ	8·8	7·3	6·0	5·0	4·6	4·7	4·0	5·2	5·2	6·7	7·2	8·5	5·0

Aber auch diese Zahlen, welche ja nur die durchschnittliche Wärme des Föhns in den verschiedenen Monaten ausdrücken, geben noch keine genügende Vorstellung von den häufig unheimlichen Erwärmungen, die bei Föhn auftreten; vielleicht vervollständigt sich das Bild durch die folgende kleine Tabelle, in welcher das höchste Tagesmittel — an Tagen, wo der Föhn den ganzen Tag wehte — und das absolute Maximum bei Föhn aus den 25 Jahren zusammengestellt sind.

Höchstes Tagesmittel bei Föhn.

Jän.	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	Aug.	Sept.	Oct.	Nov.	Dec.
12·1	12·0	15·0	17·3	22·9	25·7	27·2	24·0	22·0	21·7	15·9	13·0

Temperaturmaximum bei Föhn.

Jän.	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	Aug.	Sept.	Oct.	Nov.	Dec.
13·4	16·5	20·0	24·2	30·1	30·0	32·5	33·6	28·3	26·2	20·0	16·0

Man sieht, dass die mittlere Temperatur eines Föhntages mitten im Winter wahre Frühlingstage schafft. Im Sommer bemerkt man den Föhn besonders lästig durch die gleichmässig anhaltende hohe Temperatur, welche auch des Nachts eine nennenswerthe Abkühlung nicht erfährt. Die absoluten Maxima der 25 Jahre fallen übrigens in den eigentlichen Sommermonaten nicht auf Föhntage, klares schönes Strahlungswetter erzeugt Mittags im Sommer sehr häufig höhere Temperaturen als der Föhn.

Zur vollen Charakterisirung der Temperaturverhältnisse bei Föhn müssen wir noch den Gang der Temperatur während des Föhns in Betracht ziehen. Genauer werden wir dies erst ein andermal an der Hand der Aufzeichnungen des Thermographen thun. Aber auch auf Grund der Terminbeobachtungen können wir die Eigenart des Temperaturganges bei Föhn in allem Wesentlichen zur Darstellung bringen.

Zwei Momente sind es, die da eigenartig hervortreten: erstens eine rasche Temperatursteigerung bei Eintritt des Föhns und zweitens die während der ganzen Dauer des Föhns anhaltende hohe Temperatur, derart, dass der normale tägliche Gang der Temperatur vielfach ganz verschwindet, häufig auch umgekehrt, immer aber sehr verflacht wird.

Was die rasche Temperatursteigerung betrifft, so liegt das Hauptgewicht nicht immer in der Grösse der Wärmezunahme. Man hat allerdings vom Föhn die Vorstellung, dass die Grösse des fast plötzlichen Temperaturwechsels das charakteristische Moment sei, allein die genauere Untersuchung belehrt uns eines Anderen. Die Grösse der Temperatursteigerung ist viel häufiger mässig zu nennen als exorbitant. Es kommen allerdings zuweilen Fälle vor, in welchen sich die Temperatur von Morgens bis 2 Uhr Mittags, also in 6 oder 7 Stunden um 20° und mehr steigert, doch diese Fälle sind selten. Öfter, aber auch nicht allzuhäufig kommen Temperaturzunahmen in den 6 oder 7 Stunden von Morgens bis 2 Uhr Nachmittags von 15°, 16° und 17° vor, am häufigsten sind die Temperatursteigerungen (immer in derselben Zeit oder von Morgens bis Abends) von 10—15°, aber auch kleinere Erhöhungen kommen äusserst häufig vor, so dass bei Föhn meist mässige, wenn auch sonst

ungewöhnliche Temperatursteigerungen zu verzeichnen sind. Das bei weitem Charakteristischere der Temperaturerhöhung bei Föhn liegt in der Dauer der hohen Temperatur, was hauptsächlich in hohen Abend- und Morgentemperaturen zum Ausdrucke gelangt. Dabei kommt es nicht selten vor, dass das Maximum der Temperatur auf die Abendstunde fällt, ja wiederholt tritt dasselbe am Morgen des zweiten Föhntages ein. Bei einer längeren Föhnperiode stellt sich auch meist die Erscheinung ein, dass nicht der erste Föhntag die höchsten Temperaturen bringt, sondern erst der zweite oder dritte Tag, bei sehr langen Perioden sogar auch noch spätere Tage. Ich lasse hier ein paar Beispiele folgen, die als Typen gelten können, da es ja nicht wohl angeht, die riesigen Ziffercolonnen hier zum Abdrucke zu bringen.

Eintägiger Föhn.

	Mo.	2^h p.	Ab.
3. Jänner 1882	— 2·3	7·0	7·0
13. Februar 1870	— 8·5	12·7	10·0
8. Februar 1894	— 2·4	6·0	7·3
9. März 1892	— 6·6	7·8	3·2
17. Juli 1884	18·0	28·4	27·3
23. November 1883	— 4·3	8·2	5·2
12. November 1894	— 0·5	8·4	10·7

Zweitägiger Föhn.

	Mo.	2^h p.	Ab.
16. Februar 1885	— 2·0	11·0	6·0
17. » »	10·0	12·0	7·0
10. März 1889	— 1·2	8·8	9·8
11. » »	5·0	14·2	11·2
3. Juni 1882	15·1	24·0	22·0
4. » »	20·0	25·0	19·0
5. October 1892	9·2	18·8	17·8
6. » »	17·0	21·2	20·6
9. December 1884	— 1·0	4·8	7·5
10. » »	3·8	4·0	4·5

	Mo.	2^h p.	Ab.
10. December 1881	— 4·0	5·3	6·0
11. » »	9·0	9·0	2·0

Dreitägiger Föhn.

	Mo.	2^h p.	Ab.
11. Jänner 1883	— 1·1	7·2	8·0
12. » »	2·2	10·0	2·4
13. » »	0·4	10·2	9·0
13. April 1882	0·2	15·0	11·0
14. » »	8·3	15·0	12·0
15. » »	10·0	16·0	12·3
21. December 1888	— 1·4	4·6	7·0
22. » »	7·8	11·4	8·4
23. » »	12·0	13·2	5·8

Mehrtägiger Föhn.

	Mo.	2^h p.	Ab.
19. Februar 1892	1·4	6·1	6·7
20. » »	9·4	12·0	12·2
21. » »	3·3	13·8	11·8
22. » »	10·4	13·7	11·4
23. » »	10·4	13·8	11·8
24. » »	5·4	14·2	8·8
13. April 1880	5·0	16·0	12·2
14. » »	10·6	16·2	14·2
15. » »	15·4	19·0	15·6
16. » »	12·2	21·2	17·0
17. » »	13·4	18·0	12·2
5. October 1880	8·2	20·0	18·4
6. » »	15·6	21·0	20·4
7. » »	22·0	22·0	21·0
8. » »	13·4	21·0	11·0

In diesen ausgewählten Beispielen sind alle Fälle des Temperaturganges während der Dauer des Föhns zur Darstellung gebracht. Nur eine Eigenthümlichkeit, welche aus den Termin-

beobachtungen nicht ersehen werden kann, kommt dabei nicht zur Anschauung, wir werden dieselbe erst mit Hilfe der Aufzeichnungen des Thermographen deutlich erkennen lernen; es ist die häufige, bedeutende Schwankung der Temperatur in grösseren und kleineren Intervallen, wie ich davon ein Beispiel gegeben habe in einer Notiz über die Föhnperiode vom 13. bis 16. Jänner 1895 (Meteorolog. Zeitschrift, Bd. XXX, 1895, S. 72).

Wir müssen nun noch auf die grossen Unterschiede der Erwärmung hinweisen, welche der Föhn selbst in derselben Jahreszeit und in denselben Monaten hervorbringt. Es stellt sich hier die Frage zur Beantwortung, warum bringt der Föhn, scheinbar unter denselben Verhältnissen, bald nur eine Erwärmung von wenigen Graden, bald eine ganz ungewöhnliche Erhöhung der Temperatur? Diese Frage ist aus den Beobachtungen der Föhnstationen allein nicht zu beantworten. Man muss dabei offenbar die Untersuchung auf jene Stationen ausdehnen, von welchen bei Föhn die Luft zuerst auf die Höhen des Alpenkammes aspirirt wird, um von da zu den Föhnstationen abzustürzen. Es wäre wohl denkbar, dass auch die Stärke, mit welcher der Föhn auftritt, hierauf einen Einfluss hat. Für heute bin ich nicht in der Lage, die obige Frage aus den Beobachtungen zu beantworten, ich werde aber später meine Untersuchungen über den Föhn auch darauf ausdehnen.

c) Feuchtigkeit.

Es ist ein Postulat der Theorie der Fallwinde, dass dieselben eine bedeutende Trockenheit besitzen müssen, wenn sie in der Niederung ankommen. Die Trockenheit des Föhns ist in den Föhngebieten von jeher aufgefallen und die Beobachtungen bestätigen dieselbe vollauf. Ich verweise zunächst auf Tabelle V, welche die Mittel der Feuchtigkeit im vieljährigen Durchschnitt, für die Föhntage, sowie für die Vortage und die Folgetage des Föhns wiedergibt. Leider stehen mir da keine 25jährigen Mittel zur Verfügung, sondern nur 18jährige, weil von den Jahren Jänner 1876 bis August 1882 die Psychrometerbeobachtungen fehlen. Was die Güte der Psychrometerbeobachtungen betrifft, so dürfte sie wohl manchmal etwas unsicherer Natur sein; es ist aber das Psychrometer überhaupt so manchen Unsicher-

heiten unterlegen, dass man für die Feuchtigkeit gar oft bei den besten Beobachtungen keine tadellosen Werthe erhalten kann. Jedenfalls geben unsere Mittel im Wesentlichen eine richtige relative Darstellung der Feuchtigkeitsverhältnisse von Innsbruck bei den verschiedenen Witterungsverhältnissen.

Wir ersehen aus den Jahresmitteln, dass die Föhntage zu allen Tageszeiten und besonders des Abends eine bedeutend geringere Feuchtigkeit aufweisen als der langjährige Durchschnitt. Es sind aber nur die Föhntage selbst, welche eine solche Herabdrückung der Feuchtigkeit bewirken, denn an den Vortagen haben wir vollständig die Feuchtigkeit des langjährigen Durchschnittes, an den Folgetagen aber sogar noch eine grössere, wie die folgenden Zahlen beweisen:

	Mo.	2^h p.	Ab.	Mittel
18jähriges Mittel	86	67	82	78
Vortage	86	66	82	78
Föhntage	76	49	62	62
Folgetage	85	71	84	80

Es ist somit zweifellos eine specifische Eigenschaft des Föhns, dass er eine beträchtliche Trockenheit besitzt. Der Föhn ist am trockensten in den Frühlingsmonaten, am wenigsten trocken im December, wie sich aus den Monatsmitteln an Föhntagen ergibt:

Jän.	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	Aug.	Sept.	Oct.	Nov.	Dec.
63	65	60	56	56	59	63	64	65	64	63	73

Von den Tagesstunden erscheint die Mittagsstunde als die trockenste, geradeso wie im langjährigen Durchschnitt. Die Herabdrückung der Feuchtigkeit durch den Föhn ist aber des Abends am grössten, Morgens am geringsten. Die Morgenmittel der Föhntage geben nun freilich nicht schlechterdings die Trockenheit des Föhns zur Morgenstunde wieder, denn es sind darin alle Feuchtigkeiten auch enthalten, welche an jenen Föhntagen — und es ist dies eine grosse Anzahl — gemessen wurden, an welchen der Föhn erst nach der Morgenbeobachtungsstunde einfällt. Allein selbst in mehrtägigen Föhnperioden

zeigt sich die auffallende Erscheinung, dass die Morgenstunde des zweiten, dritten u. s. w. Föhntages sehr häufig bedeutende Feuchtigkeiten aufweist. Es ist dies vielleicht dadurch zu erklären, dass der Föhn bei längeren Perioden des Morgens einlullt und dadurch die normalen Abkühlungsursachen mehr zur Wirkung gelangen, wodurch die Temperatur wieder etwas herabgedrückt, die Feuchtigkeit aber erhöht werden muss. In der That zeigt auch die Morgentemperatur bei längeren Föhnperioden meist eine Herabdrückung unter die Temperatur der betreffenden Föhnperiode.

Dass bei Föhn sehr grosse, ja exorbitante Trockenheit vorkommt, ist wohl allgemein angenommen. Wenn ich nun auch nicht behaupten will, dass die Feuchtigkeitsbeobachtungen, wie sie mir vorliegen, eine volle Gewähr für die exacte Grösse der Feuchtigkeit bieten, so ist doch jedenfalls aus denselben zu ersehen, dass die bei Föhn erreichten Trockenheiten in den meisten Fällen zwischen 40 und 50 Procent betragen, und dass die Trockenheiten von 30 bis 40 Procent sehr häufig vorkommen. Hingegen sind Trockenheiten von 25 bis 30 Procent schon seltener und solche unter 25 Procent sehr selten. Ich habe die letzteren ausgezogen und lasse die Daten hier folgen:

4. Februar 1871	22%	16. Mai 1873	23%
25. » 1873	20	20. » 1886	24
30. März 1872	17	1. » 1891	23
13. » 1873	16	14. September 1884	21
9. » 1892	23	25. October 1891	20

Will man nicht die Werthe unter 25 Procent als exorbitant trocken ansehen, so ergeben die Beobachtungen zu Innsbruck keine exorbitanten Trockenheiten bei Föhn, wohl aber sehr bedeutende Herabdrückung der Feuchtigkeit der Luft gegenüber anderen Tagen. Es sei aber hier bemerkt, dass besonders zur Zeit, da das Wintermaximum des Luftdruckes über den Alpen lagert, auch ganz bedeutende Trockenheiten zu verzeichnen sind. Jedenfalls aber ist der Föhn ein sehr trockener Wind.

d) Bewölkung.

Die Theorie verlangt, dass bei herabfallender Luft das in ihr suspendirte Wasser in Folge Erwärmung verdampfe, dass also bei Fallwinden Ausheiterung eintrete. Die Beobachtungen ergeben nun, dass während des Föhns zeitweise ganz heiterer Himmel wohl vorkommt, dass aber fast immer eine Bewölkung vorhanden ist, welche einer Bedeckung fast der Hälfte des Himmels entspricht. Diese Bewölkung ist ziemlich eigenartig; von der bekannten Föhnmauer — dem dichten schweren Gewölke, das auf der Südseite über dem Centralalpenkamm bei Föhn meist sich aufthürmt — ziehen vielfach leichte, cirrusähnliche Wolken an dem Himmel empor, oft durchbrochen von blauen Flecken und Streifen. In grösserer Höhe ist häufig vollkommen blauer Himmel, während auf der Nordseite häufig wieder dichteres Gewölk auftritt. Die Wolkenformen sind übrigens bei Föhn auch sehr veränderlich, wie auch die Grösse der Himmelsbedeckung bedeutenden und vielen fast fortwährenden Schwankungen unterliegt.

Über den Gang der Bewölkung vor, während und nach Föhn geben uns die Zahlen der Tabelle VI Aufschluss. Ich setze die Jahresmittel hieher; als Vergleichsnorm folgt auch das 25jährige Mittel.

Gang der Bewölkung bei Föhn.

	Mo.	2h p.	Ab.	Mittel
Vortage	5·9	4·8	4·0	4·9
Föhntage	4·8	5·0	4·9	4·9
Folgetage	7·3	7·1	6·6	7·0
25jähriges Mittel	5·9	5·3	5 1	5·4

Im Allgemeinen nimmt also die Bewölkung von Morgens, wo sie am grössten ist, ab bis Abends. Diesen Charakter behalten auch die Vortage und die Folgetage des Föhns bei, nur an den Föhntagen geht er gänzlich verloren. An Föhntagen findet eher eine kleine Zunahme der Bewölkung um die Mittagszeit statt und auch Abends ist dieselbe noch immer

ein wenig grösser als Morgens. Der Unterschied zu den verschiedenen Tageszeiten ist aber so gering, dass man eher sagen kann, während des Föhns bleibt die Bewölkung ziemlich constant und nur wenig unter dem langjährigen Mittel. Der Gang der Bewölkung vor, während und nach dem Föhn verläuft, wie man sieht, derart, dass am Vortage eine ziemlich beträchtliche Abnahme erfolgt, worauf dann während des Föhns eine ziemliche Constanz der Bewölkung platzgreift — nur in den Sommermonaten finden wir eine ausgesprochene Zunahme der Bewölkung tagsüber — worauf dann am Folgetage eine hohe Bewölkung sich einstellt. Thatsächlich kann man meistens bei Abflauen des Föhns eine rasche Zunahme der Himmelsbedeckung mit folgenden Niederschlägen beobachten. Die Beziehung der letzteren zum Föhn möge noch kurz dargestellt werden.

e) Niederschläge.

Man weiss, dass gerade die häufigen und starken Niederschläge, die in Folge des Föhns auftreten, von Dove gegenüber den Schweizer Naturforschern seinerzeit benützt wurden, um die von letzteren erkannte und behauptete Trockenheit des Föhns zu bekämpfen und lächerlich zu machen. Die Beobachtungen ergeben nun Folgendes: Im Allgemeinen folgen dem Föhn Niederschläge, oftmals recht reichliche Niederschläge. Während einer längeren Föhnperiode kommt es wohl auch vor, dass es ein- oder das anderemal regnet, dann lässt sich aber leicht nachweisen, dass der betreffende Regen das Ende eines Föhns markirt, dem allerdings bald ein neuer Föhn folgt. Diese so eingestreuten Regen sind fast durchwegs nur schwach. Wir können also im Allgemeinen den Satz aufstellen: Niederschläge treten immer nur nach dem Föhn, nie während des Föhns auf. Obgleich nun diese Niederschläge nach Föhn sehr häufig sind, so sind sie doch keine nothwendige Folge des Föhns. Von den 491 Föhnperioden der untersuchten 25 Jahre blieben 120, also 24·4 Procent, ohne folgende Niederschläge. In den Monaten des Jahres ergibt sich folgende Anzahl von Föhnperioden ohne folgenden Niederschlag während der 25 Jahre:

	Jän.	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	Aug.	Sept.	Oct.	Nov.	Dec.
	21	14	13	14	8	4	0	3	4	10	16	13
in Proc.	62	33	24	24	16	14	0	13	15	18	28	34

Am häufigsten sind also Föhne ohne folgenden Niederschlag im Jänner und in den kalten Monaten, am seltensten in den warmen Monaten. Nach den Beobachtungen der letzten 25 Jahre kommt ein Föhn ohne folgenden Niederschlag im Juli überhaupt nicht vor; es scheint daher im Juli der Föhn stets den bekannten Juliregen voranzugehen. Um einen Überblick über die Grössenverhältnisse der Niederschläge und ihre Vertheilung nach Föhn zu bieten, gebe ich die nachfolgende kleine Tabelle, welche die in den 25 Jahren gefallenen Niederschläge in ihrer Gesammtheit, sowie die an den Vortagen des Föhns vorgekommenen in Vergleich setzt mit den unmittelbar nach dem Föhn, sei es noch an Föhntagen selbst, sei es am ersten Folgetag gemessenen. Es kam freilich wiederholt vor, dass es zwei und mehr Tage nach Föhn regnete; die auf Föhn folgenden Niederschläge sind daher eigentlich beträchtlich höher als die Tabelle ausweist.

Niederschlagsummen.

	Jän.	Febr.	März	April	Mai	Juni	
25 Jahre	785·9	892·4	1045·4	1379·7	1793·4	2386·9	
an Vortagen	3·6	42·6	34·1	65·4	73·0	43·7	
nach Föhntagen.	100·4	143·9	212·6	378·9	347·8	285·6	
	Juli	**August**	**Sept.**	**October**	**Nov.**	**Dec.**	**Jahr**
25 Jahre	3276·8	2703·0	2029·5	1518·0	1053·0	1184·5	20048·5
an Vortagen	48·1	31·2	6·4	105·7	69·5	6·0	529·3
nach Föhntagen	448·5	193·8	216·3	487·3	320·2	152·1	3287·7

Man ersieht hieraus, dass in den letzten 25 Jahren 16 Procent aller Niederschläge unmittelbar nach Föhn fielen. Die Niederschläge an Vortagen erfolgen stets so, dass ihnen Ausheiterung, wenigstens theilweise, folgt, ehe der Föhn einsetzt; sie betragen übrigens nicht ganz 3 Procent der Gesammtsumme und nur 16 Procent von den unmittelbar nach Föhn folgenden.

Hiemit ist die Untersuchung des Verhaltens der meteorologischen Elemente bei Föhn, soweit sie aus den Beobachtungen der letzten 25 Jahre geführt werden konnte, zum

Abschlusse gelangt. Man wird sich wundern, dass wir über das, wie es scheinen muss, wichtigste Element, den Wind selbst, seine Richtung und Stärke, seine Schwankungen u. s. w. keine Angaben machen. Es geschieht dies desshalb, weil die Innsbrucker Beobachtungen hiezu fast ganz untauglich sind. Die Schätzungen der Windstärke sind von Beobachter zu Beobachter derart verschieden, dass es ganz unmöglich ist, aus ihren Angaben eine Untersuchung über die Windstärke des Föhns durchzuführen. Ja nicht einmal die Aufzeichnungen bezüglich der Windrichtung bieten ein sicheres Material. Ich muss daher eine längere Periode der Thätigkeit des erst heuer aufgestellten Anemometers abwarten, um die Untersuchung auf den Wind selbst ausdehnen zu können. Nur das Eine ist schon aus den bisherigen Beobachtungen zu erkennen, dass der Föhn offenbar sowohl als SW, als S, wie auch als SE auftritt, und dass es ein grosser Irrthum wäre zu meinen, dass der Föhn immer nur als Sturm oder nur als heftiger Wind auftritt. Zwar weht er stets mit Unterbrechungen und stossweise, »herrisch«, wie das Volk sagt, aber er ist oft nur ein mässiger oder gar nur schwacher Wind, wenngleich er wieder andere Male zur Gewalt eines starken Sturmes sich erhebt.

Zusammenfassung.

Die wichtigsten Ergebnisse dieser Untersuchung lassen sich folgendermassen zusammenfassen:

Die Häufigkeit des Föhns, ausgedrückt in der Anzahl von Tagen, an welchen der Föhn wehte, beträgt im Durchschnitte der 25 untersuchten Jahre 43 Tage im Jahre. Diese Anzahl ist über das Jahr derart vertheilt, dass die grösste Häufigkeit auf die drei Frühlingsmonate fällt, von denen jeder durchschnittlich 5—6 Föhntage hat; die nächstgrösste Häufigkeit besitzt October und November mit 4—5 Föhntagen jeder; diesen folgen die Wintermonate December, Jänner, Februar, mit durchschnittlich 3 Föhntagen in jedem Monate; am seltensten ist der Föhn in den Sommermonaten und im September, wo monatlich nur 1—2 Föhntage durchschnittlich auftreten.

Die Dauer des Föhns vertheilt sich auf Perioden von 1 bis 8 Tagen. Am häufigsten sind die kürzesten Perioden von 1 und

2 Tagen; je länger die Periode ist, desto seltener kommt sie vor. Von den längeren Perioden werden fast nur die Frühlingsmonate bevorzugt.

Das Verhalten des Luftdruckes bei Föhn zeigt durchschnittlich ein Fallen des Barometers an den Vortagen, den niedrigsten Stand an den Föhntagen und ein entschiedenes Steigen an den Folgetagen.

Die Temperatur wird bei Föhn durchwegs und meist sehr beträchtlich erhöht. Gegenüber dem 25jährigen Mittel ergibt sich das Mittel der Föhntage um 2·9° C. zu hoch. Die Temperaturerhöhung durch Föhn gegenüber der normalen Temperatur, welche Innsbruck ohne Föhn haben müsste, beträgt aber im Jahresmittel 5·0° C. Es erhellt daraus weiter, dass Innsbruck dem Föhn eine Erhöhung seiner Jahrestemperatur um 0·6° C. verdankt, was einer Erniedrigung der Seehöhe von Innsbruck um 120 *m* oder einer Verschiebung nach Süden um 100 *km* entspricht. Für die Herbst-, Winter- und Frühlingsmonate ist diese Temperaturerhöhung sogar 0·8° C. Es ist für Föhn charakteristisch, dass er die Temperatur bei seinem Einsetzen rasch und beträchtlich erhöht und dann dieselbe, mitunter mit vollkommener Zerstörung des normalen täglichen Ganges, hoch über der der Jahreszeit entsprechenden während seiner ganzen Dauer erhält, so dass bei Föhn selbst im December oder Jänner Tagesmittel von 12 und 13° C. vorkommen. Diese Temperaturerhöhung ist in den Wintermonaten am grössten, in den Sommermonaten am kleinsten.

Die Feuchtigkeit wird bei Föhn sehr stark herabgedrückt, im Jahresdurchschnitt um 18 Procent. Die grössten bei Föhn vorkommenden Trockenheiten waren 16, 17 und 20 Procent. Der Föhn erweist sich als ein sehr trockener Wind.

Die Bewölkung ist bei Föhn im Durchschnitte 4·9 der 10theiligen Bewölkungsscala und daher etwa 0·5 unter dem allgemeinen Durchschnitt. Während des Föhns ist sie ziemlich constant. Der normale tägliche Gang der Bewölkung ist bei Föhn vollkommen verwischt. Vor Föhn nimmt sie beträchtlich und rasch ab, nach dem Föhn nimmt sie aber sehr rasch zu, und sehr häufig folgen dann — oft sehr ergiebige — Niederschläge.

Die Niederschläge bei Föhn folgen stets dem Föhn nach, niemals fallen sie während der Dauer des Föhns. Sie sind aber keine nothwendige Folge des Föhns, da in 24·4 Procent aller Fälle keine Niederschläge nach Föhn eintraten. Am häufigsten bleiben dieselben im Jänner und in den Wintermonaten aus, im Juli gab es in den letzten 25 Jahren keinen Fall, wo es nach Föhn nicht geregnet hatte.

Der Föhn tritt in Innsbruck sowohl als SW, als S, wie auch als SE auf. Er weht immer mit kürzeren oder längeren Unterbrechungen und stossweise, »herrisch«. Seine Stärke ist sehr verschieden; er tritt ebensowohl als starker Sturm, wie als schwacher Wind auf.

Tabelle I. Häufigkeit der Föhntage.

	Jänner	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	August	Sept.	Octob.	Novemb.	Decemb.	Jahr
1870	1	1	0	2	2	0	2	2	2	3	8	1	24
71	2	1	10	2	0	2	3	2	0	0	5	0	27
72	7	3	9	6	15	0	0	1	0	9	1	5	56
73	2	5	7	7	5	2	0	0	1	4	5	1	39
74	4	5	7	5	3	1	fehlt	fehlt	fehlt	fehlt	fehlt	fehlt	(42)
75	3	1	0	5	1	0	0	0	0	1	3	0	14
76	fehlt	6	11	7	0	1	0	1	1	7	7	6	(50)
77	9	7	10	8	9	2	4	5	3	2	3	0	62
78	0	0	3	6	8	3	0	1	0	5	6	5	37
79	4	6	7	10	2	0	4	0	1	1	5	1	41
80	0	5	0	4	0	0	0	0	0	7	2	6	24
81	8	5	7	5	5	3	7	3	3	6	4	4	60
82	1	3	3	9	5	2	7	2	5	6	9	4	56
83	4	3	3	6	4	1	1	0	4	4	5	0	35
84	2	4	5	5	3	3	1	0	4	1	0	3	31
85	4	5	6	4	6	1	0	2	3	6	5	3	45
86	3	1	4	4	8	0	7	0	0	8	6	9	50
87	3	2	3	15	5	2	0	0	3	5	10	0	48
88	1	6	13	8	7	2	7	0	0	1	6	4	55
89	1	0	5	12	11	3	5	2	1	10	1	3	54
90	7	1	6	8	7	1	2	1	5	0	3	2	43
91	0	0	17	3	9	5	0	3	6	10	2	8	63
92	1	7	8	1	11	1	2	5	4	10	1	2	53
93	0	7	1	0	0	1	0	0	2	5	4	5	25
94	8	1	4	5	2	1	1	3	1	3	3	0	32
Summe	75	85	149	147	128	37	53	33	49	114	104	72	(1066) 1046

Tabelle II. Dauer des Föhns während der 25 Jahre.

Tage:	1	2	3	4	5	6	7	8
Jänner	17	13	3	1	1	1	0	1-mal
Februar	23	13	6	0	1	1	1	0 »
März	20	15	7	6	8	0	2	0 »
April	16	21	11	7	3	1	1	0 »
Mai	18	17	8	6	4	0	0	1 »
Juni	15	8	2	0	0	0	0	0 »
Juli	11	10	3	2	1	0	0	0 »
August	12	9	1	0	0	0	0	0 »
September	13	12	1	1	1	0	0	0 »
October	29	17	9	2	2	1	0	0 »
November	24	20	7	2	1	1	0	0 »
December	16	15	3	3	1	0	0	0 »
Jahr	214	170	61	30	23	5	4	2-mal

Tabelle III. Luftdruckmittel.

1. 25jähriges Mittel.

	Mo.	2h	Ab.	Mittel	Zahl der Monate
	700+				
Jänner	12·1	11·3	11·9	11·8	22
Februar	11·2	9·6	10·8	10·5	23
März	8·7	7·7	8·2	8·2	23
April	7·6	6·6	7·2	7·1	23
Mai	9·7	8·4	9·1	9·1	23
Juni	11·0	9·8	10·6	10·5	24
Juli	11·4	10·1	10·8	10·8	23
August	11·2	9·7	10·5	10·5	23
September	12·1	10·7	11·4	11·4	23
October	10·5	9·2	9·8	9·8	23
November	10·5	9·4	10·2	10·0	22
December	10·9	10·4	11·0	10·8	22
Jahr	10·5	9·4	10·1	10·0	274

2. Föhntage.

	Mo.	2h	Ab.	Mittel	Zahl der Tage
	700+				
Jänner	6·4	5·2	5·5	5·7	75
Februar	6·3	5·0	5·0	5·4	85
März	5·4	3·5	3·7	4·2	149
April	5·3	3·6	3·7	4·2	142
Mai	7·2	5·5	6·1	6·3	128
Juni	9·1	6·4	6·4	7·7	37
Juli	10·0	7·5	7·8	8·4	53
August	10·1	7·7	8·4	8·7	33
September	10·6	8·3	8·6	9·2	49
October	7·2	5·6	6·0	6·3	114
November	5·5	4·1	4·1	4·6	104
December	7·3	6·5	6·8	6·9	67
Jahr	6·8	5·1	5·4	5·8	1036

3. Vortage des Föhns.

	Mo.	2h	Ab.	Mittel	Zahl der Tage
	700+				
Jänner	11·8	10·5	10·5	10·9	39
Februar	8·9	7·5	8·0	8·1	46
März	8·1	6·8	7·3	7·4	60
April	9·3	7·8	8·2	8·4	56
Mai	7·4	6·4	6·9	6·9	45
Juni	11·5	9·0	8·9	10·1	27
Juli	12·3	10·5	10·8	11·2	24
August	12·0	10·4	10·5	11·0	21
September	11·7	10·1	10·7	10·8	31
October	10·0	8·7	9·0	9·2	57
November	9·2	8·2	8·2	8·5	55
December	10·7	9·4	9·1	9·7	33
Jahr	9·9	8·5	8·8	9·1	494

4. Folgetage des Föhns.

	Mo.	2h	Ab.	Mittel	Zahl der Tage
	700+				
Jänner	5·9	6·5	8·4	6·9	34
Februar	6·5	7·0	8·2	7·2	43
März	3·9	4·6	5·9	4·8	54
April	4·3	4·1	5·3	4·6	57
Mai	6·7	6·8	8·7	7·4	51
Juni	8·5	8·3	9·1	8·6	28
Juli	8 4	8·5	9·6	8·8	24
August	10·0	9·5	10·8	10·1	23
September	9·7	9·4	10·7	9·9	27
October	6·7	6·2	7·1	6·7	56
November	5·1	5·7	7·1	6·0	55
December	7·4	7·8	9·8	8·0	37
Jahr	6·4	6·5	7·9	6·9	489

Tabelle IV. Temperaturmittel.

1. 25jähriges Mittel.

	Mo.	2h	Ab.	Mittel	Zahl der Monate	30 jähriges Mittel nach Hann[1]
	Celsius					
Jänner	−6·1	−0 5	−3·8	−3 5	24	−3·4
Februar	−3·3	3·3	−0·7	−0·2	25	−0·5
März	0·8	8·1	3·6	4·2	25	3·5
April	6·1	13·7	8·6	9·5	25	9·1
Mai	10·1	17·7	12·4	13·4	25	13·0
Juni	13·7	20·5	15·5	16·6	25	16·4
Juli	15·0	22·3	17·9	18·4	24	17·9
August	13 9	21·3	16·5	17·2	24	17·2
September	10·8	17·5	13·4	13·9	24	14·2
October	5·7	12·3	8·0	8·7	24	9·3
November	0·8	5·7	2 6	3·0	24	2·4
December	−4·4	−0·4	−3·1	−2·6	24	−2·6
Jahr	5·2	11·8	7·5	8·2	293	8·0

[1] Die Temperaturverhältnisse der österreichischen Alpenländer. III. Theil, S. 101. (Diese Sitzungsberichte; Bd. 92, II. Abth.)

2. Föhntage.

	Mo.	2h	Ab.	Mittel	Zahl der Tage
	Celsius				
Jänner	—0·7	5·3	3·8	2·8	75
Februar	0·4	8·5	5·5	4·8	85
März	3·5	12·0	8·0	7·8	149
April	7·8	16·8	12·6	12·4	147
Mai	12·3	20·5	16·0	16·3	128
Juni	15·7	24·4	19·8	20·0	37
Juli	16·4	25·7	21·2	21·1	53
August	15·0	25·1	20·7	20·3	33
September	11·7	21·8	17·8	17·1	49
October	8·6	17·0	13·6	13·1	114
November	3·9	10·9	8·4	7·7	104
December	0·5	6·0	3·7	3·4	72
Jahr	6·9	15·0	11·4	11·1	1046

3. Vortage des Föhns.

	Mo.	2h	Ab.	Mittel	Zahl der Tage
	Celsius				
Jänner	—7·4	—1·4	—5·1	—4·3	39
Februar	—3·8	3·8	—0·5	—0·2	46
März	—0·6	7·1	2·5	3·0	60
April	5·4	13·4	8·2	9·0	57
Mai	10·2	16·2	11·9	12·8	45
Juni	14·0	22·7	17·1	17·9	27
Juli	13·6	21·9	16·7	17·4	24
August	12·9	22·2	13·8	16·3	21
September	10·1	19·1	13·6	14·3	31
October	5·4	11·8	7·3	8·2	57
November	0·0	5·3	1·6	2·3	55
December	—4·2	1·1	—1·8	—1·6	34
Jahr	3·5	10·5	6·1	6·7	496

4. Folgetage.

	Mo.	2h	Ab.	Mittel	Zahl der Tage
	Celsius				
Jänner	—0·9	2·9	—0·7	0·4	34
Februar	—0·2	4·9	1 0	1·9	43
März	2·8	7·8	3·0	4·6	54
April	7·5	12·4	7·9	9·3	58
Mai	11·7	16·2	11·5	13·1	51
Juni	14·6	18·4	15·1	16·0	28
Juli	15·5	18·5	15·1	16·4	24
August	15·2	20·4	16·2	17·3	23
September	12·1	17·7	12·4	14·1	27
October	8·2	12·1	8·3	9·5	56
November	3·4	6·3	3·0	4·2	55
December	1·2	3·9	0·7	1·9	38
Jahr	6·7	10·9	6·9	8·2	491

Tabelle V. Feuchtigkeit.

1. 18jähriges Mittel.

	Mo.	2h p.	Ab.	Mittel	Zahl der Monate
Jänner	88	76	86	83	17
Februar	86	75	84	82	18
März	86	67	79	77	18
April	83	56	73	71	18
Mai	80	55	74	70	18
Juni	84	60	80	75	18
Juli	86	60	81	76	17
August	89	64	84	79	18
September	89	67	85	80	18
October	89	68	84	80	18
November	87	73	85	82	18
December	86	81	87	83	18
Jahr	86	67	82	78	214

2. Föhntage.

	Mo.	2h p.	Ab.	Mittel	Zahl der Tage
Jänner	74	57	67	63	51
Februar	77	54	63	65	52
März	75	47	59	60	108
April	71	41	55	56	93
Mai	68	42	57	56	98
Juni	73	45	58	59	26
Juli	82	47	63	63	31
August	81	44	68	64	23
September	82	45	67	65	41
October	80	51	62	64	85
November	79	55	64	63	77
December	78	65	75	73	50
Jahr	76	49	62	62	735

3. Vortage des Föhns.

	Mo.	2h p.	Ab.	Mittel	Zahl der Tage
Jänner	85	80	83	83	31
Februar	86	71	84	80	26
März	85	61	77	78	39
April	84	51	74	70	35
Mai	80	56	79	72	32
Juni	80	51	77	69	18
Juli	87	58	81	75	15
August	89	55	82	75	14
September	92	62	84	79	25
October	92	72	89	84	42
November	88	76	88	84	40
December	88	75	85	83	24
Jahr	86	66	82	78	341

4. Folgetage des Föhns.

	Mo.	2^h p.	Ab.	Mittel	Zahl der Tage
Jänner	89	80	86	83	25
Februar	86	72	82	80	25
März	86	64	83	78	36
April	82	64	80	75	32
Mai	74	60	79	71	36
Juni	84	69	84	79	19
Juli	87	75	85	82	15
August	87	63	86	79	15
September	87	70	88	82	22
October	84	75	87	82	40
November	88	81	89	86	41
December	88	79	83	83	28
Jahr	85	71	84	80	334

Tabelle VI. Bewölkung.

1. 25jähriges Mittel.

	Mo.	2^h p.	Ab.	Mittel	Zahl der Monate
Jänner	5·8	4·5	4·2	4·8	24
Februar	5·2	4·1	4·2	4·5	25
März	5·7	5·0	4·6	5·1	25
April	5·9	5·6	5·1	5·5	25
Mai	5·6	6·1	5·8	5·8	25
Juni	5·9	6·1	6·2	6·1	25
Juli	5·7	5·7	6·1	5·8	24
August	5·4	5·4	5·4	5·4	24
September	5·9	5·1	5·0	5·3	24
October	6·4	5·3	4·9	5·5	24
November	6·6	5·6	5·3	5·8	24
December	6·3	5·1	4·9	5·4	24
Jahr	5·9	5·3	5·1	5·4	293

2. Föhntage.

	Mo.	2^h p.	Ab.	Mittel	Zahl der Tage
Jänner	5·2	5·3	4·7	5·1	75
Februar	4·9	4·3	3·8	4·3	85
März	4·9	5·1	4·6	4·9	149
April	4·7	4·8	4·4	4·6	147
Mai	4·4	5·2	5·1	4·9	128
Juni	3·7	4·3	5·5	4·3	37
Juli.............	3·7	4·9	5·6	4·7	53
August..........	3·6	4·0	5·1	4·2	33
September	3·3	3·1	3·9	3·4	49
October	5·3	5·1	5·2	5·2	114
November	5·9	6·1	5·5	5·8	104
December	6·2	6·0	5·6	5·9	72
Jahr	4·8	5·0	4·9	4·9	1046

3. Vortage des Föhns.

	Mo.	2^h p.	Ab.	Mittel	Zahl der Monate
Jänner	4·6	3·6	2·9	3·4	39
Februar	6·0	4·9	4·8	4·7	46
März	5·5	4·1	3·2	4·3	60
April	6·2	5·1	3·8	5·0	57
Mai	6·4	5·8	5·4	5·9	45
Juni	3·3	4·6	4·0	4·0	27
Juli.............	6·2	4·2	4·8	5·1	24
August..........	5·6	3·9	3·8	4·3	21
September	5·5	4·2	2·6	4·1	31
October.........	6·9	5·2	4·9	5·7	57
November	6·7	5·2	4·0	5·3	55
December	6·1	5·4	4·0	5·2	34
Jahr	5·9	4·8	4·0	4·9	496

4. Folgetage des Föhns.

	Mo.	2h p.	Ab.	Mittel	Zahl der Tage
Jänner	6·2	6·6	6·4	6·4	34
Februar	6·2	5·6	5·7	5·8	43
März	8·3	7·1	5·2	6·9	54
April	7·4	7·8	7·3	7·5	58
Mai	7·0	7·8	7·2	7·3	51
Juni	6·3	7·1	7·0	6·8	28
Juli............	7·5	8·0	7·1	7·5	24
August..........	6·1	6·7	7·1	6·6	23
September	7·3	6·5	5·9	6·6	27
October	8·2	7·4	6·6	7·4	56
November	7·9	7·1	7·0	7·3	55
December	8·2	7·2	6·1	7·2	38
Jahr	7·3	7·1	6·6	7·0	491

XIV. SITZUNG VOM 24. MAI 1895.

Erschienen sind Heft I—II (Jänner—Februar 1895), Abtheilung II. a des 104. Bandes der Sitzungsberichte, ferner das Heft IV (April 1895) des 16. Bandes der Monatshefte für Chemie.

Der Secretär legt die im Auftrage Sr. k. u. k. Hoheit des durchlauchtigsten Herrn Erzherzog Ludwig Salvator, Ehrenmitgliedes der kaiserlichen Akademie, durch die Buchdruckerei Heinrich Mercy in Prag eingesendete Fortsetzung des Druckwerkes »Die Liparischen Inseln« Theil IV: »Panaria« vor.

Der Verwaltungsrath des Museums Francisco-Carolinum in Linz ladet die kaiserliche Akademie zur Theilnahme an der feierlichen Eröffnung des neuen Musealgebäudes ein, welche am 29. d. M. von Sr. k. und k. Apostolischen Majestät Kaiser Franz Josef I. allergnädigst vorgenommen werden wird.

Herr Jos. Richard Harkup, Realitätenbesitzer in St. Pölten, übersendet ein versiegeltes Schreiben behufs Wahrung der Priorität, welches angeblich die Beschreibung eines von ihm erfundenen Zeltsystems enthält.

Das w. M. Herr Prof. Friedr. Brauer überreicht eine Abhandlung des k. u. k. Regimentsarztes Dr. Anton Wagner in Wiener-Neustadt, betitelt: »Eine kritische Studie über die Arten des Genus *Daudebardia* Hartmann in Europa und Westasien«.

Das c. M. Herr Hofrath Prof. L. Boltzmann überreicht eine Abhandlung von Herrn J. C. Beattie in Wien: »Über die Beziehung zwischen der Veränderung des Widerstandes von Wismuthplatten im Magnetfelde und dem Hall-Effecte«.

Herr Dr. Gustav Jäger in Wien überreicht eine Abhandlung, betitelt: »Zur Theorie der Dissociation der Gase« (II. Mittheilung).

Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:

Erzherzog Ludwig Salvator, Die Liparischen Inseln. IV.: »Panaria«. Prag, 1895; Folio.



SITZUNGSBERICHTE

DER

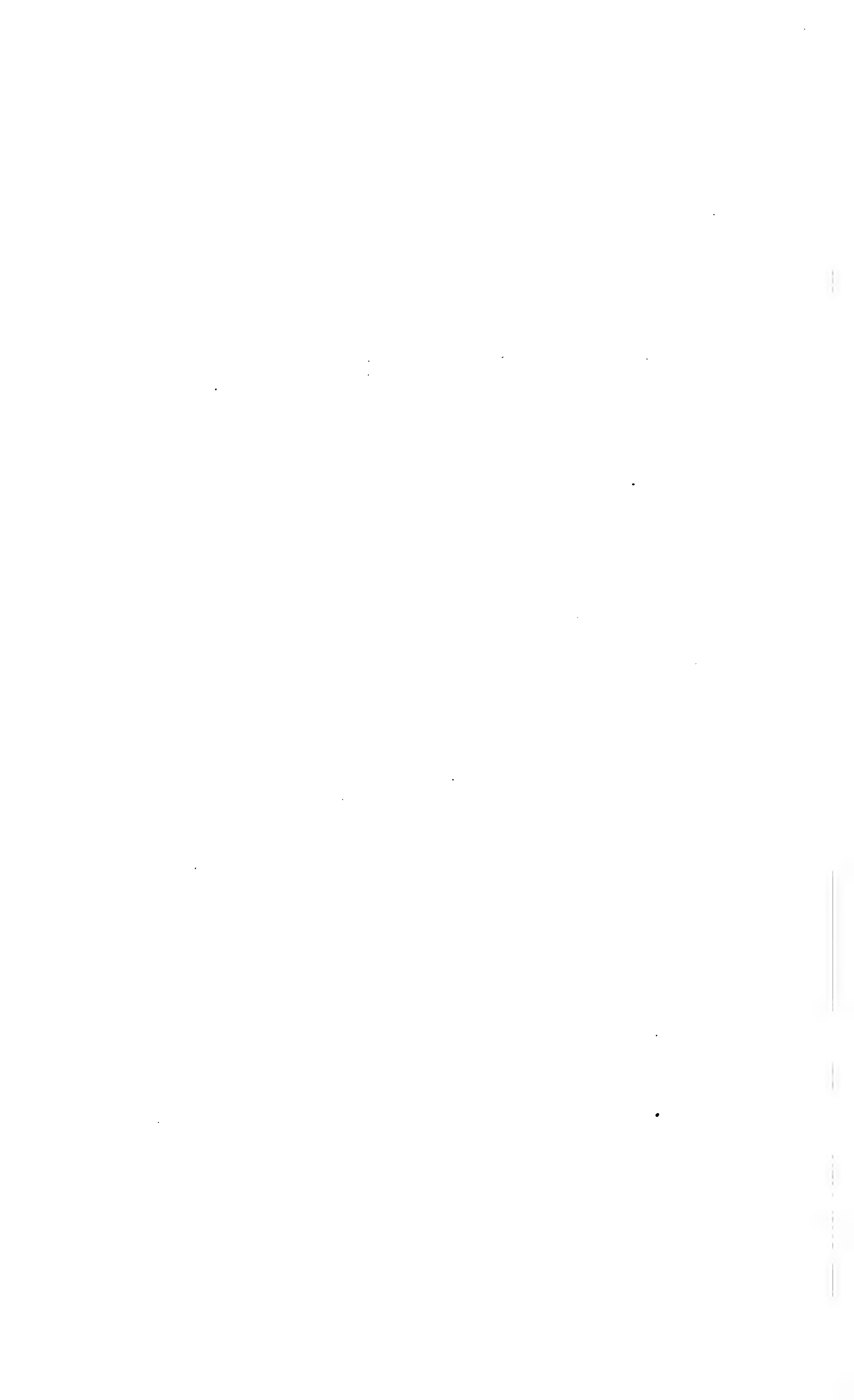
KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

CIV. BAND. VI. HEFT.

ABTHEILUNG II. a.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE, PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.



XV. SITZUNG VOM 14. JUNI 1895.

Erschienen ist das Heft III—IV (März—April 1895), Abtheilung II. b. des 104. Bandes der Sitzungsberichte.

Der Vorsitzende, Herr Vicepräsident Prof. E. Suess, gedenkt des Verlustes, welchen die kaiserliche Akademie und speciell diese Classe durch das am 23. Mai l. J. erfolgte Ableben des ausländischen Ehrenmitgliedes Herrn w. Geheimen Rathes Professor Dr. Franz Ernst Neumann zu Königsberg in Pr. erlitten hat.

Die anwesenden Mitglieder geben ihrem Beileide durch Erheben von den Sitzen Ausdruck.

Im Auftrage des k. k. Ministeriums für Cultus und Unterricht übersendet der Vorstand des Geographischen Institutes der k. k. Universität in Wien, Herr Prof. Dr. Albrecht Penck, die I. Lieferung des mit Unterstützung dieses Ministeriums von ihm und Prof. Dr. Eduard Richter in Graz herausgegebenen »Atlas der österreichischen Alpenseen«.

Das c. M. Herr Prof. Franz Exner in Wien dankt für die ihm zum Zwecke der Vorarbeiten für seine Untersuchung über die Spectra der Meteoriten gewährte Subvention.

Die Herren Regierungsrath Director Dr. J. M. Eder und Ed. Valenta in Wien danken für die Zuerkennung des Ig. L. Lieben'schen Preises.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. V. v. Lang überreicht eine Abhandlung von Dr. Josef Tuma, Assistent an der physikalischen Lehrkanzel der k. k. Universität in Wien, betitelt:

»Messungen mit Wechselströmen von hoher Frequenz«.

Das c. M. Herr Prof. O. Stolz in Innsbruck übersendet eine Abhandlung: »Über den Convergenzkreis der umgekehrten Reihe«.

Das c. M. Herr Prof. Zd. H. Skraup übersendet eine im chemischen Institute der k. k. Universität Graz von Prof. Dr. H. Schrötter ausgeführte Untersuchung, betitelt: »Beiträge zur Kenntniss der Albumosen.« II.

Das c. M. Herr Prof. Franz Exner in Wien übersendet eine Abhandlung von Dr. Anton Lampa: »Zur Theorie der Dielektrica«.

Der Secretär legt folgende eingesendete Abhandlungen vor:

1. »Die Clavulina der Adria«, von Prof. Dr. R. v. Lendenfeld in Czernowitz.
2. »Ein Beitrag zur Kinematik der Ebene«, von Prof. Friedrich Procháska in Prag.
3. »Aus der Kreislehre«, von Herrn Theobald Wortitsch in Wien.

Herr Hugo Zukal in Wien übersendet eine Abhandlung, betitelt: »Morphologische und biologische Untersuchungen über die Flechten« (I. Abhandlung).

Das w. M. Herr Prof. H. Weidel überreicht eine im I. chemischen Universitäts-Laboratorium in Wien von den Herren J. Herzig und H. Mayer durchgeführte Untersuchung: »Weitere Bestimmungen des Alkyls am Stickstoff«

Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:

K. u. k. Reichs-Kriegs-Ministerium, Relative Schweremessungen durch Pendelbeobachtungen. Ausgeführt durch die k. u. k. Kriegs-Marine in den Jahren 1892—1894. Wien, 1895; 8°.

K. k. Ministerium des Innern, Instructionen und Vorschriften für den hydrographischen Dienst in Österreich. Herausgegeben vom k. k. hydrographischen Centralbureau. Fünf Hefte. Wien, 1895; 8⁰.

Penck A. und Richter Ed., Atlas der österreichischen Alpenseen. Herausgegeben mit Unterstützung des k. k. Ministeriums für Cultus und Unterricht. I. Lieferung: Die Seen des Salzkammergutes. (Mit 18 Karten und 100 Profilen auf 12 Tafeln.) Hauptsächlich nach den Lothungen von Hofrath Friedrich Simony entworfen und gezeichnet von Prof. Joh. Müllner. Wien, 1895; Folio.

Messungen mit Wechselströmen von hoher Frequenz

von

Dr. **Josef Tuma,**

Assistent am physikalischen Cabinet der k. k. Universität in Wien.

(Mit 3 Textfiguren.)

Maxwell, Lord Rayleigh und Stefan haben bekanntlich die Gleichungen für den veränderlichen Strom in linearen Leitern aufgestellt, wobei sich als sehr interessante Thatsache ergab, dass ein solcher Strom nicht den ganzen Querschnitt mit gleicher Dichte ausfüllt, sondern vorzugsweise in den peripherischen Theilen des Leiters strömt. Daraus folgt, dass der Widerstand des letzteren für Wechselströme ein anderer ist als für Gleichstrom.

Schon Hertz hat den Nachweis dieser Widerstandsänderung geliefert. Hernach hat Bjerknes[1] nach einer sehr schönen Methode die Tiefe des Eindringens der Wechselströme von hoher Frequenz gemessen. Eine thatsächliche experimentelle Bestimmung des Widerstandes linearer Leiter für oscillirende Ströme ist aber bisher noch nicht geliefert worden. Da nun die von den erwähnten Forschern aufgestellten Formeln der Verification bedürfen, um zu entscheiden, von welcher Tragweite die bei ihrer Ableitung gemachten Vernachlässigungen sind, will ich im Folgenden eine Methode angeben, nach welcher Widerstandsmessungen mit oscillirenden Strömen leicht ausgeführt werden können. Umfangreichere Messungen dieser Art beabsichtige ich erst im kommenden Winter auszuführen, da

[1] Wied. Ann., Bd. 48, 1893.

bei denselben Eiscalorimeter zur Anwendung kommen und derartige Untersuchungen während der warmen Jahreszeit durch den grossen Eisconsum theuer sind.

Schickt man durch einen Leiter von sehr kleinem Querschnitte einen rasch wechselnden Strom, so kann man annehmen, dass der ganze Querschnitt gleichförmig vom Strome durchflossen wird. Diese Thatsache hat vor mir schon Czermak zur Messung des Widerstandes von Funkenentladungen verwendet. Misst man nämlich die Wärmeentwicklung, welche durch den oscillirenden Strom stattfindet und jene, die ein durch denselben Leiter hindurchgeschickter Gleichstrom erzeugt, so verhalten sich die in der Zeiteinheit gelieferten Wärmemengen wie die mittleren Quadrate der Stromstärken. Es kann also ein Leiter von der erwähnten Beschaffenheit zur Messung der Intensität sehr rasch verlaufender Wechselströme, z. B. oscillatorischer Entladungen, verwendet werden.

Schalten wir nun hinter diesen Vergleichswiderstand einen dicken Draht, der ebenfalls von den Strömen durchflossen wird, so wird das Verhältniss der Erwärmungen dieses Drahtes und des Vergleichswiderstandes bei Anwendung von Gleichströmen verschiedener Intensität constant sein; dagegen wird es im Allgemeinen ein anderes werden, wenn wir oscillirende Ströme hindurchschicken. Bezeichnen wir mit W die in dem Drahte, mit W_1 die im Vergleichswiderstande entwickelte Joule'sche Wärme, wenn beide hintereinander geschaltet gleichzeitig vom Gleichstrome von der Intensität I während der Zeit t durchflossen werden, und mit W' und W_1' die bezüglichen Wärmemengen bei Anwendung eines Wechselstromes von der Intensität I' während der Zeit t'. Ferner sollen w_1 den Vergleichswiderstand, w den Widerstand des Drahtes für Gleichstrom und w' jenen für den Wechselstrom bedeuten.

Wir erhalten dann folgende Gleichungen:

$$kW = wI^2t \qquad kW' = w'I'^2t'$$
$$k_1W_1 = w_1I^2t \qquad k_1W_1' = w_1I'^2t'$$

Woraus folgt:

$$\frac{w'}{w} = \frac{W'}{W_1'}\,\frac{W_1}{W}$$

und

$$I' = I\sqrt{\frac{W_1' t}{W_1 t'}}.$$

Werden die Messungen mit einem Bunsen'schen Eiscalorimeter gemacht und bedeuten l, l_1, l' und l_1' die bezüglichen Längen, um welche sich der Flüssigkeitsmeniscus in der Capillaren des Calorimeters verschiebt, so erhalten wir das Verhältniss der Widerstände des Drahtes für Wechselstrom und Gleichstrom nach der Formel

$$\frac{w'}{w} = \frac{l'}{l_1'} \frac{l_1}{l}$$

und die Intensität des Wechselstromes

$$I' = I\sqrt{\frac{l_1'}{l_1} \frac{t}{t'}}.$$

Versuchsanordnung.

Zur Erzeugung der Wechselströme von hoher Frequenz wurde die bei Anstellung Tesla'scher Versuche angewandte

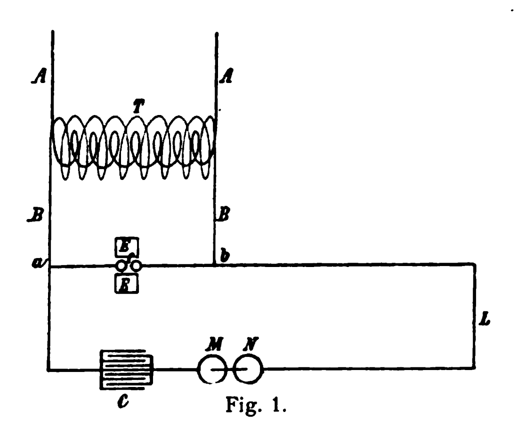


Fig. 1.

Schaltungsweise benützt. Ein Wechselstrom von 100 V. Spannung, der durch die Leitungen A (Fig. 1) zugeleitet wurde, wurde im Transformator T auf circa 10.000 V. transformirt und dann mittelst der Leitungen B zu den Verzweigungspunkten a

und *b* geführt. Die weiteren Leitungen waren durchaus aus 2·35 *mm* dickem Kupferdrahte hergestellt.

Es führten von den Punkten *a* und *b* zwei Leitungen zu der in einem magnetischen Felde *E* befindlichen Funkenstrecke *f*. Anderseits war *a* mit einer Capacität *C* in Verbindung, von deren anderem Pole eine Leitung zu den zwei die Wärmeentwicklung messenden Eiscalorimetern *M* und *N* führte. Schliesslich war *N* durch eine lange Leitung *NLb* mit *b* verbunden. Die Gesammtlänge aller dieser Leitungen betrug 26·5 *m*.

Die Capacität *C* bestand aus sechs Franklin'schen Tafeln, die übereinander geschichtet und in einem Holzkasten eingeschlossen waren. Das Zwischenmedium der Condensatoren war Glas. Es wurden verwendet entweder eine der Tafeln mit einer Capacität von 0·0095 M. F. oder drei derselben mit einer Capacität von 0·033 M. F. oder alle sechs mit einer Capacität von 0·072 M. F. Bei derartigen Messungen, wie sie von mir angestellt wurden, sind solche Condensatoren der Anwendung von Leydnerflaschen vorzuziehen, da sie ohne Einführung nennenswerther uncontrolirbarer Selbstinductionen miteinander verbunden werden können. Die lange Leitung *bLN* hatte den Zweck, eine grosse Selbstinduction zu erzeugen, so dass dieselbe durch Einschaltung des Vergleichswiderstandes und der zu untersuchenden Drahtproben in den Calorimetern *M* und *N* nicht mehr wesentlich verändert wurde. Je nach der Wahl der Capacitäten erhielt ich demnach drei verschiedene Schwingungszahlen, die im Folgenden mit n_1, n_3 und n_6 bezeichnet werden mögen, und zwar ergibt die Rechnung für $n_1 = 232.900$, für $n_3 = 124.800$ und für $n_6 = 84.400$ Schwingungen pro Secunde. Wie man sieht, sind diese Schwingungszahlen verhältnissmässig klein und war daher leider nicht zu erwarten, dass die von Stefan aufgestellten Formeln mit den Messungen vollkommen übereinstimmende Resultate liefern würden.

Stefan hat zweierlei Formeln für die Berechnung von Widerständen entwickelt. Die eine, für langsame Schwingungen,[1] enthält Reihen, die für obige Schwingungszahlen

[1] Diese Sitzungsber., 1887, S. 917.

zu wenig convergiren, während die andere[1] nur für sehr hohe Schwingungszahlen giltig ist. Hätte ich aber die grosse Selbstinduction *bLN* weggelassen, so wäre die Zahl der Schwingungen überhaupt nicht mit einiger Sicherheit zu bestimmen gewesen. Leider verfügt kein Institut in Wien über einen rasch rotirenden Spiegel, mit dem die Schwingungszahlen experimentell hätten gefunden werden können.

Als Leiter von sehr kleinem Querschnitte, welche ich in der oben angedeuteten Weise als Vergleichswiderstände verwendete, wählte ich sehr dünne Kupferröhren, welche auf folgende Weise erhalten wurden. Ein möglichst dünnwandiges Glasrohr von 10 *mm* Durchmesser und 200 *mm* Länge wurde beiderseits zugeschmolzen und mit Platinösen versehen. Hierauf wurde es in eine Versilberungsflüssigkeit getaucht und ein Silberüberzug hergestellt, der dann durch Verkupferung verstärkt wurde. Letztere wurde an den Enden noch besonders verstärkt. Um die Zuleitungen zu befestigen, wurden die Enden mit einem 0·2 *mm* dicken Kupferdrahte umwickelt und diese Windungen unter sich und mit der starken Zuleitung mittelst Rose'schen Metalls verlöthet.

Es kamen bei den Messungen drei Röhren von verschiedener Metallstärke zur Verwendung, und zwar:

Rohr	Dicke des Ag	Dicke des Cu	Gesammtdicke
Nr. 1	0·00013 *mm*	0·0009 *mm*	0·00103 *mm*
Nr. 2	0·00019	0·00366	0·00385
Nr. 3	0·00022	0·00978	0·01000

Die Dicken der Silberschichten wurden durch Wägung, jene des Kupfers durch Messung der Intensität und der Dauer des Verkupferungsstromes bestimmt.

Fig. 2 zeigt die Einrichtung der Eiscalorimeter mit einem Vergleichswiderstande. Das Bunsen'sche Eiscalorimeter wurde insoferne abgeändert, dass die Eprouvette durch ein das Calorimeter ganz durchdringendes, sehr dünnwandiges Rohr ersetzt wurde. Die wichtigsten Dimensionen des Apparates sind in der Zeichnung angegeben. Der Vergleichswiderstand wurde in

---

[1] Ibid. 1890, S. 534.

folgender Weise eingefügt. An das obere Ende war mit Rose'schem Metall der Kopf einer den Kautschukpfropfen 5 durchsetzenden messingenen Schraube *r* angelöthet. Mit Hilfe der Schraubenmutter *m* wurde ein untergelegtes dünnes Kupferblech *b* festgehalten und zugleich durch Pressung des Pfropfens

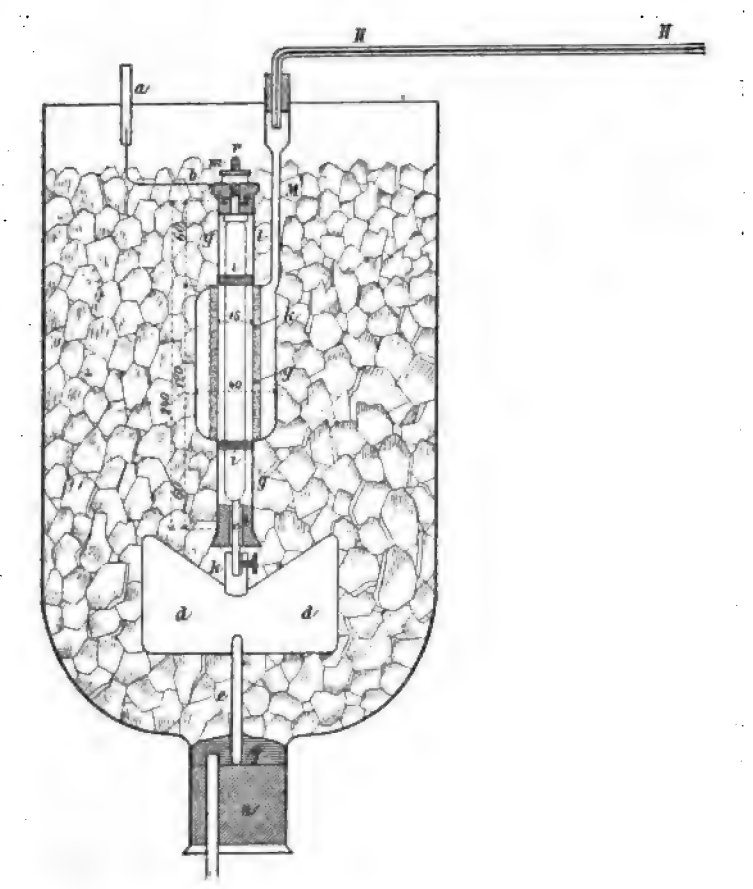


Fig. 2.

eine sichere Befestigung des Vergleichswiderstandes erzielt. Das andere Ende des Kupferstreifens *b* war mit der Zuleitung *a* verlöthet. *b* hatte den Zweck, Wärme, welche aus der Leitung zugeführt wurde, noch vor dem Eintritte in das Calorimeter an das umgebende Eis abzuleiten. An das untere Ende des Vergleichswiderstandes war ein circa 3 *mm* starker Kupfer-

draht *c* angelöthet, der lose durch den Pfropfen *t* hindurchgeführt wurde. Ausserhalb des Calorimeters wurde dieser Draht von einer Klemmschraube *k* gefasst, welche letztere wieder an einem Kupferbleche *d* befestigt war, das demselben Zwecke diente wie das Blech *b*. Der ganze Apparat befand sich in einer umgestürzten Flasche, deren Boden weggesprengt war, und stützte sich mit dem Drahte *e* auf den Kork *u*, welcher den Hals der Flasche verschloss.

Das Quecksilber *q* vermittelte den Contact mit der Zuleitung *f*, welche durch eine Bohrung des Korkes *u* eingeführt war. Im Übrigen war die Flasche mit Eis und Wasser gefüllt. Behufs der Messung wurde der Stand des Wassers in der Capillaren *H* beobachtet, und wurde desshalb über die letztere noch ein getheiltes Rohr geschoben. Die Ablesungen erfolgten mit Hilfe eines Fernrohres.

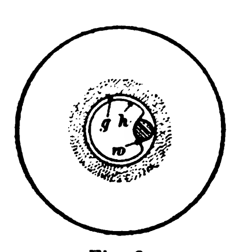


Fig. 3.

Das Calorimeter, in welches die zu messenden Drähte gebracht wurden, war ganz ebenso eingerichtet, nur war an dem Kopfe der Schraube *r* eine Klemmschraube angebracht, um die Drähte festzuhalten. Die Drähte *w* (Fig. 3) wurden derart gebogen, dass sie sich möglichst nahe an der Wand des Rohres *g* befanden. Der übrige Raum wurde durch ein dünnwandiges, beiderseits verschlossenes Rohr *h* eingenommen, das ich auf der dem Drahte *w* zugewendeten Seite der ganzen Länge nach einfallen liess, um für den Draht Platz zu schaffen. Der Draht wurde an das Glasrohr festgebunden.

Um den Eismantel *k* im Calorimeter zu bilden, wurde das Rohr *g* an dem unteren Ende mit einem undurchbohrten Kautschukpfropfen verschlossen. In das obere Ende wurde ein Pfropf mit zwei Bohrungen und einem langen und einem kurzen Glasrohre gebracht. Von dem kurzen führte eine Verbindung zu einer Vorlage und von da zu einer Wasserstrahlpumpe.

Mit Hilfe eines an dem längeren, in das Calorimeter führenden Rohre angeschlossenen Schlauches wurde Luft, respective zur Nachfüllung Äther, in das Calorimeter gesaugt.

Eine Unterkühlung wurde durch Rühren mit einem durch M eingeführten dünnen Pt-Drahte vermieden.

Nachdem die Bildung des Eismantels vollendet war, wurde das Calorimeter mit dem Vergleichswiderstande oder dem zu untersuchenden Drahte versehen und Alles in der in Fig. 2 angedeuteten Weise zusammengestellt. Nun wurde zunächst der Propf s nur lose eingeführt und die Schraubenmutter m nicht angezogen. Sobald das Calorimeter in das mit Eis und Wasser gefüllte Gefäss gebracht wurde, stieg von unten nullgrädiges Wasser im Rohre g auf, und erst, wenn dieses ganz gefüllt war, wurde der Pfropf s in die Mündung des Rohres g eingedrückt und m festgezogen. Das Wasser im Rohre g hatte den Zweck, die sich im metallenen Leiter entwickelnde Wärme rasch aufzunehmen, um Verluste durch Ableitung derselben nach aussen zu vermeiden. Durch Umwicklung der Vergleichswiderstände, respective der Drähte und der beigelegten Glasröhren an den Stellen i wurden schädliche Strömungen des Wassers verhindert.

Vorversuche.

Bevor ich an die eigentlichen Messungen gehen konnte, musste ich mich überzeugen:

1. ob die Verschiebungen des Meniscus in der Capillaren des Eiscalorimeters proportional dem Quadrate der Stromstärke sind;

2. ob die oscillirenden Ströme den ganzen Querschnitt der Vergleichswiderstände gleichförmig einnehmen.

Es wurden daher Vergleichswiderstände und Drähte hintereinander in einen Gleichstrom geschaltet und bei verschiedenen Stromstärken I während der Zeit t die erfolgenden Verschiebungen des Meniscus l am Calorimeter mit dem Drathe und jenes l_1 am Calorimeter mit dem Vergleichswiderstande beobachtet.

Die Stromstärke wurde mit einem Siemens'schen Torsionsgalvanometer (100 Ω) gemessen und aus den Werthen von l und l_1 berechnet, wobei die Reductionsfactoren der Calorimeter der ersten Messung entnommen wurden.

Beispiele dieser oft wiederholten Beobachtungen finden sich in nachfolgender Tabelle.

Die Vergleichswiderstände wurden mit Nr. bezeichnet und bedeutet in dieser, sowie in den folgenden Tabellen:

Nr. 1 den Widerstand von 0·00103 *mm* Metallstärke,

Nr. 2 den Widerstand von 0·00385 *mm* Metallstärke,

Nr. 3 den Widerstand von 0·01 *mm* Metallstärke.

Ebenso bedeuten allgemein l die Verschiebungen des Meniscus am Calorimeter mit dem Drahte, l_1 jene am Calorimeter mit dem Vergleichswiderstande, wobei Centimeter als Einheit gelten. Bei den Ablesungen wurden 0·1 *mm* geschätzt. Die Einheiten der Gleichstromstärken I sind Ampère.

Material	Drahtstärke *d m/m*	Vergleichs-widerstand	l	l_1	ts	I aus l ber.	I aus l_1 ber.	I beob.
Cu	0·31	Nr. 3	17·80	6·00	90	—	—	8·22
»	»	»	16·10	5·00	300	4·27	4·11	4·3
»	»	»	19·18	6·00	60	10·44	<u>9·86</u>	10·5
Cu	3·00	Nr. 3	3·25	11·85	180	—	—	8·10
»	»	»	2·65	9·60	600	3·88	3·96	4·00
»	»	»	3·30	12·00	75	12·64	12·64	12 65
Fe	3·10	Nr. 2	2·75	16·50	120	—	—	11·30
»	»	»	3·39	20·26	600	5·65	5·59	5·60
»	»	»	2·43	14·54	60	15·03	15·03	15 00

Die hier angegebenen Werthe sind nur einige der vielen Ablesungen, und zwar habe ich die ungünstigsten Fälle gewählt, damit sich der Leser ein Urtheil über den Maximalwerth der vorkommenden Beobachtungsfehler bilden könne. Unter den angeführten Messungen beträgt die grösste Abweichung, die betreffende Stromstärke ist unterstrichen, 6·4%, während die gewöhnlichen Differenzen 3% nicht übersteigen. Somit ist Punkt 1 im günstigen Sinne zu beantworten.

Um mich bezüglich des Punktes 2 zu orientiren, benützte ich den Widerstand Nr. 1 als Vergleichswiderstand, um das Verhältniss der Widerstände für oscillirende Ströme zu jenen

für Gleichstrom (in den folgenden Tabellen mit $\frac{w'}{w}$ bezeichnet) bei Widerstand Nr. 3 zu messen. Die Messung wurde mit der kleinsten und grössten Schwingungszahl, nämlich mit $n_6 =$ 84.400 und $n_1 = 232.900$ durchgeführt. Ferner bedeuten l, l_1, I die Verschiebungen der Miniscusse an den Calorimelern und die Intensität des Gleichstromes. Die bezüglichen Grössen für Wechselstrom werden mit $'$ bezeichnet. Es ergaben sich als Mittelwerthe, die aus je drei Serien von Ablesungen gewonnen wurden:

n	l	l_1	l'	l_1'	t^s	I	$\frac{l_1}{l}$	$\frac{l'}{l_1'}$	$\frac{w'}{w}$
—	1·37	9·41	—	—	50	6·00	6·87	—	—
n_1	—	—	0·73	5·03	120	—	—	0·14	0·996
n_6	—	—	2·27	15·35	30	—	—	0·148	1·016

Wie man sieht, ist $\frac{w^1}{w}$ gleich 1 anzunehmen, woraus folgt, dass der Widerstand der 0·01 *mm* dicken Kupferschichte für die in Anwendung gebrachten Wechselströme und für Gleichstrom derselbe ist.

Messungen.

Nach diesen Vorbereitungen konnte ich die eigentlichen Messungen beginnen, deren Ergebnisse ich in folgenden Tafeln darstellen will. Die angegebenen Werthe sind das Mittel aus durchschnittlich vier Bestimmungen.

Die Intensitäten der Wechselströme I' wurden aus den jeweiligen Mittelwerthen der übrigen Grössen berechnet. Obwohl, wie schon erwähnt, die Formel, welche Stefan für den Widerstand gerader Leiter aufgestellt hat, für die angewandten kleinen Schwingungszahlen noch kaum als giltig angenommen werden kann, habe ich doch in der letzten Rubrik die nach ihr berechneten Werthe von $\frac{w'}{w}$ angeführt, um eine beiläufige Vorstellung von der Grösse und dem Sinne der Abweichungen

zu erhalten. Indem sich die Permeabilitäten von Eisen und Nickel mit der Intensitat der Magnetisirung ändern, können derartige Rechnungen überhaupt keine grosse Genauigkeit liefern, wesshalb ich sie nur für Eisen ausführte, da Stefan einige Beispiele für von oscillirenden Strömen durchflossene Eisendrähte gerechnet hat. Auch habe ich mich dabei des von Stefan angenommenen Werthes der Permeabilität $\mu = 150$ bedient. Als specifische Widerstände wurde angenommen:

für Kupfer $\sigma = 1650$,
für Neusilber $\sigma = 26700$,
für Nickel $\sigma = 15000$,
für Eisen $\sigma = 9900$.

Die Drahtstärken wurden durch Längenmessung und Wägung bestimmt.

Kupfer.

Vergleichswiderstand Nr. 3.

dmm	*n*	*l*	l_1	l'	l'_1	*ts*	*I*	*I'*	$\frac{l_1}{l}$	$\frac{l'}{l'_1}$	$\frac{w'}{w}$ beob.	$\frac{w'}{w}$ ber.
0·31	—	17·94	6·07	—	—	90	8·27	—	0·339	—	—	—
	n_1	—	—	5·24	1·80	300	—	2·45	—	2·91	0·986	0·83
	n_3	—	—	17·90	6·09	180	—	5·79	—	2·94	0·996	0·67
	n_6	—	—	16·37	5·45	60	—	9·59	—	3·00	1·017	0·35
1·055	—	6·04	7·88	—	—	100	8·18	—	1·30	—	—	—
	n_1	—	—	1·86	1·11	180	—	2·29	—	1·68	2·18	2·23
	n_3	—	—	6·45	4·89	120	—	5·89	—	1·31	1·70	1·69
	n_6	—	—	9·46	8·18	75	—	9·57	—	1·15	1·50	1·43
1·955	—	3·25	13·68	—	—	600	8·49	—	4·21	—	—	—
	n_1	—	—	0·56	0·45	240	—	2·37	—	1·24	5·22	3·90
	n_3	—	—	2·10	3·14	300	—	5·68	—	0·67	2·82	2·92
	n_6	—	—	2·77	5·05	180	—	9·34	—	0·55	2·31	2·44
3·00	—	1·14	5·00	—	—	210	8·40	—	4·40	—	—	—
	n_1	—	—	1·03	0·70	310	—	2·60	—	1·47	6·47	5·85
	n_3	—	—	2·17	2·93	240	—	5·97	—	0·74	3·26	4·35
	n_6	—	—	3·38	5·87	180	—	9·83	—	0·57	2·51	3·62

Neusilber.

Vergleichswiderstand Nr. 2.

$d$mm	n	l	l_1	l'	l'_1	ts	I	I'	$\frac{l_1}{l}$	$\frac{l'}{l'_1}$	$\frac{w'}{w}$ beob.	$\frac{w'}{w}$ ber.
0·93	—	11·37	1·36	—	—	20	8·55	—	0·12	—	—	—
	n_1	—	—	12·60	1·43	180	—	2·91	—	8·81	1·06	0·68
	n_3	—	—	15·00	1·80	40	—	6·84	—	8·33	1·00	0·57
	n_6	—	—	12·80	1·57	14	—	11·12	—	8·15	0·98	0·51
2·04	—	7·52	4·41	—	—	60	8·57	—	0·58	—	—	—
	n_1	—	—	5·60	2·55	360	—	2·66	—	2·19	1·27	1·20
	n_3	—	—	8·55	4·59	120	—	6·17	—	1·86	1·08	0·94
	n_6	—	—	11·53	6·45	60	—	10·28	—	1·78	1·03	0 82

Nickel.

Vergleichswiderstand Nr. 2.

d	n	l	l_1	l'	l'_1	ts	I	I'	$\frac{l_1}{l}$	$\frac{l'}{l'_1}$	$\frac{w'}{w}$ beob.	
1·00	—	4·32	17·36	—	—	60	11·65	—	4·01	—	—	
	n_1	—	—	5·52	3·51	240	—	2·56	—	1·57	6·30	
	n_3	—	—	9·10	8·99	120	—	5·83	—	1·01	4·05	
	n_6	—	—	8·78	11·58	60	—	9·55	—	0·76	3·05	
2·00	—	2·46	7·58	—	—	150	8·33	—	3·08	—	—	
	n_1	—	—	5·70	1·10	150	—	3·16	—	5·18	15·95	
	n_3	—	—	9·43	2·67	75	—	7·00	—	3·53	10·87	
	n_6	—	—	13·21	5·11	60	—	10·75	—	2·58	7·95	
3·00	—	1·67	13·80	—	—	120	9·85	—	8·27	—	—	
	n_1	—	—	6·74	1·64	180	—	2·76	—	4·11	33·99	
	n_3	—	—	8·78	2·28	90	—	4·63	—	3·85	31·84	
	n_6	—	—	14·53	7·30	90	—	8·27	—	1·99	16·46	

Eisen.

Vergleichswiderstand Nr. 2.

d	n	l	l_1	l'	l'_1	ts	I	I'	$\frac{l_1}{l}$	$\frac{l'}{l'_1}$	$\frac{w'}{w}$ beob.	$\frac{w'}{w}$ ber.
0·6	—	9·08	2·12	—	—	30	8·53	--	0 23	—	—	—
	n_1	—	—	19·95	0·89	85	—	3·28	—	22·4	5·15	5·85
	n_3	—	—	13·50	0·96	20	—	7·01	—	14·0	3·22	4·35
	n_6	—	—	15·20	1·70	15	—	10·77	—	8·94	2 06	3·62
1·25	—	7·03	2·35	—	—	180	6·20	—	0·33	—	—	—
	n_1	—	—	16·83	0·41	150	—	2·79	—	41·00	13·53	11·92
	n_3	—	—	23·41	1 03	60	—	7·19	—	22·73	7·50	8·79
	n_6	—	—	7·98	0·55	30	—	7·32	—	14·50	4·79	7·27
2·00	—	2·07	15·66	—	—	90	11·45	—	7·57	—	—	—
	n_1	—	—	12·70	4·65	600	—	2·40	—	2·73	20·67	18·91
		—	—	13·63	6 20	300	—	3·96	—	2·19	16·58	
	n_3	—	—	20·33	12·47	300	—	5·61	—	1·631	12·35	13·91
		—	—	20·28	13·55	180	—	7·54	—	1·497	11·33	
	n_6	—	—	16 04	13·62	180	—	7·55	—	1·178	8·92	11·49
		—	—	12·98	11·82	60	—	12·13	—	1·099	8·32	
3·10	—	3 00	17·10	—	—	135	11·58	—	5·70	—	—	—
	n_1	—	—	17·58	1·65	600	—	1 69	—	10·65	60·71	29·18
		—	—	19·70	2·14	300	—	2·67	—	9·20	52·44	
	n_3	—	—	24·55	3·91	150	—	5·27	—	6·28	35·80	21·43
		—	—	23·10	4·27	120	—	6·14	—	5·41	30·84	
	n_6	—	—	18·35	4·88	180	—	5·32	—	3·76	21·43	17 67
		—	—	20·80	5·73	60	—	10·07	—	3·63	20·69	

Zunächst sehen wir aus sämmtlichen Messungen, dass wirklich das Verhältniss $\frac{w'}{w}$ mit wachsender Dicke des Leiters und Schwingungszahl des Stromes zunimmt. Um ein bestimmtes Gesetz abzuleiten, stehen mir bis jetzt zu wenig Beobachtungen zur Verfügung. Aus den Messungen an Neusilberdrähten sieht man weiters, dass in der That sich das Verhältniss $\frac{w'}{w}$ desto

mehr der Einheit nähert, je grösser der specifische Widerstand ist. Dies scheint mir bezüglich der Beantwortung der Frage betreffs der Unschädlichkeit rasch wechselnder Ströme von bedeutender Intensität für den thierischen Organismus von Belang zu sein. Ich habe im vorigen Jahre gelegentlich der Versammlung Deutscher Naturforscher und Ärzte in Wien mit Strömen, deren Schwingungszahl kaum höher als der hier verwendeten gewesen sein dürfte, gezeigt, dass dieselben mit einer Intensität, welche eine 100-voltige Glühlampe zum Leuchten brachte, durch den Körper geleitet, sehr wenig fühlbar waren. Dieses zuerst von d'Arsonval angestellte Experiment wurde bekanntlich immer so gedeutet, dass man die Unfühlbarkeit der Ströme auf deren oberflächliches Fliessen zurückführte. Indem wir nun sahen, dass ein Strom von 232.900 Schwingungen einen 2·04 *mm* dicken Neusilberdraht fast im ganzen Querschnitte gleichförmig durchströmt, scheint mir die Behauptung gerechtfertigt, dass selbst viel frequentere Ströme in Substanzen von so hohem specifischen Widerstande, wie es die Gewebe des thierischen Körpers sind, noch ziemlich tief eindringen und daher die erwähnte Erklärung des Phänomens unzulässig ist.

Die von Stefan entwickelte Formel hat ausserdem, dass sie nur für sehr hohe Schwingungen gilt, noch die Voraussetzung, dass der Draht verhältnissmässig dick sei. Daher stammen die berechneten Werthe von $\frac{w'}{w}$, welche kleiner als 1 sind. Dies gilt wohl vorzugsweise für den 0·31 *mm* starken Cu-Draht. Die Formel gilt aber ausserdem nur für Leiter von kleinem specifischen Widerstande, was bei der Betrachtung der für einen 2·04 *mm* dicken Neusilberdraht berechneten Werthe ersichtlich ist. Immerhin aber sieht man, dass für nicht magnetische Leiter die Formel von Stefan bei genügend hohen Schwingungszahlen wohl den wahren Werth des Widerstandes angeben dürfte.

Wesentlich schwieriger gestaltet sich die Berechnung des Widerstandes magnetisirbarer Leiter, indem sich die Permeabilität mit der Grösse der magnetischen Induction ändert.

Es muss daher der Widerstand von der Stromstärke abhängig sein. Bei Nickel konnte ich dies noch nicht mit Sicher-

heit constatiren. Dagegen war diese Erscheinung bei dem 2·00 *mm* und dem 3·10 *mm* dicken Eisendrahte sehr auffallend. Wie man sieht, waren bei diesen Drahtstärken fast alle beobachteten $\frac{w'}{w}$ wesentlich höher als die berechneten. Weiters zeigt sich die auffallende Erscheinung, dass der höheren Stromstärke ein kleinerer Widerstand entspricht. Beachtet man, dass dies nach der Stefan'schen Formel durch eine Verkleinerung der Permeabilität zu erklären ist, so würde sich ergeben, dass in diesen Fällen das Eisen schon seiner magnetischen Sättigung nahe war.

Die vorliegenden wenigen Bestimmungen zeigen somit, dass es, um ein klares Bild von der Grösse der Widerstände linearer Leiter für oscillirende Ströme zu erhalten, nöthig ist, eine systematische Reihe von Messungen mit gleichzeitiger genauer Bestimmung der Schwingungszahl durchzuführen. Daher beabsichtige ich, wie schon erwähnt, im kommenden Winter ausgebreitete Untersuchungen nach dieser Methode anzustellen. Es bleibt mir somit noch die angenehme Pflicht, zwei hiesigen Firmen, nämlich der Firma Kremenezky, Mayer & Co. und der Firma Felten & Guilleaume für leihweise Überlassung von Apparaten meinen besten Dank auszudrücken.

Über den Convergenzkreis der umgekehrten Reihe

von

O. Stolz in Innsbruck,

c. M. k. Akad.

(Mit 1 Textfigur.)

1. Bezeichnet $f_0(y)$ eine endliche oder unendliche, im letzteren Falle convergente Reihe nach ganzen positiven Potenzen von y, deren Summe für $y = 0$ nicht verschwindet, so wird die Gleichung

$$yf_0(y) = x \qquad |f_0(0)| > 0 \tag{1}$$

nach y durch eine und nur eine convergente Reihe nach ganzen positiven Potenzen von x ohne constantes Glied aufgelöst. Diese Reihe, welche die umgekehrte heisst, lässt sich bekanntlich auf die Form bringen:

$$y = \frac{x}{f_0(0)} + \sum_2^\infty{}_n (D_y^{n-1} f_0(y)^{-n})_0 \frac{x^n}{n!} \tag{2}$$

Hier mögen bezüglich der Natur der Function $f_0(y)$ nur zwei Fälle in Betracht gezogen werden:

1) $f_0(y)$ ist eine ganze Function oder eine beständig convergente Potenzreihe (ganze transscendente Function) von y;

2) $f_0(y)$ ist der Quotient zweier ganzen rationalen oder transscendenten Functionen von y: $g_0(y)$, $g_1(y)$, welche nicht für den nämlichen Werth von y verschwinden und beide für $y = 0$ nicht Null sind, d. i. $f_0(y) = g_0(y) : g_1(y)$. Dieser Quotient

lässt sich in eine Reihe nach ganzen positiven Potenzen von y verwandeln, deren Convergenzkreis sich bis zu dem oder den dem Punkte $y = 0$ nächsten Punkten erstreckt, wo $g_1(y)$ verschwindet. Im letzteren Falle ersetzen wir die Gleichung (1) durch die folgende

$$yg_0(y) - xg_1(y) = 0. \tag{3}$$

Aus einem bekannten Satze der Reihentheorie ergibt sich, dass unter den soeben erwähnten Umständen die Summe der Reihe (2) zu jedem Werthe von x innerhalb ihres Convergenzkreises, für y in die Gleichung (1), beziehungsweise (3) gesetzt, dieselbe erfüllt — mit anderen Worten eine Wurzel dieser Gleichung bildet.

Um den Convergenzkreis der Reihe (2) zu bestimmen, kann man sich des Satzes von Weierstrass bedienen, dass derselbe mindestens durch einen Punkt $x = r$ gehen muss, worin die Summe der Reihe den Charakter einer ganzen Function verliert, d. h. einen wie kleinen Kreis man auch um den Punkt r schlagen mag, sich die zu den Punkten x, welche innerhalb dieses und des genannten Convergenzkreises liegen, gehörigen Werthe der Summe der Reihe (2) nicht durch eine convergente Reihe nach ganzen positiven Potenzen von $x-r$ darstellen lassen. Unmittelbar lässt sich freilich dieser Satz nur dann verwenden, wenn man, wie in dem unten besprochenen Beispiele, die Summe der Reihe (2) ermitteln kann. Manchmal lässt er sich jedoch mittelbar benützen. Jedenfalls aber kann man mit seiner Hilfe eine untere Grenze für den Convergenzradius der umgekehrten Reihe finden. Denn der Werth $x = r$ muss sich nothwendig unter den von Null verschiedenen, endlichen singulären Werthen $x = x_0$ der umgekehrten, vieldeutigen Function y befinden. Ein solcher Punkt x_0 ist nämlich dadurch charakterisirt, dass, einen wie kleinen Kreis man auch um ihn beschreibt, zu den innerhalb desselben befindlichen x (ausser $x = x_0$) Werthe von y gehören, welche sich durch eine Reihe nach ganzen positiven Potenzen von $x - x_0$ nicht darstellen lassen. Demnach muss sich der Convergenzkreis der Reihe (2) mindestens bis zu dem oder den dem Nullpunkte nächsten unter den Punkten x_0 erstrecken.

Ist $f_0(y)$ eine ganze rationale Function von y, so sind die singulären Werthe von x blos diejenigen, wofür die Gleichung (1) mindestens eine wiederholte Wurzel hat; es ist also, wenn wir

$$yf_0(y) = f(y) \tag{4}$$

setzen, $x_0 = f(y_0)$, unter y_0 eine Wurzel der Gleichung

$$f'(y) = 0 \tag{5}$$

verstanden. Entwickeln wir nämlich die linke Seite von (1) nach Potenzen von $y - y_0$, so erhalten wir die Gleichung

$$\frac{f^{(m)}(y_0)}{m!}(y-y_0)^m + \frac{f^{(m+1)}(y_0)}{(m+1)!}(y-y_0)^{m+1} + \ldots = x - x_0, \tag{6}$$
$$(m \geqq 2)$$

woraus sich für $y - y_0$ eine Reihe nach ganzen positiven Potenzen von $\sqrt[m]{x-x_0}$ ohne constantes Glied ergibt. Ähnlich verhält sich die Sache, wenn $f_0(y)$ eine ganze transscendente Function von y ist; nur tritt dann, wenn es einen Werth von x gibt, wofür die Gleichung (1) entweder gar keine oder nur eine endliche Anzahl von Wurzeln nach y hat, derselbe zu den soeben erwähnten Werthen von x als singulärer hinzu.

Falls

$$f(y) = yg_0(y) : g_1(y)$$

ist, so gehören zu den singulären Werthen von x wieder alle $x_0 = f(y_0)$, worin y_0 eine Wurzel der Gleichung (5) bedeutet. (Dabei ist $g_1(y_0)$ nicht Null.) Sind $g_0(y)$, $g_1(y)$ ganze rationale Functionen von y, so gibt es, den hier nicht in Betracht kommenden Werth $x = 0$ allenfalls abgerechnet, keine anderen. Ist wenigstens eine von diesen Functionen eine ganze transscendente, so gelten als singuläre Werthe von x auch jene, wofür die Gleichung (3) keine oder nur eine endliche Anzahl von Wurzeln hat. Wenn solche Werthe überhaupt vorhanden sind, so können es nach einem Satze von Picard (Compt. rend., 88. Bd., S. 745) höchstens zwei sein.

2. Mittelbar aus dem oben erwähnten Satze von Weierstrass fliesst der nachstehende Satz über den Convergenzkreis der umgekehrten Reihe, den ich im 95. Bande dieser

Sitzungsberichte, II. Abth., S. 674 bewiesen habe. »Lässt sich eine positive Zahl $\varkappa$ auf die folgende Art bestimmen, so ist sie gleich dem Convergenzradius der umgekehrten Reihe. Construirt man in der y-Ebene, $y = \xi + \eta i$ setzend, die Curven

$$|f(\xi+\eta i)|^2 = \alpha^2 \qquad (0 < \alpha < \varkappa), \tag{7}$$

so soll erstens jede von ihnen einen einfachen geschlossenen Theil (Oval) besitzen, welcher den Punkt $y = 0$ und das einem jeden kleineren Werthe von α entsprechende Oval umschliesst. Zweitens auf dem alle diese Ovale einschliessenden Theile $\mathfrak{k}$ der Curve

$$|f(\xi+\eta i)|^2 = \varkappa^2 \tag{8}$$

befindet sich mindestens ein Punkt y', wofür $f'(y') = 0$ ist.«

Der Satz ist a. a. O. gezeigt unter der Voraussetzung, dass $f(y)$ eine ganze rationale oder transscendente Function von y ist. Der Beweis gilt jedoch, wenn nur $f(y)$ in jedem Punkte innerhalb und auf $\mathfrak{k}$ holomorph ist. Dies trifft in der That auch zu in dem zweiten der in Nr. 1 angegebenen Falle, weil die Function $g_0(y) : g_1(y)$ nur in jenen Punkten, wo $g_1(y)$ verschwindet, den Charakter einer ganzen verliert. Nähert sich y einem solchen Werthe, so hat $g_0(y) : g_1(y)$ den Grenzwerth ∞, somit kann keiner von ihnen innerhalb oder auch nur auf $\mathfrak{k}$ liegen.

3. Bei Anwendung des vorstehenden Satzes auf die Gleichung

$$y : (1+18y-3y^2+2y^3) = x, \tag{9}$$

zu der ich nun übergehe, gelangte ich zu einem anderen Ergebnisse als Herr Nekrassoff, der dieses Beispiel im 31. Bande der mathem. Annalen (S. 356) vorgelegt hat. Setzen wir

$$1+18y-3y^2+2y^3 = g_1(y), \tag{10}$$

so haben wir, um die singulären Werthe von x zu ermitteln, die Gleichung

$$D_y\{y : g_1(y)\} = 0 \quad \text{oder} \quad yg_1'(y) - g_1(y) = 0, \tag{10*}$$

d. i.

$$4y^3 - 3y^2 - 1 = 0$$

aufzulösen. Ihre Wurzeln sind

$$y = 1 \qquad y = \frac{-1 \pm i\sqrt{5}}{8}.$$

Ihnen entsprechen zufolge der Formel

$$x = y : g_1(y) = 1 : g_1'(y)$$

die Werthe $x = 1:18 = 0 \cdot 0\dot{5}$ und

$$x = \frac{16}{3\{93 \mp 5i\sqrt{15}\}}. \tag{11}$$

Der Betrag der letzteren ist

$$|x| = \frac{16}{3\sqrt{93^2+25\times 15}} = \frac{1}{17.812\ldots} = 0 \cdot 05614\ldots \tag{11*}$$

(nicht 0·5614, wie a. a. O. aus Versehen angegeben ist).

Setzen wir in (7) $f(y) = y : g_1(y)$ und

$$g_1(\xi+\eta i) = \varphi(\xi, \eta) + i\psi(\xi, \eta),$$

so lässt sich diese Gleichung auf die Form bringen:

$$\xi^2+\eta^2 = \alpha^2\{\varphi(\xi, \eta)^2+\psi(\xi, \eta)\}^2. \tag{12}$$

Hier hat man sich also

$$\varphi(\xi, \eta) = 1+18\xi-3\xi^2+3\eta^2+2\xi^3-6\xi\eta^2$$
$$\psi(\xi, \eta) = 2\eta\{9-3\xi+3\xi^2-\eta^2\}$$

zu denken, so dass die Curve (12) von der 6. Ordnung ist. Sie hat, da die Glieder 6. Ordnung in $\xi\eta$ eine definite Form bilden nur complexe uneigentliche Punkte, liegt also ganz im Endlichen, und zwar liegt sie symmetrisch gegenüber der reellen Axe $\eta = 0$.

Nimmt man in (12) $\alpha = 1:18$, so geht die Curve (12) natürlich durch den Punkt $\xi = 1$, $\eta = 0$ (d. i. $y = 1$), und zwar ist er für sie ein Doppelpunkt, in welchem sich zwei reelle Zweige schneiden. Setzt man nämlich in (12) $\xi = 1+\xi_1$ und ordnet nach Potenzen von ξ_1 und η, so erhält man die Gleichung

$$108(\xi_1^2-\eta^2)+\text{Gl. höh. als 2. Ord.} = 0.$$

Die Tangenten der beiden Zweige im Punkte $\xi = 1$, $\eta = 0$ haben mithin die Gleichungen

$$\eta - \xi + 1 = 0 \qquad \eta + \xi - 1 = 0;$$

sie halbiren also die von den Geraden $\xi = 1$ und $\eta = 0$ gebildeten Winkel.

Um die Gestalt der Curven (12) kennen zu lernen, genügt nunmehr die Ermittelung ihrer Schnittpunkte mit den Coordinatenaxen. Die mit der Axe $\eta = 0$ ergeben sich aus der Gleichung

$$\xi^2 = \alpha^2 \varphi(\xi, 0)^2 = \alpha^2 g_1(\xi)^2,$$

welche in die beiden

$$g_1(\xi) \mp \frac{\xi}{\alpha} = 0 \tag{13}$$

zerfällt. Die Gleichung

$$g_1(\xi) - \frac{\xi}{a} = 0 \tag{14}$$

hat eine wiederholte Wurzel, falls neben ihr die Gleichung

$$g_1'(\xi) - \frac{1}{a} = 0$$

besteht, also

$$\xi g_1'(\xi) = g_1(\xi) = 0$$

ist. Diese Gleichung fällt mit (10*) zusammen. Daher hat die Gleichung (14) eine wiederholte Wurzel nur, wenn $a = 1:18$ oder einem der Brüche (11) ist.

Setzt man in (14) $a = 1:18$, so hat die Gleichung die doppelte Wurzel $\xi = 1$ und die einfache $\xi = -{}^1/_2$. Um die Wurzeln von (13) in anderen Fällen zu ermitteln, schaffe man durch die Substitution $\xi = \xi' + {}^1/_2$ das quadratische Glied weg. Die reducirte Gleichung lautet:

$$\xi'^3 + \frac{1}{4}\left(33 \mp \frac{2}{\alpha}\right)\xi' + \frac{1}{4}\left(19 \mp \frac{1}{\alpha}\right) = 0. \tag{15}$$

Ist $\alpha > 0$, so sind im Falle des unteren Zeichens der Coëfficient von ξ' und das constante Glied positiv, die Gleichung hat also nur eine reelle Wurzel. Für den Fall des oberen

Zeichens bilde man die Discriminante, wofür man mit Rücksicht auf die obige Bemerkung leicht den Ausdruck

$$64\,D = \frac{1}{27}\left(33-\frac{2}{\alpha}\right)^3 + \left(19-\frac{1}{\alpha}\right)^2 =$$

$$= \frac{8}{27}\left(18-\frac{1}{\alpha}\right)\left\{\left[\frac{1}{\alpha}-\frac{3\times 93}{16}\right]^2 + \frac{9\times 375}{16^2}\right\} \quad (15^*)$$

findet. Sonach ist, falls $0 < \alpha < 1:18$, D negativ; es hat also die Gleichung

$$g_1(\xi) - \xi : \alpha = 0$$

unter dieser Voraussetzung drei reelle Wurzeln. Demnach schneidet die Curve (12), wenn $\alpha < 1:18$ ist, die ξ-Axe in vier Punkten, und wenn $\alpha = 1:18$ ist, in drei.

Die Schnittpunkte der Curve (12) mit der Axe $\xi = 0$ ergeben sich aus der Gleichung

$$0 = 1 + \left(330 - \frac{1}{\alpha^2}\right)H - 63H^2 + 4H^3, \quad (16)$$

worin $H = \eta^2$ ist. Die Discriminante der mittelst der Substitution $H = H' + 21/4$ reducirten Gleichung erweist sich, falls $0 < \alpha \leqq 1:18$ ist, als negativ, daher hat die Gleichung (16) drei reelle Wurzeln. Von ihnen sind nach der Regel des Cartesius zwei positiv, eine negativ. Unsere Curve schneidet mithin die positive und die negative η-Axe je in zwei Punkten.

Aus dem Vorstehenden erschliesst man für die Curve

$$18^2(\xi^2+\eta^2) = \varphi(\xi,\eta)^2 + \psi(\xi,\eta)^2 \quad (17)$$

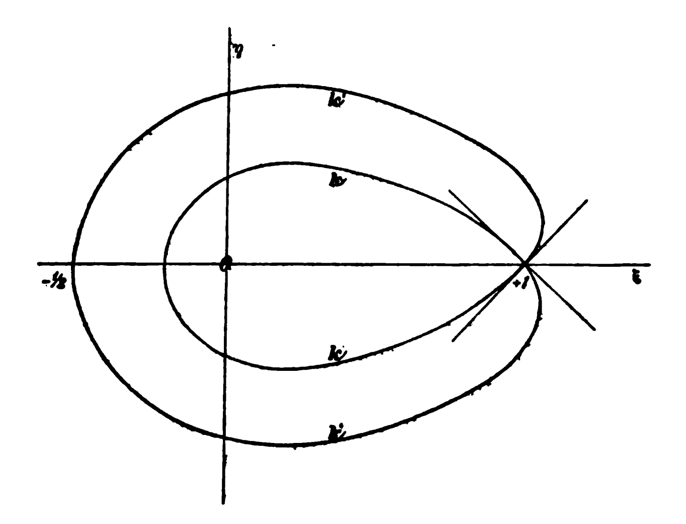
die in der Figur Seite 492 angedeutete Gestalt. $|y:g_1(y)|$ ist ausserhalb der von der Curve (17) gebildeten ringförmigen Zelle durchaus kleiner als $1:18$. Ertheilt man der Zahl α in (12) einen Werth kleiner $1:18$, so zerfällt die bezügliche Curve in zwei den Punkt 0 umschliessende Ovale, von denen eines innerhalb des zu (17) gehörigen Ovales k, das andere ausserhalb des äusseren Theiles k' dieser Curve liegt.

Hieraus erschliessen wir auf Grund des in Nr. 2 mitgetheilten Satzes, dass die zur Gleichung (9) gehörige umgekehrte Reihe — man setze in (2) $f_0(y) = 1:g_1(y)$ —

$$v = x + \sum_{2}^{\infty} n (D_y^{n-1} g_1(y)^n)_0 x^n \tag{18}$$

genau den Convergenzradius 1:18 hat.

4. Herr Nekrassoff behauptet a. a. O., dass der Convergenzradius der Potenzreihe (18) grösser als 1:18, nämlich gleich der Zahl (11*), d. i. 0·05614. . sei. Mittelst der Coëfficienten dieser Reihe ist es wohl nicht möglich zu entscheiden, ob seine oder meine Angabe richtig sei. Ich werde jedoch



zeigen, dass die Summe der Reihe (18) im Punkte $x = 1:18$ den Charakter einer ganzen Function verliert, woraus erhellt, dass ihr Convergenzkreis keinen grösseren Radius als 1:18 haben kann.

Zu dieser Einsicht gelangt man durch Auflösung der Gleichung (9), welche wir durch die Substitution $y = y' + {}^1/_2$ auf die bereits erwähnte Form

$$y'^3 + \frac{1}{4}\left(33 - \frac{2}{x}\right) y' + \frac{1}{4}\left(19 - \frac{1}{x}\right) = 0 \tag{19}$$

bringen, mittelst der Cardanischen Formel.

Hinsichtlich der hiebei auftretenden Wurzeln sei bemerkt, dass eine jede von ihnen einen bestimmten Sinn haben, und zwar den Cauchy'schen Hauptwerth bedeuten soll. Ist a eine beliebige complexe Zahl ausser 0, und zwar in trigonometrischer Form

$$a = A(\cos\alpha + i\sin\alpha) \qquad A = |a| \quad (-\pi < \alpha \leqq \pi),$$

so ist der Hauptwerth

$$\sqrt[m]{a} = a^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{A}\left\{\cos\frac{\alpha}{m} + i\sin\frac{\alpha}{m}\right\} = \sqrt[m]{A}\, e^{\frac{\alpha i}{m}}, \tag{20}$$

worin $\sqrt[m]{A}$ den positiven Werth oder den Hauptwerth der $m$ten Wurzel aus A bedeutet. Hienach ist $\sqrt[3]{-A}$ $(A > 0)$ nicht $-\sqrt[3]{A}$, sondern $\sqrt[3]{A}\left\{\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right\} = \frac{1}{2}\sqrt[3]{A}(1 + i\sqrt{3})$.

Setzt man

$$\frac{1}{4}\left(33 - \frac{2}{x}\right) = a \qquad \frac{1}{4}\left(19 - \frac{1}{x}\right) = b$$

$$D = \frac{a^3}{27} + \frac{b^2}{4} \qquad y' = p + q,$$

so hat man nach der genannten Formel

$$p^3 = -\tfrac{1}{2}b \pm \sqrt{D} \qquad q^3 = -\tfrac{1}{2}b \mp \sqrt{D},$$

wobei jedoch pq so zu wählen sind, dass $pq = -a:3$ ist. Wie schon bemerkt, findet man

$$D = -\frac{1}{216x^3}(1 - 18x)\left(1 - \frac{279}{8}x + \frac{1269}{4}x^2\right). \tag{21}$$

Setzt man $x = t^2$ und

$$\sqrt{1 - 18t^2}\cdot\sqrt{1 - \frac{279}{8}t^2 + \frac{1269}{4}t^4} = w, \tag{22}$$

so ist

$$\frac{wi}{t^3 6\sqrt{6}} = \pm\sqrt{D}, \tag{23}$$

d. h. gleich einem gewissen Werthe der Quadratwurzel aus D. Damit ergibt sich

$$-{}^1/_2 b \pm \sqrt{D} = \frac{1}{8t^3}\left\{t - 19t^3 + \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}\,wi\right\}. \tag{24}$$

Von den drei Wurzeln der Gleichung (19), welche zu einem dem Betrage nach hinlänglich kleinen Werth von x gehören, wird die eine durch eine Reihe nach ganzen positiven Potenzen von x, die beiden anderen durch eine Reihe nach ganzen Potenzen von $\sqrt{x}$, welche mit $1:\sqrt{x}$ beginnt, dargestellt (siehe Nr. 7). Wir wollen zunächst die erstere, welche gleich ist der Summe der Reihe (18) minus ${}^1/_8$, durch die Cardanische Formel ausdrücken. Nach (24) ist

$$-{}^1/_2 b \pm \sqrt{D} = \frac{wi}{t^3 6\sqrt{6}}\left(1 - \frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}\,\frac{t-19t^3}{w}\,i\right),$$

also ein gewisser Werth der dritten Wurzel aus diesem Ausdrucke

$$p = -\frac{i\sqrt[3]{w}}{t\sqrt{6}}(1-zi)^{1/3}, \tag{25}$$

worin

$$z = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}\,\frac{t-19t^3}{w} \tag{26}$$

zu denken ist. Das zugehörige q ist

$$q = \frac{i\sqrt[3]{w}}{t\sqrt{6}}(1+zi)^{1/3}. \tag{27}$$

In der That haben wir

$$pq = -\frac{1}{3}a = -\frac{1}{12}\left(33 - \frac{2}{x}\right). \tag{28}$$

Bei positivem x, kleiner als $1:18$, ist das unmittelbar klar, da pq conjugirte Zahlen sind, also ihr Product wirklich positiv ist. Daraus folgt aber, dass die Gleichung (28) für alle jene Werthe von t, wofür sich pq in Potenzreihen von t entwickeln lassen, eine identische sein muss.

$p+q$ ist demnach eine Wurzel der Gleichung (19), und zwar diejenige, welche sich in eine Reihe nach ganzen positiven Potenzen von x entwickeln lässt. Da

$$\frac{1}{w} = (1-18t^2)^{-1/2} . \left(1 - \frac{279}{8} t^2 + \frac{1269}{4} t^4\right)^{-1/2}$$

sich für Werthe von t, deren Betrag klein genug ist, mittelst des binomischen Satzes in eine Reihe nach ganzen positiven Potenzen von t^2 verwandeln lässt, so liefert z eine Potenzreihe, in der nur die ungeraden Potenzen von t vorkommen. Da diese Reihe mit t beginnt, so kann man bei Werthen von t, welche dem Betrage nach klein genug sind, $(1 \mp zi)^{1/3}$ in eine Potenzreihe von t entwickeln, indem man zuerst $(1 \mp zi)^{1/3}$ nach dem binomischen Satze in eine Potenzreihe von z verwandelt, hinterher für z die soeben gefundene Reihe untersetzt und dann nach Potenzen von t ordnet. In der Differenz

$$(1-zi)^{1/3} - (1+zi)^{1/3} = -\frac{2}{3} zi + \dots$$

verschwinden die Glieder mit den geraden Potenzen von z. Die ungeraden Potenzen von z enthalten den Factor t und daneben je eine Potenzreihe von $t^2 = x$. Da w eine Reihe nach ganzen positiven Potenzen von x liefert, deren erstes Glied 1 ist, so darf man

$$\sqrt[3]{w} = \sqrt[6]{1-18x} . \sqrt[6]{1 - \frac{249}{8} x^2 + \frac{1269}{4} x^4}$$

setzen, erhält also dafür auch eine Reihe nach ganzen positiven Potenzen von x mit dem constanten Gliede : 1. Wir erhalten demnach für die Werthe von x von hinlänglich kleinem Betrage

$$y' = p+q = -\frac{1}{2} + x\mathfrak{P}(x),$$

worin $\mathfrak{P}(x)$ das Zeichen für eine Reihe nach ganzen positiven Potenzen von x ist. Somit ist die Summe der umgekehrten Reihe (18) bei gehöriger Kleinheit von $|x|$ $y = p+q+{}^1/_2$, unter pq die Ausdrücke (25) und (27) verstanden.

5. Die Formen (25) und (27) für die Zahlen pq lassen sich in der weiteren Untersuchung nicht verwenden, weil sie voraussetzen, dass w nicht verschwindet, was aber schon für $x = 1:18$ eintritt. Wir dürfen jedoch für die Werthe t von hinlänglich kleinem Betrage

$$p = -\frac{ij}{t\sqrt{6}}\left\{w - \frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}(t-19t^3)i\right\}^{1/3}$$

$$q = \frac{ij'}{t\sqrt{6}}\left\{w + \frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}(t-19t^3)i\right\}^{1/3}$$

setzen, wenn wir die dritten Einheitswurzeln jj' so bestimmen, dass $p+q$ bei Entwickelung nach steigenden ganzen Potenzen von t keine negativen Potenzen von t liefert und für $t = 0$ gleich $-1/2$ ist. Es ist aber

$$p = -\frac{ij}{t\sqrt{6}}\left\{1 - \frac{i\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}t + \dots\right\}$$

$$q = \frac{ij'}{t\sqrt{6}}\left\{1 + \frac{i\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}t + \dots\right\}$$

wir haben also $j = j'$ und $j = 1$ zu nehmen.

Setzen wir der Kürze wegen

$$\left(w - \frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}\cdot(t-19t^3)i\right)^{1/3} = P$$
$$\left(w + \frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}\cdot(t-19t^3)i\right)^{1/3} = Q, \tag{29}$$

so ist demnach für die Werthe von x, deren Betrag klein genug ist, die Summe der Reihe (18)

$$y = \frac{1}{2} + \frac{i}{t\sqrt{6}}\{Q - P\}. \tag{30}$$

Daraus folgt aber mit nichten, dass diese Gleichung für alle Werthe von x gilt, wofür die Reihe (18) convergirt. Um über den Giltigkeitsbereich der Formel (30) ins Klare zu

kommen, müsste man die sehr verwickelten Unstetigkeitslinien der Hauptwerthe PQ in der x-Ebene, welche durch die Punkte $x = 1:18$ und (11) gehen, construiren. Für unseren Zweck ist das aber nicht nöthig, da wir blos zu zeigen brauchen, dass die Summe der Reihe (18) in jedem Punkte $x = \xi$ der reellen Axe zwischen 0 und 1/18 den Werth $^1/_2 + \frac{i}{t\sqrt{6}}(Q-P)$ hat. In der That folgt dies sofort aus dem bekannten Satze: »Es seien jedem Punkte x einer Linie $\mathfrak{l} \equiv ab$ (die Endpunkte eingeschlossen) ein oder mehrere, und zwar höchstens m Werthe y zugeordnet, welche eine mehrdeutige Function $y = f(x)$ bilden. Nehmen wir an, $f(x)$ sei bei jedem solchen Werthsysteme xy stetig und es gebe eine positive Zahl $\varkappa$, welche kleiner ist als der absolute Betrag des Unterschiedes irgend zweier zu einem beliebig auf $\mathfrak{l}$ gewählten Punkte x gehörigen Functionswerthe $f(x)$, $f_1(x)$ und ordnen einem festen Punkte x_0 auf $\mathfrak{l}$ einen bestimmten Werth $f(x_0)$ zu, so lässt sich aus den Werthen von $f(x)$ eine und nur eine eindeutige und stetige Function bilden, welche in x_0 den Werth $f(x_0)$ hat«. — Werden nun zwei positive Zahlen $\varkappa\lambda$ so gewählt, dass $\varkappa < \xi < \lambda < 1/18$ und dabei $\varkappa$ gehörig klein ist, so bildet die Summe der Reihe (18) auf der reellen Strecke $(\varkappa, \lambda)$ den eindeutigen und stetigen Zweig der durch die Gleichung (9) definirten Function y, dessen Werth für $x = \varkappa$ aus dem Ausdrucke

$$y_1 = {}^1/_2 + \frac{i}{t\sqrt{6}}(Q-P) = h(x) \tag{31}$$

durch die Annahme $t = \sqrt{\varkappa}$ hervorgeht. Der nämliche Zweig von y wird aber durch den Ausdruck (31) selbst dargestellt, denn auch er ist für die positiven $x: \varkappa < x < \lambda$ stetig. Die Hauptwerthe PQ sind ja nur für jene x unstetig, wofür das Argument einer in ihnen vorkommenden Wurzel Null oder negativ wird, w^2 ist aber für jedes solche x positiv (vergl. (15*)), $t-19t^3$ ist reell, somit weder P^3 noch Q^3 Null oder negativ.

Für $t = \sqrt{1:18}$ ist $w = 0$, somit

$$y_1 = {}^1/_2 + i\sqrt{3}\left\{\frac{\sqrt[3]{-i}}{2\sqrt{3}} - \frac{\sqrt[3]{i}}{2\sqrt{3}}\right\},$$

also, da $\pm i = e^{\pm\frac{\pi i}{2}}$

$$\sqrt[3]{-i} = \cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6} \qquad \sqrt[3]{i} = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}$$

ist, $y_1 = {}^1/_2 + \sin\pi/6 = {}^1/_2 + {}^1/_2 = 1$, d. i. y_1 ist die zu $x = 1:18$ gehörige wiederholte Wurzel der Gleichung (9). Ob die Reihe (18), deren Summe wir mit $S(x)$ bezeichnen wollen, für $x = 1:18$ convergirt, ist unbekannt; jedenfalls aber thut sie das, wenn $|x| < 1/18$ ist. Wir haben also für die reellen x zwischen 0 und 1/18 $S(x) = h(x)$, somit

$$\lim_{x=1/18-0} S(x) = \lim_{x=1/18-0} h(x) = 1. \tag{32}$$

Schon daraus ergibt sich, dass $S(x)$ unmöglich für $x = 1/18$ holomorph sein kann, denn wäre das der Fall, so müsste der Grenzwerth (32) gleich der zu $x = 1/18$ gehörigen einfachen Wurzel $-{}^1/_2$ der Gleichung (9) sein.

6. Um jeden Zweifel zu beseitigen, wollen wir noch zeigen, dass $y_1 = S(x)$ in der Umgebung des Punktes $x = 1/18$ durch eine Reihe nach ganzen positiven Potenzen von $\sqrt{x - 1/18}$ dargestellt wird. Wir haben, falls $t = \sqrt{x}$ und $|x|$ zwischen 1/19 und 1/18 gelegen vorausgesetzt wird, nach (29)

$$P = \sqrt{\frac{3}{2}}\sqrt[3]{i}\sqrt[3]{19t^3 - t}\left\{1 - \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}\frac{wi}{19t^3 - t}\right\}^{1/3}; \tag{33}$$

denn diese Formel ist für $t = \sqrt{1:18}$ richtig, da beide Seiten $\sqrt[3]{i} : 2\sqrt{3}$ geben und für die übrigen unter den genannten Werthen von t alle Wurzeln stetig sind. Ebenso ist

$$Q = \sqrt{\frac{3}{2}}\sqrt[3]{-i}\sqrt[3]{19t^3 - t}\left\{1 + \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}\frac{wi}{19t^3 - t}\right\}^{1/3}. \tag{34}$$

Setzen wir nun

$$(t^2 =) x = 1/18 - u,$$

so ist

$$\left.\begin{aligned}
1:t &= x^{-1/2} = \sqrt{18}.(1-18u)^{-1/2} \\
\frac{1}{t}\sqrt[3]{19t^3-t} &= \sqrt[3]{19-\frac{1}{x}} = \sqrt[3]{1-\frac{18^2 u}{1-18u}} \\
\frac{1}{19t^3-t} &= \frac{1}{t}\cdot\frac{1}{19x-1} = \frac{1}{t}\cdot\frac{18}{1-18\times 19u};
\end{aligned}\right\} \tag{35}$$

diese Ausdrücke liefern somit bei hinlänglich kleinem $|u|$ Reihen nach ganzen positiven Potenzen von u. Für w erhalten wir nach (22), indem wir $u = v^2$ (und zwar $\sqrt{u} = v$) setzen, das Product von v in eine Reihe nach ganzen positiven Potenzen von u. Also wird

$$U = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}\,\frac{wi}{19t^3-t} \tag{37}$$

ebenfalls das Product von v in eine Reihe nach ganzen positiven Potenzen von u. Um den letzten Factor in (33) und (34) zu entwickeln, bildet man zunächst

$$\sqrt[3]{1\pm U} = 1 \pm {}^1/_3 U + \binom{1/_3}{2} U^2 \pm \ldots, \tag{38}$$

setzt dann für U den soeben erhaltenen Ausdruck unter und ordnet nach Potenzen von v. Führt man die soeben für $\sqrt[3]{19t^3-t}:t$ und $\sqrt[3]{1\mp U}$ gewonnenen Entwickelungen in (31) ein, so erhellt unmittelbar, dass die ungeraden Potenzen von v daraus nicht verschwinden. Man findet nämlich

$$y_1 = 1 - 6v\sqrt{3} + \ldots \qquad (v = \sqrt{1:18-x})$$

Es ist auch leicht einzusehen, dass die Coëfficienten dieser Reihe sämmtlich reell sind.

7. Es ist noch von Interesse, die beiden anderen Wurzeln der Gleichung (9) ins Auge zu fassen. Wir haben dafür bekanntlich

$$y_2 = \frac{1}{2} + \frac{i}{t\sqrt{6}}\left\{e^{-\frac{2\pi i}{3}}Q - e^{\frac{2\pi i}{3}}P\right\} \tag{39}$$

$$y_3 = \frac{1}{2} + \frac{i}{t\sqrt{6}}\left\{e^{\frac{2\pi i}{3}}Q - e^{-\frac{2\pi i}{3}}P\right\} \tag{40}$$

Hieraus ergibt sich für $t = \sqrt{1:18}$

$$y_2 = 1 \qquad y_3 = -\tfrac{1}{2}.$$

Die Wurzel y_3 muss also bei $x = 1:18$ holomorph sein. Entwickeln wir in der That den Ausdruck (40) mit Hilfe der in der letzten Nummer vorgeführten Formeln in eine Reihe nach ganzen Potenzen von v, so erscheinen in ihr nur die Potenzen von v^2 oder $1:18-x$. Denn es verschwinden im Ausdrucke

$$e^{\frac{2\pi i}{3}} \sqrt[3]{-i}\, \sqrt[3]{1+U} - e^{-\frac{2\pi i}{3}} \sqrt[3]{i}\, \sqrt[3]{1-U} =$$
$$= e^{\frac{\pi i}{2}} \sqrt[3]{1+U} - e^{-\frac{\pi i}{2}} \sqrt[3]{1-U} = i\{\sqrt[3]{1+U} + \sqrt[3]{1-U}\}$$

die ungeraden Potenzen von U.

Um y_2 und y_3 in der Umgebung von $x = 0$ in Reihen zu entwickeln, setze man in (9) $x = t^2$, $y = 1:z$, wodurch diese Gleichung übergeht in

$$z^2 : (2 - 3z + 18z^2 + z^3) = t^2. \tag{41}$$

Es entspricht also $x = 0$ der Werth $z = 0$. Zieht man aus (41) die Quadratwurzel, so ergibt sich

$$z\left(1 - \frac{3z}{2} + 9z^2 + \frac{z^3}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} = t\sqrt{2}. \tag{42}$$

Entwickelt man den zweiten Factor links nach dem polynomischen Satze in eine Potenzreihe von z, so dass man die Gleichung

$$z\left(1 + \frac{3}{4}z + \ldots\right) = t\sqrt{2}$$

erhält, so lässt sich dieselbe nach z durch die umgekehrte Reihe

$$z = t\sqrt{2} - \frac{3}{2}t^2 + \ldots$$

auflösen. Somit finden wir für y die Reihe nach steigenden Potenzen von t:

$$y = \frac{1}{z} = \frac{1}{t\sqrt{2}} + \frac{3}{4} + t\mathfrak{Q}(t) \qquad (t = \pm\sqrt{x}). \tag{43}$$

$y_2 y_3$ werden durch dieselbe wenigstens unter ähnlichen Beschränkungen wie y_1 durch die Reihe (18) dargestellt. Der Convergenzradius der Potenzreihe (43) ist genau $1:\sqrt{18}$. Construirt man nämlich in der t-Ebene vom Punkte $t = 0$ aus den Kreis mit diesem Radius, so muss die Summe von (43) bei der Annäherung von t entweder an den Punkt $1:\sqrt{18}$ oder $-1:\sqrt{18}$ zum Grenzwerthe $+1$, welchen Werth y_2 für $t = 1:\sqrt{18}$ annimmt, convergiren, d. h. sie verliert in dem betreffenden Punkte den Charakter einer ganzen Function von t.

8. Aus der Gleichung (9) lässt sich leicht eine andere ableiten, durch deren Auflösung sich eine gewöhnliche Potenzreihe ergibt, deren Convergenzkreis über den nächsten singulären Werth des Argumentes hinausreicht. Bezeichnet nämlich c einen Punkt der x-Ebene in der Nähe von $x = 1/18$ und d den zugehörigen Werth von y_3, d. i. (40), so braucht man nur in (9) $x = c+u$, $y = d+v$ zu setzen. Da $cg_1(d) = d$ ist, so geht die Gleichung

$$(c+u)g_1(d+v)-(d+v) = 0$$

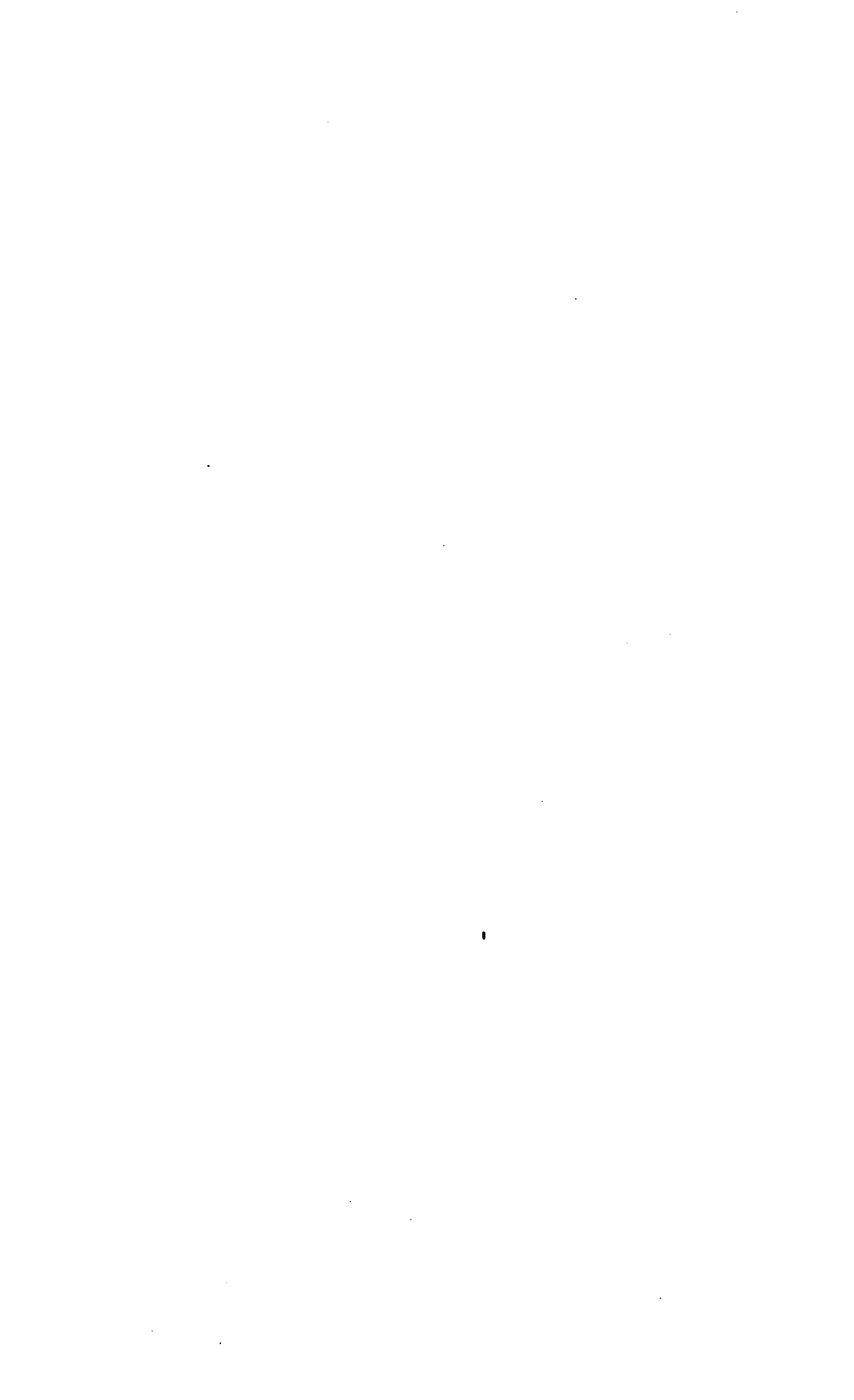
dadurch, dass man

$$g_1(d+v) = g_1(d)+g_1'(d)v+{}^1/_2\, g_1''(d)v^2+2v^3$$

setzt, über in die folgende:

$$ug_1(d)-v\{1-cg_1'(d)\} + \text{Glieder höh. Ordnung} = 0.$$

Da $1-cg_1'(d)$ nicht verschwindet, so gewinnt man hieraus für v eine Reihe nach ganzen positiven Potenzen von u ohne constantes Glied. Wenn nun c näher an $1:18$ liegt als an jedem der Punkte (11), so geht ihr Convergenzkreis über den Punkt $u = 1:18-c$ hinaus, weil ihre Summe y_3-d daselbst holomorph ist.



XVI. SITZUNG VOM 20. JUNI 1895.

Das c. M. Herr Prof. F. Exner übersendet eine Arbeit aus dem physikalisch-chemischen Institute der k. k. Universität in Wien von Herrn Ernst Simon: »Über den Einfluss der Strahlen grosser Brechbarkeit auf das elektrische Leitungsvermögen verdünnter Gase«.

Das c. M. Herr Prof. H. Molisch übersendet eine Abhandlung von Dr. Julius Stoklasa in Prag, betitelt: »Die Assimilation des Lecithins durch die Pflanze«.

Der Secretär legt eine eingesandte Abhandlung von Prof Dr. O. Tumlirz in Czernowitz: »Über die Verdampfungswärme von Lösungen« vor.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. V. v. Ebner überreicht eine Abhandlung: »Über den feineren Bau der Chorda dorsalis von Myxine nebst weiteren Bemerkungen über die Chorda von Ammocoetes«.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. Ad. Lieben überreicht eine Arbeit aus dem chemischen Universitätslaboratorium des Prof. R. Přibram in Czernowitz von G. Gregor: »Zur Constitution des Resacetophenons«.

Herr Prof. Dr. Ed. Lippmann überreicht eine von ihm und Herrn F. Fleissner ausgeführte Arbeit: »Über die Hydrirung des Chinins«.

Der Secretär Hofrath J. Hann überreicht eine Abhandlung unter dem Titel: »Der tägliche Gang des Baro-

meters an heiteren und trüben Tagen, namentlich auf Berggipfeln«.

Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:

Die Resultate der Untersuchung des Bergbauterrains in den Hohen Tauern. (Mit 1 Karte und Textfiguren.) Herausgegeben vom k. k. Ackerbauministerium. Wien, 1895; 8°.

Der tägliche Gang des Barometers an heiteren und trüben Tagen, namentlich auf Berggipfeln

von

J. Hann,

w. M. k. Akad.

(Mit 4 Textfiguren.)

Bei Gelegenheit meiner jüngsten Untersuchung über den täglichen Gang der Luftfeuchtigkeit auf dem Sonnblickgipfel bin ich auf den Umstand aufmerksam geworden, dass an heiteren und heissen Tagen die Amplitude der einmaligen täglichen Barometeroscillation auf dem Sonnblickgipfel nicht merklich grösser war als im Mittel, während ich erwartet hatte, dass in Folge der verstärkten »thermischen« Druckschwankung dies der Fall sein werde. Kurz darauf kam mir der »Report« der »British Association«, Oxford 1894, zur Hand, in welchem Herr A. Buchan in dem Bericht über das Observatorium auf dem Ben Nevis anhangsweise eine Tabelle mittheilt über den täglichen Gang des Barometers an heiteren und trüben Tagen auf dem Ben Nevis, an dessen Fuss zu Ft. William und in Triest. Ich fing an, diese Daten der harmonischen Analyse zu unterwerfen und die Ergebnisse reizten mich noch mehr an, den Gegenstand weiter zu verfolgen. Da Herr A. Buchan, in dieser vorläufigen Mittheilung wenigstens, nicht angibt, ob die heiteren und trüben Tage auf dem Ben Nevis die gleichen sind, die auch der Berechnung des täglichen Barometerganges zu Ft. William zu Grunde liegen, die Stundenmittel überdies, um einen glatteren täglichen Gang zu erhalten, in einer etwas rohen Weise nach dem Schema $(a+2b+c):4$ ausgeglichen mitgetheilt werden, wodurch die so regelmässige doppelte tägliche Oscillation

schon einigermassen entstellt werden kann, so entschloss ich mich, mir ein ganz einwurfsfreies Materiale zu einer eingehenderen Untersuchung des täglichen Barometerganges an heiteren und trüben Tagen auf Berggipfeln zu verschaffen. Für Stationen der Niederung ist ja die Erscheinung im Allgemeinen durch die Rechnungen von Lamont für München und von Nakamura für Hamburg schon untersucht worden, wozu jetzt die Tabellen von Buchan für Ft. William und Triest hinzukommen.

Es handelte sich aber für mich noch wesentlich darum, den täglichen Gang des Barometers auf Berggipfeln und an deren Fuss an heiteren und trüben Tagen aus correspondirenden Aufzeichnungen festzustellen, um dann auch den Versuch machen zu können, den täglichen Gang der wahren Lufttemperatur an heiteren und trüben Tagen auf Grund derselben zu berechnen.

Um ein möglichst einwurfsfreies Materiale meinen Rechnungen zu Grunde legen zu können, wählte ich zunächst die Stationen Säntis und Zürich, an welchen beiden der vorzügliche Barograph von Sprung in Thätigkeit sich befindet. Die stündlichen Beobachtungen auf dem Säntis sind aber bisher noch nicht in extenso publicirt worden; dies wird erst für das Jahr 1894 geschehen.

Herr Director Billwiller hatte die ausserordentliche Gefälligkeit, mir die stündlichen Aufzeichnungen des Luftdruckes auf dem Säntis im Jahre 1893 im Manuscript zur Verfügung zu stellen, ja für das Jahr 1894 sogar das Ausschreiben der stündlichen Luftdruckwerthe an 36 correspondirenden heiteren und trüben Tagen zu Zürich und auf dem Säntis selbst zu besorgen. Ich fühle mich verpflichtet, Herrn Director Billwiller auch an dieser Stelle für die wesentliche Unterstützung der vorliegenden Arbeit meinen herzlichsten Dank auszusprechen.

Die Ergebnisse meiner auf den Säntis-Beobachtungen basirenden Rechnungen machten es mir dann auch sehr wünschenswerth, nachzusehen, wie die einmalige tägliche Luftdruckwelle auf niedrigeren Berggipfeln sich gestaltet. Hiezu bietet nun das bayrische Beobachtungsnetz ein aus-

gezeichnetes Materiale. Die Registrirungen des Luftdruckes zu München auf der freien, flachen, bayrischen Hochebene, dann an den Thalstationen am Fusse und mitten im Gebirge zu Feld bei Miesbach und zu Bayrisch-Zell, endlich auf den Gipfelstationen Peissenberg und Wendelstein gestatten den Einfluss der topographischen Verhältnisse auf den täglichen Gang des Barometers im Detail zu studiren. Herr Director Dr. Fr. Erk in München hatte die Güte, mir die zweistündlichen Aufzeichnungen des Luftdruckes an den genannten Stationen im Manuscripte zur Verfügung zu stellen, wofür ich ihm hier meinen lebhaften Dank ausspreche. Von den Stationen des österreichischen Netzes benützte ich nur Klagenfurt und Obir, wegen der ganz ausserordentlich grossen Amplitude der täglichen Barometeroscillation an erstgenannter Station.

Auf dem Obir befindet sich seit Winter 1894/95 ein grosser Barograph Richard mit gleichzeitiger Temperaturregistrirung, dessen Aufzeichnungen auch noch herbeigezogen wurden. Ich beschränkte aber meine Rechnungen sonst ganz auf die Sommerperiode Juni bis erste Hälfte September (auch Mai—September), da ja in dieser der Unterschied im täglichen Gange des Luftdruckes an heiteren und trüben Tagen am schärfsten zum Ausdrucke gelangen muss. Das Sommerhalbjahr bietet zudem den grossen Vortheil kleinerer unregelmässiger Barometerschwankungen, so dass man schon aus einer geringeren Anzahl von Tagen zu einem befriedigenden Resultate gelangen kann. Es zeigte sich in der That, dass man schon aus 20 bis 40 Tagen ganz regelmässige tägliche Barometercurven erhält, wenn man nur eine 25. Tagesstunde auch in Rechnung zieht und damit die progressiven Änderungen des Druckes nach der Lamont'schen Methode eliminirt. Es erweist sich dann gänzlich unnöthig, eine rohe Ausgleichungsrechnung in Anwendung zu bringen, wie dies für die stündlichen Luftdruckwerthe von Ft. William, Ben Nevis und Triest geschehen ist. Selbst Mittelwerthe aus 20 Tagen bloss liefern schon ganz glatte, regelmässige Tagescurven. Da wir in unserem Klima wenig ganz heitere Tage haben, so kommt dieser Umstand der Untersuchung sehr zu statten. Im Winter ist allerdings eine so geringe Zahl von Tagen nicht mehr ausreichend, um den

normalen täglichen Gang des Barometers daraus ableiten zu können.

Als heitere Tage wurden jene genommen, an welchen sowohl unten als oben auf dem Berge der Sonnenscheinautograph mindestens 10 Stunden Sonnenschein registrirt hatte; als trübe solche mit weniger als $2^1/_2$ Stunden Sonnenschein. Dies gilt für Zürich und Säntis, ferner für Klagenfurt und Obir. Für die bayrischen Stationen musste die Schätzung der Bewölkung in den 3 Stunden 8^h, 2^h, 8^h zu Grunde gelegt werden. Heitere Tage sind jene mit einer Bewölkung von $\overline{\lessgtr}1$, trübe solche mit einer Bewölkung von $\overline{\gtrless}8$ (oben wie unten). Über weitere etwa wünschenswerthe Details der Berechnung des täglichen Barometerganges an heiteren und trüben Tagen findet man bei den einzelnen Tabellen nähere Auskünfte.

I. Der tägliche Gang des Barometers auf dem Säntis und zu Zürich an heiteren und trüben Tagen.

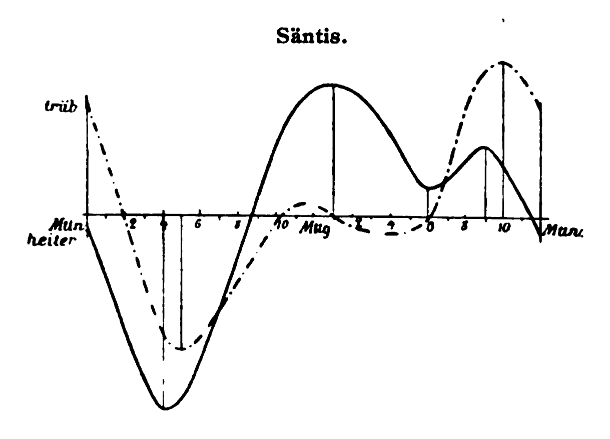
Es wurden aus jedem der Jahre 1893 und 1894 je 36 heitere und trübe Tage genommen, und zwar die gleichen für Zürich, wie für den Säntis. Die Luftdruckmittel beziehen sich desshalb für beide Stationen auf die gleichen heiteren und trüben Tage. Ferner wurde für diese Tage die Dauer des Sonnenscheins zu Zürich und auf dem Säntis, sowie die Tagesmittel der Temperatur und der Temperaturunterschied zwischen 7^h Morgens und 1^h Nachmittags ausgeschrieben und deren Mittel gebildet. Diese Mittel aus 72 Tagen der Jahre 1893 und 1894 (Sommerzeit, Juni—September) sind:

	Heitere Tage				Trübe Tage			
	Sonnenschein	Luftdruck	Temperatur		Sonnenschein	Luftdruck	Temperatur	
			Mittel[1]	Ampl. 1^h-7^h			Mittel	Ampl. 1^h-7^h
Zürich	12·4	721·0	18°9	8°8	2·0	718·5	14°4	2°0
Säntis	11·2	568·4	6·4	3·2	0·8	563·7	1·5	1·1
Mittel	11·8	—	12·6	6·0	1·4	—	8·0	1·6

[1] Angenähert reducirt auf wahre Mittel aus (7+2+9) : 3, wie sie in den schweiz. Annalen mitgetheilt werden.

Der Temperaturunterschied zwischen 7^h und 2^h war also an den heiteren Tagen fast viermal grösser als an den trüben Tagen, die mittlere Temperatur um $4^1/_2{}^\circ$ höher, die Einwirkung

Säntis.



Zürich.

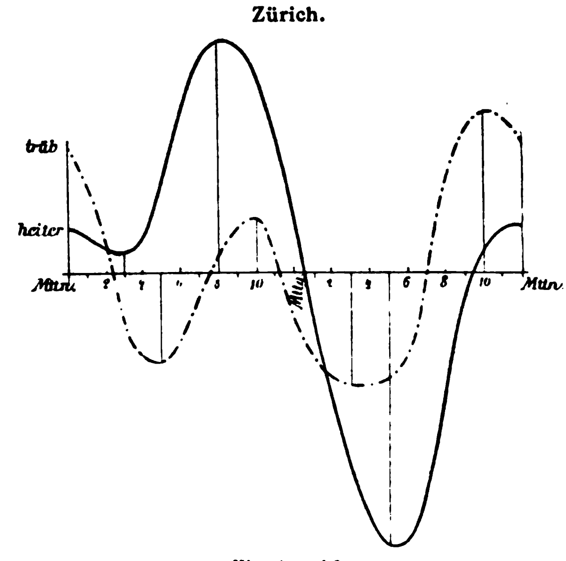


Fig. 1 und 2.

der Sonne auf den Boden war um $10^1/_2$ Stunden länger. Den Einfluss dieser verschiedenen meteorologischen Verhältnisse auf den täglichen Gang des Barometers zu Zürich und auf dem Säntis ersieht man aus den folgenden kleinen Tabellen und den obenstehenden beiden Figuren. Die auffallendsten Unterschiede

Täglicher Gang des Barometers (Sommer).

Stunde	Säntis				Zürich			
	Vormittag		Nachmittag		Vormittag		Nachmittag	
	Abweichungen vom Tagesmittel							
	heiter	trüb	heiter	trüb	heiter	trüb	heiter	trüb
1	—·19	·16	**·34**	—·02	·10	·24	—·11	—·21
2	—·33	—·03	·32	—·04	·06	·07	—·32	—·27
3	—·45	—·19	·28	—·04	·05*	—·12	—·50	—·30*
4	—·52*	—·33	·21	—·05*	·08	—·22	—·62	—·29
5	—·49	—·36*	·12	—·05	·23	—·23*	—·73*	—·29
6	—·39	—·32	·07*	—·01	·40	—·15	—·71	—·22
7	—·24	—·27	·09	·14	·54	—·07	—·58	—·01
8	—·11	—·21	·15	·29	**·61**	·05	—·33	·25
9	·03	—·12	**·17**	·38	·60	·12	—·07	·39
10	·20	—·01	·12	**·40**	·54	·15*	·02	**·42**
11	·29	·02	·05	·35	·36	·03	·11	·40
12	·33	**·08**	—·05	·28	·15	·08	**·12**	·34

im Barometergange bei heiterem und trübem Wetter sind folgende.

Bei heiterem Wetter ist das Vormittags-Maximum auffallend verstärkt, das Abend-Maximum dagegen sehr abgeschwächt, und zwar bemerkenswerther Weise oben wie unten.

Bei trübem Wetter ist umgekehrt das Abend-Maximum sehr verstärkt, das Vormittags-Maximum aber sehr abgeschwächt und gleichfalls oben wie unten.

Die charakteristische Modification des täglichen Ganges durch den Witterungscharakter (heiter oder trüb) ist demnach der Hauptsache nach die gleiche in der Niederung wie auf hohen Berggipfeln.

Was die beiden täglichen Luftdruck-Minima anbelangt, so wird durch trübes Wetter in der Niederung das Morgen-Minimum vertieft, das Nachmittags-Minimum abgeschwächt, auf dem Säntis tritt wohl das letztere, aber nicht mehr das erstere ein. Bei heiterem Wetter wird in der Niederung das Morgen-

Minimum mehr oder weniger unterdrückt, in manchen Alpenthälern fehlt es, wie wir sehen werden, sogar ganz. Das Nachmittags-Minimum erscheint sehr verstärkt und die tägliche Barometeroscillation nähert sich dadurch mehr oder weniger einer einfachen einmaligen täglichen Schwankung. Die tägliche Barometerschwankung erhält bei heiterem Wetter den Charakter, den sie in continentalen Klimaten im Mittel hat, während sie sich bei trübem Wetter dem Typus der täglichen Barometeroscillation an den Küstenstationen nähert. Die Schönwetter-Barometercurve hat also continentalen Charakter, die Trübwettercurve mehr oceanischen Charakter. Die Ursachen, welche diesen Modificationen des täglichen Barometerganges zu Grunde liegen, dürften auch, wie wir sehen werden, die gleichen sein.

Auf den Berggipfeln ist der Einfluss der heiteren und der trüben Witterung auf den täglichen Barometergang von der Höhe derselben abhängig und es kommen nur die zuerst erwähnten beiden Haupterscheinungen ziemlich allgemein zur Geltung. Dies zeigen sehr schön die beiden bayrischen Gipfelstationen Peissenberg und Wendelstein, sowie der Obir.

Bevor wir zu diesen niedrigeren Gipfelstationen übergehen, wollen wir noch die beiden Tabellen mit dem täglichen Gange des Barometers zu Zürich und auf dem Säntis in jedem der beiden Jahre 1893 und 1894 hier einschalten. Es ist sehr lehrreich zu sehen, wie übereinstimmend die Mittelwerthe aus den beiden Gruppen von nur 36 Tagen schon sind. Man erkennt daraus, dass man aus Mitteln von je 30 Tagen circa (sogar einzelnen, zerstreuten Tagen, nicht einer zusammenhängenden Periode) den Charakter der täglichen Barometercurve schon mit hinreichender Genauigkeit erhalten kann, und dass eine künstliche Ausgleichungsrechnung gar nicht nothwendig erscheint, ja nur schädlich auf die Genauigkeit der Resultate einwirken kann. Den Mitteln für die heiteren und trüben Tage habe ich zum Vergleich den mittleren Gang aus den Aufzeichnungen von je 8 Sommermonaten beigefügt. Derselbe wird natürlich bestimmt von dem Verhältniss der Anzahl der heiteren zu den trüben Tagen innerhalb dieser Zeit, die letzteren sind in unserem Klima stets in der Mehrzahl und bestimmen deshalb hauptsächlich den mittleren Charakter der Erscheinung.

Säntis. Täglicher Gang des Luftdruckes.

Abweichungen vom Mittel. Juni—September.

	Je 36 heitere Tage			Je 36 trübe Tage			Gesammtmittel Juni—Sept. inclusive	
	1893	1894	Mittel 72 Tage	1893	1894	Mittel 72 Tage	1893	1894
Mitternacht	·00	—·10	—·05	·27	·30	·28	·10	·11
1	—·17	—·22	—·19	·14	·18	·16	—·04	—·01
2	—·32	—·35	—·33	—·08	·01	—·03	—·22	—·20
3	—·45	—·45	—·45	—·22	—·16	—·19	—·35	—·36
4	—·54	—·50	—·52	—·35	—·30	—·33	—·46	—·43
5	—·50	—·48	—·49	—·36	—·35	—·36	—·44	—·45
6	—·39	—·39	—·39	—·34	—·29	—·32	—·36	—·38
7	—·24	—·25	—·24	—·29	—·25	—·27	—·25	—·28
8	—·11	—·11	—·11	—·22	—·21	—·21	—·15	—·18
9	·02	·05	·03	—·11	—·12	—·12	—·03	—·05
10	·18	·23	·20	—·04	·01	-·01	·09	·10
11	·25	·33	·29	·03	·01	·02	·15	·15
Mittag	·29	·37	·33	·04	—·02	·03	·18	·17
1	·30	·37	·34	·00	—·04	—·02	·17	·19
2	·29	·35	·32	—·02	—·07	—·04	·14	·17
3	·26	·31	·28	—·02	—·07	—·04	·13	·14
4	·20	·23	·21	—·03	—·07	—·05	·09	·11
5	·13	·11	·12	—·03	—·08	—·05	·05	·04
6	·08	·07	·07	—·01	—·01	—·01	·06	·05
7	·12	·06	·09	·12	·17	·14	·15	·11
8	·16	·14	·15	·27	·31	·29	·23	·22
9	·17	·17	·17	·39	·38	·38	·28	·29
10	·13	·11	·12	·42	·38	·40	·26	·25
11	·08	·03	·05	·35	·35	·35	·20	·23
Mittel	·22	·24	·23	·17	·17	·17	·19	·19
Amplitude	·84	·87	·86	·78	·73	·76	·74	·74

Zürich. Täglicher Gang des Luftdruckes.

Abweichungen vom Mittel. Juni—September.

	Je 36 heitere Tage			Je 36 trübe Tage			Gesammtmittel Juni — Sept. inclusive	
	1893	1894	Mittel 72 Tage	1893	1894	Mittel 72 Tage	1893	1894
Mitternacht	·14	·11	·12	·30	·38	·34	·20	·24
1	·15	·06	·10	·20	·27	·24	·16	·14
2	·12	·01	·06	·01	·12	·07	·06	·05
3	·08	·02	·05	—·18	—·06	—·12	—·03	—·03
4	·10	·07	·08	—·20	—·24	—·22	—·02	—·04
5	·27	·20	·23	—·18	—·28	—·23	·07	—·03
6	·42	·38	·40	—·09	—·22	—·15	·20	·06
7	·56	·53	·54	·02	—·16	—·07	·34	·20
8	·60	·62	·61	·18	—·09	·05	·45	·29
9	·61	·60	·60	·24	·00	·12	·48	·33
10	·54	·55	·54	·25	·05	·15	·43	·35
11	·38	·35	·36	·12	—·07	·03	·27	·18
Mittag	·18	·13	·15	·01	—·18	—·08	·09	·01
1	—·07	—·15	—·11	—·20	—·22	—·21	—·16	—·17
2	—·29	—·35	—·32	—·34	—·21	—·27	—·35	—·29
3	—·49	—·51	—·50	—·39	—·21	—·30	—·49	—·40
4	—·63	—·61	—·62	—·36	—·22	—·29	—·55	—·44
5	—·76	—·70	—·73	—·36	—·23	—·29	—·61	—·48
6	—·73	—·69	—·71	—·28	—·16	—·22	—·53	—·44
7	—·63	—·53	—·58	—·08	·06	—·01	—·35	—·24
8	—·40	—·26	—·33	·18	·31	·25	—·11	·00
9	—·14	—·01	—·07	·37	·41	·39	·11	·18
10	—·05	·09	·02	·41	·43	·42	·17	·25
11	·07	·15	·11	·37	·42	·40	·21	·28
Mittel	·35	·32	·33	·22	·21	·20	·27	·21
Amplitude	1·37	1·32	1·34	·80	·71	·72	1·09	·83

II. Der tägliche Gang des Barometers auf dem Obir und in Klagenfurt an heiteren und trüben Tagen im Sommer und im Winter.

Die folgende kleine Tabelle zeigt in übersichtlicher Weise den täglichen Gang des Barometers auf dem Obir (2042 *m*) und zu Klagenfurt (450 *m*) an 40 heiteren und 30 trüben Tagen im Sommerhalbjahr (Mai—September inclusive) 1893. Die mittleren meteorologischen Verhältnisse dieser Tage, soweit sie hier in Betracht kommen, waren folgende:

	Heitere Tage				Trübe Tage			
	Sonnenschein	Luftdruck	Temperatur Mittel	Temperatur Ampl. 2h—7h	Sonnenschein	Luftdruck	Temperatur Mittel	Temperatur Ampl. 2h—7h
Klagenfurt..	12·2	723·6	18°5	9°4	1·2	720·7	13°7	5°5
Obir.......	11·0	599·4	8·8	6·2	0·7	594·2	2·5	1·9
Mittel......	11·6	—	13·6	6·8	1·0	—	8·1	3·7

Täglicher Gang des Barometers (Sommer).

Stunde	Obir				Klagenfurt			
	Vormittag		Nachmittag		Vormittag		Nachmittag	
	heiter	trüb	heiter	trüb	heiter	trüb	heiter	trüb
1	—·07	·34	·20	—·**05**	·26	·**59**	—·35	—·51
2	—·19	·19	·21	—·12	·36	·49	—·61	—·72
3	—·34	—·02	·19	—·19	·45	·38	—·82	—·76*
4	—·42	—·18	·16	—·19*	·54	·29	—·93	—·73
5	—·42*	—·28	·09	—·13	·67	·21	-1·01*	—·68
6	—·38	—·30	·03	—·05	·83	·20	-1·00	—·48
7	—·24	—·33*	·02*	·09	·**99**	·22	—·82	—·24
8	—·11	—·31	·08	·20	·90	·20	—·61	·01
9	—·02	—·26	·22	·45	·70	·13	—·36	·26
10	·11	—·18	·**24**	·**51**	·51	·05	—·15	·42
11	·20	—·07	·18	·49	·26	—·13	·04	·52
12	·**22**	—·06	·08	·43	—·04	—·31	·21	·58

Der tägliche Gang des Barometers an der Station Obir, fast 500 *m* niedriger als jene auf dem Säntis, ist schon einigermassen verschieden von jenem an der letztgenannten Station. Das Hauptmaximum fällt an heiteren wie an trüben Tagen auf 10^h Abends, aber das Vormittags-Maximum ist, wie auf dem Säntis, an heiteren Tagen viel stärker entwickelt als an trüben Tagen, an welchen sich der Luftdruck beim vormittägigen Maximum nicht einmal mehr über das Tagesmittel erhebt, während das Abend-Maximum sehr stark hervortritt. An heiteren Tagen übertrifft dagegen das Abend-Maximum nur wenig das Vormittags-Maximum. Bemerkenswerth ist noch, dass an trüben Tagen das Barometer auf dem Obir von 3^h Morgens bis 6^h Abends constant unter dem Tagesmittel bleibt und nur Abends über dasselbe, dann aber erheblich, hinausgeht. An heiteren Tagen ist hingegen der Luftdruck bei Tage, namentlich um die Mittagszeit hoch.

Zu Klagenfurt trägt an heiteren Tagen der tägliche Gang des Barometers ganz den sogenannten continentalen Typus; von einem sehr tiefen Nachmittags-Minimum (um $5^1/_2{}^h$) steigt der Luftdruck in Einem Zuge zu einem ebenso grossen Vormittags-Maximum (um 7^h) an, die Amplitude beträgt 2·0 *mm*, nähert sich also tropischen Verhältnissen. Aber auch an trüben Tagen ist fast nur Ein Maximum und Ein Minimum vorhanden, jenes fällt auf 1^h Nachts, dieses auf 3^h Nachmittags, Amplitude fast 1·4 *mm*, ein Morgen-Minimum und ein Vormittags-Maximum ist kaum vorhanden. Es wären aber wohl Mittel aus einer längeren Periode nöthig, um diese Verhältnisse festzustellen.

Der Umstand, dass seit November 1894 auf dem Obir ein Barograph Richard, grosses Modell mit gleichzeitiger Registrirung der Lufttemperatur im Barographenkasten, functionirt, hat mir Veranlassung gegeben, den täglichen Gang des Barometers an heiteren und trüben Tagen auf dem Obir auch für den Winter (December 1894 bis inclusive Februar und erste Woche März 1895) zu berechnen. Es ergaben sich für diese Zeit 40 trübe und 30 heitere Tage (Sonnenscheindauer mindestens 50% der möglichen Dauer oben wie unten). Die mittleren meteorologischen Verhältnisse derselben waren:

	30 heitere Tage				40 trübe Tage			
	Sonnen-schein	Luft-druck	Temperatur		Sonnen-schein	Luft-druck	Temperatur	
			Mittel	Ampl. 2^h-7^h			Mittel	Ampl. 2^h-7^h
Klagenfurt..	6·8	722·8	−10°0	7°0	0·1	716·5	−4°8	4°5
Obir.......	5·7	588·9	−11·3	3·3	0·2	584·3	−9·5	0·8
Mittel......	6·3	—	−10·7	5·2	0·2	—	−7·2	2·6

Der Boden war während dieser ganzen Zeit mit Schnee bedeckt, die Sonne konnte also die Luft nur direct und durch die von der Schneeoberfläche reflectirte Strahlung erwärmen, allerdings war dafür die nächtliche Wärmeausstrahlung sehr gross und die tägliche Temperaturschwankung zu Klagenfurt an heiteren Tagen desshalb sehr beträchtlich. Die mittlere Temperatur der rund 1600 *m* höher liegenden Station Obir war an den heiteren Tagen nur um 1°3 niedriger als zu Klagenfurt unten, an den trüben Tagen dagegen um 4°7. Es ist nun sehr interessant zu sehen, welchen Einfluss die geringe winterliche Sonnenstrahlung auf den Gang des Luftdruckes auf dem Obir und zu Klagenfurt hat. Die folgende kleine Tabelle gibt darüber Aufschluss.

Täglicher Gang des Barometers im Winter auf dem Obir und zu Klagenfurt an heiteren und trüben Tagen.

Stunde	Obir				Klagenfurt			
	Vormittag		Nachmittag		Vormittag		Nachmittag	
	heiter	trüb	heiter	trüb	heiter	trüb	heiter	trüb
1	—·23	·10	·17	—·14	—·20	·20	·24	—·07
2	—·26	·05	·04	—·27	—·16	**·20**	—·02	—·17
3	—·28	·02	·01	—·25*	—·05	·19	—·21	—·24
4	—·32	—·07	—·01*	—·20	·06	·15	—·35	— 28
5	—·36	—·19	·03	—·15	·16	·13	—·43	—·30
6	—·38*	—·22*	·11	—·04	·27	·09	—·54*	—·34*
7	—·25	—·19	**·18**	·13	·38	·08*	—·52	—·28
8	—·04	—·07	·16	·16	·50	·13	—·47	—·21
9	·13	·02	·15	·22	·61	·16	—·36	—·12
10	·28	·10	·09	·28	**·68**	**·17**	—·28	—·03
11	**·39**	**·19**	·05	**·28**	·63	·15	—·22	·07
12	·31	·06	—·06	·27	·46	·10	—·20	·13

Der tägliche Gang des Barometers auf dem Obir ist im Winter jenem auf dem Säntis im Sommer ganz ähnlich. An heiteren Tagen fällt das Hauptmaximum auf den Vormittag, an trüben Tagen auf den Abend, an heiteren Tagen ist das Abend-Maximum sehr reducirt, an trüben das Vormittags-Maximum. Bei dem geringeren täglichen Wärmegange des Winters ist in circa 2000 *m* Seehöhe der tägliche Gang des Luftdruckes ein ähnlicher, wie wir ihn im Sommer in 2500 *m* Seehöhe antreffen.

Es ist doch sehr bemerkenswerth, wie bei der geringen Erwärmung der Atmosphäre im Winter über einer ganz schneebedeckten Erde der tägliche Gang des Barometers in 2000 *m* Seehöhe immer noch sehr erheblich durch heiteres Wetter modificirt wird.

Zu Klagenfurt finden wir selbst im Winter bei heiterem Wetter den continentalen Typus der täglichen Barometerschwankung. Das Barometer fällt von einem beträchtlichen Morgen-Maximum (um 10^h a. statt 7^h a. wie im Sommer) zu einem tiefen Minimum um 5^h Abends (Amplitude 1·2 *mm*) und steigt dann wieder ohne Unterbrechung zum Vormittags-Maximum. An trüben Tagen ist das nächtliche Maximum das Hauptmaximum, ein Morgen-Minimum ist vorhanden, also die doppelte tägliche Schwankung scheinbar ziemlich gut markirt — allerdings fällt das nächtliche Maximum fast an die Stelle des normalen nächtlichen Minimums. Da die trüben Tage zugleich meist Tage mit starken Luftdruckänderungen sind, so sind wohl die Mittel von 40 Tagen nicht ausreichend, den normalen täglichen Gang des Barometers im Winter festzustellen, und es muss vorläufig unentschieden bleiben, inwieweit in den obigen Zahlen noch zufällige Eigenthümlichkeiten sich geltend machen. Der tägliche Gang an den heiteren Tagen dürfte dagegen ziemlich normale Verhältnisse repräsentiren. Es ist gewiss beachtenswerth, dass selbst im Winter bei schneebedecktem Erdboden der tägliche Wärmegang in dem grossen kärntnerischen Gebirgsbecken im Stande ist, eine bloss einmalige tägliche Luftdruckschwankung in Klagenfurt hervorzubringen.

Schliesslich wollen wir noch den täglichen Gang des Luftdruckes auf dem Obir an heiteren Tagen im Winter mit jenem

im Sommer vergleichen, wozu die folgende kleine Tabelle dienlich sein wird.

Obir. Täglicher Gang des Barometers an heiteren Tagen.

Stunde	Vormittag		Nachmittag	
	Winter	Sommer	Winter	Sommer
1	— ·23	— ·07	·17	·20
2	— ·26	— ·19	·04	·21
3	— ·28	— ·34	·01	·19
4	— ·32	— ·42	— ·01*	·16
5	— ·36	— ·42*	·03	·09
6	— ·38*	— ·38	·11	·03
7	— ·25	— ·24	·18	·02*
8	— ·04	— ·11	**·16**	·08
9	·13	— ·02	·15	·22
10	·28	·11	·09	**·24**
11	**·39**	·20	·05	·18
12	·31	**·22**	— ·06	·08

Im Winter tritt das Vormittags-Maximum frühzeitig nach 11^h ein und ist sehr verstärkt, im Sommer später, wohl erst um 1^h p., ist abgeflacht, und das folgende Nachmittags-Minimum wird bis nach 6^h Abends hinausgeschoben, während es im Winter schon um 4^h eintritt. Eine ähnliche Verschiebung und zugleich eine Modification der Grösse im entgegengesetzten Sinne erfährt auch das Abend-Maximum. Man merkt deutlich, dass hiebei die Verschiebung der Phasenzeiten der einmaligen täglichen Barometerschwankung vom Winter zum Sommer im Spiele ist. Deren Superposition auf die nicht oder wenig alterirte normale doppelte tägliche Oscillation verstärkt oder schwächt die Extreme und verschiebt die Wendestunden.

III. Die tägliche Barometerschwankung an den bayrischen Berg- und Thalstationen (im Sommer).

Die bayrischen Bergstationen Peissenberg (994 *m*), Hirschberg (1512 *m*) und Wendelstein (1727 *m*) zusammen mit der Station München (526 *m*) und den Thalstationen Bayrisch-Zell (802 *m*) und Feld bei Miesbach (717 *m*) am Rand des Gebirges liefern ein vortreffliches Materiale zur Untersuchung der Modificationen, welche die tägliche Barometerschwankung durch die verschiedenen orographischen Verhältnisse erfährt. Ich werde dasselbe hier nur in Bezug auf den Einfluss ganz heiteren und ganz trüben Wetters auf die schon örtlich verschieden modificirten täglichen Luftdruckoscillationen einer Verwerthung zuführen.

Es wurden benützt aus dem Jahre 1892, Juni—September, 25 heitere und 30 trübe Tage (correspondirende Tage!) von München, Peissenberg und Wendelstein (21 heitere Tage, ohne Juni, von Hirschberg versuchsweise); eine Thalstation fehlte leider 1892. Ferner vom Jahre 1889, Mai—September, 21 heitere, correspondirende Tage von München, Bayrisch-Zell und Wendelstein, vom Jahre 1890, Mai—September, 25 heitere Tage von München und Feld bei Miesbach. Die meteorologischen Mittelwerthe für diese Tage, soweit selbe hier in Betracht kamen, sind:

1892	25 heitere Tage				30 trübe Tage			
	Bewölkung	Luftdruck	Temperatur		Bewölkung	Luftdruck	Temperatur	
			Mittel	2^h-Min.			Mittel	2^h-Min.
München ...	0·7	718·2	19·0	12°7	9·6	715·8	13·0	4·9
Peissenberg.	—	680·1	17·9	7·6	—	677·0	9·0	3·0
Wendelstein	1·5	624·4	12·9	7·6	9·8	619·4	3·8	2·8
Mittel[1].....	1·1	—	15·9	10·2	9·7	—	8·4	3·8

1889, 21 heitere Tage, München, mittlerer Luftdruck 716·4, mittlere Bewölkung 0·9, mittleres Minimum 10°5, 2^h p. 23·6,

[1] München—Wendelstein.

Mittel 17·0, mittlere tägliche Schwankung 13°1 (von Bogenhausen genommen).

1890, 25 heitere Tage, München, mittlerer Luftdruck 716·1, mittlere Bewölkung 0·7, mittleres Minimum 8·3, mittleres Maximum 21·9, Mittel 15. 1, mittlere Schwankung 13·6 (Bogenhausen).

Täglicher Gang des Barometers an heiteren und trüben Tagen. Sommer. Abweichungen vom Mittel.

Stunde	München (526)		Peissenberg (994)		Hirschberg (1512)	Wendelstein (1727)	
	heiter	trüb	heiter	trüb	heiter	heiter	trüb
Juni—September 1892. Correspondirende Tage							
Mittern.	·16	·40	·15	·31	·19	·08	·28
2	·12	·07	·02	·00	·00	—·18	—·02
4	·09	—·21	—·11	—·31	—·20	—·36	—·39
6	·35	—·16	·02	—·28	—·05	—·19	—·42
8	·52	—·01	·21	—·14	·09	·01	—·18
10	·50	·05	·42	—·01	·16	·22	—·07
Mittag	·22	—·07	·20	—·05	·02	·18	—·05
2	—·29	—·24	—·13	—·14	—·16	·05	—·04
4	—·59	—·26	—·31	—·11	—·19	—·02	—·01
6	—·72	—·18	—·38	·00	—·23	—·10	·10
8	—·36	·21	—·18	·26	·12	·12	·31
10	·01	·41	·12	·46	·24	·22	·47
Mittel	·33	·19	·19	·17	·14	·14	·20

Die heiteren Tage wie die trüben Tage sind für alle Stationen dieselben; nur bei Hirschberg fehlen die zwei heiteren Junitage, weil dort die Registrirungen erst mit Juli beginnen.

Täglicher Gang des Barometers an den Thalstationen an heiteren Tagen.

Mittn.	2	4	6	8	10	Mittag	2	4	6	8	10
				526 *m*. München, 1889, 1890, 1892 (71 Tage)							
·09	·06	·08	·36	·55	·55	·28	—·24	—·58	—·72	—·41	—·04
				719 *m*. Feld bei Miesbach [1]							
·21	·14	·08	·26	·43	·37	·16	—·27	—·57	—·69	—·24	·15
				802 *m*. Bayrisch-Zell [1]							
·26	·20	·15	·34	·35	·22	·08	—·27	—·58	—·69	—·27	·18

Der tägliche Gang des Barometers zu München an heiteren und trüben Tagen stimmt mit jenem in Zürich überein. Peissenberg zeigt den Übergang von der Niederung zu dem durch die »thermische« Druckschwankung auf Berggipfeln modificirten Gang. Wendelstein hat bei trübem Wetter einen ganz absonderlichen täglichen Barometergang. Das Barometer steigt von einem Minimum um 6^h Morgens fast in Einem Zuge zu einem sehr hohen Abend-Maximum um 10^h. Man erkennt keine doppelte Schwankung mehr. Die Superposition der je nach der Seehöhe thermisch verschieden modificirten einmaligen täglichen Druckschwankung auf die ziemlich unverändert bleibende, regelmässige, doppelte, tägliche Barometerschwankung erzeugt die verschiedensten Übergangsformen der täglichen Barometerschwankung. Die folgenden Figuren zeigen, wie bei heiterem und wie bei trübem Wetter die tägliche Barometerschwankung mit zunehmender Höhe der Berggipfel sich verändert.

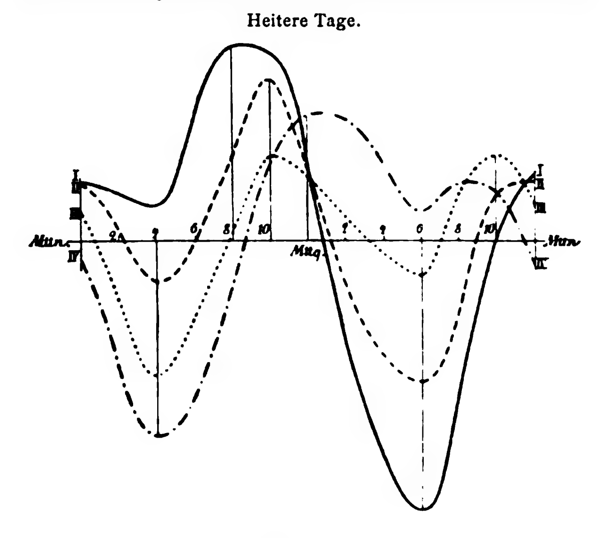
Was nun die Thalstationen anbelangt, so zeigen dieselben bei heiterem Wetter gegenüber München auf der freien, flachen Hochebene folgende Unterschiede im täglichen Barometergange. Der nächtliche Luftdruck ist an den Thalstationen höher, obgleich das Morgen-Minimum stärker entwickelt ist, gleichzeitig nimmt das Vormittags-Maximum an Höhe ab und verschiebt sich

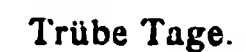
[1] Reducirt auf die gleiche Periode, durch Differenzen der correspondirenden Abweichungen von München. Die thatsächlich beobachteten Werthe findet man in den Tabellen im Anhange.

von 9^h (München) auf 8^h (Feld) und 7^h (Bayrisch-Zell). Das Sinken des Luftdruckes beginnt in dem Gebirge früher, doch ist von 2^h bis 6^h Nachmittags der Gang des Barometers sehr

Täglicher Gang des Barometers in verschiedenen Höhen.

Heitere Tage.





Trübe Tage.

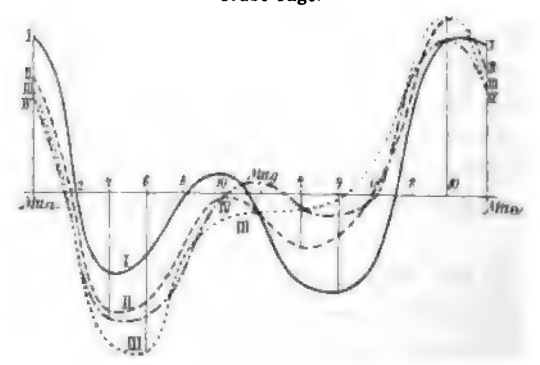


Fig. 3 und 4.

I München, II Peissenberg, III Wendelstein, IV Säntis.

nahe derselbe, wie zu München. Dann aber steigt der Luftdruck in den Thälern rasch und erheblich und steht in Bayrisch-Zell um 10^h p. schon 0·2 *mm* über dem Mittel, während er in München noch nicht ganz den Mittelwerth erreicht hat.

Zum Schlusse dieses rein beschreibenden Abschnittes meiner Abhandlung will ich eine allgemeine Übersicht über den Charakter des täglichen Ganges des Luftdruckes an heiteren und trüben Tagen sowohl in der Niederung, wie auf Bergen durch die nachfolgenden Tabellen geben. Den früher behandelten Stationen findet man in denselben noch angeschlossen Ft. William, Ben Nevis und Triest nach dem schon im Eingange citirten Bericht des Herrn Buchan, ferner Hamburg nach Nakamura in der Met. Zeitschrift, B. XXIV (1889), S. 41. Die Stationen Ft. William, Hamburg, Triest sind Küstenstationen unter sehr verschiedener geographischer Breite, Zürich und München sind Inlandstationen am Nordfusse der Alpen ohne ausgesprochene Thallage. Klagenfurt wurde als excessive Thalstation nicht in diese Übersicht mit aufgenommen.

Die Stationen der Niederung zeigen in wirklich überraschender Weise trotz ihrer so ganz verschiedenen Lage die grösste Übereinstimmung, namentlich in Bezug auf die beiden Maxima im täglichen Gange des Luftdruckes. An heiteren Tagen ist überall, an der Küste wie im Inlande, das Vormittags-Maximum weitaus das Hauptmaximum, während das Abend-Maximum nur angedeutet ist; umgekehrt ist an trüben Tagen gerade das Abend-Maximum ausserordentlich stark entwickelt, dagegen das Vormittags-Maximum ganz abgeschwächt.

Was die Minima betrifft, so ist an heiteren Tagen überall das Nachmittags-Minimum sehr vertieft und weitaus das Hauptminimum, während das Morgen-Minimum sich eben nur bemerklich macht; an trüben Tagen ist an den Küstenstationen das Morgen-Minimum das Hauptminimum, an den Inlandstationen sinkt aber doch das Nachmittags-Minimum noch unter das Morgen-Minimum hinab und bleibt das Hauptminimum.

Zur Tabelle über den Gang des Barometers an den Gipfelstationen ist hier weiter nichts zu bemerken, da diese Verhältnisse schon früher erörtert worden sind. Hervorzuheben ist nur die ziemliche erratische Stellung, welche der Ben Nevis unter den Gipfelstationen einnimmt. Dieselbe findet wohl ihre Erklärung in der nördlichen Lage dieser Station und der unmittelbaren Nachbarschaft des Meeres auf der Westseite.

Übersicht über den täglichen Gang des Barometers an heiteren und trüben Tagen (Sommer).

I. Stationen der Niederung oder des Flachlandes.

	Ft. William	Hamburg	Triest	Zürich	München	Ft. William	Hamburg	Triest	Zürich	München
	heitere Tage					trübe Tage				
Mitternacht	·09	·06	·06	·12	·09	·56	·28	·51	·34	·40
1	·08	·08	·01	·10	·07	·33	·15	·25	·24	·31
2	·09	·05	—·03	·06	·06	·14	·00	·03	·07	·07
3	·08	·03	—·10	·05	·07	—·13	—·14	—·20	—·12	—·18
4	·11	·08	—·14	·08	·08	—·27	—·20	—·36	—·22	—·21
5	·14	·12	—·11	·23	·15	—·38*	—·21*	—·37*	—·23	—·20
6	·33	·26	—·01	·40	·36	—·32	—·17	—·35	—·15	—·16
7	·39	·38	·15	·54	·50	—·30	—·09	—·20	—·07	—·09
8	**·46**	·47	·31	**·61**	·55	—·22	—·01	—·11	·05	—·01
9	·39	**·54**	**·41**	·60	**·57**	—·25	·04	·16	·12	·04
10	·32	·46	·41	·54	·56	—·22	·07	·22	·15	·05
11	·13	·38	·37	·36	·49	—·22	·04	·22	·03	·02
Mittag	·04	·23	·28	·15	·28	—·14	·00	·11	—·08	—·07
1	—·15	·06	·13	—·11	—·03	—·13	—·06	—·02	—·21	—·17
2	—·25	—·18	—·01	—·32	—·23	—·09	—·07	—·16	—·27	—·24
3	—·39	—·32	—·13	—·50	—·41	—·16	—·10	—·23	—·30*	—·26
4	—·47	—·50	—·28	—·62	—·58	—·14	—·11	—·30	—·29	—·26*
5	—·54*	—·62	—·41	—·73*	—·68	—·11	—·15	—·28	—·29	—·25
6	—·46	—·64*	—·47*	—·71	—·72*	·01	—·12	— 25	—·22	—·18
7	—·37	—·54	—·39	—·58	—·68	·09	—·02	—·01	—·01	·00
8	—·13	—·38	—·23	—·33	—·41	·30	·15	·12	·25	·21
9	·01	—·17	—·01	—·07	—·20	·44	·26	·36	·39	·36
10	·11	·00	·08	·02	—·04	·57	**·29**	·37	**·42**	·41
11	·11	·05	·09	·11	·06	**·55**	·28	**·45**	·40	**·42**
Mittel	·24	·27	·19	·33	·33	·25	·13	·24	·20	·19

II. Gipfelstationen.

	Peissenberg	Hirschberg	Wendelstein	Obir	Ben Nevis	Säntis	Peissenberg	Wendelstein	Obir	Ben Nevis	Säntis
	heitere Tage						trübe Tage				
Mttn.	·15	·19	·14	·08	—·14	—·05	·31	·28	·43	·44	·28
2	·02	·00	—·13	—·19	—·31	—·33	·00	—·02	·19	—·06	—·03
4	—·11	—·20	—·32*	—·42*	—·46*	—·52*	—·31*	—·39	—·18	—·43	—·33
6	·02	—·05	—·19	—·38	—·36	—·39	—·28	—·42*	—·30	—·50*	—·32*
8	·21	·09	—·02	—·11	—·11	—·11	—·14	—·18	—·31*	—·36	—·21
10	**·42**	·16	·15	·11	·10	·20	—·01	—·07	—·18	—·22	—·01
Mttg.	·20	·02	·15	·22	·29	**·33**	—·05	—·05	—·06	—·04	·03
2	—·13	—·16	·00	·21	**·35**	·32	—·14	—·04	—·12	·09	—·04
4	—·31	—·19	—·04	·16	·25	·21	—·11	—·01	—·19	·13	—·05
6	—·38*	—·23*	—·09	·03	·15	·07	·00	·10	—·05	·16	—·01
8	—·18	·12	·10	·08	·15	·15	·26	·31	·20	·35	·29
10	·12	**·24**	**·25**	**·24**	·11	·12	**·46**	**·47**	**·51**	**·48**	**·40**

Der Ben Nevis hat auf seiner Westseite eine unendliche Ebene, welche tagsüber kühler bleibt als das Land auf seiner Ostseite, in der Nacht verhält es sich umgekehrt. Er steht daher unter ganz anderen Einflüssen als die übrigen der angeführten Berggipfel, welche ringsum von bei Tage sich stark erwärmenden Landflächen umgeben sind.

Analyse der täglichen Barometerschwankung an heiteren und trüben Tagen.

Die so eben mitgetheilten Thatsachen über die tägliche Oscillation des Barometers an heiteren und trüben Tagen in der Niederung und auf Berggipfeln scheinen sehr complicirter Natur zu sein, namentlich die letzteren bieten ein ziemlich verwirrendes Bild dar, man mag den täglichen Gang des Druckes durch Zahlen oder durch Curven zur Darstellung

bringen, reine einfache Gesetzlichkeit ist auch in dem Verlaufe der letzteren nicht zu erkennen.

Eine solche einfache Gesetzmässigkeit kommt aber sogleich zum Vorschein, sobald man die complexe tägliche Bewegung des Barometers, sowie sie uns unmittelbar in den Stundenwerthen des Luftdruckes entgegentritt, in ihre harmonischen Constituenten auflöst. Wir erkennen dann sogleich, dass die ganze Mannigfaltigkeit der Erscheinungen einfach dadurch entsteht, dass sich auf die gleichbleibende normale doppelte tägliche Schwankung des Barometers eine nach mannigfachen Einflüssen variirende einmalige tägliche Schwankung aufsetzt. Die Übereinanderlagerung der beiden täglichen Druckwellen der nach Amplitude wie Phasenzeit variablen einmaligen und der fast constant bleibenden doppelten Welle bringt die scheinbar ganz gesetzlose Vielfältigkeit der Bilder der complexen täglichen Druckwelle hervor.

Bevor ich auf den Versuch einer Erklärung des verschiedenen Ganges des Barometers an heiteren und trüben Tagen eintrete, will ich einige Beispiele dafür geben, in welch überraschender Weise sich die verschiedenartigen täglichen Druckwellen, wie sie die vorausgehenden Tabellen aufweisen, bloss als einfache Combinationen der variablen einmaligen täglichen Schwankung mit der constanten doppelten täglichen Oscillation herausstellen.

Gleichungen des täglichen Ganges des Barometers an heiteren und trüben Tagen.

Zürich:

heiter . . . . $0 \cdot 501 \sin (355 \cdot 8 + x) + 0 \cdot 280 \sin (148 \cdot 8 + 2x)$

trüb . . . . $0 \cdot 186 \sin (91 \cdot 2 + x) + 0 \cdot 276 \sin (146 \cdot 5 + 2x)$

Säntis:

heiter . . . . $0 \cdot 341 \sin (217 \cdot 6 + x) + 0 \cdot 177 \sin (123 \cdot 7 + 2x)$

trüb . . . . $0 \cdot 234 \sin (147 \cdot 0 + x) + 0 \cdot 199 \sin (130 \cdot 3 + 2x)$

Das dritte periodische Glied, das ich aus den zweijährigen Beobachtungen versuchsweise rechnete, ist schon sehr klein:

	Säntis	Zürich
heiter	$0 \cdot 023 \sin (127 \cdot 9 + 3x)$	$0 \cdot 052 \sin (142 \cdot 0 + 3x)$
trüb	$0 \cdot 013 \sin (153 \cdot 4 + 3x)$	$0 \cdot 026 \sin (92 \cdot 1 + 3x)$

Auf dem Säntis ist also die Amplitude der einmaligen täglichen Schwankung bei heiterem Wetter grösser, als bei trüben, und zwar war dies in jedem der beiden Jahre der Fall, denn es war a_1 1893 heiter 0·331, trüb 0·240, und 1894 wieder 0·353 heiter und 0·232 trüb. Das Ergebniss, das ich in meiner letzten Abhandlung für den Sonnblick erhalten habe, war demnach bloss ein zufälliges, wie ich ja auch diese Möglichkeit hervorgehoben habe.

Der Unterschied der Phasenzeit der einmaligen Welle bei heiterem und trübem Wetter beträgt 70°6, d.i. $70 \cdot 6 : 15 = 4 \cdot 7$ Stunden circa, um welchen Betrag bei heiterem Wetter das Maximum (oder Minimum) früher eintritt, als bei trübem Wetter. Die doppelte tägliche Oscillation bleibt dagegen bei heiterem, wie bei trübem Wetter dieselbe, sowohl in Bezug auf die Amplitude (0·18 gegen 0·20 *mm*), als auf die Phasenzeit (Unterschied 6°6, d.i. $6°6 : 30 = 13$ Minuten bei einem Mittel aus bloss 72 Tagen, welche ungleichmässig, für heiter und trüb, über die Monate vertheilt waren).

Obir, Sommer:

heiter .... $0 \cdot 228 \sin (202 \cdot 5 + x) + 0 \cdot 169 \sin (118 \cdot 3 + 2x)$

trüb .... $0 \cdot 291 \sin (119 \cdot 8 + x) + 0 \cdot 199 \sin (113 \cdot 3 + 2x)$

Obir, Winter:

heiter .... $0 \cdot 222 \sin (220 \cdot 8 + x) + 0 \cdot 191 \sin (143 \cdot 4 + 2x)$

trüb .... $0 \cdot 135 \sin (106 \cdot 4 + x) + 0 \cdot 188 \sin (139 \cdot 6 + 2x)$

Man ersieht aus diesen Resultaten, dass die Amplitude der einmaligen täglichen Schwankung auf Bergen bald grösser, bald kleiner ist bei heiterem, gegenüber trübem Wetter. Dies erklärt sich dadurch, dass diese Oscillation ein Interferenz-Phänomen ist zwischen der einmaligen täglichen Schwankung, wie wir sie auch an der Erdoberfläche beobachten und der »thermischen« Druckschwankung auf den Berghöhen, also je nach der Höhe der letzteren und dem Temperaturgange in der

Luftschichte zwischen der Station und der Erdoberfläche den mannigfachsten Modificationen unterliegt.

Auch der Obir zeigt wieder, dass auf Bergen die Phasenzeiten der einmaligen täglichen Druckwelle bei heiterem Wetter früher eintreten als bei trübem Wetter, im Sommer um 82°7 : 15 = $5^1/_2$ Stunden, im Winter um 114°4 : 15 = 7·6 Stunden; doch sind dies natürlich nur ganz vorläufige Resultate, weil aus zu wenigen Tagen abgeleitet.

Die doppelte tägliche Oscillation ist auch hier wieder constant. Die Phasenzeit verspätet sich vom Winter zum Sommer, wie dies auf Berggipfeln allgemein der Fall ist.[1]

Die interessantesten Resultate liefert die Analyse der täglichen Druckschwankungen an den bayrischen Stationen (Jahr 1892). Wir haben da:

München:

heiter........ $0·482 \sin(355·5+x)+0·265 \sin(136·7+2x)$
trüb......... $0·200 \sin(\ 97·2+x)+0·247 \sin(139·6+2x)$

Peissenberg:

heiter........ $0·194 \sin(346·3+x)+0·245 \sin(130·4+2x)$
trüb......... $0·231 \sin(134·3+x)+0·216 \sin(139·1+2x)$

Wendelstein:

heiter........ $0·121 \sin(214·9+x)+0·211 \sin(137·7+2x)$
trüb......... $0·294 \sin(150·5+x)+0·200 \sin(134·6+2x)$

München kommt völlig mit Zürich überein. Auf Peissenberg kaum 500 *m* über der bayrischen Hochebene, stimmt bei heiterem Wetter die Phasenzeit der einmaligen täglichen Schwankung dem Charakter nach noch überein mit jener zu München. Hier (München) Eintritt des Maximums um $6·3^h$ Morgens, dort (Peissenberg) erst kurz vor 7^h Morgens. Amplitude sehr reducirt. Bei trübem Wetter dagegen hat auf Peissenberg die einmalige Druckwelle schon ganz den Charakter der thermischen Druck-

[1] Der hier erscheinende Unterschied von 0·8 Stunden ist viel zu gross; im Mittel ist der Unterschied bloss Winter (1894/95) 131°5 — Sommer (1894) 120°3 = 11°2 oder kaum 22 Minuten. Auch die Amplitude des Sommers ist wohl nur zufällig so klein.

schwankung der höheren Berggipfel; die Amplitude derselben ist grösser als bei heiterem Wetter. Bei letzterem überwiegt also die normale einmalige tägliche Welle wegen ihrer sehr grossen Amplitude noch die thermische Druckwelle in 500 *m* relativer Höhe, doch erscheint ihre Amplitude sehr verkleinert und die Phasenzeit um mehr als eine halbe Stunde verspätet. Bei trübem Wetter dagegen, wo die Amplitude der einmaligen täglichen Oscillation an der Erdoberfläche um mehr als die Hälfte kleiner ist, überwiegt in 500 *m* (relativ) Höhe schon die thermische Druckschwankung, die Amplitude der einmaligen Welle ist dann grösser als bei heiterem Wetter.

Auf der Station Wendelstein sehen wir die Weiterentwicklung dieser Verhältnisse mit zunehmender Höhe. Hier, 1200 *m* über der bayrischen Hochebene, finden wir die bekannte einmalige Druckschwankung der Erdoberfläche auch bei heiterem Wetter nicht mehr vor. Dadurch, dass die Phasenzeit der thermischen Druckschwankung um nahe 180° von jener der einmaligen Welle an der Erdoberfläche verschieden ist, schwächen sich die Amplituden der beiden Wellen gegenseitig stark ab, und die Amplitude der combinirten Welle ist desshalb ziemlich klein. Die heiteren Tage des Jahres 1889 ergeben dieselbe bloss zu 0·089 *mm* und die Winkelconstante zu 162·4. Bei trübem Wetter dagegen, wo die Amplitude der einmaligen täglichen Welle unten klein ist, hat die combinirte einmalige Druckschwankung auf dem Wendelstein eine viel grössere Amplitude.

Da die Amplituden, wie die Phasenzeiten der doppelten täglichen Oscillation bei heiterem, wie bei trübem Wetter, unten wie oben so gut als constant bleiben, so geben dieselben zu keinen weiteren Bemerkungen Anlass. Wir können desshalb auch von denselben ganz absehen, wenn es sich um die Erklärung der Modification der complexen täglichen Welle durch heiteres und trübes Wetter handelt, wie selbe uns unmittelbar aus den Beobachtungen entgegentritt, sei es an der Erdoberfläche, wie auch in verschiedenen Höhen.

Stellen wir in diesem Sinne die Amplituden und Phasenzeiten der einmaligen täglichen Barometerschwankung für die verschiedenen Höhen noch übersichtlich untereinander:

Ort	Höhe relat.	heiter	trüb
München	0	0·482 sin (355°5+x)	0·200 sin (97°2+x)
Peissenberg	500	0·194 sin (346·3+x)	0·231 sin (134·3+x)
Wendelstein	1200	0·121 sin (214·9+x)	0·294 sin (150·5+x)

Die Änderungen der Amplituden und Phasenzeiten mit der Höhe gehen, wie man sieht, sehr regelmässig vor sich. Leider kann ich den Vergleich nicht für grössere Höhen fortsetzen, weil die für Obir und Säntis berechneten Werthe nicht mit den bayrischen Stationen correspondirenden Tagen angehören, oder überhaupt nicht direct vergleichbar sind; denn für so entfernte Örtlichkeiten wie München, Obir würden auch die Resultate aus correspondirenden Tagen nicht mehr gut vergleichbar sein.

Da die einmalige tägliche Barometerschwankung auf Bergen in erheblichem Grade mit dem Witterungscharakter (dem täglichen Gange der Temperatur und deren Amplitude) sich ändert, so können auch die für heiteres Wetter aus verschiedenen Perioden abgeleiteten Werthe nicht ganz mit einander übereinstimmen. Namentlich wird dies für die mittleren Höhen in der Übergangszone gelten. Ich gebe ein Beispiel dafür:

Heiteres Wetter	München
1889	0·480 sin (348·0+x)+0·288 sin (131°2+2x)
1892	0·482 sin (355·5+x)+0·265 sin (136·7+2x)
	Wendelstein
1889.	0·089 sin (162·4+x)+0·189 sin (131·8+2x)
1892..........	0·121 sin (214·9+x)+0·211 sin (137·7+2x)

In München stimmen die Resultate aus beiden Jahrgängen sehr gut miteinander, weniger auf dem Wendelstein, namentlich in Bezug auf die Phasenzeit, die allerdings bei so kleinen Amplituden, wie 1889, unsicher werden muss. Die doppelte tägliche Oscillation erweist sich auch bei diesem Vergleiche als eine bemerkenswerth constante Erscheinung.

Die Gleichungen für Ft. William und Ben Nevis für den Sommer, den Winter und das Jahr findet man am Schlusse dieser Abhandlung. Wir wollen jetzt die Gesammtheit der

Erscheinungen überblicken und versuchen, zu einigen allgemeineren Resultaten zu gelangen. Zu diesem Zwecke wurde die folgende Tabelle zusammengestellt.

Amplituden und Phasenzeiten der einmaligen und doppelten täglichen Barometeroscillation an heiteren und trüben Tagen.

		Einmalige tägliche Schwankung				Doppelte tägliche Schwankung			
		heiter		trüb		heiter		trüb	
		Ampl.	Phas.-zeit	Ampl.	Phas.-zeit	Ampl.	Phasen-zeit	Ampl.	Phasen-zeit
A. Stationen an der Erdoberfläche									
Sommer	Ft. William	·346	365°6	·352	124°0	·196	(157°9)	·213	(122°4)
	Hamburg	·426	348·3	·114	127·6	·210	133·8	·183	135·1
	Triest	·232	328·6	·136	117·1	·251	127·2	·342	128·1
	München	·482	355·5	·200	97·2	·265	136·7	·247	139·6
	Zürich	·501	355·8	·186	91·2	·280	148·8	·276	146·5
	Klagenfurt	·876	365·4	·573	51·5	·197	148·7	·235	145·2
B. Berg- und Gipfelstationen									
Sommer	Peissenberg	·194	346·3	·231	134·3	·245	130·4	·216	139·1
	Wendelst.	·094	192·8	·294	150·5	·199	135·0	·200	134·6
	Ben Nevis	·342	215·2	·465	155·1	·102	118·8	·187	114·6
	Obir	·228	202·5	·291	119·8	·169	118·3	·199	113·3
	Säntis	·341	217·6	·234	147·0	·177	123·7	·199	130·3
Winter	Ben Nevis	·369	238·1	·201	137·4	·155	150·1	·187	130·2
	Obir	·222	220·8	·135	106·4	·191	143·4	·188	139·6

Aus dieser Tabelle ergibt sich Folgendes:

A. Stationen an der Erdoberfläche. Die Amplitude der einmaligen täglichen Druckschwankung ist überall (Ft. William ausgenommen) an heiteren Tagen viel grösser als an trüben Tagen an den Küstenstationen wie an den Inlandstationen.

Die Grösse der Amplituden selbst und der Unterschied derselben bei heiterem und trübem Wetter ist aber, wie zu erwarten, örtlich sehr verschieden.

Die Phasenzeit der einmaligen Druckschwankung bei heiterem Wetter ist, Triest ausgenommen, überall ziemlich nahe die gleiche, der constante Winkel (A_1) liegt überall mehr weniger nahe bei 360°, welcher Winkel dem Eintritt des Maximums um 6^h Morgens entsprechen würde. Bei trübem Wetter liegt der Winkel A_1 fast überall (das extreme Klagenfurt ausgenommen) im zweiten Quadranten, der Unterschied $A_1—A_2$ ist im Mittel der drei Küstenstationen 135° = 9 Stunden, im Mittel von München und Zürich als Inlandstationen circa 99° = 6·6 Stunden. Heiteres Wetter bedingt demnach einen bedeutenden Phasenunterschied der einmaligen Druckschwankung gegenüber dem bei uns ziemlich vorherrschenden trübem Wetter.

Die doppelte tägliche Schwankung bleibt bei heiterem und trübem Wetter in Bezug auf Phasenzeit und Amplitude die gleiche. Die Unterschiede liegen innerhalb der Fehlergrenze der Bestimmung dieser Grössen aus den Registrirungen weniger und zerstreuter Tage.

Erlaubt man sich Mittelwerthe zu bilden, so erhält man für die Stationen der Niederung:

(In Betreff der thatsächlichen Unterschiede der Phasenzeiten der einmaligen täglichen Welle ist dabei wohl zu beachten, dass dieselben durch die so verschiedene Tageslänge und Zeit des Sonnenaufgangs zu Ft. William, Hamburg und Triest bedingt sein dürften).

Einmalige tägliche Schwankung: Amplituden[1] heiter 0·477 *mm*, trüb 0·260 *mm*, Phasenzeiten: heiter A_1 = 353·2, trüb A_1 = 101°4. Also Eintritt des Maximums der einmaligen täglichen Druckwelle $6\,^1/_2{}^h$ Morgens bei heiterem Wetter, circa 11^h Nachts bei trübem Wetter.

Doppelte tägliche Schwankung. Amplituden: heiter 0·233, trüb 0·249, Phasenzeiten[2] heiter A_2 = 139°0, trüb A_2 = 138·9, somit kein Einfluss der Witterung bemerkbar.

---

[1] Die Mittelwerthe der Amplituden haben selbstverständlich keine Bedeutung als absolute Werthe, nur die Differenzen haben reelle Bedeutung.

[2] Ohne Ft. William.

Da die doppelte tägliche Schwankung bei heiterem und trübem Wetter die gleiche bleibt (Eintritt der Minima circa $4^1/_2{}^h$ Morgens und Abends, der Maxima um $10^1/_2{}^h$ Vormittags und Nachts), die einmalige tägliche Schwankung aber mit variablen Phasenzeiten sich derselben auflagert, so entstehen die folgenden Hauptmodificationen:

Heiteres Wetter. Das sehr verstärkte Maximum der einmaligen täglichen Schwankung erreicht noch zum Theil das Morgen-Maximum der doppelten Welle, dies gibt ein hohes Vormittags-Maximum, daneben ziemlich unterdrücktes nächtliches Minimum. Das Abend-Minimum der einfachen Welle verstärkt das Nachmittags-Minimum der doppelten Welle und neutralisirt zugleich zum Theil das Abend-Maximum derselben. So entsteht der für das heitere Wetter charakteristische tägliche Gang des Barometers.

Trübes Wetter. Hier sind die Verhältnisse ziemlich die entgegengesetzten. Die extremen und die gleichen Phasenzeiten der beiden Wellenzüge liegen aber einander noch näher, und das Interferenz-Phänomen kommt noch reiner zum Ausdruck. Da aber die Amplituden der einmaligen täglichen Schwankung jetzt kleiner sind, kommt es trotzdem zu keiner erheblicheren Verstärkung, respective Unterdrückung der Maxima und Minima. Das Maximum der einmaligen Welle trifft fast zusammen mit dem Abend-Maximum der doppelten Welle, daher ist bei trübem Wetter das Abend-Maximum so sehr verstärkt, das Vormittags-Maximum aber abgeschwächt. Das Morgen-Minimum wird etwas verstärkt, das Nachmittags-Minimum abgeschwächt. Das ist der charakteristische tägliche Gang des Barometers an trüben Tagen.

Für die Bergstationen erhält man folgende Mittelwerthe der Amplituden und Phasenzeiten. Peissenberg wurde von der Mittelbildung ausgeschlossen, weil an dieser Station sich der Übergang von der Druckschwankung in der Niederung zu jener der eigentlichen Bergstationen vollzieht.

Einmalige tägliche Schwankung. Amplitude: heiter 0·251, trüb 0·325, Phasenzeiten heiter: $A_1 = 270^\circ 0$, trüb $A_1 = 143^\circ 1$. Die Amplitude bei trübem Wetter ist überwiegend grösser als die bei heiterem Wetter über die Ursache dieser

Erscheinung habe ich mich schon früher ausgesprochen. Was die Phasenzeiten anbelangt, so tritt bei heiterem Wetter das Minimum etwas nach 4^h Morgens ein, bei trübem Wetter erst gegen $8^1/_2{}^h$ Morgens, also circa $4^1/_2$ Stunden später.

Doppelte tägliche Schwankung. Amplituden: heiter 0·162, trüb 0·196. Ich habe in einer früheren Abhandlung gezeigt, dass die thermische Druckschwankung die Tendenz hat, die Amplitude der doppelten Oscillation in der Höhe etwas abzuschwächen, der kleine Unterschied obiger Amplitude könnte darin seinen Grund haben, wenn er nicht innerhalb der Fehlergrenze liegt. Phasenzeiten heiter $A_2 = 124·0$, trüb 123°2, also kein Unterschied.

Also auch auf den Berggipfeln ist die doppelte tägliche Oscillation bei heiterem und trübem Wetter die gleiche.

Der Winkel A_2 war für die Niederung im Mittel 139°, für unsere Bergstationen ist derselbe dagegen 124°, was einer Verspätung der Phasenzeiten gerade um eine halbe Stunde entspricht. Diese Verspätung ist ein Effect der thermischen Druckschwankung auf den Berghöhen.

Die Eigenthümlichkeiten des thatsächlichen täglichen Ganges des Barometers auf den Berggipfeln, wie sie uns in den Stundenmitteln des Luftdruckes bei heiterem und trübem Wetter entgegentreten, kommen in ganz analoger Weise zu Stande, wie jene in der Niederung durch die Auflagerung der mit der Witterung variablen einmaligen täglichen Druckwelle auf die constante doppelte tägliche Welle. Es liegen aber hier die Phasenzeiten wie die Amplituden der einmaligen täglichen Welle bei heiterem und trübem Wetter einander näher, wie in der Niederung, dagegen liefert die verschiedene Seehöhe eine neue Ursache mehrfacher Modificationen. Es wäre schon desshalb überflüssig, auf die möglichen verschiedenen Combinationen hier näher einzutreten.

Ist die tägliche Druckschwankung in der Niederung erklärt, so auch die auf den Berggipfeln. Diese letztere hat ja die gleiche Ursache und wird nur modificirt durch die thermische Druckschwankung. Diese thermische Druckschwankung lässt sich aber jederzeit berechnen, vorausgesetzt, dass

der tägliche Gang der Lufttemperatur in der Luftschichte unterhalb der Bergstation gegeben ist.

Die wahrscheinliche Ursache des verschiedenen Ganges des Barometers bei heiterem und trübem Wetter.

Fassen wir die Unterschiede im täglichen Gange des Barometers bei heiterem und trübem Wetter näher ins Auge. Dieselben geben uns vielleicht einen Fingerzeig auf die diesen Unterschieden zu Grunde liegenden Vorgänge.

Ich habe zu diesem Behufe die Differenzen der Abweichungen der Stundenmittel vom Tagesmittel bei heiterem und trübem Wetter für folgende Stationsgruppen gebildet:

Küstenstationen: Hamburg, Triest.

Inlandstationen: Klagenfurt, München, Zürich. Letzterer Station wurde das doppelte Gewicht gegeben, weil der tägliche Gang aus einer doppelt so langen Beobachtungszeit abgeleitet ist, als jene, die den Werthen für Klagenfurt und München zu Grunde liegt.

Ich habe zudem aus den von Herrn Leyst im Repertorium für Met. B. XVI, Nr. 8 mitgetheilten Zahlen den täglichen Gang des Barometers zu Pawlowsk bei sehr hohem und bei sehr niedrigem Luftdruck (im Sommer) abgeleitet und die Differenz Anticyclone—Cyclone gebildet, die den Differenzen heiter—trüb so ziemlich äquivalent ist. Auf die zu Grunde liegenden Zahlen selbst werde ich später ausführlicher zurückkommen.

Die Unterschiede im täglichen Gange heiter—trüb sind für die beiden Stationsgruppen, sowie für Pawlowsk bei sehr hohem und niedrigem Luftdrucke ganz die gleichen wie nachstehende Tabelle zeigt.

Wie man aus der kleinen Tabelle sogleich ersieht, ist der Unterschied im täglichen Gange des Barometers an heiteren und trüben Tagen ein merkwürdig regelmässiger und allerorten übereinstimmender. Von 3^h a. bis 3^h p. ist der Luftdruck bei heiterem Wetter höher, die übrige Zeit hindurch tiefer als bei trübem Wetter. Zwischen 7^h und 8^h Morgens ist der positive Unterschied am grössten, der Luftdruck bei heiterem Wetter also relativ am höchsten, um 8^h Abends ist letzterer am kleinsten. Der Unterschied im täglichen Barometergange bei heiterem

und trübem Wetter wird allgemein ausgedrückt durch die ganztägige Druckwelle

$$\text{heiter—trüb} = 0 \cdot 5 \sin (330° + x),$$

denn die Amplitude der halbtägigen Druckwelle liegt innerhalb der Fehlergrenze der Bestimmungen.

Unterschied im täglichen Gange des Barometers bei heiterem und trübem Wetter (heiter—trüb).

	Küstenstationen		Inlandstationen		Pawlowsk Anticyclone—Cyclone	
	Vormittag	Nachmittag	Vormittag	Nachmittag	Vormittag	Nachmittag
1h	—·15	·14	—·21	·12	—·30	·24
2	—·01	·03	—·04	·00	—·09	·11
3	·13	—·05	·16	—·15	·06	—·04
4	·25	—·19	·38	—·30	·21	—·18
5	·29	—·30	·41	—·41	·36	—·32
6	·39	—·37	·56	—·51	·44	—·43
7	·42	—·45	·64	—·60	·53	—·46
8	·45	—·43	·59	—·60	·56	—·53
9	·38	—·40	·51	—·53	·57	—·55
10	·30	—·29	·44	—·46	·53	—·53
11	·25	—·30	·38	—·36	·44	—·46
12	·20	—·34	·27	—·28	·33	—·42

Die Gleichungen, durch welche dieser Unterschied im täglichen Gange des Barometers dargestellt wird, sind:

Küstenorte (Hamburg, Triest)

$$0 \cdot 423 \sin (329°0 + x) + 0 \cdot 032 \sin (311°2 + 2x).$$

Inlandorte (Zürich, München, Klagenfurt)

$$0 \cdot 535 \sin (331 \cdot 8 + x) + 0 \cdot 018 \sin (279 \cdot 5 + 2x).$$

Anticyclone—Cylone (Pawlowsk) Sommer

$$0 \cdot 562 \sin (319 \cdot 6 + x) + 0 \cdot 023 \sin (265 \cdot 0 + 2x).$$

Dem constanten Winkel 330° entsprechen die Phasenzeiten 8^h a. Maximum, 8^h p. Minimum. Der tägliche Gang des Barometers an heiteren Tagen entspringt daher aus jenem an trüben Tagen dadurch, dass auf letzteren eine eintägige Druckwelle mit einem Maximum um 8^h Morgens und einem Minimum um 8^h Abends und einer Amplitude von 0·4—0·5 *mm* aufgesetzt wird. Die einmalige tägliche Barometerschwankung bei trübem Wetter entspricht im Mittel ungefähr dem Ausdrucke:

Tägl. einmalige Druckschwankung bei trübem Wetter $= 0{\cdot}2 \sin(90° + x)$,

also mit einem Maximum um Mitternacht und einem Minimum um Mittag.

Bei Betrachtung der in der vorigen Tabelle enthaltenen Druckunterschiede fiel mir sogleich auf, dass dieselben vollständig denselben Charakter haben, wie die Unterschiede im täglichen Gange des Barometers auf dem Lande und an der Küste oder auf Inseln. So ist z. B. der Unterschied im täglichen Gange des Barometers zu Valentia an der irischen Küste in rein oceanischer Lage gegen jenen zu Kew in Mittelengland der folgende:

Kew—Valentia, d. i. Land—Küste im Juni

Differenzen des täglichen Barometerganges (*mm*)

Mittn.	2	4	6	8	10	Mittg.	2	4	6	8	10
·11	·19	·38	·45	·40	·15	—·13	—·36	—·48	—·44	—·13	—·05

Mit einer kleinen Verschiebung in der Phase ist dieser Unterschied im täglichen Barometergange ganz derselbe wie jener zwischen heiterem und trübem Wetter. Die Gleichung, welche diese Unterschiede ausdrückt, ist:

$$0{\cdot}44 \sin(14{\cdot}5 + x) + 0{\cdot}08 \sin(192^\circ 3 + 2x).$$

Dieselbe entspricht bis auf den Unterschied der Phasenzeit, der vielleicht in dem Breiteunterschied begründet sein mag, völlig den obigen Gleichungen für die Druckunterschiede heiter — trüb.

In dem Unterschiede Kew—Valentia tritt aber der Unterschied im täglichen Barometergange zwischen Land und See noch nicht so rein zu Tage wie in den von Henry Blanford

discutirten vierstündigen Luftdruckbeobachtungen auf dem Meere in der Gegend der Sandheads (Mündung des Hugly) im Vergleich zu den correspondirenden Beobachtungen zu Calcutta[1]. Diese Unterschiede geben folgende Gleichung:

Täglicher Barometergang Calcutta—Sandheads (Jänner)

$$0 \cdot 70 \sin (343^\circ 2 + x).$$

Dagegen war

$$\text{Heiter—trüb} = 0 \cdot 50 \sin (330 + x).$$

Der Unterschied im täglichen Gange des Luftdruckes Land—Meer bei der Hugly-Mündung hat sein Maximum um 7^h a., heiter—trüb (unter circa 50° Breite), hatte das Maximum um 8^h a. Wir können also ganz bestimmt den Satz aussprechen: Der Unterschied im täglichen Gange des Barometers bei heiterem und bei trübem Wetter entspricht vollkommen dem Unterschiede zwischen dem täglichen Gange des Luftdruckes über dem Lande und über der angrenzenden See.

Ich glaube, man darf darauf gestützt nun weitergehen und geradezu den Satz aussprechen: Die Orte barometrischer Maxima mit klarem Himmel und grosser täglicher Wärmeschwankung reagiren in Bezug auf die täglichen Druckschwankungen gerade so auf die Orte barometrischer Minima mit bedecktem Himmel und kleiner täglicher Wärmeschwankung, wie die Landflächen auf die benachbarten Wasserflächen. Allerdings kommt es zu keinem Analogon der Land- und Seewinde, wohl aber tritt eine Verminderung der Gradienten bei Tag und eine Verstärkung derselben bei Nacht ein. Ein wesentlicher Unterschied liegt ja darin, dass die Grenze zwischen Wasser und Land eine scharfe ist. Dieses Grenzgebiet ist das Gebiet des unmittelbaren Luftaustausches, der sich wohl nicht viel über 1000—1500 *m* hinauf erstreckt. Die Gebiete heiteren und trüben Wetters verhalten sich etwas anders.

---

[1] Meteorologische Zeitschrift, B. XII, 1877, S. 131.

Bildet man die Differenzen heiter—trüb für einen höheren Berggipfel, so bekommt man natürlich fast den umgekehrten Gang, gegenüber jenem in der Niederung. Die Gradienten werden bei Nacht vermindert, bei Tag vergrössert, in der Richtung von der heiteren zur trüben Area oder in der Richtung von der Anticyclone zur Cyclone. In einem Niveau, wo kein mittlerer Gradient mehr vorhanden wäre, würde in der Nacht ein Druckgefälle von der Area trüben Wetters gegen die Area heiteren Wetters herrschen, bei Tag aber umgekehrt. Es ist natürlich genau dasselbe, was über Land und See in der Höhe eintritt, wo wir aber die Umkehrung der Gradienten zwischen Tag und Nacht nur aus den oberen Luftströmungen erschliessen können,[1] nicht aber aus dem täglichen Gange des Luftdruckes in der Höhe. Bildet man die Unterschiede im täglichen Gange des Luftdruckes bei heiterem und trübem Wetter für die Stationen Säntis und Obir, so erhält man:

Heiter—trüb, Säntis und Obir. Mittlere Höhe circa 2200*m*

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Vormittag											
—·38	—·34	—·29	—·21	—·14	—·08	·06	·15	·20	·25	·27	·29
Nachmittag											
·31	·34	·35	·31	·19	·08	—·06	—·13	—·22	—·27	—·31	—·34

Diesen Zahlen entspricht die Gleichung:

$$0 \cdot 352 \sin (258 \cdot 3 + x) + 0 \cdot 023 \sin (304^\circ 4 + 2x).$$

Amplituden wie Phasenzeiten dieser Differenzen hängen natürlich von der Höhe ab, für welche sie gebildet worden sind, eine vollständige Umkehrung des Ganges der Differenzen wäre erst in einer bestimmten sehr grossen Höhe zu erwarten. Für den Wendelstein z. B. haben die Differenzen noch fast völlig denselben Gang wie an der Erdoberfläche.

Die einmalige tägliche Barometerschwankung ist kein so ganz local bedingtes Phänomen, wie es mir selbst früher geschienen hat, ein allgemeiner Charakter herrscht doch immer

[1] Wie sie bei Ballonfahrten direct nachgewiesen worden sind, soweit sie nicht schon durch den Wolkenzug ersichtlich werden.

vor, entweder der der Anticyclone (heiteres Wetter) oder jener des cyclonalen Witterungscharakters. Jener hat sehr grosse tägliche Amplituden, selbst noch in ziemlich hohen Breiten mit einem Maximum circa um 6^h Morgens und einem Minimum um 6^h Abends, die tägliche Druckschwankung des letzteren hat eine viel kleinere Amplitude und das Maximum fällt auf Mitternacht, das Minimum auf Mittag.

Herr Dr. Margules hat durch eine rein theoretische Untersuchung nachgewiesen,[1] dass in einer universellen, um die ganze Erde herumlaufenden ganztägigen thermischen Druckwelle das Maximum des Druckes mit dem Maximum der Temperatur zusammenfallen, also etwa um 6^h Abends eintreten müsste. Die Beobachtungen lassen keine derartige Druckwelle erkennen. Hingegen liefert die Theorie stehender Schwingungen in einem kleinen Theile der Atmosphäre Erscheinungen, die mit den Beobachtungen in sehr guter Übereinstimmung stehen. Unter Annahme einer täglichen Wärmeschwankung von 3° an der Erdoberfläche mit rascher Abnahme derselben nach oben und den Wendestunden 6^h a. (Minimum) und 6^h p. (Maximum)[2] ergibt die Theorie den Eintritt des Druckmaximums an der Erdoberfläche um 6^ha., von 2000*m* Höhe an aber um 6^h Abends. Dies stimmt sehr gut mit dem täglichen Barometergange bei heiterem Wetter (ganztägige Druckwelle), wenn man berücksichtigt, dass die Abnahme der Temperatur-Amplituden nach oben wohl erheblich langsamer vor sich geht, als der Rechnung zu Grunde gelegt wurde.

Berechnung des täglichen Ganges der wahren mittleren Lufttemperatur bei heiterem und bei trübem Wetter.

Die früher mitgetheilten täglichen Luftdruckänderungen an den gleichen heiteren und den gleichen trüben Tagen in der Niederung und auf angrenzenden Berggipfeln gestatten, den täglichen Wärmegang in der Luftschichte zwischen der Niederung und dem betreffenden Berggipfel zu berechnen. Um

---

[1] Luftbewegungen in einer rotirenden Sphäroidschale, III. Theil, von Dr. Max Margules. Diese Sitzungsber., B. CII, Abth. II. a., December 1893.

[2] Was den Beobachtungen in Bezug auf die wahre Lufttemperatur sehr nahe kommt, wie wir auch hier noch sehen werden.

nicht ganz auf meine früheren bezüglichen Abhandlungen verweisen zu müssen, wiederhole ich hier nur kurz, dass diese Berechnung in der Art erfolgt, dass die tägliche Druckschwankung in der Niederung zunächst auf das Niveau des Berggipfels dadurch reducirt wird, dass man die Amplituden im Verhältnisse von $b:B$ verkleinert (die Phasenzeiten bleiben unverändert) und diese reducirte Druckschwankung von der auf dem Berggipfel thatsächlich beobachteten abzieht. Die Differenz entspricht der »thermischen Druckschwankung«, welche durch den täglichen Wärmegang in der Luftschichte zwischen der Niederung und dem Berggipfel hervorgerufen wird. Hierauf multiplicirt man die Amplituden dieser thermischen Druckschwankung mit dem Quotienten $dt:db = RT^2:bh$, wo R die bekannte Constante (für trockene Luft 29·3, für feuchte Sommerluft kann dafür etwa 30·4 gesetzt werden), T die mittlere Temperatur der Luftschichte von der Dicke h (zwischen Niederung und Berg) in absolutem Temperaturmaass (T_0 also 273 für ganz trockene Luft, für feuchte Sommerluft setze ich 263, also Ausdehnungscoëfficient $\alpha = 0·0038$), b ist der Barometerstand der oberen Station.

Wollen wir also z. B. den täglichen Gang der Lufttemperatur an heiteren und trüben Tagen in der Luftschichte zwischen Zürich und dem Säntisgipfel berechnen, so steht die Rechnung mit Beziehung auf die früher mitgetheilten Beobachtungsergebnisse so:

Heitere Tage.

Säntis—Zürich .....$h = 2500—496 = 2004\ m$,
Mittl. Lufttemperatur $(t+t'):2 = 12·6$, $T = 275·6$, $b = 568·4$,
somit Factor ....$dt:db = 2·03$.

A täglicher Barometergang zu Zürich, B reducirt auf Säntis durch Multiplication mit $568:720 = 0·789$, C beobachteter täglicher Barometergang auf dem Säntisgipfel

A ....$-0·037 \cos x + 0·500 \sin x + 0·145 \cos 2x - 0·240 \sin 2x$
B ....$-0·029 \cos x + 0·393 \sin x + 0·114 \cos 2x - 0·188 \sin 2x$
C ....$-0·208 \cos x - 0·270 \sin x + 0·147 \cos 2x - 0·098 \sin 2x$
$C-B$ ....$-0·179 \cos x - 0·663 \sin x + 0·033 \cos 2x + 0·090 \sin 2x$

Somit entspricht der thermischen Druckschwankung auf dem Säntisgipfel die Gleichung:

$$0 \cdot 687 \sin (195 \cdot 1+x)+0 \cdot 096 \sin (20^\circ 1+2x).$$

Der dieser thermischen Druckschwankung zu Grunde liegende tägliche Gang der Lufttemperatur aber wird ausgedrückt durch die Gleichung

$$1^\circ 40 \sin (195^\circ 1+x)+0 \cdot 19 \sin (20^\circ 1+2x),$$

die durch Multiplication der Coëfficienten der Druckgleichung mit dem Factor 2·03 entsteht.

Für trübes Wetter hatten wir $(t+t'):2 = 8°$, T somit 271, $b = 563 \cdot 7$, Factor 1·98.

Die weitere Rechnung nach dem vorigen Schema ergibt dann:

Gang der Lufttemperatur zwischen Zürich und Säntis bei trübem Wetter

$$0 \cdot 38 \sin (185 \cdot 3+x)+0 \cdot 12 \sin (32 \cdot 9+2x).$$

Die Amplitude ist kaum ein Drittel von jener bei heiterem Wetter, der Eintritt der Extreme um 40 Minuten verspätet.

Der tägliche Gang der beobachteten Lufttemperatur zwischen Zürich und Säntis (wenn man den täglichen Gang von Bern für jenen von Zürich setzen darf) ist dagegen im Mittel Juni—September inclusive

$$2 \cdot 25 \sin (222 \cdot 7+x)+0 \cdot 37 \sin (36 \cdot 2+2x).$$

Der allgemeine Charakter des beobachteten und des berechneten Temperaturganges ist der gleiche, jedoch hat der beobachtete Gang eine erheblich grössere Amplitude und verfrühte Extreme. Setzt man für heiter und trüb im Mittel $A_1 = 190°$ und a_1 wegen des Übergewichtes trüben Wetters $= 0 \cdot 7$, so ist die beobachtete Amplitude etwa drei Mal grösser und die Verspätung der Extreme der wahren Lufttemperatur gegen die Beobachtung beträgt circa 2 Stunden.

Berechnet man in gleicher Weise den täglichen Gang der Temperatur in der 1600 *m* mächtigen Luftschichte zwischen Klagenfurt und Obir, so erhält man:

Täglicher Wärmegang zwischen Klagenfurt und Obir im Sommer.

Heiter.......$2\cdot31 \sin(189\cdot4+x)+0\cdot21 \sin(47\cdot8+2x)$
trüb ....$1\cdot07 \sin(194\cdot9+x)+0\cdot26 \sin(41\cdot3+2x)$.

Die Amplituden sind hier grösser, was auch zu erwarten war, da die Luftschichte weniger mächtig ist, tiefer liegt und stärker erwärmt wird, die Phasenzeiten sind die gleichen wie für Zürich—Säntis.

Ich habe auch für den Winter 1894/95 den täglichen Temperaturgang zwischen Klagenfurt und Obir berechnet. Obgleich ich dem Resultat keinen erheblichen Werth beilege, will ich dasselbe doch hier anführen:

Täglicher Wärmegang zwischen Klagenfurt und Obir im Winter.

Heiter......$1\cdot20 \sin(168\cdot1+x)+0\cdot10 \sin(166\cdot8+2x)$,
trüb ....$0\cdot54 \sin(157\cdot7+x)+0\cdot29 \sin(164\cdot4+2x)$.

Die Amplitude der täglichen Schwankung der wahren Lufttemperatur zwischen Klagenfurt und Obir ist selbst im Winter ziemlich erheblich. Die beobachtete Amplitude (2^h—7^h) ist ja grösser als 5·2 an heiteren Tagen und selbst noch an ganz trüben Tagen 2°6. Auf die so stark verspäteten Phasenzeiten möchte ich vorläufig gar kein Gewicht legen.

Temperaturgang in der Luft, nach den bayrischen Höhenstationen. Die Stationen, welche der Rechnung zu Grunde gelegt werden können und die zur selben benöthigten Mittelwerthe der meteorologischen Elemente sind:[1]

München........	$h =$ 526·4,	$b =$ 714,	Temperatur[1]	heiter 19°1,	trüb 13°0
Peissenberg......	$h =$ 993·9,	$b =$ 679,	»	» 17·9	» 9·0
Wendelstein.....	$h =$ 1727·2,	$b =$ 622,	»	» 12·9	» 3·8

Damit erhält man aus den Gleichungen des täglichen Barometerganges:

---

[1] Mittel aus (Min.+2^h) : 2, was für vorliegenden Zweck genügt.

Täglicher Wärmegang zwischen München—Peissenberg. $h = 467 \cdot 5 m$.

Heiter......$2 \cdot 02 \sin (182 \cdot 2 + x) + 0 \cdot 21 \sin (30^\circ 3 + 2x)$,
trüb ....$0 \cdot 99 \sin (189 \cdot 1 + x) + 0 \cdot 14 \sin (323^\circ 1 + 2x)$.

Für die nächste Höhenstufe Peissenberg—Wendelstein ergibt sich:

Täglicher Wärmegang zwischen Peissenberg und Wendelstein. $h = 733 \cdot 3 m$.

Heiter...... $1^\circ 41 \sin (185 \cdot 7 + x) + 0 \cdot 16 \sin (251 \cdot 0 + 2x)$,
trüb .... $0 \cdot 52 \sin (183 \cdot 2 + x) + 0 \cdot 08 \sin (55 \cdot 3 + 2x)$.

Wie zu erwarten, ist in der höheren Luftschichte zwischen den Gipfeln Peissenberg—Wendelstein die Amplitude der täglichen Wärmeschwankung kleiner als in der unteren Schichte München—Wendelstein. Die Phasenzeiten des täglichen Wärmeganges sind aber dieselben. Ich habe aus einem anderen Jahrgange 1889, da von 1892 die Beobachtungen fehlen, auch für die Luftschichte Bayrisch-Zell—Wendelstein den täglichen Wärmegang berechnet, allerdings nur für heiteres Wetter.

Bayrisch-Zell........ $h = 802 \cdot 1$, $b = 694$, $t = 16^\circ 0$ heiter
Wendelstein........ $h = 1727 \cdot 2$, $b = 621$, $t = 11 \cdot 0$ »

Täglicher Wärmegang zwischen Bayrisch-Zell und Wendelstein. $h = 925 m$.

Heiter......... $1 \cdot 81 \sin (188^\circ 0 + x) + 0 \cdot 19 \sin (268^\circ 8 + 2x)$.

Die Amplitude der täglichen Wärmeschwankung ist, wie zu erwarten, etwas grösser zwischen der Thalstation Bayrisch-Zell und Wendelstein, als zwischen der höheren Gipfelstation Peissenberg und Wendelstein. Die Phasenzeiten sind aber die gleichen. Die Übereinstimmung der Resultate aus verschiedenen Jahrgängen und aus verschiedenen Stationen bekräftigt die Richtigkeit derselben. Bayrisch-Zell liegt unmittelbar am Fusse des Wendelstein in einem von hohen Bergen eingeschlossenen ziemlich engen Gebirgsthale; der Peissenberg liegt ziemlich weit vom Wendelstein im Westen desselben und die Station

liegt auf dessen frei aus der Hochebene aufragendem Gipfel. Trotzdem erhält man aus dem täglichen Gange des Luftdruckes die gleichen Resultate für den täglichen Wärmegang. Dies scheint mir ein starker Beweis dafür zu sein, dass die Methode der Berechnung richtig ist und reelle Resultate liefert.[1]

Endlich liefert München—Wendelstein für die ganze zwischenliegende Höhenschichte von 1201 *m* folgenden täglichen Wärmegang:

Temperaturgang zwischen München und Wendelstein.

$h = 1201$ *m*.

Heiter......... $1\cdot64 \sin(184^\circ0+x)+0\cdot06 \sin(306^\circ7+2x)$,
trüb .... $0\cdot71 \sin(184\cdot2+x)+0\cdot07 \sin(\;\;7\cdot2+2x)$.

Die Phasenzeiten sind wieder die gleichen, die Amplituden liegen zwischen den früher erhaltenen, ganz wie es sein muss. Die Höhenintervalle München—Peissenberg und Peissenberg—Wendelstein verhalten sich sehr nahe wie 0·4 zu 0·6. Wir hätten somit $(2\cdot02\times0\cdot4)+(1\cdot41\times0\cdot6) = 1\cdot65$, also ganz wie oben. Dürfte man sich erlauben auf den aus anderen Jahrgängen erhaltenen Temperaturgang zwischen Zürich und Säntis den gleichen Rechnungsmodus anzuwenden, um die Temperatur-Amplitude in der nächst höheren Luftschichte Wendelstein—Säntis (circa 800 *m*) zu erhalten, so würde man erhalten:

Temperatur-Amplitude in der Luftschichte Wendelstein—Säntis.

$(1\cdot64\times0\cdot60)+(x\times0\cdot40) = 1\cdot40$ $\quad x = 1\cdot04$ heiter,
$(0\cdot71\times0\cdot60)+(x\times0\cdot40) = 0\cdot57$[2] $\quad x = 0\cdot36$ trüb.

Natürlich können diese Resultate nur als Schätzungen betrachtet werden, die bloss zum Zwecke einer Vervollständigung der folgenden kleinen Übersicht über die Amplituden

[1] Ich bemerke dies namentlich den vom Herrn Leon Teisserenc de Bort erst kürzlich wieder aufgestellten Ansichten gegenüber und halte dessen verticale Luftdruckgradienten für nicht reel.

[2] Im Mittel von Zürich—Säntis, München—Wendelstein, Klagenfurt—Obir. Der direct erhaltene Werth von 0·38 ist für 1892 jedenfalls zu klein.

und Phasenzeiten der täglichen Wärmeschwankung in den verschiedenen Höhenschichten dienlich sein mögen.

Amplituden und Phasenzeiten (von Mitternacht gezählt) des täglichen Wärmeganges bei heiterem und bei trübem Wetter in verschiedenen Höhenschichten.

Orte	ΔH	H[1]	heiter		trüb	
			Amplitude	Phas.-zeit	Amplitude	Phas.-zeit
München—Peissenberg	470	230	2·02	182°	0·99	189°
Peissenberg—Wendelstein..	730	850	1·41	186	0·52	183
Wendelstein—Säntis	800	1600	1·04	(195)	0·36	185
Klagenfurt—Obir	1600	800	2·31	189	1·07	195
Bayrisch-Zell—Wendelstein.	930	460	1·81	188	—	—

In dieser kleinen Zusammenstellung ist zunächst die Constanz der Phasenzeiten bemerkenswerth, in allen Höhenschichten bleiben dieselben innerhalb der Fehlergrenzen bei heiterem wie bei trübem Wetter die gleichen. Die Mittelwerthe für heiteres Wetter sind 188° und für trübes Wetter dessgleichen 188°. Diesem Winkel entspricht ein Eintreten des Temperatur-Minimums um $5^1/_2{}^h$ Morgens und des Temperatur-Maximums um $5^1/_2{}^h$ Abends. Für trübes Wetter kommt allerdings auch der Einfluss des zweiten Gliedes noch in Betracht, bei dem Temperaturgange bei heiterem Wetter hat dasselbe nur wenig Einfluss.

Was die Amplituden anbelangt, so nehmen dieselben mit der Höhe ziemlich regelmässig ab. Die relativ grosse Amplitude der täglichen Temperaturschwankung in der Luftschichte zwischen Klagenfurt und Obir findet wohl ihre Erklärung in der stärkeren Erwärmung des geschützten kärntnerischen Thalbeckens gegenüber jener der Luftschichten über der freien, windigen, kühlen bayrischen Hochebene.

[1] Mittlere Höhe der Luftschichte über der Erdoberfläche.

Das mittlere Verhältniss der Amplituden bei heiterem und trübem Wetter ist etwa wie 1 : 0·4.

Die correspondirenden stündlichen Luftdruckdaten an den heiteren Tagen des Sommers 1889 zu München und Bayrisch-Zell habe ich noch zu folgendem Versuch benützt.

Man kann die tägliche Luftdruckschwankung im Niveau von Bayrisch-Zell, 276 *m* über München, aus der täglichen Luftdruckschwankung zu München in der Art berechnen, dass man zunächst letztere durch Multiplication mit dem Factor 694 : 716[1] = 0·968 auf das höhere Niveau reducirt und dann noch die thermische Druckschwankung in der 276 *m* mächtigen Luftschichte hinzuaddirt. Das gibt dann die theoretische Druckschwankung zu Bayrisch-Zell ohne den Einfluss der orographischen Verhältnisse (Thallage von Bayrisch-Zell).

Die thermische Druckschwankung wurde aus dem früher berechneten Temperaturgange zwischen München und Peissenberg abgeleitet, was ja keinen erheblichen Fehler verursachen kann, wenn sich auch dieser Temperaturgang auf die heiteren Tage eines anderen Jahres bezieht.

Man erhält auf diesem Wege:

Tägliche Luftdruckschwankung, München, reducirt auf 802 *m*:

$$-0·097 \cos x + 0·454 \sin x + 0·210 \cos 2x - 0·183 \sin 2x.$$

Thermische Druckschwankung im Niveau von 802 *m*:

$$-0·027 \cos x - 0·160 \sin x + 0·010 \cos 2x + 0·013 \sin 2x.$$

Berechnete tägliche Druckschwankung im Niveau von Bayrisch-Zell:

$$-0·124 \cos x + 0·294 \sin x + 0·220 \cos 2x - 0·170 \sin 2x.$$

Beobachteter täglicher Barometergang in Bayrisch-Zell:

$$+0·100 \cos x + 0·389 \sin x + 0·210 \cos 2x - 0·140 \sin 2x.$$

Differenz: Beobachtet — Berechnet

$$+0·224 \cos x + 0·095 \sin x - 0·010 \cos 2x + 0·030 \sin 2x$$

---

[1] Barometerstände zu München und Bayrisch-Zell.

oder in anderer Form und mit Hinweglassung der beiden letzten Glieder, deren Einfluss zu vernachlässigen ist, indem er innerhalb der Fehlergrenzen bleibt:

Locale tägliche Druckschwankung zu Bayrisch-Zell, bei heiterem Wetter im Sommer

$$0\cdot243 \sin (67°0+x).$$

Die tägliche Barometerschwankung in dem Thale von Bayrisch-Zell unterscheidet sich demnach von jener, welche man für die gleiche freie Höhe über der bayrischen Hochebene annehmen muss, um eine ganztägige Welle mit einer Amplitude von circa $^1/_4$ *mm*, deren Maximum auf $1^1/_2{}^h$ Nachts und deren Minimum auf $1^1/_2{}^h$ Mittags fällt. Es würde dies einer örtlichen periodischen Umlagerung einer Luftschichte von circa 3 *m* Mächtigkeit (bei 694 *mm* Druck und 16° Lufttemperatur) entsprechen, die über dem ganzen Thale bis gegen 2^h Mittags in Folge der Erwärmung in der Höhe gegen die Bergwände hin abfliesst und bei Nacht sich wieder über der Thalsohle sammelt. Dieses Resultat erscheint demnach sehr plausibel und dürfte den wirklichen Vorgängen entsprechen.

Täglicher Gang des Barometers zu Pawlowsk im Sommer bei sehr hohem und bei sehr niedrigem Luftdrucke.

In einer sehr verdienstlichen grossen Arbeit, die mit einer staunenswerthen Mühe und Sorgfalt durchgeführt worden ist, hat Herr Ernst Leyst, der Vorstand des meteorologischen Observatoriums erster Ordnung zu Pawlowsk, den täglichen und jährlichen Gang der meteorologischen Elemente an den Tagen der Monats-Maxima und Monats-Minima des Luftdruckes zu Pawlowsk untersucht[1] (sowie auch den normalen mittleren Gang selbst). Er hat von 20 Jahrgängen (7 von Petersburg, 13 von Pawlowsk) die Mittelwerthe für je drei sich folgende Tage mit dem höchsten Barometerstande in jedem Monate (d. i. der dem Monats-Maximum vorangehende Tag, der Tag

[1] Ernst Leyst, Untersuchungen über den täglichen und jährlichen Gang der meteorologischen Elemente an den Cyclonen- und Anticyclonentagen. Wild's Repertorium für Met. B. XVI, Nr. 8. 363 Quartseiten mit 2 Curventafeln.

des Maximums selbst und der darauffolgende Tag) und ebenso für drei Tage mit dem tiefsten Barometerstande in jedem Monate gebildet und derart den täglichen Gang der meteorologischen Elemente für die Tage mit den Luftdruckextremen gebildet. Wir wollen mit Herrn Leyst selbst dafür kurz Anticyclonen- und Cyclonentage sagen.

Wir haben nun für den Sommer aus den von Herrn Leyst mitgetheilten ausführlichen Tabellen den mittleren täglichen Barometergang an den Anticyclonen- und Cyclonen-Tagen zu berechnen gesucht, indem wir die Stundenmittel der drei Tage in ein Mittel zusammengezogen, und die unperiodische Änderung, die dann nicht mehr so gross ist, nach dem Lamont'schen Verfahren zu eliminiren versucht haben. Das geht, wie man sehen wird, im Sommer ganz gut,[1] für den Winter wohl kaum, ich habe aber auch keinen Versuch gemacht. Die Stundenmittel für die anticyclonale und cyclonale Witterung sind dann aus je 60 Tagen abgeleitet, also schon ganz gute Mittelwerthe. Den mittleren Witterungscharakter dieser Tage, sowie die grossen unperiodischen Änderungen des Luftdruckes an den einzelnen Tagen ersieht man aus der folgenden kleinen Tabelle.

Petersburg und Pawlowsk, 59° 46′ N., 30° 24′ E. 28 *m*.

Tag	Luftdruck			Temperatur[2]			
	1h a.	12h p.	Diff.	Min.	Max.	Mittel	Amplit.
Anticyclonen im Sommer							
1	760·35	764·19	+3·84	9·7	18·5	14·4	8·8
2	64·32	62·99	−1·33	8·4	19·9	15·0	11·5
3	62·87	59·43	−3·44	10·5	20·9	16·1	10·4
Mittel	762·51	662·20	−0 31	9·5	19·8	15·1	10·2
Cyclonen im Sommer							
1	750·79	745·66	−5·13	11·1	19·0	15·3	7·9
2	45·38	48·00	+2·62	12·4	16·7	14·3	4·3
3	48·21	51·76	+3·55	10·4	17·3	13·9	6·9
Mittel	748·13	748·47	+0·34	11·3	17·7	14·5	6·4

[1] Herr Leyst, der es unterlassen hat, für die drei Tage einen Mittelwerth zu bilden, zweifelte, dass es möglich wäre, bei einer so bedeutenden unperiodischen Änderung den täglichen Gang des Barometers abzuleiten.

[2] Minimum und Maximum dem täglichen Gange entnommen; Mittel das 24-stündige Tagesmittel.

Mittlere Bewölkung der drei Anticyclonentage .... 4·2
Mittlere Bewölkung der drei Cyclonentage .... 7·2

Sonnenscheindauer im Mittel der drei Anticylonentage ....11·3
Sonnenscheindauer im Mittel der drei Cyclonentage...... 5·5

Die Anticyclonentage entsprechen, wie man sieht, so ziemlich unseren »heiteren Tagen«, die Cyclonentage den »trüben Tagen«. Allerdings sind aber die Unterschiede der Bewölkung und dei täglichen Temperaturschwankung nicht so gross, wie in unserem Falle, wo die ganz heiteren und ganz trüben Tage zum Ausgangspunkte der Untersuchung des Barometerganges gemacht worden sind. Der tägliche Barometergang bei sehr hohem und bei sehr niedrigem Drucke entspricht aber dennoch fast völlig jenem an ganz heiteren und trüben Tagen, wie wir ihn früher gefunden haben, und die folgende Tabelle dies zeigt.

Täglicher Gang des Barometers zu Pawlowsk an Anticyclonen- und Cyclonentagen des Sommers, sowie im Sommermittel überhaupt.

Stunde	Anticyclonen	Cyclonen	Sommermittel	Anticyclonen	Cyclonen	Sommermittel
	Vormittag			Nachmittag		
1	—·11	·19	·03	·20	—·04	06
2	—·03	·06	·00	·07	—·04	·00
3	·01	—·07	—·02*	—·07	—·03	—·08
4	·08	—·13	—·02	—·19	—·01	—·14
5	·18	—·18	·01	—·31	·01	—·18
6	·25	—·19	·05	—·38	·05	—·19*
7	·32	—·21*	·07	—·39*	·07	—·17
8	·36	—·20	·09	—·36	·17	—·11
9	·39	—·18	·11	—·31	·24	—·04
10	**·40**	—·13	**·14**	—·26	**·27**	·01
11	·36	—·08	·14	—·20	·26	·04
12	·28	—·05	·11	—·17	·25	**·05**

Bei einer ziemlich grossen täglichen Amplitude erscheint hier der tägliche Gang des Barometers an Anticyclonen-, wie an Cyclonentagen als eine ganztägige Welle, aber von sehr verschiedenen Phasenzeiten in den beiden Fällen.

An Anticyclonentagen fällt das Maximum auf $9^1/_2{}^h$ Vormittags und ist von hohem Betrage, es fällt dann rasch ab zu einem tiefen Nachmittags-Minimum um 7^h Abends (Amplitude 0·8 *mm*), ein nächtlicher Gang ist nicht vorhanden; vom Minimum steigt der Luftdruck in einem Zuge zu dem hohen Vormittags-Maximum. Durch das Fehlen hohen Druckes in der Nacht unterscheidet sich dieser Barometergang von dem sogenannten continentalen Typus der täglichen Barometer-Oscillation.

An Cyclonentagen ist der tägliche Barometergang ziemlich der umgekehrte von jenem an Anticyclonentagen. Das Minimum tritt um $7^1/_2{}^h$ Morgens ein und das Maximum um $10^1/_2{}^h$ Abends, Amplitude nicht ganz 0·5 *mm*. Eine doppelte Schwankung fehlt.

Im Mittel aller Tage aber tritt überraschender Weise die normale doppelte tägliche Oscillation des Barometers sehr ausgeprägt und recht normal hervor. Es liegt sehr nahe anzunehmen, dass diese doppelte Schwankung kein reelles Phänomen sei, sondern nur durch die Übereinanderlagerung der beiden ganztägigen Wellen von so verschiedenen Phasenzeiten entsteht, ein blosses Resultat des Mittelziehens aus sehr differenten Witterungszuständen ist, wodurch ein nichtssagendes Resultat zum Vorschein kommt.

Es ist aber nicht so. Klarheit bringt hier, wie bei allen periodischen Erscheinungen nur die Darstellung derselben durch periodische Reihen. Dadurch enthüllt sich sofort die einfache Gesetzmässigkeit derselben. Dies zeigen die folgenden Gleichungen:

Täglicher Gang des Barometers (Sommer).

Anticyclone.............. $0·369 \sin (323°0+x)+0·072 \sin (116·2+2x)$.

Cyclone.................. $0·196 \sin (133·6+x)+0·094 \sin (110·6+2x)$.

Im Sommermittel überhaupt.. $0·101 \sin (339·8+x)+0·085 \sin (113·2+2x)$.

Die doppelte tägliche Periode ist an Tagen anticyclonaler wie cyclonaler Witterung in völlig normaler Weise vorhanden, ganz so wie im allgemeinen Mittel. Wir erkennen hier wieder den universellen Charakter der halbtägigen Barometeroscillation, deren Amplitude in der Breite von Petersburg allerdings kaum mehr 0·1 *mm* erreicht. Die Phasenzeiten derselben sind trotzdem bei jedem Witterungscharakter die gleichen.

Von dem Witterungscharakter wird nur die ganztägige Welle, aber diese vollkommen beherrscht. An Anticyclonentagen finden wir den uns schon bekannten Charakter der ganztägigen Welle an heiteren Tagen: grosse Amplitude, Maximum am Vormittage, Minimum Nachmittags ($8^1/_2$ a. und p.).

An Cyclonentagen treffen wir den uns auch schon bekannten Charakter der täglichen Barometerschwankung an trüben Tagen: kleine Amplitude, Minimum Vormittags 9^h, Maximum Abends 9^h; d. i. gegen heiteres Wetter ein Unterschied der Phasenzeiten um circa 12 Stunden, eine völlige Umkehrung der täglichen Welle.

Wenn Herr Leyst sagt, man müsse bei der täglichen Barometerschwankung darauf Rücksicht nehmen, aus welcher Periode dieselbe abgeleitet worden sei, ob aus einer Zeit mit überwiegend cyclonaler oder anticyclonaler Witterung, weil je nachdem ihr Charakter wesentlich anders ausfällt, so hat er (für Breiten, wo die halbtägige Oscillation schon eine sehr kleine Amplitude hat) vollkommen recht. Aber dies gilt doch nur von der ganztägigen Welle. Diese schwankt mit der Witterung, nicht so die doppelte tägliche Oscillation. In der ganztägigen Welle kommt der Witterungscharakter der Periode zum Ausdrucke, aus der sie abgeleitet worden ist, gerade so wie die mittlere Temperatur und die Bewölkung davon abhängt. Es ist der grosse Vortheil der Auflösung des complexen Phänomens der täglichen Barometerschwankung in ihre harmonischen Constituenten, dass uns dieselbe eine klare Einsicht in den Zusammenhang der Erscheinungen ermöglicht, die constanten Elemente derselben von den variablen zu trennen und die Bedingtheit und die Eigenschaften derselben separat zu untersuchen gestattet.

Anhang.

Ich stelle hier noch jene Tabellen zusammen, welche zu einer kritischen Beurtheilung der in meiner Abhandlung gefundenen Resultate dienlich sind, welche aber in den Text eingestellt, den Zusammenhang desselben unnöthig unterbrochen und die Lesbarkeit und Übersicht erschwert haben würden. Zudem habe ich die von Herrn Buchan entlehnten Daten ohne weiteren Commentar gegeben, der nun nachfolgt, sowie die Berechnung der von ihm aufgestellten Werthe des täglichen Barometerganges.

I. Täglicher Gang des Barometers an je 36 heiteren und trüben Tagen. Säntis und Zürich.

Barograph Sprung.

	Säntis				Zürich			
	1893		1894		1893		1894	
	heiter	trüb	heiter	trüb	heiter	trüb	heiter	trüb
	500 *mm*+				700 *mm*+			
1ʰ a.	68·11	63·77	68·27	64·31	21·42	17·81	21·85	19·26
2	67·95	·54	·16	·11	·33	·64	·77	·13
3	·80	·39	·08	63·91	·23	·47	·75	18·96
4	·70	·25	·05	·75	·19	·46	·78	·80
5	·73	·23	·09	·67	·31	·50	·88	·77
6	·82	·24	·20	·70	·41	·60	22·03	·84
7	·96	·28	·36	·72	·49	·73	·16	·91
8	68·07	·34	·52	·73	·48	·91	·22	·99
9	·19	·44	·70	·79	·43	·99	·17	19·09
10	·34	·50	·90	·89	·30	18·02	09	·15
11	·40	·56	69·02	·86	·08	17·91	21·86	·04
Mittag	·43	·57	·08	·80	20·82	·82	·61	18·94
1	·43	·52	·10	·76	·52	·63	·31	·91
2	·41	·49	·10	·71	·25	·51	·09	·93
3	·37	·49	·08	·68	19·99	·48	20·90	·94
4	·30	·47	·02	·65	·79	·53	·77	·94
5	·22	·46	68·92	·61	·60	·55	·65	·94
6	·16	·47	·90	·65	·57	·65	·63	19·02
7	·18	·59	·91	·80	·62	·87	·76	·25
8	·21	·73	69·01	·92	·79	18·15	21·01	·51
9	·20	·84	·06	·96	20·00	·35	·23	·62
10	·15	·86	·02	·93	·04	·41	·30	·65
11	·09	·78	68·96	·88	·10	·38	·34	·66
Mitternacht	67·99	·69	·85	·80	·11	·33	·27	·63
1	·82	·56	·74	·66	·06	·24	·18	·53
Mittel	68·13	63·52	68·73	63·80	20·59	17·83	21·46	19·13

Die Constanten des täglichen Barometerganges auf dem Säntis und zu Zürich.

	p_1	q_1	p_2	q_2	A_1	A_2	a_1	a_2
Säntis, heitere Tage								
1893	—·182	—·276	+·142	—·103	213·4	126·0	·331	·175
1894	—·234	—·264	+·151	—·093	221·6	121·6	·353	·177
Mittel	—·208	—·270	+·147	—·098	217·6	123·7	·341	·177
Säntis, trübe Tage								
1893	+·112	—·212	+·158	—·127	152·1	128·8	·240	·203
1894	+·144	—·182	+·146	—·131	141·7	131·9	·232	·196
Mittel	+·128	—·197	+·152	—·129	147·0	130·3	·234	·199
Zürich, heitere Tage								
1893	—·049	+·529	+·158	—·207	354·7	142·6	·531	·261
1894	—·025	+·470	+·132	—·273	356·9	154·2	·471	·303
Mittel	—·037	+·500	+·145	—·240	355·8	148·8	·501	·280
Zürich, trübe Tage								
1893	+·142	+·066	+·157	—·282	65·1	150·9	·157	·323
1894	+·229	—·074	+·148	—·177	107·9	140·1	·240	·231
Mittel	+·186	—·004	+·152	—·230	91·2	146·5	·186	·276
Säntis, Mittel (Juni—September)								
1893	—·052	—·248	+·142	—·124	191·8	131·1	·253	·189
1894	-·048	—·252	+·158	—·110	190·8	124·9	·256	·192
Zürich, Mittel (Juni—September)								
1893	+·045	+·335	+·149	—·265	7·6	150·6	·338	·304
1894	+·088	+·217	+·147	—·235	22·1	148·0	·234	·277

Klagenfurt und Obir. Täglicher Gang des Barometers.

	Sommer 1894				Winter 1894/95			
	Obir		Klagenfurt		Obir		Klagenfurt	
	40 heitere Tage	30 trübe Tage	40 heitere Tage	30 trübe Tage	40 heitere Tage	30 trübe Tage	40 heitere Tage	30 trübe Tage
	590 *mm*+		720 *mm*+		580 *mm*+		700 *mm*+	
1h a.	9·32	4·79	4·32	1·20	4·67	8·83	16·96	22·76
2	·20	·62	4·38	1·11	·60	·79	·93	·79
3	·06	·39	4·43	1·02	·54	·76	·90	·89
4	8·98	·21	4·48	0·94	·43	·71	·84	·99
5	·99	·09	4·57	0·87	·28	·66	·79	23·08
6	9·04	·05	4·69	0 87	·23	·63	·73	·18
7	·18	·00	4·81	0·90	·23	·75	·70	·28
8	·31	·00	4·68	0·89	·33	·95	·72	·39
9	·40	·03	4·44	0 83	·39	9·11	·73	·49
10	·53	·09	4·21	0 76	·45	·25	·72	·55
11	·62	·18	3·92	0·59	·51	·35	·68	·49
Mittag	·64	·17	3·58	0·42	·36	·26	·61	·31
1	·62	·16	3·23	0·23	·13	·11	·42	·08
2	·63	·07	2·93	0·03	3·97	8·97	·30	22·81
3	·61	3·98	2·68	0·00	·97	·93	·21	·61
4	·58	·96	2·53	0·04	·99	·90	·15	·46
5	·51	4·00	2·41	0·10	4·02	·93	·11	·37
6	·45	·06	2·38	0·31	·10	9·00	·05	·25
7	·45	·18	2·52	0·56	·25	·06	·08	·26
8	·51	·27	2·69	0·82	·25	·03	·13	·30
9	·66	·50	2·90	1·08	·29	·01	·20	·40
10	·68	·54	3·07	1·25	·32	8·94	·26	·47
11	·63	·50	3·22	1·36	·30	·89	·34	·52
Mitternacht	·53	·42	3·35	1·44	·26	·77	·38	·53
1	·37	·29	3·38	1·46	·04	·61	·42	·51
Mittel	9·42	4·21	23·58	20·74	4·27	8·94	16·49	22·84

Die Constanten des täglichen Barometerganges.

A. Sommer.

	p_1	q_1	p_2	q_2	A_1	A_2	a_1	a_2
				Klagenfurt				
heiter......	+·082	+·872	+·102	—·168	5·4	148·7	·876	·197
trüb	+·448	+·357	+·134	—·193	51·5	145·2	·573	·235
				Obir (red. mit 0·94)				
heiter......	—·087	—·212	+·149	—·080	202·5	118·3	·228	·169
trüb	+·253	—·145	+·183	—·078	119·8	113·3	·291	·199

B. Winter.

	p_1	q_1	p_2	q_2	A_1	A_2	a_1	a_2
				Klagenfurt				
heiter......	—·316	+·397	+·126	—·128	321·5	135·5	·507	·180
trüb	+·044	+·229	+·107	—·021	10·9	101·1	·233	·109
				Obir				
heiter......	—·145	—·168	+·115	—·153	220·8	143·4	·222	·191
trüb	+·129	—·038	+·123	—·142	106·4	139·6	·135	·188

Mittlerer Gang des Barometers.

Stunde	Sommer 1894				Winter 1894/95			
	Obir	Klagenfurt	Obir	Klagenfurt	Obir	Klagenfurt	Obir	Klagenfurt
	Vormittag		Nachmittag		Vormittag		Nachmittag	
1	·02	·35	·15	—·34	·05	·04	·01	·11
2	—·11	·36	·11	—·59	—·01	·05	—·12	—·10
3	—·25	·37	·06	—·72	—·07	·06	—·12	—·23
4	—·34	·39	·03	—·82	—·15	·07	—·11	—·31
5	—·37	·43	·00	—·84	—·26	·09	—·06	—·35
6	—·34	·51	—·02	—·75	—·29	·10	·02	—·38
7	—·25	·59	·04	—·53	—·23	·15	·10	—·33
8	—·15	·56	·11	—·30	—·07	·24	·14	—·29
9	—·04	·46	·28	—·05	·05	·32	·16	—·20
10	·08	·35	·32	·10	·18	·38	·16	—·09
11	·16	·14	·26	·22	·29	·35	·15	—·03
12	·17	—·10	·16	·32	16	·28	·11	·02

	A_1	A_2	a_1	a_2	A_1	A_2	a_1	a_2
	im Sommer-Mittel				im Winter-Mittel			
Klagenfurt..	18·3	150·8	·636	·221	338·6	118·1	·279	·155
Obir.......	182·5	120·3	·175	·198	170·2	131·5	·082	·174

Die Registrirungen des Luftdruckes auf dem Obir mit einem kleinen Barographen Richard im Sommer 1894 bedurften einer Richtigstellung des Scalenwerthes. Der Reductionsfactor hat sich zu 0·94 herausgestellt. In der Tabelle im Texte wie hier oben, ist die Reduction nicht durchgeführt, nur in den Formeln. Seit December 1894, wo ein Barograph Richard, grosses Modell, functionirt, bedürfen die Registrirungen keiner weiteren Reduction.

Täglicher Gang des Barometers an den bayrischen Stationen.

	p_1	q_1	p_2	q_2	A_1	A_2	a_1	a_2
				München (heiter)				
1889	—·100	+·470	+·217	—·190	348·0	131·2	·480	·288
1890	—·157	+·517	+·144	—·192	343·1	143·1	·540	·240
1892	—·038	+·480	+·182	—·193	355·5	136·7	·482	·265
Mittel	—·098	+·489	+·181	—·192	348·7	136·7	·499	·264
				Wendelstein (heiter)				
1889	+·027	—·085	+·141	—·126	162·4	131·8	·089	·189
1892	—·069	—·099	+·142	—·156	214·9	137·7	·121	·211
Mittel	—·021	—·092	+·141	—·141	192·8	135·0	·094	·199
				Feld bei Miesbach (heiter)				
1890	—·050	+·430	+·156	—·192	353·4	140·9	·433	·247
				Bayrisch-Zell (heiter)				
1889	+·100	+·389	+·210	—·140	14·4	123·7	·401	·252
				Peissenberg (heiter)				
1892	—·046	+·189	+·187	—·159	346·3	130·4	·194	·245
				Wendelstein (trüb)				
1892	+·145	—·256	+·142	—·140	150·5	134·6	·294	·200
				Peissenberg (trüb)				
1892	+·165	—·161	+·141	—·163	134·3	139·1	·231	·216
				München (trüb)				
1892	+·198	—·025	+·160	—·188	97·2	139·6	·200	·247

2^h	4^h	6^h	8^h	10^h	Mittag	2^h	4^h	6^h	8^h	10^h	Mitternacht
1889 Bayrisch-Zell											
·20	·12	·26	·33	·24	·10	—·24	—·58	— 68	—·31	·21	·31
1889 München											
·06	·05	·28	·53	·57	·30	—·21	—·58	—·71	—·45	—·01	·14
1890 Feld bei Miesbach											
·08	·10	·35	·47	·41	·20	—·24	—·57	—·70	—·25	·07	·10
1890 München											
·00	·10	·45	·59	·59	·32	—·21	—·58	—·73	—·42	—·12	—·02

Ben Nevis, Ft. William, Triest. Wie schon in der Einleitung zu dieser Abhandlung erwähnt wurde, hat Herr Alexander Buchan in seinem Berichte über das Ben Nevis-Observatorium im Jahre 1893, den er der Versammlung britischer Naturforscher zu Oxford, August 1894, erstattet hat, auch Tabellen über den täglichen Gang des Barometers an ganz heiteren und ganz trüben Tagen auf dem Ben Nevis, zu Ft. William und zu Triest, und zwar für jeden der 12 Monate veröffentlicht, und zwar in Form von Abweichungen der Stundenmittel vom Tagesmittel. Dieselben sind aus dreijährigen Beobachtungen abgeleitet, für Ft. William und Ben Nevis aus August 1890 bis Juli 1892, für Triest aus 1888/90. Letztere Station wurde wohl zum Vergleiche mit Ft. William gewählt, und dann, wie der Verfasser bemerkt, aus dem Grunde, weil von derselben die tägliche Dauer des Sonnenscheins zugleich mit dem täglichen Barometergang publicirt vorliegt. Es ist nicht gesagt, ob die

unperiodischen Veränderungen eliminirt worden sind, wohl aber, dass die Resultate »bloxamed« worden sind, wodurch leider ihr Werth etwas beeinträchtigt wurde, namentlich müssen die täglichen Amplituden abgeschwächt worden sein. Da in manchen Monaten die Summen der + und — Abweichungen sich weit von Null entfernen, so bleibt nichts anderes übrig, als anzunehmen, dass die verwendeten Mittelwerthe nicht ganz richtig waren, und wurde die Differenz auf die + und — Abweichungen so vertheilt, dass die Summe der 24 Abweichungen wenigstens bis auf ± 12 Einheiten der zweiten Decimale dem Werthe Null sich näherten. Es wird nicht angegeben, ob die heiteren und trüben Tagen auf dem Ben Nevis und zu Ft. William dieselben sind, sonst hätte ich auch hier versucht, den täglichen Wärmegang in der Luftschichte zwischen den beiden Stationen aus dem correspondirenden Gange des Barometers oben und unten bei heiterem und trübem Wetter abzuleiten. Herr Buchan wird ja sicherlich an anderer Stelle später eingehendere Mittheilungen über diese Tabellen machen, dann kann diese Berechnung jederzeit, wenn thunlich nachgeholt werden.

Ich habe die Monatsresultate, welche Herr Buchan (in Tausendel des englischen Zolles ausgedrückt) mittheilt, in Mittelwerthe zusammengezogen, und zwar für drei Jahreszeiten: Winter (November—Februar), Sommer (Mai—August) und die Übergangszeiten Frühling und Herbst (März, April, September und October). Diese Eintheilung entspricht am besten dem Charakter der täglichen Barometerschwankung. Schliesslich habe ich dann den täglichen Barometergang im Winter-, Sommer und Jahresmittel für alle drei Stationen auch durch periodische Reihen ausgedrückt. Ohne eine derartige Berechnung ist jede wissenschaftlich begründete Discussion der Resultate unmöglich, es läuft dieselbe andernfalls auf eine blosse wörtliche Umschreibung der Tabellenwerthe und einige Vergleiche mit anderen Stationen hinaus. Namentlich der tägliche Barometergang auf dem Ben Nevis bleibt wegen der thermischen Druckschwankung, die wieder von dessen Höhe abhängt, ohne Sonderung der eintägigen von der halbtägigen Welle ganz unverständlich.

I. Ben Nevis. Täglicher Gang des Barometers

Stunde	an heiteren Tagen				an trüben Tagen			
	Nov. bis Febr.	März, April, Sept. Octob.	Mai bis Aug.	Jahr	Nov. bis Febr.	März, April, Sept. Octob.	Mai bis Aug.	Jahr
1h a.	—0·36	—0·28	—0·23	—0·29	0·15	0·17	0·17	0·16
2	— ·39	— ·32	— ·31	— ·34	·01	— ·03	— ·06	— ·03
3	— ·39	— ·39	— ·35	— ·38	— ·09	— ·22	— ·26	— ·19
4	— ·42	— ·42	— ·46	— ·43	— ·23	— ·34	— ·43	— ·33
5	— ·42	— ·40	— ·45	— ·42	— ·28	— ·38	— ·52	— ·39
6	— ·32	— ·30	— ·36	— ·33	— ·36	— 39	— ·50	— ·42
7	— ·18	— ·18	— ·24	— ·20	— ·31	— ·32	— ·45	— ·36
8	·02	·01	— ·11	— ·03	— ·17	— ·19	— ·36	— ·24
9	·25	·14	·01	·13	— ·07	— ·13	— ·30	— ·17
10	·37	·24	·10	·24	— ·01	— ·07	— ·22	— ·10
11	·46	·32	·18	·32	·06	— ·01	— ·13	— ·03
Mittag	·44	·39	·29	·37	·05	·03	— ·04	·01
1h p.	·35	·39	·33	·36	— ·06	·02	·05	·00
2	·25	·30	·35	·30	— ·13	·00	· 9	— ·01
3	·16	·22	·32	·23	— ·16	— ·02	· 9	— ·03
4	·13	·12	·25	·17	— ·12	— ·04	·13	— ·01
5	·15	·11	·20	·15	— ·04	·02	·11	·03
6	·18	·11	·15	·15	·04	·07	·16	·09
7	·17	·11	·13	·14	·16	·17	·27	·20
8	·13	·11	·15	·13	·24	·28	·35	·29
9	·06	·05	·17	·09	·31	·35	·44	·37
10	— ·04	— ·03	·11	·01	·32	·37	·48	·39
11	— ·18	— ·14	·00	— ·11	·30	·37	·48	·38
12	— ·31	— ·23	— ·14	— ·23	·31	·34	·44	·36
Mittel	·26	·22	·22	·23	·17	·18	·27	·19

II. Ft. William. Täglicher Gang des Barometers

Stunde	an heiteren Tagen				an trüben Tagen			
	Nov. bis Febr.	März, April, Sept. Octob.	Mai bis Aug.	Jahr	Nov. bis Febr.	März, April, Sept., Octob.	Mai bis Aug.	Jahr
1h a.	—0·40	—0·12	0·08	—0·15	0·27	0·46	0·33	0·35
2	— ·36	— ·08	·09	— ·12	·17	·10	·14	·14
3	— ·39	— ·14	·08	— ·15	—·04	—·15	—·13	—·11
4	— ·38	— ·07	·11	— ·11	—·15	—·24	—·27	—·22
5	— ·37	— ·03	·14	— ·09	—·24	—·32	—·38	—·31
6	— ·22	·15	·33	·09	—·25	—·27	—·32	—·28
7	— ·05	·21	·39	·18	—·27	—·24	—·30	—·27
8	·26	·46	·46	·39	—·15	—·12	—·22	—·16
9	·42	·49	·39	·43	—·09	—·11	—·25	—·15
10	·56	·49	·32	·46	·08	—·02	—·22	—·05
11	·60	·37	·13	·37	·09	—·10	—·22	—·08
Mittag	·50	·26	·04	·27	·00	—·09	—·14	—·08
1	·26	·05	—·15	·05	—·14	—·17	—·13	—·15
2	·09	— ·11	—·25	— ·09	—·24	—·18	—·09	—·17
3	·04	— ·30	—·39	— ·22	—·30	—·27	—·16	—·24
4	·03	— ·37	—·47	— ·27	—·20	—·23	—·14	—·19
5	·02	— ·42	—·54	— ·31	—·13	—·17	—·11	—·14
6	·06	— ·30	—·46	— ·23	·03	·01	·01	·02
7	·05	— ·22	—·37	— ·18	·09	·09	·09	·09
8	·07	— ·05	—·13	— ·04	·20	·30	·30	·27
9	— ·05	— ·03	·01	— ·02	·23	·34	·44	·34
10	— ·12	— ·03	·11	— ·01	·31	·45	·57	·44
11	— ·26	— ·12	·11	— ·09	·30	·42	·55	·42
Mitternacht	— ·38	— ·16	·09	— ·15	·42	·48	·56	·49
Mittel	·25	·21	·24	·29	·18	·22	·25	·21

III. Triest. Täglicher Gang des Barometers

Stunde	an heiteren Tagen				an trüben Tagen			
	Nov. bis Febr.	März, April, Sept., Octob.	Mai bis Aug.	Jahr	Nov. bis Febr.	März, April, Sept. Octob.	Mai bis Aug.	Jahr
1ʰ a.	0·14	0·05	0·01	0·07	0·31	0·33	0·25	0·30
2	·13	·03	—·03	·04	·23	·17	·03	·14
3	·08	—·05	—·10	—·02	·14	—·06	—·20	—·04
4	·01	—·09	—·14	—·07	—·05	—·27	—·36	—·23
5	—·05	—·10	—·11	—·09	—·17	—·38	—·37	—·31
6	—·05	—·03	—·01	—·03	—·25	—·41	—·35	—·34
7	·02	·13	·15	·10	—·22	—·41	—·20	—·28
8	·16	·29	·31	·25	—·05	—·19	—·11	—·12
9	·32	·43	·41	·39	·09	·00	·16	·08
10	·31	·40	·41	·37	·17	·10	·22	·16
11	·23	·33	·37	·31	·12	·14	·22	·18
Mittag	·08	·22	·28	·19	—·08	·03	·11	·02
1ʰ p.	—·18	·03	·13	—·01	—·28	—·12	—·02	— 14
2	—·31	—·17	—·01	—·16	—·44	—·26	—·16	—·29
3	—·41	—·30	—·13	—·28	—·42	—·30	—·23	—·32
4	—·42	—·41	—·28	—·37	—·37	—·27	—·30	—·31
5	—·38	—·43	—·41	—·41	—·29	—·22	—·28	—·26
6	—·27	—·39	—·47	—·38	—·18	—·13	—·25	—·19
7	—·12	—·25	—·39	—·25	·00	·09	—·01	·03
8	·01	—·09	—·23	—·10	·13	·25	·12	·17
9	·14	·08	—·01	·07	·28	·39	·36	·34
10	·20	·13	·08	·14	·40	·41	·37	·39
11	·22	·10	·09	·14	·46	·50	·45	·47
12	·17	·05	·06	·09	·48	·56	·51	·52
Mittel	·18	·19	·19	·18	·23	·25	·24	·23

Die Constanten des täglichen Barometerganges.

Zeit von Mitternacht gezählt.

	p_1	q_1	p_2	q_2	A_1	A_2	a_1	a_2
				Ben Nevis heiter				
Winter	—·313	—·195	+·077	—·134	238·1	150·1	·369	·155
Sommer	—·197	—·280	+·089	—·049	215·2	118·8	·342	·102
Jahr	—·261	—·224	+·087	—·093	229·4	136·9	·344	·127
				Ben Nevis trüb				
Winter	+·136	—·148	+·143	—·121	137·4	130·2	·201	·187
Sommer	+·170	—·366	+·170	—·078	155·1	114·6	·465	·187
Jahr	+·140	—·243	+·155	—·103	150·0	123·6	·280	·186
				Ft. William heiter				
Winter	—·363	—·063	+·071	—·195	260·1	160·0	·368	·207
Sommer	+·034	+·345	+·074	—·182	5·6	157·9	·346	·196
Jahr	—·162	+·171	+·075	—·197	316·6	159·1	·236	·211
				Ft. William trüb				
Winter	+·187	—·074	+·157	—·121	111·6	127·6	·201	·198
Sommer	+·292	—·197	+·180	—·114	124·0	122·4	·352	·213
Jahr	+·243	—·130	+·168	—·130	118·1	127·7	·275	·212
				Triest heiter				
Winter	+·091	+·168	+·140	—·192	28·5	143·9	·191	·238
Sommer	—·121	+·198	+·200	—·152	328·6	127·2	·232	·251
Jahr	—·024	+·188	+·170	—·183	352·7	137·1	·189	·250
				Triest trüb				
Winter	+·259	+·042	+·192	—·180	80·8	133·1	·262	·263
Sommer	+·121	—·062	+·275	—·216	117·1	128·1	·136	·342
Jahr	+·203	—·045	+·242	—·192	102·5	128·4	·208	·309

Über den Einfluss der Strahlen grosser Brechbarkeit auf das elektrische Leitungsvermögen verdünnter Gase

von

Ernst Simon.

Aus dem physikalisch-chemischen Institute der k. k. Universität in Wien.

(Mit 4 Textfiguren.)

I.

Der Einfluss des Lichtes auf elektrische Erscheinungen ist schon in mannigfacher Weise nachgewiesen worden. So befördert das Licht, insbesonders das ultraviolette, die Funkenbildung (Hertz), es führt in auffallend kurzer Zeit eine Zerstreuung negativer Ladungen herbei (Hallwachs) und erzeugt sogar auf Leitern positive Elektricität (Righi). Auch übt es einen merklichen Einfluss auf das Leitungsvermögen verdünnter Gase aus. Diesbezügliche Versuche hat S. Arrhenius[1] angestellt. Er verwendete ein cylindrisches Glasrohr von 10 *mm* innerem Durchmesser, das an dem einen Ende mit einer Luftpumpe in Verbindung stand; das andere Ende schloss eine 3 *mm* dicke Quarzplatte luftdicht ab. In das Rohr waren 4 *mm* von der Quarzplatte entfernt zwei Platindrähte einander gegenüber eingeschmolzen, deren Enden 1·4 *mm* von einander abstanden; anderseits waren sie mit einander leitend verbunden und enthielten in der Leitung ein Galvanometer und eine Reihe Clark'scher Elemente. Wurden die Platinenden und damit auch die dazwischen befindliche Luft durch die Quarzplatte von

[1] Wied. Ann. XXXIII S. 638 (1888).

den Funken einer Holtz'schen Influenzmaschine beleuchtet, die möglichst nahe an der Quarzplatte übergingen, so gab das Galvanometer bei einem Luftdrucke zwischen 15—0·6 *mm* Hg in der Glasröhre einen Ausschlag, der sich vor dem Belichten nicht gezeigt. Arrhenius nimmt nun als Ursache dieses Stromschlusses zwischen den Platinenden an, es sei die verdünnte Luft im Glasrohre durch die Bestrahlung mit den Funken, insbesondere in Folge der ultravioletten Strahlen derselben wie ein Elektrolyt leitend geworden.

Diese elektrolytische Leitung unterscheidet sich aber von einer metallischen nicht wesentlich, da die Wirkung der Bestrahlung selbst bei den geringsten Potentialdifferenzen noch eintrat, eine elektromotorische Gegenkraft demnach so gut wie nicht vorhanden war.

Nach E. Wiedemann[1] dürften bei den beschriebenen Versuchen Vorgänge mehr convectiver Art stattgefunden haben. Auch Strenger[2] scheinen die Versuche von Arrhenius nicht hinreichend, um aus ihnen ein Leitungsvermögen der Luft zu folgern.

II.

Diese Mittheilungen waren der Anlass zu den folgenden Versuchen, welche in der That einen Einfluss des Lichtes auf das elektrische Verhalten verdünnter Gase zeigen, anderseits aber beweisen, dass trotzdem den Gasen eine Leitungsfähigkeit der Elektricität im Sinne von Arrhenius nicht zuzuschreiben ist.

Vor der Beschreibung der eigentlichen Versuche will ich zunächst die ihnen zugrunde liegende Idee und ihre Anordnung anführen. Den Ausgangspunkt bildete folgende Überlegung: Wird die Luft bei den Versuchen von Arrhenius durch Bestrahlung mit geeignetem Lichte wirklich leitend, so muss sie es auch innerhalb der Platten eines geladenen Condensators werden. Die Dielektricitätsconstante (D.-C.) der Zwischenschichte muss einen grösseren Werth annehmen,

---

[1] Wied. Ann. XXXV, S. 260 (1888).

[2] Winkelmann, Handbuch III/1, S. 371 (1893).

im Falle vollständiger Leitung sogar unendlich werden und damit die Capacität des Condensators unter sonst gleichen Verhältnissen merklich grösser ausfallen wie ohne Beleuchten der Zwischenschicht. Die Resultate von Arrhenius mussten sich also auch aus Bestimmungen der D.-C. der bestrahlten Zwischenschicht eines Condensators ergeben.

Die Versuchsanordnung war jener nachgebildet, die zuerst Gordon[1] zu Bestimmungen von D.-C. angewendet und die Lecher[2] wesentlich vereinfacht hat. Die inneren Platten *A*, *M* zweier Condensatoren wurden mit dem einen Pole der secundären Spule eines Ruhmkorff'schen Inductions-Apparates, die äusseren *B*, beziehungsweise *N* mit je einem Quadrantenpaare eines Thomson'schen Elektrometers verbunden; der zweite Pol des Ruhmkorff war mit der Lemniskate desselben in ständiger Verbindung. Die Metallhülle des Elektrometers war zur Erde abgeleitet. Als Elektricitätsquelle diente anfangs eine Tauchbatterie bestehend aus sechs Smee'schen Elementen, deren Poldrähte durch einen Schlüssel zum Ruhmkorff führten; später wurde dafür der Wechselstrom von der Centrale der I. E.-G. verwendet.

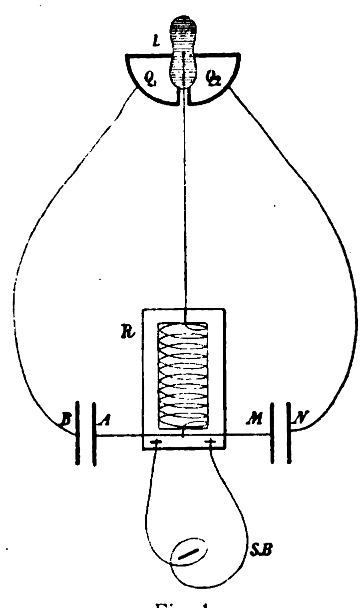


Fig. 1.

Die Wirkung dieser Anordnung ist leicht zu übersehen: Hatten die beiden Condensatoren gleiche Ladungen, so wurden die beiden Quadranten in gleicher Weise abwechselnd positiv und negativ geladen, die Nadel blieb in Ruhe. Wurde nun zwischen die Platten des Condensators *MN* ein Dielektricum

---

[1] Phil. Trans. I, p. 417 (1879).

[2] Diese Sitzungsber. 99, S. 480 (1890).

mit einer grösseren D.-C., als sie Luft hat, z. B. eine Scheibe Paraffin, bei ungeändertem Vergleichscondensator *AB* gebracht, so wurde der Condensator *MN* und damit auch das mit ihm verbundene Quadrantenpaar stärker geladen. Es musste daher die entgegengesetzt geladene Elektrometernadel diesem folgen; der dabei entstehende Ausschlag, der mit Fernrohr und Scala beobachtet wurde, konnte dann mittelst Mikrometerschrauben durch entsprechendes Näherrücken der Platten des schwächer oder auch durch Auseinanderschrauben des stärker geladenen Condensators compensirt werden.

Hat die zwischen *M* und *N* eingeführte dielektrische Platte die Dicke d und die D.-C. $\varkappa$, so wirkt sie wie eine Luftschichte von der Dicke $\frac{d}{\varkappa}$; um die vermehrte Induction in Folge des eingeführten Dielektricums durch eine grössere Plattendistanz auszugleichen, seien die Condensatorplatten *MN* in eine Entfernung von einander gebracht worden, die sich von der früheren um δ unterschied. Bei bekanntem d und δ lässt sich die D.-C. $\varkappa$ leicht finden:

$$\varkappa = \frac{d}{d-\delta}.$$

Die probeweise gemachten Bestimmungen der Dielektricitäts-Constanten von Paraffin und von Spiegelglas in verschiedenen Stärken ergaben übereinstimmende Resultate mit den bekannten von anderer Seite angegebenen Werthen.

Da ein Bestrahlen der Zwischenschichte des »abgeglichenen« Condensators *MN* mit Magnesiumlicht und anderen an ultravioletten Strahlen reichen Lichtarten bei gewöhnlichem Luftdrucke keinerlei Capacitätsänderung an demselben zur Folge hatte, so musste die getroffene Versuchsanordnung in einer Art ergänzt werden, welche es ermöglichte, die zwischen den Condensatorplatten befindliche Luftschichte beliebig weit zu verdünnen. Dies gelang nach einigen missglückten Vorversuchen[1] schliesslich mit Hilfe

[1] So wurde der Condensator *MN* in ein Glasgefäss gebracht, in dem man den Luftdruck erniedrigen konnte. Ein prismatisches Becherglas, wie sie für galvanische (Smee'sche) Elemente verwendet werden, bekam an einer Schmalseite einen Spalt, der mit einer klaren Gypsplatte geschlossen wurde. Als

eines schmalen, parallelopipedischen Glasgefässes ($22 \cdot 3 \times \times 20 \cdot 6 \times 2 \cdot 24$ *cm*³), das zwischen die Condensatorplatten *MN* einzustellen war und bei dem die Luft des Innenraumes beliebig verdünnt werden konnte. Dasselbe bestand aus zwei (7·25, beziehungsweise 8·35 *cm*) starken Spiegelglasscheiben ($22 \cdot 3 \times 20 \cdot 6$, beziehungsweise $20 \cdot 2 \times 20 \cdot 6$ *cm*²), die auf drei Seiten durch 6·2 *mm* dicke Glasstreifen in einer Breite von 5·6 *mm* mittels dünn aufgetragenem Dubois'schen Kitte verbunden waren; eine klare, 3 *mm* dicke, etwas über die Glasränder vorstehende Gypsplatte, welche die Strahlen grosser Brechbarkeit wenig absorbirte, schloss die Vorderseite ab; 3·5 *cm* von dieser war ein Ebonit zwischen die Seitenscheiben eingelegt, um auch an dieser Seite dem bedeutenden äusseren Luftdrucke während der Verdünnung innerhalb ein Eindrücken der Scheiben zu erschweren. An der schmalen Rückseite waren in zwei freigelassenen Öffnungen ein Manometer zur Controle für die im Innern des Apparates constant zu erhaltenden, niedrigen Drücke und eine Glasröhre mit einem gut schliessenden Geisslerhahne luftdicht eingekittet. — Zu diesem Glasapparate wurde auch ein neuer Condensator angefertigt, dessen Platten — mit Stanniol überzogene, an den Ecken abgerundete Glasscheiben — die Form und Grösse des parallelopipedischen Innenraumes hatten; diese rechteckigen Platten (15×13 *cm*²) waren recht eben und gut parallel auf Hartgummi aufgestellt und konnten mittelst einer Mikrometerschraube einander beliebig genähert werden. An dem Boden des Condensatorgestelles waren Holzleisten in entsprechender Distanz angekittet, welche den eingestellten Glasapparat hielten, so dass dieser während der Versuche die Stanniolplatten nicht berührte.

Deckel diente eine luftdicht aufgekittete Zinkplatte, welche nebst einem Manometer, einem Geisslerhahne, der mit der Quecksilber-Luftpumpe verbunden werden konnte, auch die Zuleitungsdrähte zu den vorher gut isolirt eingeführten Condensatorplatten enthielt; diese kamen gerade vor den mit der Gypsplatte überdeckten Spalt zu stehen. — Dieser Glasapparat litt jedoch an zwei Fehlern, von welchen sich der zweite nicht umgehen liess. Einmal war bei der nicht unbedeutenden Ausdehnung desselben eine luftdichte Verkittung nur vorübergehend herstellbar, dann liessen sich die geladenen Condensatorplatten bei niedrigeren Drücken (unter 50 *mm* Hg) auch ohne Belichten nicht vor Entladungen schützen; ein Überziehen mit Siegellack half nichts.

Die durch die Einführung desselben bedingte Capacitätszunahme von *MN* liess sich auf einfache Weise durch Nähern der kreisförmigen Messingplatte ($r = 7 \cdot 1\ cm$) des Vergleichcondensators *AB*, der beibehalten wurde, vollständig ausgleichen.

Zur Bestrahlung des Innenraumes des Glasapparates diente in der Folge an Stelle des Magnesiumlichtes das einer Siemens'schen Bogenlampe, die durch den ebenfalls im Institute zur Verfügung stehenden Gleichstrom von Siemens & Halske mit ungefähr 200 Volt-Ampère brannte. Zwischen Bogenlampe und Stanniolplatten-Condensator stand knapp vor diesem eine mit Stanniol überzogene, zur Erde abgeleitete Papierwand ($45 \times 65\ cm^2$), in der ein mit einem ebenfalls abgeleiteten Drahtnetze überdeckter Spalt in der Grösse der Schmalseite des Innenraumes des Glasapparates ($13 \times 0 \cdot 8\ cm^2$) eingeschnitten war. Diese Wand schützte den Condensator mit den Stanniolplatten vor Induction von Seite der vor ihm befindlichen Körper, den Vergleichcondensator und das Elektrometer als Blende vor Bestrahlung, die nur durch den erwähnten Spalt erfolgte.

III.

Nachdem die Anordnung der Versuche in dieser ausführlichen Art beschrieben, gehe ich zu diesen selbst über.

Zunächst wurden die beiden Condensatoren bei geschlossenem Strome, den noch die Smee'sche Batterie lieferte, abgeglichen, wobei der Stanniolplatten-Condensator den Glasapparat enthielt. Belichten des auf der Vorderseite mit der Marienglasplatte abgeschlossenen Innenraumes des letzteren mittelst Bogenlicht durch den Spalt der Schutzwand bei gewöhnlichem Luftdrucke änderte nichts an den abgeglichenen Condensatoren; auch bei Drücken von 100, 80 und 50 *mm* Hg blieb die Lemniskate in Ruhe. War aber die Luft im Apparate auf 25 *mm* Hg erniedrigt worden, so hatte das Belichten der verdünnten Schichte bei geschlossenem Strome plötzlich einen Lemniskatenausschlag zur Folge; seine Richtung wies auf eine Capacitätszunahme des Condensators mit dem belichteten Glasapparate hin. Die Lemniskate

kehrte aber bald in ihre Ruhelage zurück, in der sie auch trotz Weiterbelichtens verblieb. Bei grösserer Abnahme des Luftdruckes zwischen den Stanniolplatten nahmen die Ausschläge an Grösse zu; war die Luft im Glasapparate bis auf 9 *mm* Hg verdünnt worden, so kehrte die Elektrometernadel nicht mehr in ihre frühere Nulllage zurück: es zeigte der Stanniolplatten-Condensator eine dauernde Capacitätszunahme an. Um die Lemniskate in die Nullstellung zurückzuführen, mussten die Platten des Vergleichcondensators näher aneinander geschraubt werden.

Die Belichtungswirkung wuchs bei noch fortgesetzter Verdünnung der im Glasapparate eingeschlossenen Luft bis zu einem Maximum, das bei etwa 0·5 *mm* Hg eintrat. Doch zeigte sich nur dann ein Ausschlag der Nadel, wenn die Belichtung nach geschlossenem Strome erfolgte. — Es kamen jedoch bei dem erwähnten Compensiren wiederholt Unregelmässigkeiten vor; so entsprach gleichen Drücken im Glasapparate ein ungleiches Näherschrauben der Platten des Vergleichcondensators. Die Ursache lag wohl in der geringen Constanz der verwendeten Smee'schen Batterie und der damit bedingten veränderten, zumeist verringerten Potentialdifferenz an den Polen des secundären Stromkreises am Ruhmkorff. War wiederum die Batterie frisch gefüllt, so gab sie oft einen zu starken Strom und damit zu hohe Spannungen; die Folge davon waren dann ungemein störende Entladungen am Elektrometer.

Um vergleichbare Ergebnisse zu erhalten, wurde daher die Smee'sche Batterie durch eine mehr verlässliche Stromquelle ersetzt, nämlich durch den inzwischen in das Versuchszimmer eingeleiteten Wechselstrom von der Centrale der I. E.-G. Dieser hatte 80 Polwechsel in der Secunde und 50 Volt Spannung, die auch durch einfaches Umschalten auf das Doppelte, auf 100 Volt erhöht werden konnte. Alle anderen bisher benützten Apparate wurden weiter beibehalten. Auch der früher gebrauchte Ruhmkorff wurde wieder verwendet. Es zeigte sich nämlich, dass die Spannungen des Wechselstromes nicht genügten, um eine Wirkung beim Belichten zu erhalten, die auf eine Capacitätszunahme des belichteten Condensators schliessen liess. Diese trat erst wieder ein, als der Wechsel-

strom nach Einschalten entsprechenden Widerstandes durch den erwähnten Inductionsapparat auf eine genügend hohe Spannung gebracht worden war, wobei die Unterbrechungen des Stromes auch durch den Hammer am Ruhmkorff erfolgen mussten.

Die in einem späteren Abschnitte folgenden Angaben über die Intensität der zur Verwendung gelangten Ströme werden diese wesentliche Vorbedingung für das Eintreten der Belichtungswirkung eingehend berücksichtigen. Um einigermassen einen Aufschluss über die Grösse dieser Wirkung zu erhalten, zeigen sich später numerische Capacitätsbestimmungen bei der hier gegebenen Darstellungweise nöthig. Da aber zwei verschieden geformte Condensatoren verwendet wurden, der eine hatte kreisförmige, der zweite für den Glasapparat bestimmte rechteckige Platten, so empfahl es sich, um das Vergleichen wesentlich zu vereinfachen, an die Stelle der letzteren für die Rechnung gleichwerthige Kreisplatten einzuführen. Legt man diesen Bestimmungen die Kirchhoff'sche Condensatorformel[1] zugrunde, so ergibt sich, dass die Stanniolplatten so wirkten, wie kreisförmige Scheiben von einem Radius gleich 82·6 *mm*. Für die weitere Anwendung der genannten Formel wurde angenommen, dass die Platten A und M, falls die Condensatoren abgeglichen waren, auf den gegenüberstehenden mit den Quadranten verbundenen Platten B und N gleiche Ladungen inducirten, von denen die gleichnamigen aber fast vollständig auf die Quadrantenpaare übergingen; eine weitere Voraussetzung war die, dass wenigstens, wenn die letzten Annahmen nicht streng zutrafen, die thatsächlichen Abweichungen davon für beide Condensatoren dieselben waren. Diese Voraussetzung wird bei geringen Plattendistanzen auch zugetroffen haben. Doch da für gewöhnlich der 22·4 *mm* breite Glasapparat sich zwischen den Stanniolplatten befand, so waren von vornherein

---

[1]
$$E = \frac{R^2}{4d} + \frac{R}{4\pi}\left(\log\frac{16\pi(a+d)R}{e d^2} + \frac{a}{d}\log\frac{a+d}{a}\right),$$

wobei R den Plattenradius, a ihre Dicke, d ihre Distanz bedeutet; e ist die Basis der natürlichen Logarithmen; die eine Platte hat das Potential $V_1 = +1$, die zweite $V_2 = -1$.

merkliche Abweichungen der Versuchsergebnisse von denen der Rechnung zu erwarten, wie dies auch die folgenden Angaben zeigen.

Der Glasapparat, der im Wesentlichen eine Schichte Luft mit zwei Glasschichten einschloss, war so zwischen die Platten des Stanniolcondensators eingestellt, dass sich zu beiden Seiten desselben ein Zwischenraum von 1·4 *mm* befand; es standen dann die Stanniolplatten 25·2 *mm* von einander entfernt. Dabei mussten die kreisförmigen Messingplatten des Vergleichcondensators in eine Distanz von 7·9 *mm* gebracht werden, um die Elektrometernadel auch nach Stromschluss in der Nulllage zu erhalten. Wurde nun der zwischen die Platten des Stanniolcondensators eingeführte Glasapparat herausgenommen, während an der Plattendistanz des anderen Condensators nichts geändert wurde, so zeigte der Faden des Fernrohres nach Stromschluss die frühere Nullstellung an, wenn man die Stanniolplatten in Rechteckform bis auf 10·9 *mm* einander genähert hatte. Dann waren wiederum auf die Quadrantenpaare gleiche Ladungen übergegangen, die bei der symmetrischen Anlage des Elektrometers gleiche Potentiale hatten. Aus den bekannten Dicken der Spiegelglasscheiben des Apparates (7·25 und 8·35 *mm*) und ihren bereits früher bestimmten Dielektricitätsconstanten (5·7 und 6·0) liess sich die Breite der wirksamen Innenschichte Luft berechnen. Von dem Zwischenraume der Condensatorplatten in der Breite von 25·2 *mm* nahm der Glasapparat 22·4 *mm* und eine auf beide Aussenseiten desselben sich vertheilende Luftschichte 2·8 *mm* ein; die eine Glasplatte war in ihrer Wirkung wie eine 1·3 *mm*, die zweite wie eine 1·4 *mm* breite Schichte Luft in die Rechnung einzubeziehen. Anderseits erhielt ohne eingeführten Apparat eine Plattendistanz von 10·9 *mm* bei ungeändertem Vergleichscondensator die Lemniskate auch nach Stromschluss in der Ruhelage. Demnach machte sich der innere lufterfüllte Raum des Apparates als eine 5·4 *mm* breite Luftschichte in der Rechnung geltend, obwohl sie eigentlich 6·8 *mm* breit war.

Dieses für den ersten Moment auffallende Ergebniss ist aber nur der Ausdruck dafür, dass die Abweichungen der verwendeten Versuchsanordnung von den Bedingungen der

Kirchhoff'schen Formel nicht mehr für beide Condensatoren die gleichen sind, falls der Glasapparat zwischen die Stanniolplatten eingeführt war. Die Glastafeln, die gar nicht die Condensatorplatten berührten, dürften bei den Versuchen ihr Verhalten elektrischen Ladungen gegenüber kaum merklich geändert haben. Auch dem zwischen die Glasscheiben eingelegten Ebonitstücke, sowie den in den Innenraum des Apparates hineinragenden Glasröhren des Manometers und des Geisslerhahnes, die sich nicht gut vermeiden liessen, konnte nur ein untergeordneter Einfluss auf die reducirte Wirkung des Stanniolcondensators zukommen. Die wesentliche Ursache hiefür ist nur in der grossen Plattendistanz zu suchen, welche der zwischen sie eingestellte Glasapparat nothwendig machte. Da aber dieselbe für alle weiteren Versuche genau beibehalten wurde, so erhielten sich wohl auch die grösseren Abweichungen von den der Rechnung zugrunde liegenden Voraussetzungen bei diesem Condensator constant. Es stand zu erwarten, dass die vermehrten Differenzen, denen die oben angegebene Reduction Rechnung trägt, bei den folgenden Bestimmungen nicht mehr zum Ausdrucke kommen und auch die angenäherte Rechnung den thatsächlichen Beziehungen entsprechende vergleichbare Resultate liefern werde, zumal es bei diesen lediglich auf Verhältnisswerthe ankam. Die weiteren Bestimmungen bestätigen diese Annahme (vergl. S. 577). Eine genaue Berücksichtigung der Umstände der verwendeten Versuchsanordnung hätte zu kaum übersteigbaren rechnerischen Schwierigkeiten geführt.

Für die Folge wurde also eine wirksame innere Luftschichte im Glasapparate in der Breite von 5·4 *mm* in die Capacitätsbestimmungen einbezogen; diese musste für die Rechnung zum Theil herausfallen, wenn sie bei den weiteren Versuchen theilweise »leitend« werden, sie musste zur Gänze verschwinden, wenn sie sich in der ganzen Breite wie ein Leiter verhalten sollte.

Bei den Versuchen, bei denen Belichtung eine Capacitätszunahme des bestrahlten Condensators zeigte, hatte der Wechselstrom eine Spannung von 50 Volt, in seiner Leitung war ein Widerstand von 29·9 S.-E. eingeschaltet; an den

Enden des secundären Stromkreises des Ruhmkorff stieg dann die Potentialdifferenz bis zur Maximalhöhe von etwa 6000 Volt an. Ein mit den Polen des Ruhmkorff entsprechend verbundenes Funkenmikrometer mit Messingkugeln als Elektroden ($r = 0 \cdot 5\,cm$) ergab nämlich bei dem genannten Widerstande und bei ruhigem Gange des Hammers eine grösste Schlagweite von $1 \cdot 48\,mm$, der nach den Tabellen von Paschen[1] der angegebene Werth für die Spannung entsprechen dürfte; doch spielte der Gang des Hammers bei der Erhaltung einer constanten Schlagweite eine nicht unwesentliche Rolle. Das intensive Licht der ruhig brennenden Siemens'schen Bogenlampe gab selbst in einer Entfernung von 50 *cm* von der Gypsplatte hinreichend wirksame Strahlen, so dass bei geschlossenem Strome zwischen 25 *mm* bis 10 *mm* Hg im Innern des belichteten, zwischen die Stanniolcondensatorplatten eingestellten Glasapparates Ausschläge der Lemniskate im Sinne einer Capacitätszunahme des Stanniolcondensators erfolgten; mit steigender Verdünnung trat eine dauernde Capacitätszunahme ein, die erst ein Näherschrauben der Platten des Vergleichcondensators wieder ausglich. Die Wirkung erreichte auch jetzt ein nicht zu überschreitendes Maximum, sie erlosch aber bei den tiefsten Drücken vollständig.

Die nachfolgende Tabelle gilt für trockene atmosphärische Luft.

In der ersten Verticalreihe stehen die Drücke in Millimeter Hg, wie sie im Innern des Glasapparates herrschten; das an diesem angebrachte Manometer zeigte an, dass sich diese Drücke während der betreffenden Versuche constant erhielten. Die Evacuirung der Luft erfolgte mittelst einer Geissler'schen Quecksilberluftpumpe, deren Leod'sches Manometer eine ziemlich gute Bestimmung der tiefsten Drücke ermöglichte.

Die zweite Reihe enthält die zum Ausgleich der Belichtungswirkung nöthige verringerte Plattendistanz des Vergleichcondensators *AB*; es sind diese Zahlen Mittelwerthe aus wieder-

[1] Winkelmann, Handbuch III./1. S. 363.

holt bei gleicher Stromstärke und Belichtungsquelle gemachten Beobachtungen. Die angefügten Angaben in Procenten bestimmen jenen Bruchtheil der Gasschichte, der sich im Condensator wie ein vollkommener Leiter verhielt.

p	d von AB	e_1	d von MN	e_2
750, 100, 50 35, 33, 28 25, 23, 21 19, 15, 13	7·9 (0%) Lemniskaten-ausschläge von 4—26 Theilst.	172·0	10·9	172·4
9	7·2 (17·5%)	187·7	9·7	191·7
7	6·4 (37·5%)	209·8	8·8	208·8
5	5·3 (65%)	251·0	7·2	252·8
1	4·5 (85%)	293·6	6·1	295·4
0·5 0·1	3·9 (100%)	336·8	5·5	328·1
0·04	7·9 (0%)	172·0	10·9	172·4

Die dritte Colonne gibt die nach der Kirchhoff'schen Formel bei gegebenem Plattenradius des Vergleichcondensators und bekannter Plattendistanz gefundenen Verhältnisswerthe für die auf dieselben übergegangenen elektrischen Ladungen.

Befindet sich zwischen den Platten des Stanniolcondensators *MN* durchaus gewöhnliche Luft, ist also der Glasapparat herausgenommen und werden die zwei Condensatoren abgeglichen, wobei der Vergleichcondensator die in der zweiten Reihe angegebenen Plattendistanzen von 7·9 *mm* herab bis auf 3·9 *mm* hat, so ergeben sich für die entsprechenden Entfernungen der Stanniolplatten die Werthe von 10·9—5·5 *mm*, wie sie die vierte Reihe anführt. Die Belichtung mit dem Bogenlichte bei den angegebenen Drücken und der bestimmten Spannung hatte demnach die Wirkung,

als wäre die Luftschichte im Innern des Glasapparates durch leitende Schichten bis zu einer Breite von 5·4 *mm*, d. h. in ganzen der Ausdehnung der wirksamen inneren verdünnten Luftschichte zwischen den Glasscheiben ersetzt worden.

Die Werthe der vierten Reihe für die Distanz der Stanniolplatten *MN* wiederum in die Kirchhoff'sche Formel eingesetzt, ergeben Werthe, für die auf *MN* übergegangenen Elektricitätsmengen, die recht gut bis auf 2% mit den in Colonne 3 enthaltenen Werthen übereinstimmen. Die Abweichungen unserer

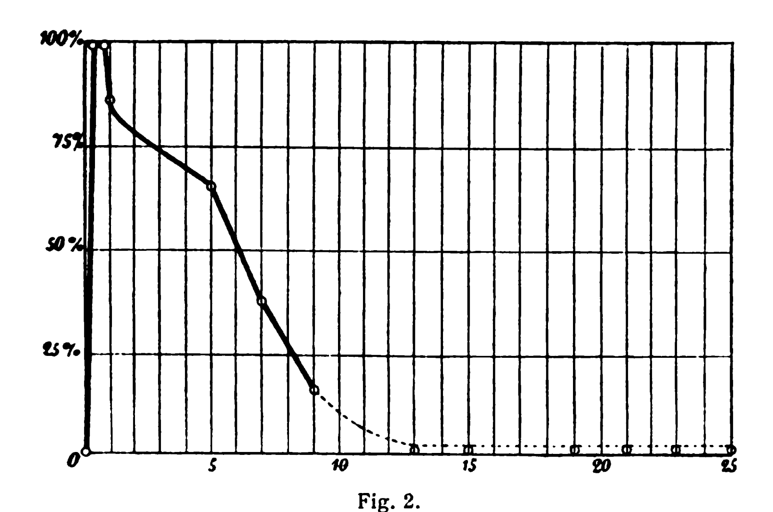


Fig. 2.

Versuchsbedingungen von den der verwendeten Formel zugrunde liegenden sind also in der That für eine ganze Reihe von Beobachtungen für beide Condensatoren die nämlichen, kommen also bei den Verhältnisszahlen nicht mehr zum merklichen Ausdrucke.

Trägt man die Drücke, wie sie im Innern des Glasapparates herrschten, als Abscissen eines rechtwinkeligen Coordinatensystems auf, als Ordinaten die Theile der Luftschichte in %, die bei Belichten so wirkten, als wären sie durch eine leitende Platte in gleicher Breite ersetzt worden, so ergibt sich als Verbindungslinie der entsprechenden Durchschnittspunkte für trockene atmosphärische Luft die vorstehende Curve (Fig. 2).

Es sei nochmals hervorgehoben, dass sich ohne geschlossenen Strom bei Belichten ebensowenig eine Veränderung an den abgeglichenen Condensatoren zeigte, wie bei geschlossenem Strome ohne Belichten. Beides musste zu derselben Zeit erfolgen, um einen Ausschlag am Elektrometer im Sinne einer gesteigerten Capacität des bestrahlten Condensators zu ergeben. Wurde das Bogenlicht ausgelöscht, während der Ruhmkorff-Hammer im Gange blieb, oder bei weiter brennender Lampe der Strom unterbrochen, so verschwand auch die Wirkung sogleich, auch wenn diese eine dauernde war und zum Ausgleich ein Näherrücken der Platten des Vergleichcondensators erfordert hatte. Nur wenn die Verdünnung im Glasapparate so weit getrieben war, dass die Platten *AB* von ihrer ursprünglichen Distanz auf 3·9 *mm* genähert werden mussten, um die Lemniskate in ihre Nulllage zurückzuführen, so erwies sich dieses Compensationsmaximum auch dann noch als nöthig, wenn die Bogenlampe unterbrochen wurde. Bei dieser Verdünnung — zwischen Drücken unterhalb 1—0·1 *mm* Hg — zeigte bei abgedunkeltem Zimmer der Innenraum des Glasapparates bei geschlossenem Strome und vorangegangener Belichtung ein Leuchten der verdünnten eingeschlossenen Luft. Das dabei ausgestrahlte Licht flackerte im Takte der Unterbrechungen am Ruhmkorff, war gleichmässig hellgrünn wie die Spiegelglasscheiben des Apparates und sehr schwach, so dass eine Untersuchung mit dem Taschenspectroskop keinen näheren Aufschluss in spectralanalytischer Hinsicht ergab. Wurde auch der Strom unterbrochen und neuerdings ohne Erneuerung des Belichtens geschlossen, so erhielt sich die Elektrometernadel in Ruhe, falls die Platten des Vergleichcondensators auch in der Distanz von 3·9 *mm* von einander gelassen wurden — noch mehr die verdünnte Luft im Glasapparate leuchtete bei den genannten Drücken wieder auf, nach kurzer Stromunterbrechung fast gleichzeitig mit dem Stromschlusse, nach längerer Unterbrechung erst nach einigen Secunden. Stieg der Druck im Glasapparate durch Einleiten (trockener) Luft auf etwa 6 *mm* Hg, so verschwand das Leuchten und ein Lemniskatenausschlag

zeigte an, dass die Platten *AB* für den neuen Druck zu nahe an einander standen.

IV.

In diesem Abschnitte sollen die für das Eintreten der Belichtungswirkung nöthigen Stärken des elektrischen Feldes zwischen den Condensatorplatten bei der verwendeten Versuchsanordnung näher beschrieben werden.

Es ist schon erwähnt worden, dass bei den ersten Versuchen, welche eine Capacitätszunahme des belichteten Condensators ergaben, eine Smee'sche Tauchbatterie verwendet wurde. Diese hatte kurz nach dem Eintauchen der Metallscheiben in frisch angesäuertes Wasser eine Stromstärke von fast 5 Ampère, die jedoch schon nach kurzem Gebrauche auf 3, sogar bis auf 2 Ampère zurückging. Der mit ihr verbundene Ruhmkorff zeigte an den Polen seines secundären Stromkreises eine grösste Potentialdifferenz von circa 6000 Volt; ein entsprechend geschaltetes Funkenmikrometer mit Messingelektroden ($r = 0\cdot5$ *cm*) gab noch Funken von 1·44 *mm* Schlagweite. Dagegen reichte die Spannung des direct ohne Inductionsapparat verwendeten Wechselstromes der I. E.-G. mit 100 Volt ebenso wenig aus, um bei Belichten des luftverdünnten Zwischenraumes des Stanniolcondensators eine gesteigerte Capacitätszunahme desselben zu erhalten, wie die mittelst eines Schlittenapparates transformirte Spannung, die aber immer noch weniger als 2900 Volt betrug. Eine Potentialdifferenz von 6000 Volt an den Polen des secundären Stromkreises am Ruhmkorff ergab beim Belichten die in der Tabelle eingetragenen Werthe. Wuchs die verwendete Stromstärke, indem in die Leitung des Wechselstromes ein geringerer Widerstand (25·7 S. E.) eingeschaltet wurde, so zeigten sich wie vordem erst bei einem Luftdrucke von 25 *mm* Hg die ersten Ausschläge; diese waren im Allgemeinen grösser als bei den vorangehenden Versuchen, auch fielen bei entsprechend tieferen Drücken die Compensationen durch Näherschrauben der Platten des Vergleichcondensators grösser aus. So mussten z. B. diese bei einem Drucke von 9 *mm* Hg im Innern des belichteten Glasapparates bis auf 6·8 *mm* genähert werden — während vordem

nach der Taeblle bei diesem Drucke bereits eine grössere Plattendistanz (7·2 *mm*) hinreichte, die Lemniscate in die gewöhnliche Ruhelage zurückzuführen. Die grösste Belichtungswirkung zeigte sich schon bei Drücken von 2 *mm* Hg, wobei sich auch das im abgedunkelten Zimmer deutlich sichtbare etwas intensivere Leuchten der verdünnten Luftschichte wie vordem wieder einstellte, das auch bei Drücken bis 0·01 *mm* noch anhielt. Unterhalb 0·01 *mm* Hg zeigte sich auch bei dieser Spannung, die bei einer Funkenschlagweite von 3 *mm* ungefähr 28400 Volt betragen mochte, keinerlei Veränderungen der Capacität des belichteten Condensators. Die Anwendung noch höherer Spannungen machten die bei der getroffenen Versuchsanordnung dann leicht eintretenden Entladungen am Elektrometer für vergleichbare Beobachtungen unmöglich.

Nahm aber die Spannung zwischen den Ruhmkorffpolen ab, so dass das eingeschaltete Funkenmikrometer noch Funken von 1·16 *mm* Länge, bei weiterer Abnahme der Stromstärke nur noch solche von 0·76 *mm* gab, so wurden die Wirkungen der Belichtung immer geringer: so trat erst bei Drücken, die unter 20 *mm* Hg lagen, ein Ausschlag der Elektrometernadel ein, geringere Compensationen als wie sie die Tabelle enthält, reichten hin, um die Condensatoren wieder abzugleichen. Die frühere Maximalwirkung, die sonst constant ein Näherrücken der Platten des Vergleichcondensators auf 3·9 *mm* zum Ausgleiche erforderte, trat nicht mehr ein, auch das sichtbare Aufleuchten der im Glasapparate eingeschlossenen verdünnten Luft blieb aus. War schliesslich der Strom, den bei diesem Versuche drei Daniell'sche Elemente mit entsprechend eingeschaltetem Widerstande dem Ruhmkorff lieferten, so weit geschwächt, dass das mit den Polen der secundären Spule des Inductionsapparates verbundene Funkenmikrometer Schlagweiten von 0·504 *mm* gab — denen eine Spannung von etwas mehr als 2900 Volt entsprachen — so zeigte selbst bei einem Drucke von 1 *mm* Hg Belichten des Glasapparates keinerlei Wirkung, wie sie sonst bei höheren Spannungen so oft eingetreten war.

Nach den zuletzt angegebenen Versuchen nimmt es nicht Wunder, wenn bei der vorliegenden Versuchsanordnung weder

bei Benützung des directen, noch des durch den Schlittenapparat transformirten Wechselstromes sich eine Wirkung gezeigt, da sie beide Potentialdifferenzen ergaben, bei denen unsere Anordnung überhaupt eine Capacitätsänderung des bestrahlten Condensators nicht mehr erkennen liess. Dass für das Eintreten der Belichtungswirkung eine genügend hohe Potentialdifferenz ein wesentlicher Factor ist, das werden auch bei einer anderen Anordnung gemachte Versuche bestätigen, die später erwähnt werden sollen.

V.

Bei der nun folgenden zusammenfassenden Berücksichtigung des Einflusses verschiedener Belichtungsquellen ist zunächst an die Wirkung des Magnesiumlichtes, sowie des elektrischen Bogenlichtes bei der verschieden weit geführten Verdünnung der Luft des Glasapparates zu erinnern. Bei einer mittleren, schon früher näher bestimmten Stromstärke und Spannung hat das Belichten mit den genannten beiden Lichtquellen von dem gewöhnlichen Luftdrucke herab bis auf 26 *mm* Hg keinen Einfluss auf eine Capacitätsänderung des belichteten Condensators; bei Luft unter einem Drucke von 25—0·01 *mm* zeigen sich dann angeregt durch das Belichten die bekannten Wirkungen im Sinne einer Capacitätszunahme, die aber bei den Drücken unterhalb 0·01 *mm* Hg nicht mehr erfolgen.

Der Einfallswinkel der Belichtungsstrahlen, sowie die Dauer der Belichtung schien bei ruhigem Gange der Unterbrechungen am Ruhmkorff bei dem intensiven Lichte der Bogenlampe ohne besonderen Einfluss zu sein, wie sich denn auch keine grösseren Wirkungen zeigten, wenn die Bogenlampe, die gewöhnlich 50 *cm* von der Gypsplatte entfernt stand dieser bis auf 5 *cm* genähert wurde. Auch der Spalt ($13 \times 0 \cdot 8\, cm^2$) der zur Erde abgeleiteten Schutzwand, hinter dem die Gypsplatte hart anstand, konnte auf ein Viertel seiner Höhe oder auch seiner Breite eingeengt werden, ohne dass sich die Belichtungswirkungen merklich verringert hätten; doch reducirte eine Spaltöffnung, die immer zugleich Belichtungsöffnung war,

von nur 2 *mm* Höhe den dauernden Ausschlag, der sich bei einem Luftdrucke von 1 *mm* Hg bei voller Spalthöhe sonst gezeigt, auf einen nur momentanen, der zurückging und damit ein Verschwinden der Capacitätszunahme andeutete, dem aber gleich wieder bei unveränderter weiterer Belichtung ein neuerlicher Ausschlag folgte, um wieder zurückzugehen und von Neuem einzutreten im Gegensatze zu der früher erwähnten Wirkung zwischen 25 *mm* und 10 *mm* Hg Luftdruck, wo die Lemniscate nach einem momentanen, alsbald zurückgehenden Ausschlage trotz ununterbrochenen Weiterbelichtens in Ruhe verblieb. In den Gang der Strahlen gehaltene weisse Glasscheiben, sowie färbige Scheiben, und zwar rothe, dunkel- und lichtorange, gelbe Gläser liessen die wirksamen Strahlen nicht hindurch; es dürfte also, wie von allem Anfange angenommen, der wesentliche Einfluss den Strahlen grosser Brechbarkeit unserer Belichtungsquelle auch bei den vorliegenden Versuchen zuzuschreiben sein. Auch dünne (1—2 *mm*) Scheiben Paraffin, wie auch mit geschmolzenem Paraffin getränktes weisses Schreibpapier absorbiren die wirksamen Strahlen, während bei einer klaren, nur 0·05 *mm* dicken Glimmerplatte die Ausschläge sich wie ohne diese zeigten. Um auch den Einfluss der Richtung der Lichtschwingungen zu finden, wurde ein Nicol'sches Prisma vor den Beleuchtungsspalt, der bis auf die Grösse der Metallfassung des Kalkspathrhomboëders abgedunkelt war, gestellt; doch ergab sich bei keiner Stellung des letzteren eine Wirkung in dem bekannten Sinne — der fast 4 *cm* lange Nicol liess zu wenig wirksame Strahlen in den Innenraum des Glasapparates gelangen. Wurde der Nicol aus seiner äusseren Fassung entfernt, so zeigte sich sogleich der Lemniscatenausschlag in der früheren Richtung und Grösse.

Ausser mit Mg- und Bogenlicht wurde die verdünnte Luftschichte des Glasapparates an einem klaren Sommertage mit Sonnenlicht bestrahlt, das an einem Spiegel reflectirt, in den Apparat fiel. Es ergab merkliche, wenn auch geringe Ablenkungen der Elektrometernadel, z. B. bei 8 *mm* Luftdruck eine solche von 20 Theilstrichen, die langsam zurückging, während ein darauf erfolgtes Belichten mit der Bogenlampe einen weit grösseren Ausschlag der Lemniscate mit einer

dauernden Ablenkung derselben zur Folge hatte, die eine Compensation durch Näherrücken der Platten des Vergleichcondensators erst wieder aufhob. Auch die Strahlen einer leuchtenden, sowie einer heissen Leuchtgasflamme eines Bunsenbrenners, knapp vor den Spalt gestellt, gaben kleine Lemniscatenausschläge, die bei Belichten mit einer Spiritusflamme beträchtlich grösser wurden. Bei 0·4 *mm* Hg brachte das Licht einer Kerze, die 3 *cm* vor dem Glasapparate brannte, den verdünnten Zwischenraum nach Stromschluss zum Leuchten und machte ein Näherrücken der Platten des Vergleichcondensators bis auf 3·9 *mm* — also die grösste Compensation — nöthig, um die Lemniscate in der gewöhnlichen Ruhelage zu erhalten. Es genügt demnach eine verhältnissmässig wenig Strahlen grosser Brechbarkeit aussendende Lichtquelle, um bei dieser Versuchsanordnung Ergebnisse zu erzielen, wozu ohne diese Anregung, wie etwa bei den Tesla'schen Versuchen, bedeutend stärkere elektrische Felder vorhanden sein müssten.

VI.

Bei den bisher beschriebenen Versuchen befand sich durch Chlorcalcium getrocknete atmosphärische Luft bei Zimmertemperatur in dem Glasapparate. Dieser wurde ausser mit Luft noch mit Wasserstoff und Kohlensäure gefüllt, zwischen die Stanniolcondensatorplatten gestellt und dann analoge Versuche wie mit Luft angestellt. Der Wasserstoff wurde in einem Kipp'schen Apparate mit Zink und Schwefelsäure, die Kohlensäure durch Einwirken von verdünnter Salzsäure auf Marmor erhalten. Diese Gase wurden mit concentrirter Schwefelsäure und Chlorcalcium getrocknet in den bis auf Hundertel Millimeter Hg evacuirten Glasapparat langsam eingeleitet. Die sonstigen Verunreinigungen dieser Gase, welche die verwendete bequeme Darstellungsweise mit sich bringt, waren wohl zu gering, als dass sie die Ergebnisse merklich beeinflussen konnten, wesshalb sie auch nicht weiter berücksichtigt wurden. Da Wasserstoff sowohl wie Kohlensäure ultraviolette Strahlen stark absorbiren, so waren ähnliche Anordnungen wie bei Luft vorausgesetzt, analoge Wirkungen also auch Capacitätszunahmen des Stanniolcondensators bei Belichten mit

Strahlen grosser Brechbarkeit zu erwarten. In der That stellten sich bei diesen beiden Gasen für die Stromstärke und die Plattendistanzen der Condensatoren, welche der Tabelle für atmosphärische Luft zugrunde liegen, ganz ähnliche Wirkungen ein, wie die folgenden Angaben zeigen.

H		CO_2	
p	*d* von *AB*	*p*	*d* von *AB*
750, 80, 50	7·9 (0%)	750, 45, 25	7·9 (0%)
45	Zurückgehende Ausschläge	19	Zurückgehender Ausschlag
30		17	7·5 (10%)
27		13	6·5 (35%)
25	7·2 (17·5%)	9	6·3 (40%)
13	5·3 (65%)	6	5·8 (52·5%)
7	5·0 (72·5%)	2·0, 0·6, 0·08	3·9 (100%)
2·5	3·9 (100%)	0·03	4·3 (90%)
0·6		0·008	4·5 (85%)
0·06	7·9 (0%)	0·004	7·9 (0%)

Diese Tabelle enthält nur die wesentlichen Rubriken der früheren: Die erste Reihe gibt wieder die Drücke im Glasapparate in Millimeter Hg an, die zweite die jeweilige genäherte Plattendistanz des Vergleichcondensators, welche zur Compensirung der Belichtungswirkung nöthig war und in Procenten ausgedrückt jenen Bruchtheil der verdünnten belichteten Gasschichte, der sich im Condensator wie ein vollkommener Leiter verhielt.

Die folgenden Curven (Fig. 3 und 4) gelten für Wasserstoff und Kohlensäure, wie die auf S. 13 für Luft galt, der sie auch im Grossen und Ganzen ähnlich sehen.

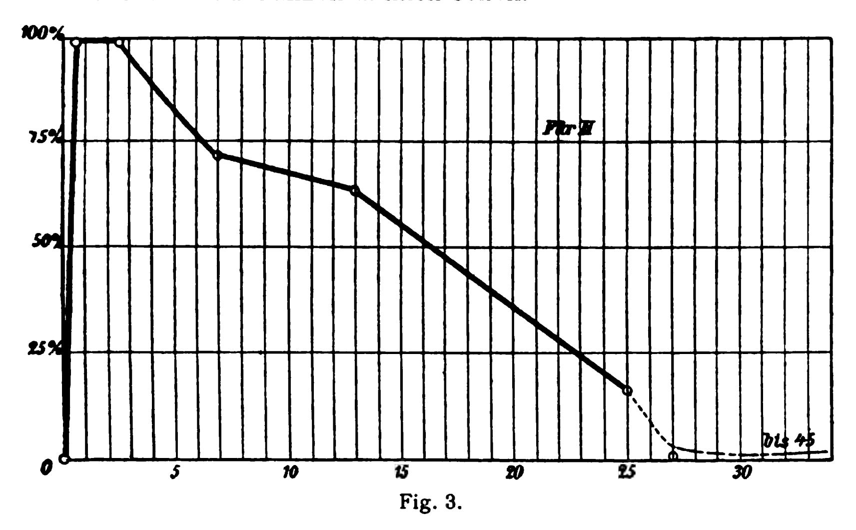


Fig. 3.

. Auch bei H und CO_2 tritt nach geschlossenem Stromkreise im Allgemeinen erst immer bei verhältnissmässig tiefen Drücken eine bemerkbare Einwirkung des Belichtens ein.

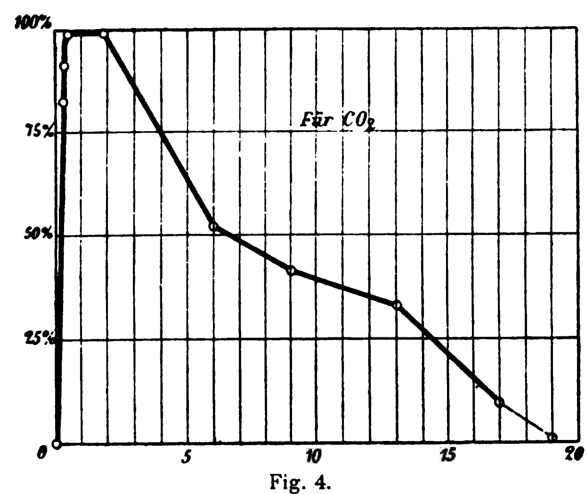


Fig. 4.

Bei H zeigt sich schon bei 45 *mm* Hg Druck im Glasapparate eine momentane, bald verschwindende Wirkung, die bei 25 *mm* in eine dauernde — solange wenigstens die Belich-

tung erfolgt — übergeht. Steigende Verdünnung bedingt ein weitergehendes Nähern der Platten des Vergleichcondensators, um die Elektrometernadel in ihrer Ruhelage zu erhalten; bereits bei 2·5 *mm* zeigt der Stanniolcondensator eine Capacitätszunahme, als ob der Innenraum des Glasapparates nicht mehr zwischen seinen Platten vorhanden wäre. Bei einem Drucke von 0·06 *mm* Hg ist schliesslich auch bei H die untere Wirkungsgrenze erreicht. Belichten hat wie bei Drücken oberhalb 45 *mm* Hg keine Lemniscatenausschläge mehr zur Folge.

Bei CO_2 zeigt sich die erste bemerkbare Einwirkung des Belichtens erst bei weit tieferen Drücken; dann stellen sich aber sogleich bedeutende Ausschläge ein, die zwar bei 19 *mm* Hg Druck trotz Weiterbelichtens vergehen, aber bereits bei 17 *mm* eine Compensation durch Nähern der Platten des Vergleichcondensators erfordern. Mit Abnahme des Druckes wächst die Belichtungswirkung, die bei 2 *mm* Hg wieder dasselbe Maximum wie bei Luft und H erreicht. Doch dauert bei CO_2, wie auch bei H die Wirkung bei allen untersuchten Drücken, auch da, wo sie das Maximum erreichte, nur während des Belichtens. Ein Erlöschen der Bogenlampe brachte alsbald trotz ungeändertem Stromschluss wieder eine Abnahme der Capacität des Stanniolcondensators mit sich. Das bei Luft eingetretene Leuchten der verdünnten Zwischenschichte konnte bei den entsprechenden Drücken weder bei H noch CO_2 beobachtet werden. Bei Drücken unterhalb 0·08 *mm* nimmt auch für CO_2 die Belichtungswirkung ab; eine untere Grenze, bei welcher die Belichtung die Ruhelage der Lemniscate nicht verändert, tritt bei diesem Gase erst bei tiefsten Verdünnungen ein. Wurde in den Apparat etwas trockene CO_2 — gleiches gilt für H und auch für Luft — eingelassen, so dass der Druck desselben von den niedrigsten Werthen auf etwa 5 *mm* Hg stieg, so zeigte die Lemniscate bei fortdauernder Belichtung sogleich einen Ausschlag; die Bestrahlung machte wieder ihren Einfluss geltend. Nicht veränderte Stromverhältnisse, sondern die zu weit verdünnte Zwischenschicht hatten das Ausbleiben der Nadelablenkungen verschuldet. Es sei noch erwähnt, dass die breiten Aussenseiten des Glasapparates vor jeder Neueinstellung zwischen die Platten des Stanniolcon-

densators sorgfältig mit einem wärmeren Tuche abgetupft wurden, um die Feuchtigkeitsschichten, die sich aus der Luft an ihnen angesetzt, wegzunehmen; dessgleichen wurden die Condensatorplatten, sowie die Lemniscate nach jedem Versuche abgeleitet. Wenn sich eine dauernde Ablenkung der letzteren gezeigt, so wurde der Apparat mit getrockneter Luft beziehungsweise H oder CO_2 gefüllt und dann wiederum entsprechend weit evacuirt.

Zur besseren Übersicht über die dauernden Belichtungswirkungen folgt eine Zusammenstellung derselben, mit Angabe der Drücke, bei denen sie eintraten; die Querstriche in den Rubriken besagen, dass bei diesen Drücken die betreffenden Gase nicht beobachtet wurden. Die Zahlen geben in Procenten jenen Bruchtheil der ganzen Gasschichte an, der sich wie vollkommen leitend verhielt

p	Luft	CO_2	H
750—26	0	0	0
25	0	0	17·5%
17	0	10%	—
13	0	35	65
9	17·5%	40	—
7	—	—	72·5
6	—	52·5	—
5	65	—	—
2·5	—	—	100
2	—	100	—
1	85	—	—
0·6	—	100	100
0·5	100	—	—
0	0	0	0

VII.

Sämmtliche im Vorstehenden angegebenen Versuche wurden unter Zugrundelegung der Gordon-Lecher'schen Anordnung zur Bestimmung von Dielektricitätsconstanten aus-

geführt; innerhalb gewisser Druckgrenzen ergaben sich — entsprechende Stromstärken vorausgesetzt — bei Belichten, insbesondere mit der Bogenlampe, Wirkungen, die verständlich werden, wenn man annimmt, dass verdünnte Gase durch Belichten ihr Verhalten elektrischen Ladungen gegenüber in einer Weise ändern, als wären sie selbst leitend geworden, dass man es aber dabei nicht mit einer Leitung im gewöhnlichen Sinne zu thun hat, die auch bei geringen Potentialdifferenzen durch Belichten angeregt werden kann, dafür sprechen einmal die schon erwähnten Versuche, bei denen die verwendeten Spannungen unter 2900 Volt lagen, die keine Belichtungswirkung im Sinne eines Leitendwerden der verdünnten Luft zeigten. Diese Behauptung werden auch die folgenden Versuche beweisen, bei denen die bisher verwendete Anordnung durch eine neue höchst einfache Zusammenstellung ersetzt wurde.

Das eine Quadrantenpaar des bisher gebrauchten Elektrometers war mit der Lemniskate und mit einer Platte des Stanniolcondensators — der zweite Condensator wurde nicht mehr weiter benöthigt — leitend verbunden; das andere Quadrantenpaar, sowie die Metallhülle des Elektrometers waren zur Erde abgeleitet. Der Condensator stand auch jetzt vor dem Spalt der zur Erde abgeleiteten Schutzwand und enthielt zwischen seinen Platten den bekannten Glasapparat, ohne ihn zu berühren.

Wurde nun die zweite, nicht mit dem Elektrometer verbundene Condensatorplatte mit dem einen Pole einer Zambonischen Säule (circa 200 Volt) verbunden, deren zweiter Pol dabei abgeleitet war, so wirkte die auf die Platte übergegangene Ladung inducirend durch den Glasapparat auf die zweite Condensatorplatte und auf die mit dieser verbundenen Quadranten; die Lemniskate des Elektrometers ergab als Mittelwerth einer Reihe von Beobachtungen Ausschläge von 163 Theilstrichen. Die Luft im Glasapparate war auf 0·5 *mm* Hg verdünnt, bei welchem Drucke bei den früheren Versuchen die grösste Belichtungswirkung sich gezeigt hatte. Ein Ableiten der beiden Condensatorplatten führte die Lemniskate in die Ruhelage zurück. Wurde darauf die Zwischenschichte verdünnter Luft wie früher mit elektrischem Bogenlicht bestrahlt,

die Condensatorplatten wie vordem geladen, so ergaben sich Lemniskatenausschläge von 160 Theilstrichen, also keine grösseren Werthe wie ohne Belichten. Wäre aber die Zwischenschicht Luft leitend geworden, so hätte sich der Ausschlag bei der empfindlichen Schaltung des Elektrometers wesentlich vergrössern müssen, trotzdem die Condensatorplatten 4 *cm* von einander standen, um noch übersehbare Lemniskatenausschläge zu erhalten.

Um die Wirkung der Bestrahlung auf die verdünnte Luftschichte — wenn eine solche überhaupt eintrat — noch merklicher zur Geltung zu bringen, wurden die Condensatorplatten möglichst nahe an den Glasapparat, ohne ihn aber zu berühren, gebracht. Zur Vermeidung zu grosser Ausschläge der Elektrometernadel wurde zum Laden der einen Condensatorplatte eine Batterie von 50 Smee'schen Wasserelementen zusammengestellt, die Verbindung des Quadrantenpaares mit der Lemniskate unterbrochen und die Nadel selbst dauernd mit der Zambonischen Säule geladen. Auch bei dieser Verbindung wurden die Condensatorplatten vor jedem Versuche abgeleitet und damit auch die Quadrantenpaare auf das Potential Null gebracht. Ein Laden mit der Smee'schen Batterie aus den 50 Wasserelementen hatte im Mittel Ausschläge von 97 Theilstrichen zur Folge, wenn der Glasapparat mit der verdünnten Luft nicht belichtet wurde, bei Belichten mit Bogenlicht solche von 96·5 (im Mittel). Auch bei dieser Anordnung ergab sich demnach keine gesteigerte Inductionswirkung durch Belichten, obwohl die verdünnte, bestrahlte Luftschichte ein Drittel der Plattendistanz des Condensators einnahm und die in ihrer ganzen Breite hätte herausfallen müssen, falls sie leitend geworden wäre.

Zum Eintritte der veränderten Wirkung der bestrahlten Luft erweist sich also nicht bloss Belichten, sondern auch eine entsprechende Stärke des elektrischen Feldes als unbedingt nothwendig.

VIII.

Die erste grössere Hälfte der Versuche ergab zweifellos einen Einfluss der Bestrahlung auf die Capacitätsverhältnisse

des Stanniolcondensators, der zwischen seinen Platten den belichteten Glasapparat enthielt.

Man wird geneigt sein, als Ursache dieser Belichtungswirkung Entladungen von der mit dem Ruhmkorffpole verbundenen Platte des Stanniolcondensators anzusehen. Nun treffen aber die Strahlen der Bogenlampe die Condensatorplatten nicht unmittelbar, sondern diese erhielten höchstens Seitenlicht, das an der inneren Glaswand reflectirt wurde und überdies erst dann, nachdem es eine 8·35 *mm* dicke Glastafel durchsetzt hatte. Von vorn schützte ausser der mit Stanniol überzogenen abgeleiteten Wand, welche nur einen Spalt in der Ausdehnung der verdünnten Zwischenschichte hatte, die mit isolirendem Dubois'schen Kitte aufgeklebte Gypsplatte und ihre nach beiden Seiten vorstehenden, gut mit dem gleichen undurchsichtigen Kitte überzogenen Ränder, welche auch desshalb an der natürlichen Gypsplatte gelassen worden waren. Aber auch die von den inneren Glaswänden reflectirten Strahlen hatten keinen Einfluss auf Entladungen von der Condensatorplatte. Wurden nämlich zwischen Glasapparat und Condensatorplatten undurchsichtige Paraffinpapierblätter gelegt, so dass auch die an den Glaswänden zurückgeworfenen Lichtstrahlen nicht mehr den Condensator treffen konnten, so gab die Lemniskate auch jetzt, wie vordem, ohne eingeschobenes Paraffinpapier Ausschläge, die auf eine Capacitätszunahme des Stanniolplattencondensators mit dem bestrahlten Glasapparate hinwiesen. — Es wäre auch kaum einzusehen, warum erst bei verhältnissmässig niedrigen Drücken im Apparate, der die Condensatorplatten nicht berührte, Entladungen an diesen, die stets von Luft unter gewöhnlichem Drucke umgeben waren, eintreten sollten. — Gegen das Vorhandensein von Entladungen von der Innenseite der Glasplatte des Apparates sprechen die Versuche, bei denen gerade für die tiefsten mit der zur Verfügung stehenden Luftpumpe herstellbaren Drücken (0·06 bis 0·004 *mm* Hg) die Bestrahlung gar keine Entladungen mehr veranlasste. Überhaupt würden wohl auch bei solchen die Ausschläge der Elektrometernadel kaum so regelmässig erfolgt sein, wie sie thatsächlich bei geregeltem Gange der Unterbrechungen am Ruhmkorff zu beobachten waren; ein Ab-

gleichen, namentlich bei der Maximalwirkung, wäre ganz unmöglich gewesen.

Unter dem Einflusse so hoher elektrischer Spannungen, wie die verwendeten, konnten vielleicht die Glasplatten ihr Verhalten diesen gegenüber wesentlich ändern und sich dabei ihre Dielektricitätsconstante bedeutend vergrössern, so dass die am Vergleichscondensator nothwendig werdende Compensation der veränderten Wirkung der Glasplatten zuzuschreiben war. Doch abgesehen von Untersuchungen diesbezüglicher Art,[1] deren Ergebnisse die Annahme einer solchen Änderung in der Constitution des Glases bei unserer Anordnung ausschliessen, könnte eine gesteigerte Wirkung der Glastafeln nie einen so grossen Einfluss auf die Capacität des Stanniolcondensators, wie ihn die Versuche zeigen, haben, nachdem beide Glasplatten zusammen wie eine Luftschichte in der Breite von 2·7 *mm* wirkten, während zum Ausgleich der grössten Belichtungswirkung ein Näherrücken der Platten des Condensators ohne Glasapparat von 10·9 *mm* auf 5·5 *mm* also um 5·4 *mm* erforderlich war.

Die Ursache der regelmässig sich einstellenden Ausschläge der Lemniskate ist, falls die bekannten Spannungen vorhanden sind, in der durch Bestrahlung veränderten verdünnten Gasschichte selbst zu suchen. Die Wirkung ist dabei an entsprechende Verdünnung, also an eine gewisse und zwar verhältnissmässig geringe Molekelanzahl sowohl für Luft, wie auch für H und CO_2 gebunden.

Bei der sonstigen Unbestimmtheit der eigentlichen Vorgänge im Glasapparate, könnte man versucht sein, die gefundenen Ergebnisse mit jener Theorie in Übereinstimmung zu bringen, welche nach Analogie zur Elektricitätsleitung der Elektrolyte die Annahme macht, dass die Überführung der Elektricität durch Ionen geschieht. Diese Theorie legt auch Arrhenius seinen anfangs angeführten Versuchen zu Grunde. Er sagt: »Unter gewöhnlichen Umständen wäre die Luft praktisch genommen, ein vollkommener Isolator. Bei der Bestrahlung der Luftmolekel mit geeignetem (ultravioletten) Lichte

---

[1] Benischke, diese Sitzungsber., 102, 2.a, S. 543, 1893.

werden die Ionen dieser Molekel in Schwingungen versetzt, welche der Luft bei gewöhnlicher Temperatur nicht zukommen. Diese Schwingungen der Ionen sind die ausreichende und nothwendige Bedingung dafür, dass die Luftmolekel elektrolytisch (activ) auftreten«. In dieser allgemeinen Fassung müssten auch geringe Potentialdifferenzen hinreichen, um Belichtungswirkungen zu ergeben. Dass dem aber nicht so ist, dass im Gegentheil ausser entsprechender Verdünnung des belichteten Gases sich dieses unter starken elektrischen Spannungen befinden muss, zeigen bei der Gordon-Lecher'schen Anordnung jene Versuche, bei denen der Wechselstrom der I. E.-G. direct, sowie der durch den Schlittenapparat transformirte Strom verwendet wurde. Bei der getroffenen Versuchsanordnung erwies sich für den Eintritt der anregenden Wirkung der Bestrahlung eine Potentialdifferenz von etwas mehr als 2900 Volt an den Polen des secundären Stromkreises des Ruhmkorff als nöthig. Auch die im vorangehenden Abschnitte beschriebenen Versuche, denen einfachere Versuchsanordnungen zu Grunde lagen, zeigen, dass Belichten ohne hohe Spannungen keine merkliche Wirkung ausübt. Man darf wohl sogar behaupten, dass bei jeder anderen Anordnung, bei der nicht so starke elektrische Felder hergestellt werden, wie sie die Gordon'sche Methode auf eine einfache Weise ermöglicht, sich kaum eine merkliche Capacitätszunahme des bestrahlten Condensators ergeben hätte. Ein Leitungsvermögen der verdünnten, belichteten Gase in dem allgemeinen Sinne Arrhenius existirt sicher nicht.

Wenn Arrhenius bei niedrigen Potentialdifferenzen nach dem Belichten Ausschläge der Galvanometernadel erhalten hat, so dürfte dies darin seinen Grund haben, dass bei seinen Versuchen Vorgänge mehr convectiver Art im Spiele waren, wie auch aus Versuchen Righi's[1] hervorgeht. Solche, bei den hier beschriebenen Versuchen anzunehmen, ist nach dem Mitgetheilten kaum möglich. Aber auch bei der Erklärung unserer Versuchsergebnisse an der Hand der Dissociationstheorie stösst man auf bedenkliche Schwierigkeiten. Da sich

---

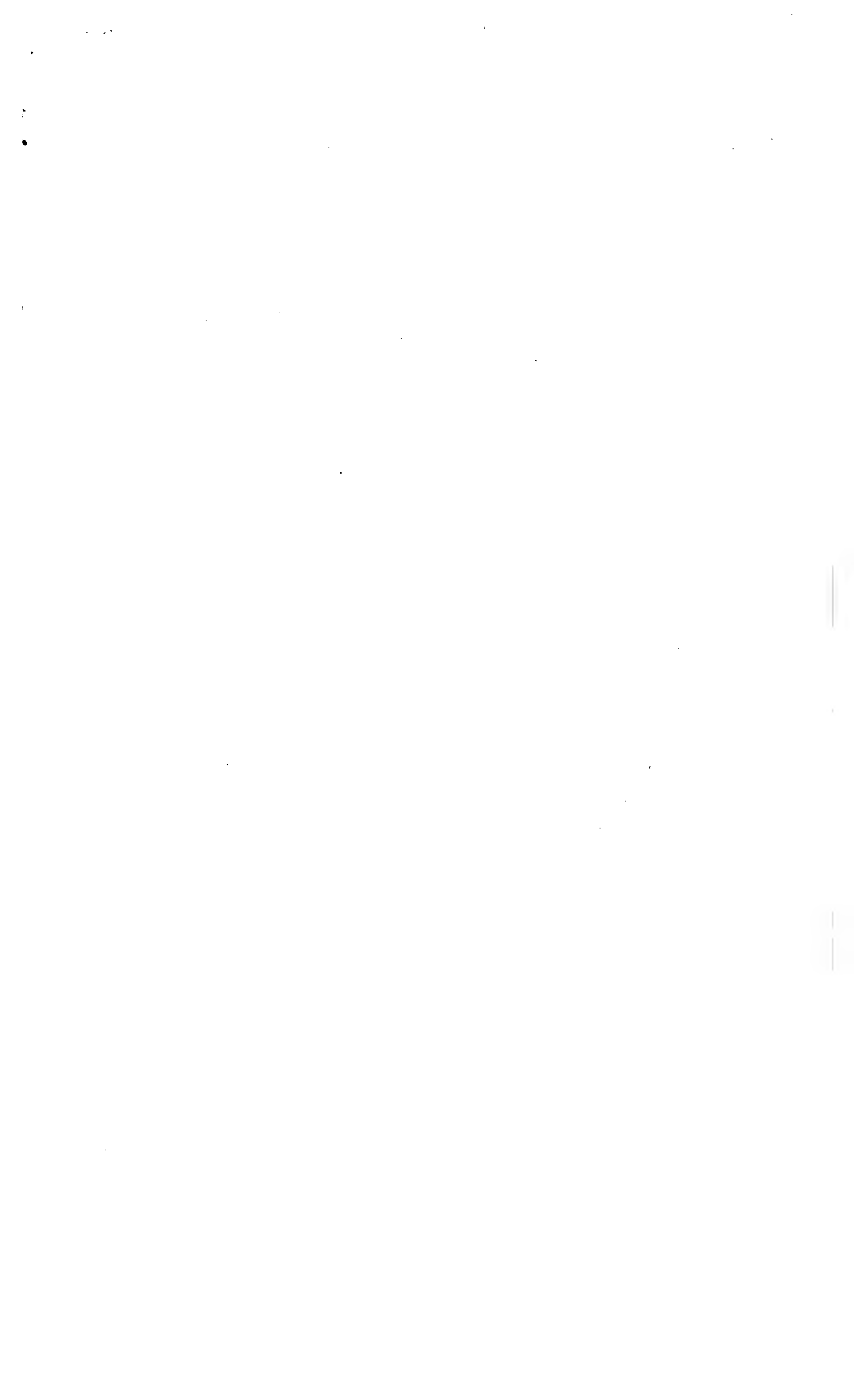
[1] Compt. rend. 107, p. 559, 1888.

nämlich sowohl bei CO_2 wie bei Luft und sogar bei H eine Belichtungswirkung gezeigt, so nöthigt diese Theorie in einem Gase von so einfacher Constitution wie es H ist, elektrisch ganz verschiedene Elemente anzunehmen und die Existenz negativ geladener Wasserstoffionen vorauszusetzen, wozu bisher nirgends ein experimenteller Anlass gegeben wurde. Mit Rücksicht auf das beschränkte Beobachtungsmaterial wird es daher angezeigt sein, für diesmal die Theorie der eigenartigen Ergebnisse nicht weiter zu verfolgen. Zweifellos haben die oft wiederholten Versuche eine weitere interessante Beziehung aus dem Grenzgebiete der Elektricität und Optik gebracht. Sie haben — um die Resultate nochmals kurz zusammenzufassen — gezeigt:

1. Dass verdünnten belichteten Gasen ein Leitungsvermögen in dem allgemeinen Sinne von Arrhenius nicht zukommt;

2. dass aber verdünnte Gase, angeregt durch Strahlen grosser Brechbarkeit, bereits in verhältnissmässig weniger starken elektrischen Feldern Eigenschaften erlangen, die sie sonst ohne Belichten erst bei weit höheren Spannungen zeigen.

Am Ende dieser Arbeit ist es für mich eine angenehme Pflicht, meinem hochverehrten Lehrer Herrn Prof. F. Exner für die Anregung, sowie für seine stets bereitwillige Unterstützung und Förderung bei diesen Untersuchungen meinen innigsten Dank auszusprechen.



SITZUNGSBERICHTE

DER

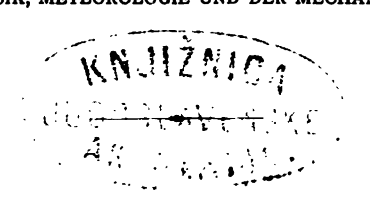
KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

CIV. BAND. VII. HEFT.

ABTHEILUNG II. a.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE, PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.





XVII. SITZUNG VOM 4. JULI 1895.

Erschienen ist das Heft V (Mai 1895) des 16. Bandes der Monatshefte für Chemie.

Der Vorstand des paläontologischen Institutes der k. k. Universität in Wien spricht den Dank aus für die diesem Institute überlassene Collection untertriasischer Cephalopoden aus dem von Dr. C. Diener im Central-Himalaya gesammelten Materiale.

Herr Prof. Dr. L. Weinek, Director der k. k. Sternwarte in Prag, übermittelt weitere Fortsetzungen seiner neuesten Mondarbeiten.

Das w. M. Herr Regierungsrath Prof. E. Mach übersendet eine Abhandlung von Prof. Dr. G. Jaumann in Prag: »Über longitudinales Licht«.

Das w. M. Herr Prof. L. Pfaundler übersendet eine mit Unterstützung der kaiserlichen Akademie im physikalischen Institute der k. k. Universität in Graz ausgeführte Arbeit von Prof. Dr. Ign. Klemenčič: »Über den Energieverbrauch bei der Magnetisirung durch oscillatorische Condensatorentladungen«.

Herr Dr. Alfred Burgerstein, Privatdocent an der k. k. Universität in Wien, übersendet eine Abhandlung, betitelt: »Vergleichend-histologische Untersuchungen des Holzes der Pomaceen«.

Herr Prof. Rudolf Andreasch an der k. k. Staats-Oberrealschule in Währing (Wien) übersendet folgende zwei, mit Unterstützung der kaiserlichen Akademie ausgeführte Arbeiten:

1. »Über Dimethylviolursäure und Dimethyldilitursäure«.
2. »Zur Kenntniss der Thiohydantoïne«.

Herr Emil Waelsch, Privatdocent an der k. k. deutschen technischen Hochschule zu Prag, übersendet eine Mittheilung: »Untersuchungen zu einer Binäranalyse mehrdimensionaler Räume«.

Der Secretär legt folgende eingesendete Abhandlungen vor:

1. »Die homogenen Coordinaten als Wurfcoordinaten«, von Prof. Dr. Gustav Kohn in Wien.
2. »Beitrag zur Geschichte der Begriffe Base, Säure und Salz«, von Dr. Ernst Elich in Berlin.

Das w. M. Herr k. u. k. Hofrath Director F. Steindachner überreicht eine von Frau Prinzessin Therese von Bayern und von ihm ausgeführte Arbeit: »Über einige Fischarten Mexiko's und die Seen, in welchen sie vorkommen«.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. J. Wiesner übergibt den zweiten Theil seiner »Photometrischen Untersuchungen auf pflanzenphysiologischem Gebiete«, betitelt: »Untersuchungen über den Lichtgenuss der Pflanzen, mit Rücksicht auf die Vegetation von Wien, Cairo und Buitenzorg auf Java«.

Das w. M. Herr Prof. Friedr. Brauer übergibt eine Arbeit über einige neuerer Zeit beschriebene neue Gattungen der Muscarien.

Ferner legt Herr Prof. Brauer eine Arbeit von Herrn Assistenten Anton Handlirsch vor, welche den Schluss zu dessen Abhandlungen »Monographie der mit *Nysson* und *Bembex* verwandten Grabwespen« bildet.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. V. v. Lang übergibt eine Mittheilung mit dem Titel: »Beobachtungen über die Widerstandsänderung des Contactes zweier Leiter durch elektrische Bestrahlung«.

Das w. M. Herr Prof. H. Weidel überreicht eine von Herrn Siegfried Blumenfeld im I. chemischen Universitäts-Labora-

torium ausgeführte Untersuchung: »Über Cinchomeronsäurederivate«.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. Ad. Lieben überreicht eine in seinem Laboratorium ausgeführte Arbeit von Dr. Konrad Natterer: »Über einige von dem Botaniker Dr. Otto Stapf aus Persien mitgebrachte salzhaltige Erd- und Wasserproben und deren Beziehungen zu den Meeresablagerungen«, mit einem Anhang, enthaltend die Analyse einer Wasserprobe aus dem Gaukhane-See, ausgeführt von Dr. Adolf Heider (†).

Das c. M. Herr Hofrath Prof. L. Boltzmann überreicht folgende zwei Abhandlungen:

1. »Polarisation und Widerstand einer galvanischen Zelle«, von Prof. Franz Streintz an der k. k. technischen Hochschule zu Graz.
2. »Die Laplace'sche und die Salmon'sche Schattentheorie und das Saturnringschatten-Problem«, von Dr. Hugo Buchholz in Jena.

Herr Dr. Tad. Garbowski in Wien überreicht eine unter Mitwirkung des Dr. C. Grafen Attems aus Graz ausgeführte Arbeit, betitelt: »Phyletische Deutung der *Lithobius*-Formen«.

Herr Adolf Steuer überreicht eine im zoologischen Institute der k. k. Universität in Wien ausgeführte Arbeit, betitelt: »Die Sapphirinen des Mittelmeeres und der Adria, gesammelt während der fünf Pola-Expeditionen 1890 bis 1894«.

Herr E. B. Rosenstadt, Assistent am zoologisch-anatomischen Institute der k. k. Universität in Wien, überreicht eine Abhandlung, betitelt: »Untersuchungen über die Organisation und postembryonale Entwickelung von *Lucifer Reynaudii*«.

Beobachtungen über die Widerstandsänderung des Contactes zweier Leiter durch elektrische Bestrahlung

von

V. v. Lang,

w. M. k. Akad.

(Mit 1 Textfigur.)

Durch Branly[1] wurde die merkwürdige Thatsache bekannt, dass Bestrahlung mit elektrischen Wellen den Widerstand von Glasröhren, die mit Metallfeilicht[2] gefüllt sind, verringert und dass eine geringe Erschütterung der Röhre wieder den ursprünglichen Widerstand herstellt.

Lodge[3] zeigte später, dass die erstere Erscheinung, und zwar sehr eclatant auch eintritt, wenn zwei Metalle sich nur an einer einzigen Stelle berühren. Er hat dies mit einer Vorrichtung nachgewiesen, die aus einer flachen Spirale aus Eisendraht bestand, deren äusseres Ende gegen ein Stückchen Aluminiumblech gedrückt wurde mit Hilfe eines Arms, welcher auf das innere Ende der Spirale wirkte.

Diese Vorrichtung gestattet aber nicht leicht das Verhalten verschiedener Metalle zu untersuchen, und da ich namentlich auch den Contact zweier Kohlenstücke prüfen wollte, so habe ich einen anderen Apparat benützt, welcher in umstehender

---

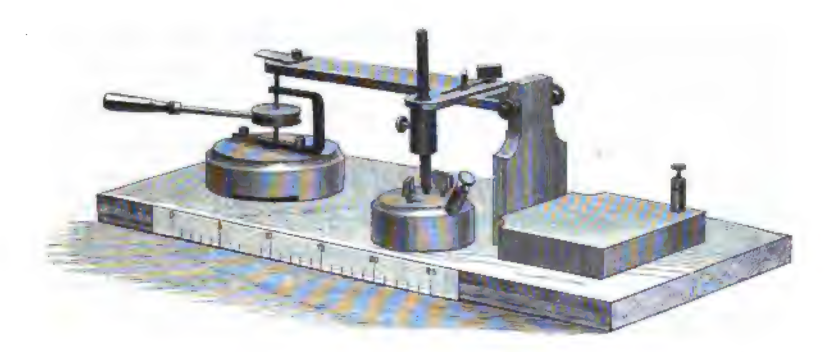
[1] Compt. rend., 1890, t. III, p. 785.

[2] Sehr bequem ist es, einfach eiserne Schrauben zu benützen, wie sie für Holz gebraucht werden. Die von mir verwendeten Schrauben waren beiläufig 0·1 *g* schwer.

[3] The work of Hertz and some of his successors. London (1894).

Zeichnung ungefähr in einem Achtel der natürlichen Grösse abgebildet ist.

Auf einer Steinplatte befindet sich in horizontaler Stellung ein stärkeres Messinglineal, welches als einarmiger Hebel wirkt. Ein Ende dieses Lineals ist gabelförmig ausgeschnitten, um die Spitzen zu tragen, welche, in ein schweres Zinkstück eingreifend, die Drehungsaxe des Hebels bilden. An dem anderen Ende befindet sich eine Stahlplatte, mit welcher der Hebel auf dem oberen Ende einer verticalen Schraube aufliegt. Diese Schraube bewegt sich in den beiden Armen eines zweimal rechtwinklig gebogenen Messingstückes; letzteres ist mit dem unteren Arme auf einem runden Zinkfusse befestigt.



Auf diese Weise ist der todte Gang bei der Bewegung der Schraube vermieden. Die Bewegung erfolgt durch einen Kopf, welcher zwischen den beiden, die Schraube fixirenden Armen, mit einer versenkten Gegenmutter an der Schraube befestigt ist. Um aber ganz feine Bewegungen ausführen zu können, sind in den Schraubenkopf von der Seite sechs Löcher gebohrt, in diese Löcher passt ein Stift, mit welchem ganz geringe Drehungen ausgeführt werden können.

Nahe der Drehungsaxe des Hebels (die Arme desselben sind 5 und 25 *cm* lang) ist mit zwei Schrauben ein verschiebbares Messingstück befestigt, das seitwärts eine Hülse trägt, um in deren axialen Bohrung einen linearen Körper A in verticaler Stellung festklemmen zu können.

Der zweite Körper B, dessen Contact mit A studirt werden soll, muss mehr oder weniger eine plattenförmige Gestalt haben,

derselbe wird auf einem zweiten runden Zinkfuss mit zwei Schrauben festgeklemmt. Will man den Contact eines Körpers mit Zink untersuchen, so ist es natürlich überflüssig erst eine Zinkplatte an dem Fuss zu befestigen. Dies ist der in der Zeichnung dargestellte Fall, welcher sich auf den Contact von Kohle und Zink bezieht.

Der zuletzt erwähnte Zinkfuss und das den Hebel tragende Zinkstück sind natürlich mit Klemmschrauben versehen, in welchen die zum Galvanometer führenden Drähte endigen. In einen dieser Drähte muss ersichtlich noch ein Element, am besten ein kleines Trockenelement eingeschaltet werden.

Das benützte Spiegelgalvanometer ist für objective Beobachtung eingerichtet und hat einen Widerstand von 7000 Ohm. Der zugehörige Richtmagnet wurde so gestellt, dass das Bild der Lichtquelle in der Ruhelage der Nadel gerade an dem einen Ende der Scala stand, welche im ganzen 60 Theilstriche im Abstand von 1 *cm* hat. Der Abstand der Scala und der Lichtquelle vom Spiegel betrug ungefähr 70 *cm*. Wie weit die Empfindlichkeit des Instrumentes durch Entfernen der Rolle herabgebracht wurde, ergibt sich aus folgender Tabelle, welche die Ablesungen bei Einschaltung der nebenstehenden Widerstände in den Stromkreis angibt.

Stand des Bildes	Widerstand
20·8	∞
22	100000
25	30000
28	10000
31	7000
34	4000
37	2000
40	500
43	140
45	0

Um nun die in Frage stehende Erscheinung zu sehen, müssen die beiden Leiter *A*, *B* in Contact gebracht werden, aber so wenig, dass die Ablenkung der Galvanometernadel bei

der angegebenen Empfindlichkeit kaum merkbar ist. Man findet diese richtige Stellung, indem man die Schraube vorsichtig nach abwärts bewegt und nach jeder kleinen Drehung eine Bestrahlung mit elektrischen Wellen vornimmt. Hiezu eignen sich, wie Lodge angegeben, sehr gut die jetzt schon sehr verbreiteten Gasanzünder, Patent Clark, welche ja auf dem Principe der Töpler'schen Influenzmaschine beruhen.

Nicht unbequem und in der Wirkung ziemlich gleich stark sind für den angegebenen Zweck auch die Funken eines Elektrophors, indem man den Deckel desselben mit einer abgeleiteten Messingkugel entladet. Bei den folgenden Versuchen wurden beide Arten, elektrische Wellen zu erregen, angewandt und der betreffende Apparat ungefähr in der Entfernung von $^2/_3$ Meter vom Contactpunkte in Thätigkeit gesetzt.

Hat man durch Abwärtsbewegung der Schraube die empfindliche Stellung beim Contacte zweier Metalle erreicht, so schlägt nach der Bestrahlung die Galvanometernadel in Folge des verringerten Widerstandes aus, kehrt aber sogleich in ihre Ruhelage zurück. Die empfindliche Einstellung ist nämlich verdorben und muss von Neuem aufgesucht werden; es ist dies ein sehr hindernder Umstand, besonders für die Demonstration der Erscheinung in Vorlesungen.

Die Untersuchung des Contactes zweier Kohlenstücke lehrte aber ein ganz anderes Verhalten kennen. Es wurden ein runder Kohlenstab (8 *mm* Durchmesser) und ein Stückchen einer Kohlenplatte, wie sie beide zu elektrischen Versuchen benützt werden, verwendet. Beide Kohlenstücke wurden vorerst in Königswasser ausgekocht um besonders Metalle zu entfernen. Bei dem ersten, nach dem vorhergehenden Verfahren angestellten Versuche zeigte sich nun gleich, dass nach der Ablenkung das Lichtbild auf der Scala stehen blieb und erst nach einer leisen Erschütterung des Apparates in die Stellung zurückging, aus der es abgelenkt worden war. Der Contact hatte aber nicht seine Empfindlichkeit verloren und der Versuch konnte beliebig oft wiederholt werden, ohne dass eine neue Einstellung der Schraube nöthig gewesen wäre. Man hat so dasselbe Verhalten, wie es die Eingangs erwähnten, mit Metallfeilicht gefüllten Röhren Branly's zeigen.

Ich überzeugte mich aber bald, dass das eben beschriebene Verhalten der Kohle kein exceptionelles ist und dass, wenn man nur jede, auch die geringste Erschütterung vermeidet, die Metalle sich ebenso verhalten. Wenigstens habe ich dies in der Combination Zink-Zink, Aluminium-Aluminium und Aluminium-Zink constatirt. So z. B. wurde bei der letzten Combination durch die Entladung des Elektrophordeckels das Bild vom Theilstrich 20·8 bis zum Theilstrich 41 abgelenkt, was eine Verringerung des Widerstandes von fast ∞ bis auf etwa 380 Ω bedeutet. Das Bild blieb in der abgelenkten Stellung und kehrte erst zurück, als der Deckel sachte auf den Elektrophor zurückgelegt wurde. Hiebei standen aber Contactapparat und Elektrophor auf zwei verschiedenen Tischen.

Bei der Untersuchung der Combination Zink-Zink hatte das Galvanometer eine etwas veränderte Aufstellung und die Nulllage der Nadel bei offenem Stromkreis war bei Theilstrich 19. Der Contact wurde nun so regulirt, dass die Nadel auf Theilstrich 22 zeigte. Die Entladungen des Gasanzünders brachten das Bild auf Theilstrich 31, ein leises einmaliges Klopfen mit der Fingerbeere auf den Steinsockel des Apparates führte das Bild wieder zurück zum Theilstrich 22. Ein zweiter Versuch ergab beziehungsweise die Ablesungen 33 und 25. Das Bild wurde hierauf durch Nähern des Gasanzünders bis Theilstrich 36 abgelenkt, durch das Rücken des Stuhles aber wieder auf 20 zurückgeführt. Von Neuem bis 40 abgelenkt, wurde es durch Teppichklopfen im Nachbarhause bis 34, durch Gehen, in dem ober dem Beobachtungsraume gelegenen Stockwerke, ganz auf 22 zurückgebracht.

Ein Beitrag zur Kinematik der Ebene

von

Friedrich Procházka,

Professor an der Realschule in Karolinenthal in Prag.

(Mit 2 Tafeln.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 14. Juni 1895.)

Construction des Krümmungsmittelpunktes der Bahncurve, welche der Schnittpunkt zweier um je einen festen Punkt gleichmässig rotirenden Geraden erzeugt.

1. Herr Professor Dr. L. Burmester befasst sich in seinem Werke: »Lehrbuch der Kinematik«[1] mit der Construction der Normale an der Bahncurve A des Schnittpunktes a (Fig. 1) zweier um die festen Punkte s und ${}^1s$ eines bestimmten ruhenden ebenen Systems Σ, rotirenden Geraden G und H und führt folgende Construction an:

Sind die lothrechten Geschwindigkeiten $\overline{aa_\mathfrak{v}^G}$, $\overline{aa_\mathfrak{v}^H}$, mit denen sich die beiden in a coincidirenden, respective zu G und H gehörenden Punkte im System Σ bewegen, gegeben, dann erhalten wir durch die in $a_\mathfrak{v}^G$, $a_\mathfrak{v}^H$, respective auf G, H errichteten Senkrechten, die sich in $a_\mathfrak{v}$ schneiden, die lothrechte Geschwindigkeit $\overline{aa_\mathfrak{v}}$ des Schnittpunktes a und in dieser Geraden auch die Normale der Bahncurve A.

Setzen wir der Einfachheit wegen voraus, dass die Gerade G momentan mit der Drehgeschwindigkeit $\omega_G = 1$ rotirt, dann stellt die Strecke $\overline{as}$ die lothrechte Geschwindigkeit des mit a coincidirenden Punktes der Geraden G vor (Fig. 2) und die lothrechte Geschwindigkeit $\overline{aa_\mathfrak{v}^H}$ ergibt sich, wenn wir die Drehgeschwindigkeit ω_H, mit deren die Gerade H rotirt, gleich $n \, . \, \omega_G$ annehmen, aus der Gleichung

[1] Dr. L. Burmester, Lehrbuch der Kinematik, I. Bd., S. 59.

$$\frac{\overline{a a^H_{\mathfrak{v}}}}{\overline{a^1 s}} = \omega_H = n.\omega_G = n \qquad \ldots 1)$$

Wir erhalten demnach die Normale $aa_{\mathfrak{v}}$ an der Bahncurve A, indem wir auf as die Senkrechte $sa_{\mathfrak{v}}$ und auf ${}^1sa^H_{\mathfrak{v}}$ die Senkrechte $a^H_{\mathfrak{v}}a_{\mathfrak{v}}$ errichten und den Schnittpunkt $a_{\mathfrak{v}}$ dieser Senkrechten mit a verbinden.

Wenn wir die Drehgeschwindigkeiten ω_G, ω_H, respective der Geraden G, H als constant annehmen, dann ist auch das Verhältniss $\frac{\omega_G}{\omega_H} = \frac{1}{n}$ constant und wir können in diesem Falle auch den Krümmungsmittelpunkt der Curve A construiren.

2. Den Krümmungsmittelpunkt bestimmen wir als den Berührungspunkt, den die Normale $N_A \equiv aa_{\mathfrak{v}}$ des Punktes a mit ihrer Hüllbahncurve, d. h. der Evolute der Curve A bildet.

Um die Bestimmung dieses Berührungspunktes auszuführen, benöthigen wir die Geschwindigkeiten zweier Schnittpunkte, welche die bewegte Normale mit zweien festen Curven bildet.[1]

Als diese zwei Curven nehmen wir die Bahncurve A selbst und die Curve B, welche der Punkt $a_{\mathfrak{v}}$ bei der Bewegung der Normale N_A erzeugt.

Die lothrechte Geschwindigkeit $\overline{aa_{\mathfrak{v}}}$, mit deren sich der Punkt a auf der Bahncurve A bewegt, haben wir bereits bestimmt und es bleibt übrig, noch die lothrechte Geschwindigkeit des Punktes $a_{\mathfrak{v}}$ in der Curve B zu construiren.

Um diese Geschwindigkeit zu bestimmen, betrachten wir den Punkt $a_{\mathfrak{v}}$ als Schnittpunkt der Geraden $sa_{\mathfrak{v}}$, $a^H_{\mathfrak{v}}a_{\mathfrak{v}}$ (Fig. 2), welcher sich bei der Rotation der Geraden G, H auch gleichzeitig auf eine bestimmte Art bewegt. Weil die Gerade $sa_{\mathfrak{v}}$ stets auf der Geraden G bei der gleichförmigen Rotation dieser Geraden im Punkte s senkrecht steht und desshalb dieselbe Drehgeschwindigkeit $= 1$ besitzt, repräsentirt die Strecke $\overline{sa_{\mathfrak{v}}}$ die lothrechte Geschwindigkeit des mit dem Punkte $a_{\mathfrak{v}}$ coincidirenden Punktes der Geraden $sa_{\mathfrak{v}}$.

---

[1] Daselbst, S. 64.

Um auch die Geschwindigkeit des mit dem Punkte $a_{\mathfrak{v}}$ coincidirenden Punktes der Geraden $a_{\mathfrak{v}}^H a_{\mathfrak{v}}$ zu bestimmen, müssen wir darauf Rücksicht nehmen, dass die Gerade $a_{\mathfrak{v}}^H a_{\mathfrak{v}}$ nicht nur um den Punkt ^1s rotirt, sondern sich zugleich mit dem Punkte $a_{\mathfrak{v}}^H$ in der Richtung der Geraden H verschiebt. Die Geschwindigkeit des mit dem Punkte $a_{\mathfrak{v}}$ coincidirenden Punktes der Geraden $a_{\mathfrak{v}}^H a_{\mathfrak{v}}$ ergibt sich demnach als Resultirende dieser beiden Geschwindigkeiten des Punktes $a_{\mathfrak{v}}$, welche ihm einerseits bei der Rotation der Geraden $a_{\mathfrak{v}}^H a_{\mathfrak{v}}$ um den Punkt ^1s und anderseits bei der Translation dieser Geraden in der Richtung der Geraden H ertheilt werden.

Um die erste Componente $\overline{a_{\mathfrak{v}} a'_{\mathfrak{v}}}$ zu bestimmen, verbinden wir den Punkt ^1s mit dem Punkte $a_{\mathfrak{v}}$ (Fig. 2) und schneiden diese Verbindungsgerade mit der zu der Normalen N_A durch den Punkt $a_{\mathfrak{v}}$ gezogenen Parallele $a_{\mathfrak{v}}^H a'_{\mathfrak{v}}$ im Punkte $a'_{\mathfrak{v}}$.

Die zweite, d. h. die Translationsgeschwindigkeit $a_{\mathfrak{v}} a''_{\mathfrak{v}}$, welche der Translationsgeschwindigkeit $a_{\mathfrak{v}}^H a_{\mathfrak{v}}^{H'}$ des Punktes $a_{\mathfrak{v}}^H$ in der Geraden H gleich ist, erhalten wir folgendermassen:

Die Geschwindigkeit $\overline{a_{\mathfrak{v}}^H a_{\mathfrak{v}}^{H'}}$ des Punktes $a_{\mathfrak{v}}^H$ ist nach der aus der Gleichung 1) (Nr. 1) sich ergebenden Beziehung

$$\overline{a a_{\mathfrak{v}}^H} = n . \overline{a\, ^1s}$$

gleich der $(1-n)$-fachen Geschwindigkeit $\overline{a_{\mathfrak{v}}^H a_{\mathfrak{v}}}$, mit deren sich der Punkt a in der Geraden H verschiebt.

Um diese Beziehung

$$\overline{a_{\mathfrak{v}}^H a_{\mathfrak{v}}^{H'}} = (1-n) . \overline{a_{\mathfrak{v}}^H a_{\mathfrak{v}}}$$

zu begründen, betrachten wir zuerst folgenden allgemeineren Fall.

Die Gerade P (Fig. 3) eines ebenen Systems S_2 gleitet durch den Punkt p des festen Systems S_1 und schneidet die festen Curven A, B dieses Systems, respective in den Punkten a, b. Suchen wir die lothrechte Geschwindigkeit eines Punktes c, dessen Lage auf der beweglichen Geraden P durch die Bedingung, dass $\overline{ac} = \overline{pb}$, gegeben ist. Weil die Bewegung des Punktes c das Resultat der Rotation um den Pol a' des bewegten Systems S_2 und der Translation in der Geraden P ist, construiren wir seine

lothrechte Geschwindigkeit auf Grund der lothrechten Geschwindigkeit, welche der Punkt c bei der ersten und der zweiten Bewegung besitzt. Wenn wir die Normale $N_a \equiv aa'$ im Punkte a der Curve A construiren und im Punkte p eine Senkrechte $P' \equiv pb'$ auf der Geraden P errichten, dann erhalten wir im Schnittpunkte a' dieser Geraden den Pol des bewegten Systems S_2. Setzen wir voraus, dass die Rotation des Systems S_2 mit der Drehgeschwindigkeit $= 1$ geschieht, dann repräsentirt die Strecke $\overline{ca'}$ die lothrechte Geschwindigkeit des mit dem Punkte c coincidirenden Punktes des Systems S_2. Weil die Translationsgeschwindigkeit dieses Punktes in der Richtung der Geraden P jener des Punktes b in derselben Geraden gleich ist, werden wir darum diese Geschwindigkeit construiren.

Zu diesem Zwecke construiren wir im Punkte b die Normale $N_b \equiv bb'$ der Curve B, welche die vorher construirte Gerade P' im Punkte b' schneidet. Die Strecke $\overline{pb'}$ repräsentirt dann die lothrechte Geschwindigkeit $\overline{cc'} \# \overline{pb'}$, welche der mit dem Punkte c coincidirende Punkt bei der Translation in der Geraden P besitzt. Vermittelst des Parallelogramms der Geschwindigkeiten $ca'c_0c'$ erhalten wir in seiner Diagonale $\overline{cc_0}$ die lothrechte Geschwindigkeit des Punktes und zugleich die Normale N_c der von diesem Punkte erzeugten Curve C. Einfacher erhalten wir die lothrechte Geschwindigkeit $\overline{cc_0}$, indem wir die Strecke $\overline{pb'}$ auf die Gerade P vom Punkt a' in derselben Richtung übertragen und den erhaltenen Punkt mit dem Punkte c verbinden. Dabei repräsentirt die Strecke $\overline{pc_0}$ die lothrechte Geschwindigkeit, mit deren sich der Punkt c in der Geraden P verschiebt.

Wenn aber die Lage des Punktes c derart bestimmt ist, dass $\overline{ac} = bp = -n.\overline{ap}$, dann bestimmen die Punkte b eine — der Curve A in Bezug zum Punkte p als dem Ähnlichkeitspole ähnliche — Curve B und die Strecke $\overline{pb'} = n.\overline{pa'}$ repräsentirt die lothrechte Geschwindigkeit des Punktes b in der Geraden P (Fig. 4). Wenn wir diese Strecke $\overline{pb'}$ vom Punkte a' diesmal in entgegengesetzter Richtung auf die Gerade P' übertragen, erhalten wir den Punkt c_0 und in der Strecke $\overline{cc_0}$ die lothrechte Geschwindigkeit des Punktes c. Die Strecke $\overline{pc_0} = (1-n).\overline{pa'}$ repräsentirt die Geschwindigkeit, mit deren der Punkt c in der

Geraden P rückt. Wenn aber die Strecke $\overline{ac} = -n.\overline{ap}$ zugleich die lothrechte Geschwindigkeit des Punktes a bei der Bewegung der Geraden P darstellt, dann erhalten wir, wie leicht ersichtlich, die lothrechte Geschwindigkeit $\overline{cc'_{\mathfrak{v}}}$, mit deren sich der Punkt c in der Geraden P verschiebt, indem wir die Senkrechte $ce \perp ap$ errichten und $\overline{ec'_{\mathfrak{v}}} = -n.\overline{ec}$ machen, oder wenn wir durch den Schnittpunkt f, der Geraden $cc_{\mathfrak{v}} \| aa'$ mit der Geraden ep, die Gerade $fc'_{\mathfrak{v}}$ mit ap parallel ziehen. Es ergibt sich dann aus dieser Construction, dass $\overline{cc'_{\mathfrak{v}}} = (1-n).\overline{ce}$.

Dieselbe Bewegung vollführt der Punkt $a^H_{\mathfrak{v}}$ in der Geraden H und desshalb erhalten wir seine Geschwindigkeit $a^H_{\mathfrak{v}} a^{H'}_{\mathfrak{v}}$ gleicherweise (Fig. 2), indem wir $a'_{\mathfrak{v}} a^{H'}_{\mathfrak{v}}$ parallel zur Geraden H bis an die Gerade $a_{\mathfrak{v}} a^H_{\mathfrak{v}}$ ziehen.

Wenn wir die Strecke $\overline{a^H_{\mathfrak{v}} a^{H'}_{\mathfrak{v}}}$ (Fig. 2) vom Punkte $a_{\mathfrak{v}}$ auf die verlängerte Gerade $a^H_{\mathfrak{v}} a_{\mathfrak{v}}$ übertragen, dann erhalten wir die Translationsgeschwindigkeit $\overline{a_{\mathfrak{v}} a''_{\mathfrak{v}}}$ des Punktes $a_{\mathfrak{v}}$ als die zweite verlangte Geschwindigkeitscomponente. Vermittelst des Parallelogramms der Geschwindigkeiten $a_{\mathfrak{v}} a'_{\mathfrak{v}} a^1_{\mathfrak{v}} a''_{\mathfrak{v}}$ erhalten wir die resultirende Geschwindigkeit $\overline{a_{\mathfrak{v}} a^1_{\mathfrak{v}}}$ des mit dem Punkte $a_{\mathfrak{v}}$ coincidirenden Punktes der Geraden $a_{\mathfrak{v}} a^H_{\mathfrak{v}}$. — Errichten wir jetzt in dem Punkte s auf der Geraden $sa_{\mathfrak{v}}$ eine Senkrechte, welche mit der Geraden G zusammenfällt, und fällen wir vom Punkte $a^1_{\mathfrak{v}}$ auf die Gerade $a_{\mathfrak{v}} a^H_{\mathfrak{v}}$ die Senkrechte $a^1_{\mathfrak{v}} a^2_{\mathfrak{v}}$, welche zugleich mit der Geraden H parallel ist, dann erhalten wir in dem Schnittpunkte beider Senkrechten den Punkt $a^2_{\mathfrak{v}}$,[1] welcher mit dem Punkte $a_{\mathfrak{v}}$ verbunden, die resultirende Geschwindigkeit $\overline{a_{\mathfrak{v}} a^2_{\mathfrak{v}}}$ des die Curve B erzeugenden Punktes $a_{\mathfrak{v}}$ angibt.

Sind jetzt die beiden lothrechten Geschwindigkeiten $\overline{aa_{\mathfrak{v}}}$, $\overline{a_{\mathfrak{v}} a^2_{\mathfrak{v}}}$ der Punkte a, $a_{\mathfrak{v}}$ der Normale N_A der Curve A gegeben, so ziehen wir (Fig. 2) $a_{\mathfrak{v}} a^3_{\mathfrak{v}} \perp N_A$, $aa^3_{\mathfrak{v}} \| a^2_{\mathfrak{v}} a_{\mathfrak{v}}$ und hierauf die Gerade $a^2_{\mathfrak{v}} a^3_{\mathfrak{v}}$, welche auf der Normalen N_A den Krümmungsmittelpunkt o der Curve A bestimmt.[2]

3. Obwohl sich die Krümmungsmittelpunkts-Construction vermittelst lothrechter Geschwindigkeiten einfacher darstellt, dennoch werden wir mancher interessanten Ergebnisse wegen

---

[1] Daselbst, S. 56.

[2] Daselbst, S. 64—65.

den Krümmungsmittelpunkt der Curve A vermittelst gewöhnlicher Geschwindigkeiten bestimmen.

Wenn in Fig. 5 zu dem Schnittpunkte a als Punkte der Geraden G die Geschwindigkeit $\overline{aa_v^G}$ und als Punkte der Geraden H die Geschwindigkeit $\overline{aa_v^H}$ gehört, so erhalten wir die Geschwindigkeit $\overline{aa_v}$ des auf der Curve A bewegten Punktes a, indem wir durch die Punkte a_v^G, a_v^H, respective zu den Geraden G, H Parallelen ziehen; diese treffen sich im Endpunkte a_v der Geschwindigkeit aa_v, und die Gerade aa_v ist auch die Tangente T_A an der Bahncurve A.

Setzen wir wie vorher die Drehgeschwindigkeit $\omega_G = 1$ und $\omega_H = n.\omega_G = n$, dann werden die Geschwindigkeiten des Punktes a, respective als Punkte der Geraden G, H, respective durch die Strecken $\overline{aa_v^G} = \overline{as}$ und $\overline{aa_v^H} = n.\overline{a^1s}$ dargestellt. (In der Fig. 5 wurde $n = \frac{1}{3}$ angenommen).

Um den Krümmungsmittelpunkt o der Curve A im Punkte a zu bestimmen (Fig. 6), betrachten wir ihn als den Pol der Tangente T_A, welche sich mit der Geschwindigkeit $\overline{aa_v}$ in sich selbst verschiebt und deren Punkt a_v sich gleichzeitig mit der Geschwindigkeit $\overline{a_v a_v^N} \perp T_A$ um den Punkt a dreht.[1]

Auf Grund dieser Auffassungsweise des Krümmungsmittelpunktes kommen wir zum Ziele, wenn wir die Bewegungsrichtungen zweier Punkte a, a_v der Tangente T_A construiren. Weil die Rotationsgeschwindigkeit des Punktes a gleich Null ist, so besitzt dieser Punkt nur die Geschwindigkeit $\overline{aa_v}$, mit welcher er sich in der Tangente T_A verschiebt. Die Richtung der resultirenden Bewegung des Punktes a_v, der sich in der Tangente T mit der Geschwindigkeit $\overline{aa_v^T} = \overline{aa_v}$ verschiebt und mit der Geschwindigkeit $\overline{aa_v^N}$ rotirt, wird als die Diagonale $\overline{a_v a_v'}$ des Parallelogramms $aa_v^T a_v' a_v^N$ bestimmt. Die in den Punkten a, a_v, respective auf den Geraden T und $a_v a_v'$ errichteten Senkrechten $ao \equiv N_A$, $a_v o$ schneiden sich im Pole o der Tangente T_A, als dem Krümmungsmittelpunkte der Curve A. Es ist leicht ersichtlich, dass die Senkrechte $a_v o$ zugleich auf der Geraden aa_v^N senkrecht steht, und demnach können wir sie auch construiren.

[1] Daselbst, S. 24.

Durch Rückwärtsgehen dieses Constructionsweges erhalten wir auf Grund des gegebenen Krümmungsmittelpunktes die Geschwindigkeit $a_v a_v^N$, mit deren der Punkt a_v der Tangente T um ihren Berührungspunkt a rotirt.

Ist statt der Geschwindigkeit $\overline{a_v a_v^N}$ des Punktes a, die Geschwindigkeit $\overline{a_v a_v^P}$ (Fig. 7), mit deren sich der mit dem Punkte a_v coincidirende Schnittpunkt der Tangente T mit einer beliebigen Geraden P in dieser Geraden verschiebt, gegeben, dann construiren wir erst die Geschwindigkeit $\overline{aa_v^N}$, indem wir durch den Punkt a_v^P mit der Tangente eine Parallele $a_v^P a_v^N$ ziehen, welche die Gerade $a_v a_v^N \perp T$ im Punkte a_v^N schneidet. Auf Grund der soeben erhaltenen Geschwindigkeit $\overline{a_v a_v^N}$ und der gegebenen Geschwindigkeit $\overline{aa_v}$ construiren wir den Krümmungsmittelpunkt wie vorher.

Um also in unserem betrachteten Falle (Fig. 5) auf Grund der vorher erlangten Construction den Krümmungsmittelpunkt zu erhalten, werden wir folgenderweise fortschreiten.

Vor Allem bestimmen wir die Geschwindigkeit, mit der sich der Punkt a_v als Schnittpunkt der Geraden $a_v^G a_v$ und $a_v^H a_v$ bewegt. Demzufolge bestimmen wir die Geschwindigkeiten der Punkte a_v^G, a_v^H, welche bei der Rotation der Geraden G, H sich auch mit gewisser Geschwindigkeit bewegen.

Um die Geschwindigkeit, mit deren sich der Punkt a_v^G bewegt, zu bestimmen, erwägen wir, dass dieser Punkt sich auf dem Schenkel aa_v^G des rechten Winkels saa_v^G — dessen anderer Schenkel durch den festen Punkt s gleitet und dessen Scheitelpunkt a sich auf der Tangente T_a verschiebt — so bewegt, dass die Strecke $\overline{aa_v^G}$ der Strecke $\overline{as}$ gleich bleibt.

Solcherweise bestimmte Bewegung des Punktes a_v^G können wir als eine Specialisirung folgenden Falles betrachten und dann auf dem Grunde die Geschwindigkeit des Punktes a_v^G bestimmen.

In einem festen Systeme Σ befinden sich zwei Curven A, B und ein Punkt p (Fig. 8). Die Bewegung eines zweiten ebenen Systems S_1 ist dadurch bestimmt, dass der Scheitelpunkt a eines Winkels α sich in der Curve A verschiebt und der eine Schenkel P stets durch den Punkt p gleitet und die Curve B im Punkte b schneidet. Auf dem zweiten Schenkel R des Winkels α

verschiebt sich gleichzeitig der Punkt c derart, dass die Entfernung $\overline{ca}$ bei der Bewegung stets gleich der Strecke $\overline{pb}$ bleibt. Weil die Bewegung des Punktes c das Resultat einer Rotation des den Winkel enthaltenen Systems S_1 um einen bestimmten Pol und einer Verschiebung jenes Punktes im Schenkel R ist, erhalten wir die lothrechte Geschwindigkeit des Punktes c auf Grund der Geschwindigkeiten dieses Punktes, welche von der ersten und zweiten Bewegung abhängen.

Indem wir im Punkte a der Curve A (Fig. 8) die Normale $N_a \equiv aa'$ construiren und im Punkte p eine Senkrechte $P' \equiv pa'$ auf die Gerade P errichten, erhalten wir im Schnittpunkte a' dieser Geraden den Pol des bewegten Systems S_1. Setzen wir voraus, dass die Drehung des Systems S_1 mit der Drehgeschwindigkeit $= 1$ geschieht, dann repräsentirt die Strecke ca' die lothrechte Geschwindigkeit des Punktes c.

Weil Translationsgeschwindigkeit des Punktes c im Schenkel R des Winkels α der Geschwindigkeit, mit deren sich der Punkt b im Schenkel P bewegt, gleich ist, darum erfordert unsere Construction, diese Geschwindigkeit zu bestimmen. Zu diesem Zwecke construiren wir im Punkte b der Curve A die Normale $N_b \equiv bb'$, welche die bereits gezogene Gerade P' im Punkte b' schneidet. In der Strecke pb' haben wir dann die lothrechte Geschwindigkeit des Punktes a im Schenkel P und wenn wir die Strecke $\overline{cd} \perp R$ und gleich der Strecke $\overline{pb'}$ construiren, dann erhalten wir die lothrechte Geschwindigkeit des Punktes c im Schenkel R. Die Diagonale $\overline{cc'}$ des Parallelogramms $ca'c'd$, das wir aus den beiden lothrechten Geschwindigkeiten des Punktes c construiren, repräsentirt dann die resultirende lothrechte Geschwindigkeit des Punktes c und gibt auch die Normale N_c im Punkte c an.

Aus dieser Construction ist ersichtlich, dass der Winkel $b'a'c'$ dem Winkel α gleich ist und die Strecke $a'c'$ auf dem Schenkel R senkrecht steht. Demnach erhalten wir auch die Normale $N_c \equiv cc'$ im Punkte c an die Curve C, indem wir die Normalen der beiden Curven A, B, respective in den Punkten a, b construiren und $\underline{pb'} \perp pb$, $\sphericalangle b'a'c' = \alpha$ und $\overline{a'c'} = \overline{pb'}$ machen; in der Strecke $\overline{cc'}$ erhalten wir auch lothrechte Geschwindigkeit des Punktes c.

Wenn wir beim Erzeugen der Curve C die beiden Curven A und B zusammenfallen lassen und den Winkel $\alpha = 90°$ machen (Fig. 9), dann fallen auch die Normalen N_a, N_b und die Punkte a', b' zusammen und wir erhalten den Punkt c', indem wir die Strecke $\overline{a'c'} = \overline{pa'}$ machen.

Es ist ersichtlich, dass die Erzeugungsweise dieser Curve C vollkommen mit der vom Punkte a_v^G erzeugten Curve (Fig. 5) vollkommen übereinstimmt, deren Normale als lothrechte Geschwindigkeit wir demnach folgenderweise construiren:

Wir errichten in den Punkten a, s die Senkrechten, respective zu den Geraden T_A, G, welche sich im Punkte $a_\mathfrak{v}$ schneiden, und indem wir auf die im Punkte $a_\mathfrak{v}$ auf die Gerade $sa_\mathfrak{v}$ errichtete Senkrechte die Strecke $\overline{a_\mathfrak{v} a_\mathfrak{v}^{G'}} = \overline{a_\mathfrak{v} s}$ übertragen, erhalten wir in der Strecke $\overline{a_v^G a_\mathfrak{v}^{G'}}$ die lothrechte Geschwindigkeit des Punktes a_v^G, aus der wir die Geschwindigkeit $\overline{a_v^G a_v^{G'}} \perp\!\!= \overline{a_v^G a_\mathfrak{v}^{G'}}$ ableiten, welche auch dem Punkte a_v, durch die Strecke $\overline{a_v a_v^{G''}} \# \overline{a_v^G a_v^{G'}}$ dargestellt, zugehört.

Ausserdem dreht sich aber der Punkt a_v um den Punkt s mit der Geschwindigkeit $\overline{a_v a_v^{G'}} = \overline{sa_v}$; desshalb bewegt sich der Punkt a_v mit der resultirenden Geschwindigkeit $\overline{a_v a_v^{G'''}}$, die wir als Diagonale des Parallelogrammes der Geschwindigkeiten $a_v a_v^{G'} a_v^{G'''} a_v^{G''}$ erhalten (Fig. 5).

Derselben Construction werden wir uns bedienen, um auch die Geschwindigkeit $\overline{a_v a_v^{H'''}}$ des Punktes a_v^H zu bestimmen. Im Punkte ${}^1s$ errichten wir zu der Geraden H eine Senkrechte ${}^1sa_\mathfrak{v}'$, welche die Normale N_A im Punkte $a_\mathfrak{v}'$ schneidet. In diesem Punkte errichten wir wieder eine Senkrechte $a_\mathfrak{v}' a_\mathfrak{v}^{H'}$ zu der ersten Senkrechten und tragen auf jene diesmal die Strecke $\overline{a_\mathfrak{v}' a_\mathfrak{v}^{H'}} = n . \overline{{}^1sa_\mathfrak{v}'}$ (weil die Strecke $\overline{aa_v^H} = n . \overline{a\,{}^1s}$). Auf der Verbindungslinie $a_v^H a_\mathfrak{v}^{H'}$ machen wir $\overline{a_v^H a_\mathfrak{v}^{H''}} = n . \overline{a_v^H a_\mathfrak{v}^{H'}}$ und erhalten so die lothrechte Richtung des Punktes a_v^H, aus der wir die Geschwindigkeit $a_v^H a_v^{H'} \perp\!\!= a_v^H a_\mathfrak{v}^{H''}$ ableiten. Diese Geschwindigkeit gehört auch dem Punkte a_v, und darum machen wir $\overline{a_v a_v^{H''}} \# \overline{a_v^H a_v^{H'}}$.

Ausserdem dreht sich der Punkt a_v um den Punkt ${}^1s$ mit der Geschwindigkeit $\overline{a_v a_v^{H'}} = n . \overline{a_v {}^1s}$; desshalb bewegt sich der Punkt a_v mit der resultirenden Geschwindigkeit $\overline{a_v a_v^{H'''}}$, die wir als Diagonale des Parallelogramms $a_v a_v^{H'} a_v^{H'''} a_v^{H''}$ erlangen.

Wenn wir durch die erzielten Punkte $a_v^{G'''}$, $a_v^{H'''}$, respective Parallelen G', H' zu den Geraden G, H ziehen, erhalten wir im Schnittpunkte dieser Parallelen den Punkt a'_v, welcher mit dem Punkte a_v die resultirende Geschwindigkeit $\overline{a_v a'_v}$ des Punktes a_v bestimmt.

Leiten wir weiter aus dieser Geschwindigkeit $\overline{a_v a'_v}$ die Geschwindigkeit $\overline{a_v a_v^N}$ ab (wie in der Fig. 7) und fällen zuletzt vom Punkte a_v eine Senkrechte auf die Gerade aa_v^N, um im Schnittpunkte dieser Senkrechten mit der Normalen N_A den Krümmungsmittelpunkt o zu erhalten.

Es ist ersichtlich, dass wir die Curve A (Fig. 5) als orthogonale Projection des Durchschnittes zweier geraden Schraubenflächen, deren Axen zur Projectionsebene senkrecht stehen und deren Ganghöhen sich wie $1:n$ verhalten, betrachten können. Mittelst soeben erlangten Constructionen ist nicht nur die orthogonale Projection der Tangente der Curve A zu construiren ermöglicht, sondern auch mittelst der Geschwindigkeit $\overline{a_v a'_v}$ und des Krümmungsmittelpunktes o die Krümmungsebene der Durchschnittscurve und ihr Krümmungsmittelpunkt bestimmbar. Und zwar gibt uns die Strecke $\overline{a_v a'_v}$ die Richtung der Trace der Krümmungsebene in der Projectionsebene an und den Krümmungsmittelpunkt o können wir als orthogonale Projection des Mittelpunktes einer Ellipse, welche den Durchschnitt beider geraden Schraubenflächen osculiert, betrachten.

4. Die Krümmungsmittelpunkts-Construction vermittelst der lothrechten Geschwindigkeiten (Nr. 2) wenden wir in dem besonderen Falle an, wenn $n = -\frac{1}{2}$ und wenn die Drehungen der beiden Geraden G, H gleichzeitig von der Geraden $s\,{}^1s$ ausgehen. Dann ist die Bahn des Schnittpunktes a dieser Geraden eine Hyperbel (Fig. 10), deren eine Brennpunkt s ist und deren eine Scheitel in ${}^1s$ liegt.[1] Wir erhalten demnach die Normale $N_A = aa_v$ an der Bahncurve A, indem wir, wenn wir die Drehgeschwindigkeit der Geraden $G = 1$ annehmen, $\overline{aa_v^H} = -\frac{1}{2}\,\overline{a\,{}^1s}$ machen und auf der Geraden G, H, respective in den Punkten

[1] Daselbst, S. 61.

s, $a^H_\mathfrak{v}$ die Senkrechten $sa_\mathfrak{v}$, $a^H_\mathfrak{v} a_\mathfrak{v}$ errichten, welche sich im Punkte $a_\mathfrak{v}$ treffen.

Um den Krümmungsmittelpunkt der Curve $\bar{A}$ zu construiren (Nr. 2), verbinden wir den erhaltenen Punkt $a_\mathfrak{v}$ mit dem Punkte ${}^1s$ und ziehen durch den Punkt $a^H_\mathfrak{v}$ zu der Normalen N_A eine Parallele, welche die Gerade $a_\mathfrak{v}{}^1s$ im Punkte $a'_\mathfrak{v}$ trifft. Die durch diesen Punkt zu der Geraden H gezogene Parallele schneidet die Gerade $a_\mathfrak{v} a^H_\mathfrak{v}$ im Punkte $a^{H'}_\mathfrak{v}$. Wenn wir weiter vom Punkte $a'_\mathfrak{v}$ auf die Gerade H eine Senkrechte fällen und von diesem Punkte die Strecke $\overline{a'_\mathfrak{v} a^1_\mathfrak{v}} = \overline{a^H_\mathfrak{v} a^{H'}_\mathfrak{v}}$ übertragen, dann erhalten wir den Punkt $a^1_\mathfrak{v}$, durch welchen wir eine Parallele zu der Geraden H ziehen, welche die Gerade G im Punkte $a^2_\mathfrak{v}$ schneidet. Ziehen wir nun durch den Punkt a eine Parallele $a\,a^3_\mathfrak{v}$ zu der Geraden $a^2_\mathfrak{v} a_\mathfrak{v}$ und errichten im Punkte $a_\mathfrak{v}$ eine Senkrechte auf der Geraden N_A, welche die Gerade $a_\mathfrak{v} a^3_\mathfrak{v}$ im Punkte $a^3_\mathfrak{v}$ trifft. Die Verbindungsgerade der Punkte $a^2_\mathfrak{v}$, $a^3_\mathfrak{v}$ schneidet dann die Normale N_A in dem Krümmungsmittelpunkte o der Hyperbel A.

5. Diese Krümmungsmittelpunkts-Construction können wir auch im Folgenden, in Bezug auf den vorgehenden Fall (Nr. 1) allgemeineren Falle, anwenden.

Die Rotation der, die Geraden G, H, respective enthaltenden ebenen Systeme S_1, S_2, geschehe um die ausserhalb dieser Geraden liegenden Punkte s, ${}^1s$ eines bestimmten ruhenden ebenen Systems Σ.

Setzen wir der Einfachheit wegen voraus, dass beide Systeme S_1, S_2 mit gleicher Geschwindigkeit $= 1$ rotiren und dass noch der eine Punkt (s) sich auf der um ihn rotirenden Geraden (G) befindet (Fig. 11). Dann stellen die Strecken $\overline{as}$, $\overline{a^1s}$, respective die lothrechten Geschwindigkeiten der mit dem Schnittpunkte a der Geraden G, H coincidirenden Punkte der Geraden G, H bei deren Rotation, respective um die Punkte s, ${}^1s$.

Um die Normale an der Bahncurve A im Punkte a zu erhalten, errichten wir im Punkte s auf die Gerade G die Senkrechte $sa_\mathfrak{v}$ und fällen vom Punkte ${}^1s$ auf die Gerade H die Senkrechte ${}^1sa_\mathfrak{v}$. Diese beiden Senkrechten treffen sich im Punkte $a_\mathfrak{v}$, der, mit dem Punkte a verbunden, die lothrechte

Geschwindigkeit des Punktes a und zugleich die verlangte Normale an der Bahncurve A gibt.[1]

Die weiteren Constructionen, die sich auf die Krümmungsmittelpunktsbestimmung beziehen, stimmen mit den vorher ausgeführten überein und werden sich theils vereinfachen, weil wir die Drehgeschwindigkeiten der Systeme S_1, S_2 als gleich vorausgesetzt haben.

Um also den Krümmungsmittelpunkt zu erlangen, construiren wir wie vorher die lothrechte Geschwindigkeit, mit deren sich der Punkt $a_\mathfrak{v}$ als Schnittpunkt der Senkrechten $sa_\mathfrak{v}$, ${}^1sa_\mathfrak{v}$ in der von ihm erzeugten Curve B bewegt. Da sich diese Geraden $sa_\mathfrak{v}$, ${}^1sa_\mathfrak{v}$ mit derselben gleichen Drehgeschwindigkeit wie die Geraden G, H selbst bewegen, erhalten wir die verlangte lothrechte Geschwindigkeit des Punktes $a_\mathfrak{v}$, indem wir wie bei der Construction der lothrechten Geschwindigkeit des Punktes a in den Punkten s, ${}^1s$, respective zu den Geraden $sa_\mathfrak{v}$, ${}^1sa_\mathfrak{v}$ die Senkrechten $sa'_\mathfrak{v} \equiv G$, ${}^1sa'_\mathfrak{v}$ errichten. Diese schneiden sich im Punkte $a'_\mathfrak{v}$, welcher mit dem Punkte $a_\mathfrak{v}$ die lothrechte Geschwindigkeit $\overline{a_\mathfrak{v}a'_\mathfrak{v}}$ des Punktes $a_\mathfrak{v}$ bestimmt.

Auf Grund der erzielten lothrechten Geschwindigkeiten $\overline{aa_\mathfrak{v}}$, $\overline{a_\mathfrak{v}a'_\mathfrak{v}}$ zweier Punkte der Normalen N_A an der Bahncurve A, erhalten wir den Krümmungsmittelpunkt o, indem wir wie in Nr. 2 $a_\mathfrak{v}a^1_\mathfrak{v} \perp N_A$, $aa^1_\mathfrak{v} \parallel a_\mathfrak{v}a'_\mathfrak{v}$ und die Gerade $a'_\mathfrak{v}a^1_\mathfrak{v}$ ziehen, welche die Normale im verlangten Punkte o schneidet.

Als Beispiel wurde in der Fig. 12 folgender specieller Fall angenommen: Der mit der Geraden $s{}^1s$ zusammenfallenden Anfangslage der Geraden G entspricht die Gerade H, welche im Mittelpunkte der Strecke $s{}^1s$ auf dieser senkrecht steht. Wenn die Drehgeschwindigkeiten der Systeme S_1, S_2 auch im Sinne gleich sind, dann erzeugt, wie aus der Fig. 12 ersichtlich, der Schnittpunkt der Geraden G, H eine Pascal'sche Curve A, welche auch durch den Kreis L (dieselbe Figur) und den Lothpunkt s als Fusspunktcurve bestimmt ist. Die für den Punkt a ausgeführte Construction der Normale N_A stimmt mit der bekannten Construction der Normalen dieser Curve als Fusspunktcurve vollkommen überein. Und die auf Grund bei der

[1] Daselbst, S. 56.

Erzeugungsweise ausgeführte Krümmungsmittelpunkts-Construction führt uns, wie man leicht beweisen kann, zu demselben Krümmungsmittelpunkte o[1].

Wenn wir die Curve A als orthogonale Projection des Durchschnittes zweier Schraubenflächen, deren Axen zur Projectionsebene senkrecht stehen, deren Ganghöhen gleich sind und deren Grundcurven durch die Geraden G, H gegeben sind, betrachten, dann erhalten wir mittelst dieser Construction die Tangente, die Krümmungsebene und den Krümmungsmittelpunkt der Durchschnittscurve.

Wenn sich beide Geraden, G und H, um die ausserhalb dieser Geraden liegenden Punkte s und ${}^1s$ drehen und in gleichem Sinne gleiche Drehgeschwindigkeit besitzen (Fig. 13), dann erhalten wir die Normale $aa_{\mathfrak{v}}$, der durch den Schnittpunkt a jener Geraden erzeugten Curve A, indem wir aus den Punkten s, ${}^1s$, respective zu den Geraden G, H die Senkrechten $sa_{\mathfrak{v}}$, ${}^1sa_{\mathfrak{v}}$ errichten, welche sich im Punkte $a_{\mathfrak{v}}$ treffen. Die Strecke $\overline{aa_{\mathfrak{v}}}$ repräsentirt uns die lothrechte Geschwindigkeit des Punktes a und zugleich gibt sie uns die verlangte Normale N_A.

Um den Krümmungsmittelpunkt zu erhalten, errichten wir nach der vorgehenden Construction in den Punkten s, ${}^1s$, respective zu den Geraden $sa_{\mathfrak{v}}$, ${}^1sa_{\mathfrak{v}}$ die Senkrechten $sa'_{\mathfrak{v}}$, ${}^1sa'_{\mathfrak{v}}$, die sich im Punkte $a'_{\mathfrak{v}}$ treffen. Die Strecke $\overline{a_{\mathfrak{v}}a'_{\mathfrak{v}}}$ stellt uns die lothrechte Geschwindigkeit des Punktes $a_{\mathfrak{v}}$ in der durch ihn beschriebenen Curve B dar. Indem wir weiter $a_{\mathfrak{v}}a^1_{\mathfrak{v}} \perp aa_{\mathfrak{v}}$ und $aa^1_{\mathfrak{v}} \parallel a'_{\mathfrak{v}}a_{\mathfrak{v}}$ ziehen, erhalten wir im Schnittpunkte der Geraden $a'_{\mathfrak{v}}a^1_{\mathfrak{v}}$ mit der Normale N den Krümmungsmittelpunkt o der Curve A.

Diese Construction wurde in dem Falle angewendet, wo die beiden Geraden G, H, respective von den Punkten s, ${}^1s$ gleiche Entfernung $= \frac{1}{2}\overline{s\,{}^1s}$ haben und bei der Rotation fortwährend auf einander senkrecht stehen (Fig. 14). Auch diesmal erzeugt der Schnittpunkt a eine Pascal'sche Curve, deren Normale und Krümmungsmittelpunkt wir doppelter Weise

[1] A. Mannheim: »Principes et développements de géométrie cinématique«, p. 35.

construiren können. (Es wurde die Normale N_A und der Krümmungsmittelpunkt o für den Punkt a construirt (Fig. 14) und dabei dieselbe Bezeichnung wie vorher angewendet).

6. Viel umständlicher ergibt sich die Krümmungsmittelpunkts-Construction in dem Falle, wenn die Drehgeschwindigkeiten der beiden Systeme S_1, S_2 ungleich sind (Fig. 15.).

Setzen wir, wie vorher, der Einfachheit wegen voraus, dass das System S_1 mit der Drehgeschwindigkeit $\omega_G = 1$ rotirt, dann stellt die Strecke as die lothrechte Geschwindigkeit des mit dem Schnittpunkte a der Geraden G, H coincidirenden Punktes der Geraden G und die lothrechte Geschwindigkeit $\overline{aa_{\mathfrak{v}}^H}$ desselben Punktes auf der Geraden H ergibt sich, wenn wir die Drehgeschwindigkeit a_H, mit deren das System S_2 um den Punkt ^1s rotirt, gleich $n.\omega_G$ annehmen, aus der Gleichung 1):

$$\frac{\overline{aa_{\mathfrak{v}}^H}}{\overline{a\,^1s}} = n.$$

Um die Normale an der Bahncurve A im Punkte a zu erhalten, fällen wir von den Punkten s, $a_{\mathfrak{v}}^H$, respective auf die Geraden G, H die Senkrechten $sa_{\mathfrak{v}}$, $a_{\mathfrak{v}}^H a_{\mathfrak{v}}$, dann treffen sich diese im Punkte $a_{\mathfrak{v}}$, der mit dem Punkte a verbunden, die lothrechte Geschwindigkeit des Punktes a und zugleich die verlangte Normale N_A gibt.

Um die lothrechte Geschwindigkeit des Punktes $a_{\mathfrak{v}}$ zu bestimmen, errichten wir im Punkte s zu der Geraden $aa_{\mathfrak{v}}$ die Senkrechte $G' \perp G$, weil die Strecke $\overline{sa_{\mathfrak{v}}}$ die lothrechte Geschwindigkeit des mit dem Schnittpunkte $a_{\mathfrak{v}}$ der Geraden $sa_{\mathfrak{v}}$, $a_{\mathfrak{v}}^H a_{\mathfrak{v}}$ coincidirenden Punktes der Geraden $sa_{\mathfrak{v}}$ angibt.

Anders verhält sich die Sache mit der Bestimmung der lothrechten Geschwindigkeit des mit demselben Schnittpunkte coincidirenden Punktes $a_{\mathfrak{v}}$ der Geraden $a_{\mathfrak{v}}^H a_{\mathfrak{v}}$. Dieser Punkt unterliegt zweien Bewegungen, erstens der Rotation um den Punkt ^1s und zweitens der Translation, die er in der Richtung der Geraden H besitzt.

Um die erste Componente $\overline{aa_{\mathfrak{v}}'}$ zu bestimmen, verbinden wir den Punkt $a_{\mathfrak{v}}$ (Fig. 15) mit dem Punkte ^1s und machen auf dieser Verbindungslinie die Strecke

$$\overline{a_\mathfrak{v} a'_\mathfrak{v}} = n . \overline{a_\mathfrak{v}\, {}^1s}.$$

Die zweite Componente, d. h. die lothrechte Translationsgeschwindigkeit $\overline{a_\mathfrak{v} a''_\mathfrak{v}}$ in der Richtung der Geraden H, die der Translationsgeschwindigkeit $\overline{a^{H'}_\mathfrak{v}\, a^{H''}_\mathfrak{v}}$ des Punktes $a^{H'}_\mathfrak{v}$, in welchem die Gerade $a^H_\mathfrak{v}\, a_\mathfrak{v}$ die H schneidet, gleich ist, erhalten wir folgender Weise:

Die Geschwindigkeit $a^{H'}_\mathfrak{v} a^{H''}_\mathfrak{v}$ des Punktes $a^{H'}_\mathfrak{v}$ ist nach der aus der Gleichung 1) sich ergebenden Beziehung:

$$\overline{a a^H_\mathfrak{v}} = n . \overline{a\, {}^1s},$$

gleich der $(1-n)$-fachen Geschwindigkeit $a^{H'}_\mathfrak{v} a_\mathfrak{v}$, mit deren sich der Punkt a in der Geraden H verschiebt.[1]

Wenn wir die Strecke $a^{H'}_\mathfrak{v} a^{H''}_\mathfrak{v}$ (Fig. 15) vom Punkte $a_\mathfrak{v}$ auf die verlängerte Gerade $a^{H'}_\mathfrak{v}\, a_\mathfrak{v}$ übertragen, dann erhalten wir in der Strecke $\overline{a_\mathfrak{v} a''_\mathfrak{v}}$ die Translationsgeschwindigkeit des Punktes $a_\mathfrak{v}$, als die zweite verlangte Componente. Vermittelst des Parallelogramms der Geschwindigkeiten $\overline{a_\mathfrak{v} a'_\mathfrak{v} a^1_\mathfrak{v} a''_\mathfrak{v}}$ erhalten wir die resultirende Geschwindigkeit $\overline{a_\mathfrak{v} a^1_\mathfrak{v}}$ des mit dem Punkte $a_\mathfrak{v}$ coincidirenden Punktes der Geraden $a_\mathfrak{v} a^H_\mathfrak{v}$.

Fällen wir weiter vom Punkte $a^1_\mathfrak{v}$ auf die Gerade $a_\mathfrak{v} a^H_\mathfrak{v}$ die Senkrechte $H' \equiv a^1_\mathfrak{v}\, a^2_\mathfrak{v}$, welche zugleich mit der Geraden H parallel lauft, dann erhalten wir im Schnittpunkte dieser Geraden mit der Geraden G' den Punkt $a^2_\mathfrak{v}$, welcher mit dem Punkte $a_\mathfrak{v}$ verbunden, die lothrechte Geschwindigkeit $\overline{a_\mathfrak{v} a^2_\mathfrak{v}}$ des Punktes $a_\mathfrak{v}$ gibt.

Auf Grund der lothrechten Geschwindigkeiten $\overline{a a_\mathfrak{v}}$, $\overline{a_\mathfrak{v} a^2_\mathfrak{v}}$ der Punkte $a a_\mathfrak{v}$ der Normale N_A, construiren wir den Krümmungsmittelpunkt o der Curve A, indem wir (Fig. 15) $a_\mathfrak{v} a^3_\mathfrak{v} \perp N$, $a_\mathfrak{v} a^3_\mathfrak{v}$ $a_\mathfrak{v} a^2_\mathfrak{v}$ ziehen und hierauf mittelst der Geraden $a^2_\mathfrak{v} a^3_\mathfrak{v}$ die Normale im verlangten Punkte o schneiden.

---

[1] Die Gerade H, diesmal anstatt durch den Punkt ${}^1s$ zu gleiten (Nr. 2), berührt bei ihrer Bewegung einen Kreis K (Fig. 15), dessen Mittelpunkt sich im Punkte ${}^1s$ befindet. Dieser Umstand hat aber auf die Bestimmung der lothrechten Geschwindigkeit des Punktes $a^{H'}_\mathfrak{v}$ keinen Einfluss, und diese Strecke $a^{H'}_\mathfrak{v} a^{H''}_\mathfrak{v}$ wird wie in Nr. 2 der $(1-n)$-fachen Geschwindigkeit $a^{H'}_\mathfrak{v} a_\mathfrak{v}$ (mit deren sich der Punkt a in der Geraden H verschiebt) gleich.

7. Betrachten wir endlich den allgemeinsten Fall, wenn statt der zwei Geraden sich zwei Curven G, H, welche respective den ebenen Systemen S_1, S_2 angehören, um die festen Punkte s, ${}^1s$ eines ruhenden Systems rotiren (Fig. 16).

Um die Construction des Krümmungsmittelpunktes zu vereinfachen, nehmen wir an, dass die Drehgeschwindigkeiten der Systeme S_1, S_2 im gleichen Sinne gleich sind.

Wenn wir von den Punkten s, ${}^1s$, respective auf die Tangenten T_G, T_H der Curven G, H die Senkrechten $sa_\mathfrak{v}$, ${}^1sa_\mathfrak{v}$ fällen, dann treffen sich diese in dem Punkte $a_\mathfrak{v}$, der mit a verbunden, die lothrechte Geschwindigkeit des Punktes a und die Normale N_A an der Bahncurve A desselben gibt.

Bei der Construction des Krümmungsmittelpunktes der Curve A, müssen wir aber zugleich darauf Rücksicht nehmen, dass die Tangenten T_G, T_H sich während der Rotation der Systeme S_1, S_2 um die festen Punkte s, ${}^1s$, noch um die Krümmungsmittelpunkte o_G, o_H, welche respective den Curven G, H im Punkte a angehören, drehen.

Darum werden die Geraden $sa_\mathfrak{v} \perp T_G$, ${}^1sa_\mathfrak{v} \perp T_H$ sich respective um die Punkte s, ${}^1s$ nicht nur mit der Geschwindigkeit $\omega_G = \omega_H = 1$ drehen, sondern ausserdem noch mit den Drehgeschwindigkeiten ω_G^1, ω_H^1, mit denen respective T_G, T_H um die entsprechenden Krümmungsmittelpunkte o_G, o_H der Curve G, H rotiren.

Weil die Strecken $\overline{a_\mathfrak{v}s}$, $\overline{a_\mathfrak{v}{}^1s}$ die lothrechten Geschwindigkeiten, mit denen der mit dem Schnittpunkte a coincidirende Punkt respective in den Tangenten T_G, T_H fortschreitet, repräsentiren, sind die letzteren Drehgeschwindigkeiten:

$$\omega_G^1 = \frac{\overline{a_\mathfrak{v}s}}{\overline{o_G a}}, \quad \omega_H^1 = \frac{\overline{a_\mathfrak{v}{}^1s}}{\overline{o_H a}}.$$

Demnach sind die resultirenden Drehgeschwindigkeiten ω_G^2, ω_H^2, respective der Geraden $\overline{sa_\mathfrak{v}}$, $\overline{{}^1sa_\mathfrak{v}}$:

$$\omega_G^2 = \omega_G + \omega_G^1 = 1 + \frac{\overline{a_\mathfrak{v}s}}{\overline{o_G a}} = \frac{\overline{o_G a} + \overline{a_\mathfrak{v}s}}{\overline{o_G a}},$$

$$\omega_H^2 = \omega_H + \omega_H^1 = 1 + \frac{\overline{a_\mathfrak{v}^1 s}}{\overline{o_H a}} = \frac{\overline{o_H a} + \overline{a_\mathfrak{v}^1 s}}{\overline{o_H a}}.$$

Die resultirenden lothrechten Geschwindigkeiten $\overline{a_\mathfrak{v} a^G_{\mathfrak{v}'}}$, $\overline{a_\mathfrak{v} a^H_{\mathfrak{v}'}}$ des Punktes $a_\mathfrak{v}$, der respective um die Punkte s, ${}^1s$ rotirenden Geraden $sa_\mathfrak{v}$, ${}^1sa_\mathfrak{v}$ ist also:

$$\overline{a_\mathfrak{v} a^G_{\mathfrak{v}'}} = \omega^2_G . \overline{a_\mathfrak{v} s} = \frac{\overline{o_G a} + \overline{a_\mathfrak{v} s}}{\overline{o_G a}} . \overline{a_\mathfrak{v} s},^1$$

$$\overline{a_\mathfrak{v} a^H_{\mathfrak{v}'}} = \omega^2_H . \overline{a_\mathfrak{v}{}^1 s} = \frac{\overline{o^H a} + \overline{a^\mathfrak{v}{}^1 s}}{\overline{o_H a}} . \overline{a_\mathfrak{v}{}^1 s}.$$

In den erhaltenen Punkten $a^G_{\mathfrak{v}'}$, $a^H_{\mathfrak{v}'}$ errichten wir respective zu den Geraden $sa_\mathfrak{v}$, ${}^1sa_\mathfrak{v}$ die Senkrechten $T'_G \parallel T_G$, $T'_H \parallel T_H$, welche sich im Punkte $a^1_\mathfrak{v}$ schneiden. Die Strecke $\overline{a_\mathfrak{v} a^1_\mathfrak{v}}$ repräsentirt uns dann die lothrechte Geschwindigkeit des Punktes $a_\mathfrak{v}$.

Auf Grund der lothrechten Geschwindigkeiten $\overline{aa_\mathfrak{v}}$ und $\overline{a_\mathfrak{v} a}$, zweier Punkte a, $a_\mathfrak{v}$ der Normale N_A construiren wir den Krümmungsmittelpunkt o wie vorher.

8. Es bleibt nur noch übrig den Fall zu betrachten, wenn die Drehgeschwindigkeiten der ebenen Systeme S_1, S_2 ungleich sind.

Nehmen wir an, dass die Geschwindigkeit des Systems S_1 gleich Eins und die des Systems S_2 gleich n ist. Dann stellt dic Strecke $\overline{aa^H_\mathfrak{v}} = n . \overline{a^1 s}$ die lothrechte Geschwindigkeit des mit dem Schnittpunkte a coincidirenden Punktes der um den Punkt ${}^1s$ rotirenden Curve H (Fig. 17).

Die Construction des Punktes $a^G_{\mathfrak{v}'}$ und der Geraden T'_G für das erste System ist dieselbe wie vorher.[2] Anders wird sich aber die Construction in Bezug auf das zweite System gestalten.

Der Punkt $a_\mathfrak{v}$ dreht sich um den Punkt ${}^1s$ mit der lothrechten Geschwindigkeit $\overline{a_\mathfrak{v} a'_\mathfrak{v}} = n . \overline{a_\mathfrak{v}{}^1 s}$ und verschiebt sich in

---

[1] Die Strecke $\overline{a_\mathfrak{v} a^G_{\mathfrak{v}'}}$ wird construirt, indem wir (Fig. 16) $a_\mathfrak{v} 1 \perp sa_\mathfrak{v}$ und $\overline{a_\mathfrak{v} 1} = \overline{a_\mathfrak{v} s}$ ziehen, dann $\overline{12} = \overline{o_G a}$ machen und $s3 \parallel a_\mathfrak{v} 1$, $13 \parallel a_\mathfrak{v} s$ ziehen, durch den Schnittpunkt 3 der Geraden 13, $s3$ die Gerade 32 führen, welche die Gerade $sa_\mathfrak{v}$ im verlangten Punkte $a^G_{\mathfrak{v}'}$ schneidet.

In derselben Weise erhalten wir den Punkt $a^H_{\mathfrak{v}'}$.

[2] Diese Construction wurde in der Fig. 17 ausgelassen.

der Richtung der Tangente T_H mit der lothrechten Geschwindigkeit $\overline{a_\mathfrak{v} a_\mathfrak{v}''}$, welche der Geschwindigkeit

$$\overline{a_\mathfrak{v}^{H'} a_\mathfrak{v}^{H''}} = (1-n)\, \overline{a_\mathfrak{v}^{H'} a_\mathfrak{v}}$$

des Schnittpunktes $a_\mathfrak{v}^{H'}$ der Geraden T_H und der Geraden $a_\mathfrak{v}^H a_\mathfrak{v} \perp T_A$ gleich ist (Nr. 6).

Ausserdem haben wir aber noch die lothrechte Geschwindigkeit des Punktes $a_\mathfrak{v}$ zu bestimmen, welche diesem Punkte der Rotation der, mit der Drehgeschwindigkeit

$$\omega_H^1 = \frac{\overline{a_\mathfrak{v}^H a_\mathfrak{v}}}{\overline{o_H a}}$$

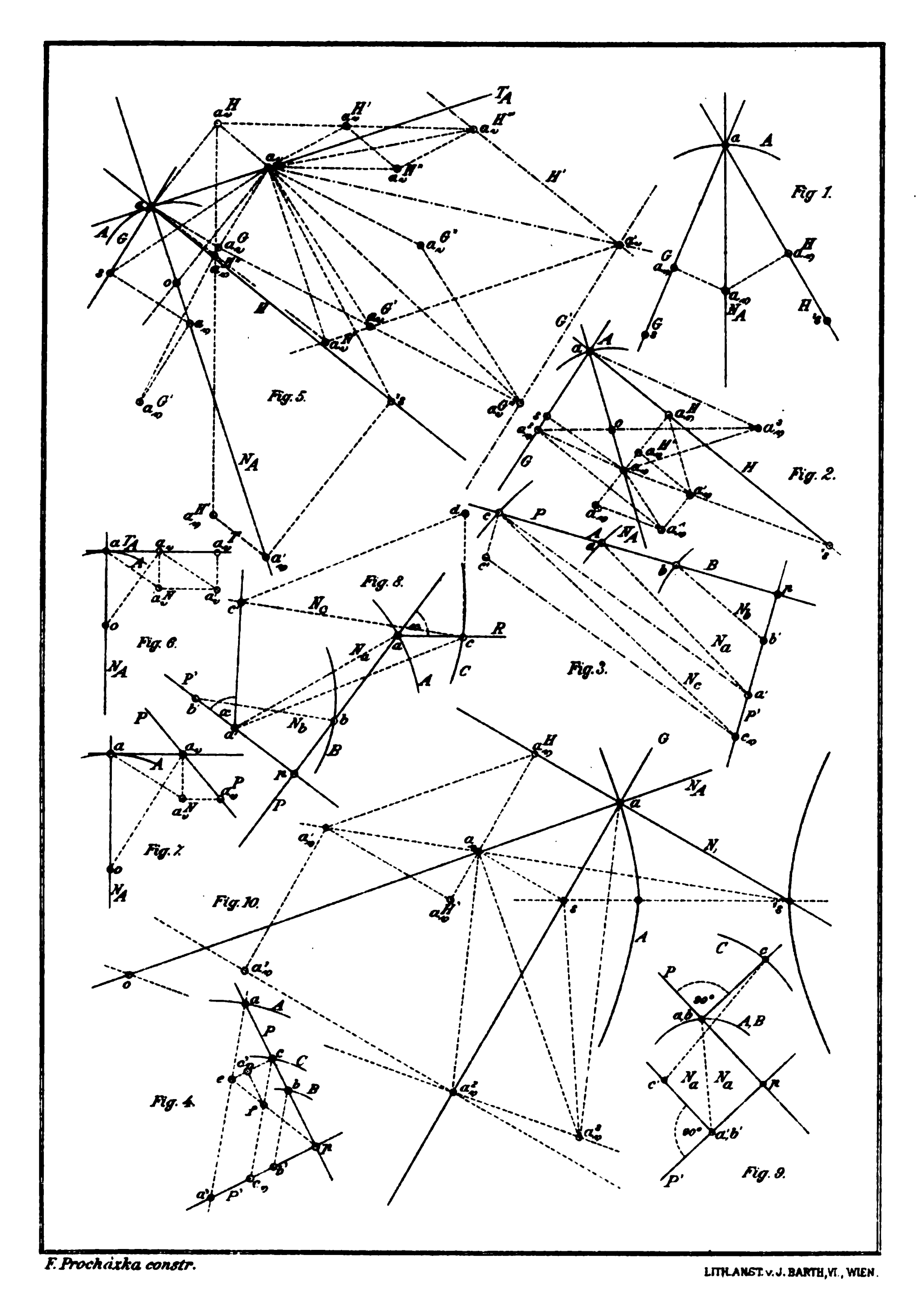
sich bewegenden Tangente T_H wegen zugehört.

Da die Geschwindigkeit ω_H^2 der Geraden $sa_\mathfrak{v}$ mit Rücksicht auf die beiden Rotationen der Tangente T_H $\left(\omega_H = n \quad \omega_H^1 = \frac{\overline{a_\mathfrak{v}^H a_\mathfrak{v}}}{\overline{o_H a}}\right)$:

$$\omega_H^2 = n + \frac{\overline{a_\mathfrak{v}^H a_\mathfrak{v}}}{\overline{o_H a}} = \frac{n \,.\, \overline{o_H a} + \overline{a_\mathfrak{v}^H a_\mathfrak{v}}}{\overline{o_H a}},$$

erhalten wir die verlangte lothrechte Geschwindigkeit $\overline{a_\mathfrak{v} a_{\mathfrak{v}'}^H}$ des Punktes $a_\mathfrak{v}$, indem wir die im vorgehenden Artikel angeführte Construction anwenden.

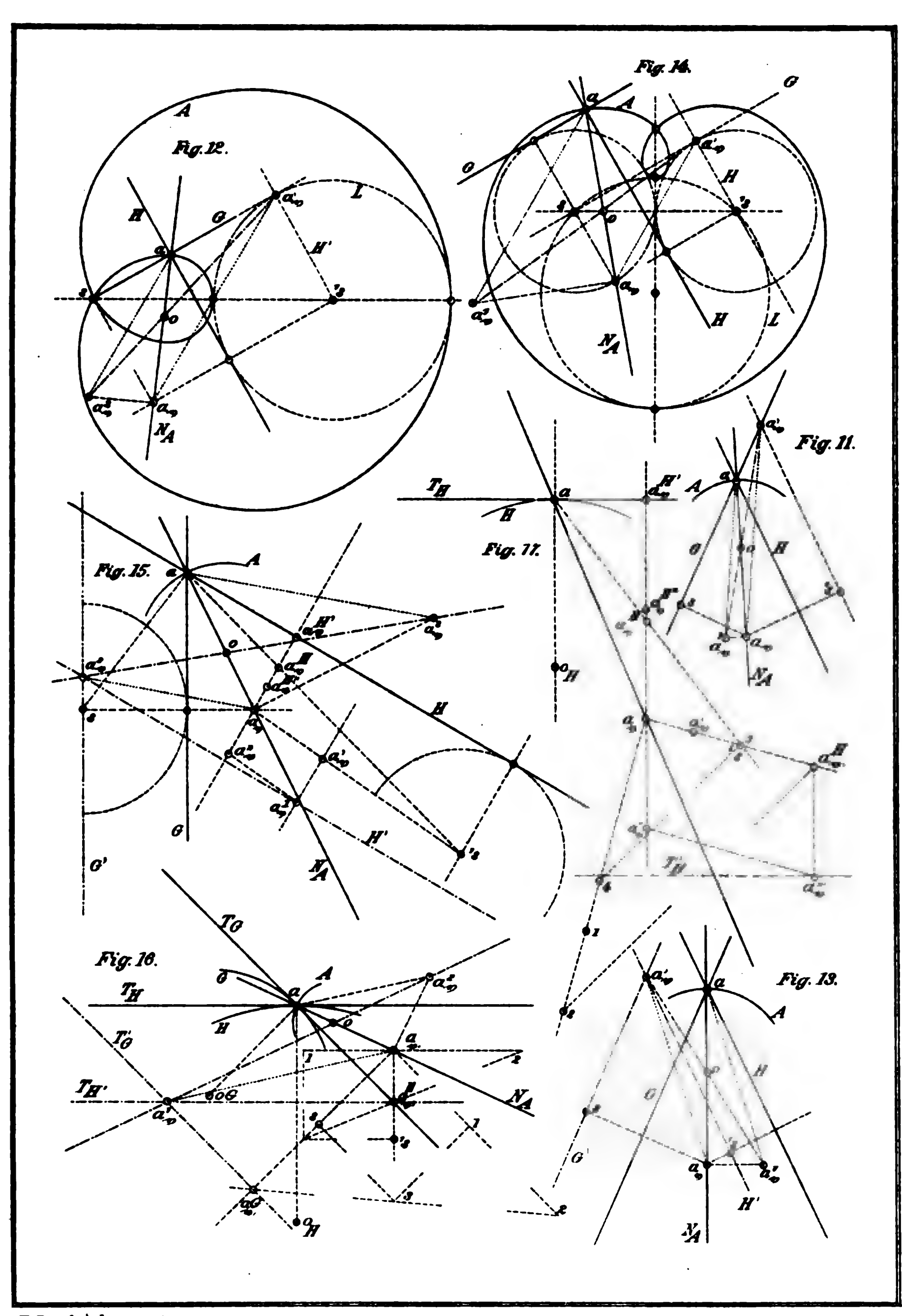
Aus den lothrechten Geschwindigkeiten $\overline{a_\mathfrak{v} a_\mathfrak{v}''}$, $\overline{a_\mathfrak{v} a_{\mathfrak{v}'}^H}$ construiren wir die resultirende lothrechte Geschwindigkeit des Punktes $a_\mathfrak{v}$ als Diagonale des Parallelogrammes der Geschwindigkeiten und erhalten zuletzt den Punkt $a_\mathfrak{v}'''$, von welchem wir auf die Gerade $a_\mathfrak{v} a_\mathfrak{v}^H$ die Senkrechte $T_H^1 \mid T_H$ fällen. Der Schnittpunkt $a_\mathfrak{v}^1$ der Geraden T_a', T_H^1 mit dem Punkte $a_\mathfrak{v}$ verbunden, bestimmt uns die lothrechte Geschwindigkeit des Punktes $a_\mathfrak{v}$. Die weitere Construction des Krümmungsmittelpunktes o der Curve A stimmt mit der vorgehenden Construction vollkommen überein.



F. Procházka constr.

LITH. ANST. v. J. BARTH, VI., WIEN.





F. Procházka constr.

LITH. ANST. v. J. BARTH, VI, WIEN



Zur synthetischen Theorie der Kreis- und Kugel-Systeme

von

Otto Rupp in Brünn.

(Vorgelegt in der Sitzung am 25. April 1895.)

Die Winkelbeziehungen, welche an Schnitten von Kreisen und Kugeln mit Geraden, Ebenen und untereinander auftreten, sind schon mehrfach Gegenstand ausführlicher Betrachtungen gewesen. Dagegen haben die longimetrischen Beziehungen, welche an den genannten Schnitten haften, bisher keine Beachtung gefunden. Es sei mir daher gestattet, in dieser Richtung eine Reihe neuer, bemerkenswerther Eigenschaften zu entwickeln.

1. Das wichtigste Gebilde, mit welchem sich die nachfolgenden Untersuchungen beschäftigen, ist, wenn wir uns vorläufig auf die Geometrie der Ebene beschränken, das System aller Kreise mit einem gemeinschaftlichen Mittelpunkte. In diesem Systeme sind zwei besondere Kreise enthalten: der eine mit dem Radius Null, der andere mit unendlich grossem Radius, also der geometrische Ort aller unendlich fernen Punkte der Ebene. Da aber dieser geometrische Ort bekanntlich eine Gerade ist, so erscheint eine gewisse Vorsicht in der Auffassung jener besonderen Elemente geboten, und es empfiehlt sich der klaren Darstellung halber, das in Rede stehende Kreissystem als eine metrische Specialisirung eines allgemeinen, projectivischen Gebildes, des Kegelschnittsbüschels, respective der Kegelschnittsschaar, zu betrachten.

In dem allgemeinen Kegelschnittsbüschel mit den Basispunkten A, B, C, D stellen die Geradenpaare AB, CD; AC, BD; und AD, BC drei ausgeartete Elemente (Kegelschnitte) dar.

Rückt B unendlich nahe an A, und D unendlich nahe an C, so übergehen die Geraden AB und CD in Tangenten sämmtlicher Kegelschnitte des Büschels in den Punkten A und C. In diesem Falle sind die beiden Geradenpaare $AC\ BD$, $AD\ BC$ in der gemeinschaftlichen Berührungssehne $p = AB$ vereinigt, das dritte Paar wird von den Tangenten in A und C gebildet.

Sonach repräsentirt die als Doppelgerade aufgefasste gemeinschaftliche Berührungssehne eines Büschels einander doppelt berührender Kegelschnitte ein ausgeartetes Element dieses Büschels.

Das System doppelt berührender Kegelschnitte steht sich selbst dual gegenüber und kann ebensogut als besonderer Fall einer Kegelschnittsschaar mit paarweise zusammenfallenden Basistangenten angesehen werden. Die der vorstehenden Betrachtung dual gegenüberstehende lehrt, dass die gemeinschaftlichen Berührungspunkte A und C einen degenerirten Kegelschnitt, und der als Doppelpunkt aufgefasste Schnittpunkt P der gemeinschaftlichen Tangenten einen zweiten degenerirten Kegelschnitt der Schaar darstellt.

Lässt man endlich an Stelle der Geraden p die unendlich ferne Gerade treten und an Stelle von A und B die absoluten Punkte (Kreispunkte der Ebene), so übergeht das Büschel doppelt-berührender Kegelschnitte in ein System concentrischer Kreise, in welchem den angestellten Betrachtungen gemäss die unendlich ferne Gerade und der Mittelpunkt, jedes für sich doppelt gezählt, als Elemente auftreten.

Für die folgenden Untersuchungen bleibt es sich desshalb ganz gleich, ob die unendlich ferne Gerade als ein einfacher Ort zweiter Ordnung (d. i. als Kreis von unendlich grossem Radius) oder als Doppelgerade aufgefasst wird.

Schliesslich sei noch bemerkt, dass der Kürze halber und um eine Gleichförmigkeit in der Benennung der später auftretenden Gebilde zu erzielen, das Büschel concentrischer Kreise als »monocentrisches System« bezeichnet werden soll.

2. Sei o der Mittelpunkt eines monocentrischen Systems, $c_1, c_2, c_3 \ldots$ beliebige Kreise desselben, ferner K ein beliebiger, dem System nicht angehörender Kreis und m sein Mittelpunkt. Jeder Kreis c_i des Systems hat mit K zwei reelle oder imaginäre

Punkte gemein, deren allzeit reelle Verbindungsgerade σ_i die Radicalaxe oder Potenzgerade von c_i und K repräsentirt. Da die Radicalaxen, welche allen Kreisen des Systems entsprechen, auf der Centralen om senkrecht stehen, so bilden sie ein Parallelstrahlenbüschel, dessen unendlich ferner Strahl ebenfalls als Radicalaxe, und zwar für K und den unendlich grossen Kreis des Systems, auftritt.

In gleicher Weise ruft irgend ein anderer Kreis K' der Ebene mit dem monocentrischen Systeme ein Parallelstrahlenbüschel von Radicalaxen σ'_1 hervor.

Zwei derartige Strahlenbüschel σ_i und σ'_i können dadurch auf einander bezogen werden, dass man in denselben solche Radicalaxen σ_i und σ'_i sich entsprechen lässt, welche die beiden Hilfskreise K und K' mit einem und demselben Kreise c_i des Systems ergeben. Die einander entsprechenden Radicalaxen σ_i und σ'_i schneiden sich aber bekanntlich in einem Punkte, welcher auch der vom System unabhängigen Radicalaxe r der Kreise K und K' angehört. Es folgt hieraus:

a) »Die Parallelstrahlenbüschel von Radicalaxen, welche in einem monocentrischen System von zwei beliebigen, dem System nicht angehörenden Kreisen hervorgerufen werden, sind perspectivisch, und ihr perspectivischer Durchschnitt repräsentirt die Radicalaxe der beiden Kreise«.

3. Der eben bewiesene Satz zeigt, dass das Parallelstrahlenbüschel, welches irgend ein Kreis K in einem monocentrischen System erzeugt, ein für dieses System charakteristisches Grundgebilde ist und als solches mit Vortheil zur Feststellung der Projectivität zweier monocentrischer Systeme — die ja als besondere Fälle von Curvenbüscheln zweiter Ordnung anzusehen sind — verwendet werden kann. Es sollen demgemäss zwei solche Systeme als projectivisch definirt werden, wenn die von irgend zwei Kreisen in ihnen erzeugten Radicalaxenbüschel projectivisch sind, und zwar sollen sich solche Kreise der beiden Systeme entsprechen, deren Radicalaxen mit den Hilfskreisen ebenfalls entsprechende Strahlen sind. Da es für die allgemeine Projectivität zweier Parallelstrahlenbüschel wesentlich ist, dass sich das unendlich ferne Element derselben nicht selbst entspricht, so ist nach früheren Erörterungen ein-

leuchtend, dass auch in zwei allgemein projectivisch auf einander bezogenen monocentrischen Systemen der unendlich grosse Kreis nicht ein selbstentsprechendes Element sein wird.

Das Erzeugniss zweier projectivischen monocentrischen Systeme, d. h. der geometrische Ort der Durchschnittspunkte entsprechender Kreispaare derselben, ist, ebenso wie im Falle zweier allgemeiner projectivischer Kreisbüschel, eine bicirculare Curve vierter Ordnung. Es ist aber bekannt, dass dieses Erzeugniss zerfällt, sobald die beiden Kreisbüschel einen Kreis entsprechend gemein haben, und zwar stellt dieser Kreis einen Bestandtheil zweiter Ordnung des Gesammterzeugnisses dar, während der Rest, d. i. der geometrische Ort der Schnitte aller übrigen Paare entsprechender Kreise, einen zweiten Kreis ergibt.

Setzt man an Stelle beliebiger projectivischer Kreisbüschel insbesondere zwei projectivische monocentrische Systeme, und soll die Projectivität derselben eine solche sein, dass ein selbstentsprechendes Element vorhanden ist, so kann dies bei verschiedenen Mittelpunkten der beiden Systeme offenbar nur dadurch erreicht werden, dass man die unendlich grossen Kreise beider Systeme einander entsprechen lässt. Dass unter dieser besonderen Voraussetzung der Rest des Erzeugnisses beider Systeme, d. i. der geometrische Ort der Schnittpunkte entsprechender Kreise, thatsächlich ein Kreis ist, lässt sich, wie folgt, auch direct nachweisen.

4. Seien o und o' die Mittelpunkte zweier monocentrischer Systeme, welche derart projectivisch auf einander bezogen werden sollen, dass dem unendlich grossen Kreise c_∞ des einen, der unendlich grosse Kreis c'_∞ des anderen entspricht. Zur Festlegung der Projectivität reicht dann die Angabe zweier weiterer Paare entsprechender Kreise $c_1\, c'_1$, $c_2\, c'_2$ hin. Denkt man sich nun mit dem System o einen Hilfskreis K in Verbindung gebracht, so erzeugt derselbe ein Parallelbüschel von Radicalaxen, worunter sich die Radicalaxen von K und den Kreisen c_1, c_2 und c_∞, also zwei im Endlichen liegende Geraden σ_1 und σ_2 und die unendlich ferne Gerade σ_∞ befinden. In gleicher Weise ruft irgend ein Kreis K' mit dem System o' ein Radicalaxenbüschel hervor, worunter sich die Radicalaxen

von K' und c_1', c_2', c_∞', d. i. wieder zwei im Endlichen liegende Geraden σ_1', σ_2' und die unendlich ferne Gerade σ_∞ befinden.

Da die beiden Systeme derart projectivisch auf einander bezogen sind, dass den drei Elementen c_1, c_2, c_∞ die drei Elemente c_1', c_2', c_∞' entsprechen, so werden auch in den abgeleiteten Strahlenbüscheln den Elementen σ_1, σ_2, σ_∞ die Elemente σ_1', σ_2', σ_∞' entsprechen. Diese Büschel besitzen also den unendlich fernen Strahl entsprechend gemein und sind in Folge dessen insbesondere perspectivisch. Man hat demnach den weiteren Satz:

b) »Bildet in zwei projectiven monocentrischen Systemen der unendlich grosse Kreis ein selbstentsprechendes Element, so sind irgend zwei aus den Systemen abgeleitete Radicalaxenbüschel perspectivisch«.

Dass auch die Umkehrung dieses Satzes Giltigkeit hat, bedarf wohl keines besonderen Beweises.

5. Es ist einleuchtend, dass zu der Ableitung der Radicalaxenbüschel aus den beiden Systemen o und o' durchaus nicht zwei verschiedene Hilfskreise K und K' erforderlich sind, sondern dass ebenso gut ein einziger Hilfskreis verwendet werden kann. Zum Zwecke der folgenden Betrachtung ertheilen wir diesem Kreise eine besondere Lage, und zwar führen wir denselben durch die beiden Punktepaare $a_1 b_1$, $a_2 b_2$, in welchen sich die entsprechenden Kreispaare $c_1\, c_1'$ und $c_2\, c_2'$ schneiden. Der Mittelpunkt m desselben wird nothwendig auf der Centralen oo' liegen. Durch diese besondere Anordnung wird erreicht, dass die beiden projectiven Radicalaxenbüschel, welche nun der Kreis K mit den Systemen o und o' erzeugt, drei Paare entsprechender Strahlen, nämlich $\sigma_1 = a_1 b_1$, $\sigma_2 = a_2 b_2$ und die unendlich ferne Gerade gemein haben, also identisch sind. Eine Folge davon ist, dass irgend ein Strahl σ_i des Büschels $\sigma_1 \sigma_2 \ldots$ die Radicalaxe von K und einem gewissen Kreise c_i von o, und zugleich Radicalaxe von K und dem entsprechenden Kreise c_i' in o', mithin auch Radicalaxe zwischen den entsprechenden Kreisen c_i und c_i' ist und demnach die beiden (reellen oder imaginären) Schnittpunkte von c_i und c_i' auf K liegen. Da das Gleiche für jedes andere Paar entsprechender Kreise der

Systeme o und o' gilt, so stellt sich der Kreis K als das Erzeugniss der letzteren dar. Es gilt demgemäss der Satz:

c) »Haben zwei projective monocentrische Systeme den unendlich grossen Kreis entsprechend gemein, so ist der geometrische Ort der Schnittpunkte entsprechender Kreise derselben selbst wieder ein Kreis, dessen Mittelpunkt mit jenen der beiden Systeme auf derselben Geraden liege«.

Und umgekehrt:

d) »Werden zwei monocentrische Systeme derart auf einander bezogen, dass sich je zwei entsprechende Kreise derselben auf einem festen Kreise, dessen Mittelpunkt mit den Mittelpunkten der Systeme auf einer und derselben Geraden liegt, schneiden, so sind dieselben projectivisch und haben den unendlich grossen Kreis entsprechend gemein«.

Diesfalls ist noch der specielle Fall zu beachten, wenn der von den beiden Systemen erzeugte Kreis K in ein Geradenpaar zerfällt, d. h. wenn entsprechende Kreise beider Systeme sich in einer und derselben zu ihrer Centralen senkrechten Geraden R schneiden, oder mit anderen Worten, wenn die Radicalaxen aller Paare entsprechender Kreise in ein und dieselbe Gerade K fallen. Diese Gerade ist dann der eine Bestandtheil jenes Geradenpaares, in welches der Kreis K zerfällt; der andere Bestandtheil muss nothwendig durch die Kreispunkte gehen, ist mithin wieder die unendlich ferne Gerade. Das Gesammterzeugniss der beiden Systeme besteht also diesfalls aus der Geraden R und der dreifach zählenden unendlich fernen Geraden.

Die Vereinigung zweier monocentrischer Systeme, welche einen Kreis erzeugen, wollen wir als ein »dicentrisches System«, die Mittelpunkte seiner beiden Bestandtheile als seine »Mittelpunkte« und den erzeugten Kreis als seinen »Radicalkreis« bezeichnen; endlich je zwei entsprechende Kreise der monocentrischen Systeme als »conjugirte Kreise« des dicentrischen Systems. Wenn, wie vorhin bemerkt, der von den beiden Systemen erzeugte Kreis in eine im Endlichen gelegene und in die unendlich ferne Gerade zerfällt, so soll das dicentrische System ein »gerades« heissen, und sein im Endlichen gelegenes geradliniges Erzeugniss seine »Radicalaxe«.

6. Sei o_1 der Mittelpunkt eines monocentrischen Systems, o_2 und o_3 die Mittelpunkte zweier anderer solcher Systeme, wovon jedes mit dem ersten ein dicentrisches System bestimmen soll; R_{12} und R_{13} die zu diesen letzteren gehörigen Radicalkreise und c_{12}, c_{13} deren auf o_1o_2, respective o_1o_3 liegenden Mittelpunkte. Zwischen den beiden monocentrischen Systemen o_2 und o_3 herrscht ebenfalls eine Abhängigkeit, welche dadurch charakterisirt ist, dass sich in ihnen solche Kreise entsprechen, welche mit demselben Kreise von o_1 conjugirt sind. Da sich aber dieses Entsprechen auch auf die unendlich grossen Kreise von o_1, o_2, o_3 bezieht, so folgt, dass auch die monocentrischen Systeme o_2 und o_3 projectivisch, mit selbstentsprechendem unendlich grossen Kreise sind, also wieder ein dicentrisches System bilden, dessen Radicalkreis R_{23} heissen möge. Seien ferner σ und σ' die (reellen oder imaginären) Schnittpunkte der Radicalkreise R_{12} und R_{13}. Durch σ geht ein gewisser Kreis c_1; mithin gehen durch denselben auch die mit c_1 conjugirten Kreise c_2 und c_3 der beiden dicentrischen Systeme o_1o_2 und o_1o_3. Da aber diese Kreise sich nun auch in den monocentrischen Systemen o_2 und o_3 entsprechen, so muss der Radicalkreis R_{23} ebenfalls durch σ gehen. Da das Gleiche auch von σ' gilt, so folgt der Satz:

e) »Haben zwei dicentrische Systeme ein monocentrisches System gemein, so bilden die übrigen zwei Bestandtheile derselben ein drittes dicentrisches System, dessen Radicalkreis mit den Radicalkreisen der beiden ersten dieselben zwei Punkte gemein hat«.

Eine unmittelbare Folge hievon ist weiters, dass die Mittelpunkte c_{12}, c_{13} und c_{23} dieser drei Radicalkreise auf einer und derselben Geraden h liegen müssen, dass man also den Mittelpunkt c_{23} von R_{23} im Schnitte der Geraden $c_{12}\,c_{13}$ mit den Geraden o_2o_3 erhält. Auf das Dreieck $o_1o_2o_3$ und die Gerade h lässt sich daher der bekannte Transversalensatz anwenden, wonach

$$\frac{o_1c_{12}}{o_2c_{12}} \cdot \frac{o_2c_{23}}{o_3c_{23}} \cdot \frac{o_3c_{13}}{o_1c_{13}} = 1$$

ist.

Da die Punkte c_{12} und c_{13} willkürlich auf $o_1 o_2$ und $o_1 o_3$ angenommen sind, so können die Verhältnisse $\frac{o_1 c_{12}}{o_2 c_{12}}$ und $\frac{o_3 c_{13}}{o_1 c_{13}}$ stets in der Form $\frac{l^2}{m^2}$ und $\frac{n^2}{l^2}$ dargestellt werden, wobei l^2, m^2, n^2 beliebige, den Punkten o_1, o_2, o_3 zugeschriebene Zahlwerthe darstellen. Das dritte Verhältniss $\frac{o_2 c_{23}}{o_3 c_{23}}$ erscheint dann in der Form $\frac{m^2}{n^2}$.

Die Vereinigung dreier monocentrischer Systeme, welche paarweise zu dicentrischen Systemen verbunden sind, soll analog als ein »tricentrisches Kreissystem« bezeichnet werden. Sind die drei dicentrischen Systeme »gerade«, so soll auch das tricentrische ein »gerades« heissen. Die drei Radicalaxen schneiden sich diesfalls in einem und demselben Punkte und es ist $l^2 = m^2 = n^2 = 1$.

7. Seien c_1, c_2 und R drei Kreise, welche einem und demselben Büschel angehören, sich also in zwei (reellen oder imaginären) Punkten σ und σ' schneiden, und o_1, o_2, c, beziehungsweise ihre in derselben Geraden liegenden Mittelpunkte. Denken wir uns auf dem Kreise K zwei beliebige Punkte r und r' angenommen und dieselben durch eine Gerade g verbunden, welche den Kreis c_1 in a_1 und b_1, den Kreis c_2 in a_2 und b_2 schneidet. Die drei Punktepaare rr', $a_1 b_1$, $a_2 b_2$ gehören bekanntlich einer Involution an, d. h. es ist

$$(rr'a_1a_2) = (r'rb_1b_2),$$

oder ausgeschrieben:

$$\frac{ra_1}{r'a_1} : \frac{ra_2}{r'a_2} = \frac{r'b_1}{rb_1} : \frac{r'b_2}{rb_2}.$$

Diese Beziehung lässt sich auf nachstehende Form bringen:

$$\frac{ra_1 . rb_1}{ra_2 . rb_2} = \frac{r'a_1 . r'b_1}{r'a_2 . r'b_2}.$$

Die vier hier auftretenden Rechtecke $ra_1 . rb_1$, $ra_2 . rb_2$, $r'a_1 . r'b_1$ und $r'a_2 . r'b_2$ stellen aber die Potenzen des Punktes r,

respective des Punktes r' in Bezug auf die Kreise c_1 und c_2 dar und die Beziehung sagt demnach aus, dass das Verhältniss der Potenzen von r in Bezug auf c_1 und c_2 gleich ist dem Verhältnisse der Potenzen von r' in Bezug auf c_1 und c_2. Berücksichtigt man ferner, dass r und r' zwei beliebig auf R gewählte Punkte sind, so erkennt man, dass das in Rede stehende Verhältniss, für alle Punkte von R überhaupt, constant ist. Der Werth v dieses Verhältnisses ergibt sich, wenn man dasselbe für die beiden Punkte von R berechnet, welche in der Centralen $o_1 o_2 c$ liegen.

Sind r_1, r_2 und ρ die Radien von c_1, c_2 und K, so erhält man leicht

$$v = \frac{(r_1+co_1-\rho)(r_1-co_1+\rho)}{(\rho+co_2-r_2)(\rho+co_2-r_2)}$$

und

$$v = \frac{(\rho+co_1+r_1)(\rho+co_1-r_1)}{(r_2-co_2+\rho)(r_2+co_2-\rho)}.$$

Hieraus folgt zunächst

$$[(\rho+co_2)^2-r_2^2]v = r_1^2-(co_1-\rho)^2$$

und

$$[r_2^2-(co_2-\rho)]^2 v = (\rho+co_1)^2-r_1^2.$$

Durch Addition beider Gleichungen erhält man

$$4v.co_2.\rho = 4co_1.\rho,$$

woraus endlich

$$v = \frac{o_1c}{o_2c}$$

folgt.

Sind demnach p_1 und p_2 die Potenzen irgend eines Punktes von R in Bezug auf C_1 und C_2, so ist stets

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{o_1c}{o_2c}.$$

Es sei hier bemerkt, dass mit den Grössen, welche in dieser Verhältnissgleichung auftreten, auch Vorzeichen verknüpft werden können. Das Verhältniss $\frac{o_1c}{o_2c}$ ist positiv oder negativ,

je nachdem die Strecken o_1c und o_2c in gleichem oder in entgegengesetztem Sinne verlaufen, d. h. je nachdem c ausserhalb oder innerhalb o_1o_2 liegt. Die Potenz eines Punktes in Bezug auf einen Kreis ist positiv oder negativ, je nachdem die beiden Strecken, welche er auf einer durch ihn gehenden Secante bestimmt, von ihm selbst aus in gleichem oder in entgegengesetztem Sinne verlaufen, d. h. je nachdem er ausserhalb oder innerhalb des Kreises liegt.

Wir haben nun folgende Fälle zu unterscheiden.

α. Der Punkt c liegt ausserhalb o_1o_2; dann ist das Verhältniss $\frac{o_1c}{o_2c}$ positiv, mithin auch das Verhältniss $\frac{p_1}{p_2}$, d. h. jeder Punkt des Kreises R liegt entweder ausserhalb oder innerhalb der beiden Kreise C_1 und C_2. Dies ist auch thatsächlich der Fall. Denn sind die gemeinschaftlichen Punkte σ und σ' von C_1, C_2 und R reell, so liegt der eine Bogen $\sigma\sigma'$ des Kreises R innerhalb der beiden Kreise C_1 und C_2, der andere Bogen hingegen ausserhalb derselben. Sind die Punkte σ und σ' dagegen imaginär, so wird der Kreis R entweder beide Kreise C_1 und C_2 umschliessen oder von ihnen umschlossen werden, falls einer von ihnen den andern umschliesst, oder R wird den einen der beiden Kreise umschliessen, und ausserhalb des anderen liegen, falls auch C_1 und C_2 ausserhalb einander liegen.

β. Der Punkt c liegt innerhalb o_1o_2; dann ist das Verhältniss $\frac{o_1c}{o_2c}$, also auch das Verhältniss $\frac{p_1}{p_2}$ negativ, d. h. jeder Punkt des Kreises R liegt ausserhalb C_1 und innerhalb C_2 oder umgekehrt. Sind die Punkte σ und σ' reell, so liegt der eine Bogen $\sigma\sigma'$ von R innerhalb C_1 und ausserhalb C_2, der andere Bogen aber ausserhalb C_1 und innerhalb C_2. Sind σ und σ' dagegen imaginär, so wird, falls die Kreise C_1 und C_2 ausserhalb einander liegen, der Kreis R (sofern er überhaupt reell ist) von einem derselben umschlossen; umschliesst aber einer der Kreise C_1 und C_2 den anderen, dann liegt R zwischen beiden.

Kehren wir zu der ursprünglichen Betrachtung zurück, so erkennen wir, dass das Verhältniss $\frac{p_1}{p_2}$ bloss von den Abständen des Punktes c von den Punkten o_1 und o_2, nicht aber

von den Radien der drei Kreise abhängig ist. Es wird demnach seinen Werth behalten, wenn man die Kreise C_1 und C_2 durch irgend zwei andere Kreise mit denselben Mittelpunkten o_1 und o_2 ersetzt, vorausgesetzt, dass ihre beiden Schnittpunkte auf R liegen, das ist durch irgend zwei conjugirte Kreise desjenigen dicentrischen Systems, dessen Mittelpunkte o_1 und o_2 sind und dessen Radicalkreis R ist. Es gilt daher der Satz:

f) »Das Verhältniss der Potenzen irgend eines Punktes des Radicalkreises eines dicentrischen Systems in Bezug auf zwei conjugirte Kreise des letzteren ist constant und gleich dem Verhältnisse, in welchem das Centrum des Radicalkreises die Strecke der Mittelpunkte des Systems theilt«.

Und für den besonderen Fall eines geraden dicentrischen Systems:

g) »Die Potenzen irgend eines Punktes der Radicalaxe eines geraden dicentrischen Systems in Bezug auf zwei conjugirte Kreise des letzteren, sind einander gleich«.

Das Verhältniss $\frac{o_1 c}{o_2 c}$ soll in der Folge als das »Potenzverhältniss« des dicentrischen Systems bezeichnet werden. Dasselbe lässt sich stets in der Form $\frac{o_1 c}{o_2 c} = \frac{l^2}{m^2}$ darstellen, wobei l^2 und m^2 zwei beliebige, den monocentrischen Systemen o_1 und o_2 zugeschriebene Zahlwerthe bedeuten.

8. Seien o_1, o_2, o_3 die Mittelpunkte eines tricentrischen Systems; R_{12}, R_{23}, R_{31} die Radicalkreise der Paare $o_1 o_2$, $o_2 o_3$, $o_3 o_1$ und c_{12}, c_{23}, c_{31} deren Mittelpunkte; endlich σ und σ' die gemeinschaftlichen Punkte von R_{12}, R_{23}, R_{31}.

Wie in 6) gezeigt wurde, lassen sich die drei Verhältnisse

$$\frac{o_1 c_{12}}{o_2 c_{12}}, \quad \frac{o_2 c_{23}}{o_3 c_{13}}, \quad \frac{o_3 c_{31}}{o_1 c_{31}}$$

stets in den Formen

$$\frac{l^2}{m^2}, \quad \frac{m^2}{n^2}, \quad \frac{n^2}{l^2}$$

darstellen.

Fällt man von o_1, o_2, o_3 auf die Gerade h, welche die Mittelpunkte c_{12}, c_{23}, c_{31} der drei Radicalkreise enthält, die

Lothe x_1, x_2, x_3, so ergibt sich ohne Weiteres aus ähnlichen Dreiecken

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{o_1 c_{12}}{o_2 c_{12}} = \frac{l^2}{m^2}, \qquad \frac{x_2}{x_3} = \frac{o_2 c_{23}}{o_3 c_{23}} = \frac{m^2}{n^2},$$

$$\frac{x_3}{x_1} = \frac{c_3 c_{31}}{o_1 c_{31}} = \frac{}{l^2}.$$

Nehmen wir nun in dem tricentrischen System drei beliebige, conjugirte Kreise C_1, C_2, C_3, so bestehen zwischen den Potenzen p_1, p_2, p_3 des Punktes σ in Bezug auf diese drei Kreise nach Satz *f)* die Beziehungen

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{o_1 c_{12}}{o_2 c_{12}} = \frac{l^2}{m^2} = \frac{x_1}{x_2},$$

$$\frac{p_2}{p_3} = \frac{o_2 c_{23}}{o_3 c_{23}} = \frac{m^2}{n^2} = \frac{x_2}{x_3},$$

$$\frac{p_3}{p_1} = \frac{o_3 c_{31}}{o_1 c_{31}} = \frac{n^2}{l^2} = \frac{x_3}{x_1}$$

oder

$$p_1 : p_2 : p_3 = x_1 : x_2 : x_3 = l^2 : m^2 : n^2.$$

Das Gleiche gilt für den anderen Schnittpunkt σ' der drei Radicalkreise, und auch für jedes andere Tripel conjugirter Kreise des tricentrischen Systems. Mithin:

h) »Die Potenzen eines jeden der beiden gemeinschaftlichen Punkte der Radicalkreise eines tricentrischen Systems in Bezug auf irgend drei conjugirte Kreise des letzteren verhalten sich wie die Abstände der Mittelpunkte des Systems von der Centralen der Radicalkreise«.

Und insbesondere:

i) »Der Schnittpunkt der Radicalaxen eines geraden, tricentrischen Systems ist Potenzcentrum für je drei conjugirte Kreise des Systems«.

9. Sei wieder $o_1 o_2 o_3$ ein tricentrisches System; die Mittelpunkte c_{12}, c_{23}, c_{31} der drei Radicalkreise mögen mittelst dreier willkürlicher Zahlwerthe l^2, m^2, n^2 vermöge der Relationen $\frac{o_1 c_{12}}{o_2 c_{12}} = \frac{l^2}{m^2}$ u. s. w. gegeben sein, womit auch die Gerade h

bestimmt ist. Die Radicalkreise R_{12}, R_{23}, R_{31} sind, wie bereits bekannt, so zu wählen, dass sie ein reelles oder imaginäres Punktepaar σ, σ' gemein haben.

Es lässt sich nun unschwer zeigen, dass jeder beliebige vierte Punkt o_4 zum Mittelpunkt eines monocentrischen Systems gemacht werden kann, so, dass $o_1 o_2 o_4$, $o_1 o_3 o_4$ und $o_2 o_3 o_4$ als drei neue tricentrische Systeme auftreten.

Legen wir nämlich dem Punkte o_4 ebenfalls irgend einen Zahlwerth p_2 bei, so dass die beiden Systeme o_1 und o_4 zu einem dicentrischen System vom Potenzverhältniss $\frac{l^2}{p^2}$ zusammengefasst werden können, und der Mittelpunkt c_{14} des zugehörigen Radicalkreises R_{14} die Strecke $o_1 o_4$ in dem Verhältnisse $\frac{l^2}{p^2} = \frac{o_1 c_{14}}{o_4 c_{14}}$ theilt; dann bilden nach Satz *e)* auch die monocentrischen Systeme o_2 und o_4 ein dicentrisches System, dessen Radicalkreis R_{24} den Schnittpunkt c_{24} von c_{14}, c_{12} und $o_2 o_4$ zum Mittelpunkt hat und welchem das Potenzverhältniss $\frac{m^2}{p^2}$ entspricht. Wenn wir uns den Radicalkreis R_{14} mit beliebigem Radius aus dem Mittelpunkte c_{14} beschrieben denken, so wird der Radicalkreis R_{24} durch die Schnittpunkte σ_1, σ_1' von R_{12} und R_{14} hindurchgehen.

Die drei Systeme o_1, o_2, o_4 bilden daher ein tricentrisches System. In gleicher Weise werden auch o_1, o_3, o_4 ein tricentrisches System bilden, da die beiden dicentrischen Systeme $o_1 o_3$ und $o_1 o_4$ das monocentrische System o_1 gemein haben. Der Radicalkreis R_{24} des dritten Paares o_3, o_4 geht dann durch die Schnittpunkte σ_2 und σ_2' von R_{13} und R_{14} und sein Mittelpunkt c_{34} ergibt sich im Schnitte von $c_{14} c_{13}$ mit $o_3 o_4$. Das zugehörige Potenzverhältniss ist $\frac{n^2}{p^2} = \frac{o_3 c_{34}}{o_4 c_{34}}$.

Endlich müssen aber auch die beiden dicentrischen Systeme $o_2 o_4$ und $o_3 o_4$ ein tricentrisches System bilden, da sie das monocentrische System o_4 gemein haben, und wobei das ursprünglich vorhandene dicentrische System $o_2 o_3$ als drittes Paar auftritt. Dann müssen aber die Mittelpunkte c_{23}, c_{34}, c_{24} der zugehörigen Radicalkreise R_{23}, R_{34}, R_{24} in einer und

derselben Geraden liegen. Dass dies thatsächlich der Fall ist, kann auch folgendermassen eingesehen werden.

Die beiden Dreiecke $o_2o_4o_3$ und $c_{12}c_{24}c_{14}$ liegen auf dem Dreistrahle o_1 $(o_2o_4o_3)$; die entsprechenden Seitenpaare derselben o_2o_4, $c_{12}c_{14}$; o_3o_4, $c_{13}c_{14}$ und o_2o_3, $c_{12}c_{13}$ müssen sich demnach einem bekannten Satze zufolge auf einer und derselben Geraden schneiden. Die betreffenden Schnittpunkte sind aber eben die in Rede stehenden Mittelpunkte c_{24}, c_{34}, c_{23}. Die dem tricentrischen System o_2, o_3, o_4 entsprechenden Potenzverhältnisse sind respective $\frac{m^2}{n^2}$, $\frac{n^2}{p^2}$, $\frac{p^2}{m^2}$ und die drei Radicalkreise R_{23}, R_{34}, R_{42} werden nothwendig zwei Punkte σ_3, σ_3' gemein haben.

Überblicken wir nochmals in Kürze die hergestellten Combinationen, so gelangen wir zu folgendem Resultate: In der Ebene sind vier beliebige Punkte o_1, o_2, o_3, o_4 als Mittelpunkte von vier monocentrischen Systemen gegeben, deren jedem ein Zahlwerth l^2, m^2, n^2, respective p^2 entspricht. Verknüpft man eines dieser Systeme, z. B. o_1 mit allen übrigen zu dicentrischen Systemen mit Hilfe der Potenzverhältnisse $\frac{l^2}{m^2}$, $\frac{l^2}{n^2}$, $\frac{l^2}{p^2}$, wodurch sich auf o_1o_2, o_1o_3, o_1o_4 die Mittelpunkte c_{12}, c_{13}, c_{14} der zugehörigen Radicalkreise R_{12}, R_{13}, R_{14} ergeben, deren Radien beliebig gewählt werden können, so sind hiedurch auch die Systeme o_2, o_3, o_4 untereinander zu dicentrischen Systemen verbunden; das Potenzverhältniss eines jeden Paares ist hiebei gleich dem Verhältnisse der Zahlwerthe, welche seinen beiden Mittelpunkten zugeschrieben sind. Die zugehörigen Radicalkreise sind nicht willkürlich, sondern jeder derselben geht durch die Schnittpunkte eines gewissen Paares der früher beliebig gewählten Radicalkreise, und zwar jenes Paares, dessen Mittelpunkte mit seinem Mittelpunkt in gerader Linie liegen.

Es ist nun einleuchtend, dass man in derselben Weise noch ein 5tes, 6tes... x^{tes} monocentrisches System mit den früheren verbinden kann, was zu folgendem allgemeinen Satze führt:

j) »Sind in einer Ebene n beliebige monocentrische Systeme $o_1 \ldots o_n$ gegeben, deren jedem ein Zahlwerth $l_1^2 \ldots l_n^2$ bei-

gelegt wird, und verbindet man eines davon, z. B. o_1 mit allen übrigen $o_2 \ldots o_n$ zu dicentrischen Systemen solcherart, dass die Verhältnisse $\frac{l_1^2}{l_2^2} \ldots \frac{l_1^2}{l_n^2}$ als die zugehörigen Potenzverhältnisse auftreten und die Radicalkreise $R_{12} \ldots R_{1n}$ beliebige Radien erhalten, so sind hiedurch überhaupt alle Paare $o_2 o_3 \ldots o_{n-1} o_n$ zu dicentrischen Systemen verbunden. Das Potenzverhältniss eines beliebigen Paares $o_i o_k$ ist dann stets gleich dem Verhältnisse der den Mittelpunkten o_i und o_k entsprechenden Werthen $l_i^2 l_k^2$; der Mittelpunkt des zugehörigen Radicalkreises R_{ik} theilt die Strecke $o_i o_k$ in demselben Verhältnisse und liegt mit den Mittelpunkten c_{1i} und c_{1k} in gerader Linie, während der Radicalkreis R_{ik} durch die Schnittpunkte der Radicalkreise R_{1i}, R_{1k} geht. Je drei unter den n monocentrischen Systemen vereinigen sich zu einem tricentrischen Systeme«.

10. Sei $o_1 o_2 o_3$ ein tricentrisches System, dessen drei Potenzverhältnisse, wie früher, vermöge dreier den Mittelpunkten o_1, o_2, o_3 beigelegten Werthe l^2, m^2, n^2 bestimmt sind. Die Mittelpunkte c_{12}, c_{23}, c_{31} der drei zugehörigen Radicalkreise R_{12}, R_{23}, R_{31} liegen in einer und derselben Geraden h, und die letzteren selbst haben ein Punktepaar $(\sigma\sigma')_{123}$ gemein. Wir wollen nun wieder ein beliebiges monocentrisches System o_4 mit dem tricentrischen System in Verbindung bringen, aber nicht mehr in der allgemeinen Art, dass wir, wie im vorhergehenden Artikel dem Mittelpunkte o_4 einen beliebigen Werth p^2 beilegen, sondern dadurch, dass als Radicalkreis R_{14} für das dicentrische System $o_1 o_4$ ein Kreis mit beliebigem Radius gewählt wird, dessen Mittelpunkt aber in den Schnitt c_{14} von $o_1 o_4$ und h fällt. Dieser Kreis wird jeden der beiden Radicalkreise R_{12}, R_{31} in einem Punktepaar $(\sigma\sigma')_{124}$, $(\sigma\sigma')_{341}$ treffen. Durch diese Bedingungen ist nun dem System o_4 ein bestimmter Werth p^2 zugewiesen, welcher sich aus dem Potenzverhältnisse $\frac{l^2}{p^2} = \frac{o_1 c_{14}}{o_4 c_{14}}$ ergibt.

Da nun o_1 und o_2, o_1 und o_4 zwei dicentrische Systeme mit gemeinschaftlichem monocentrischen System o_1 vorstellen, so bilden auch o_2 und o_4 ein dicentrisches System. Der Mittel-

punkt c_{24} seines Radicalkreises R_{24} muss mit c_{12} und c_{14} in einer und derselben Geraden liegen, ist also in diesem Falle nothwendig der Schnittpunkt von $o_2 o_4$ und h, und der Radicalkreis selbst geht durch die Schnittpunkte $(\sigma\sigma')_{124}$ von R_{12} und R_{14}.

In gleicher Weise findet man, dass der Radicalkreis R_{34} des dicentrischen Systems $o_3 o_4$ den Schnittpunkt c_{34} von h und $o_3 o_4$ zum Mittelpunkt hat und dass er durch die Schnittpunkte $(\sigma\sigma')_{134}$ der Kreise R_{13}, R_{14} gehen muss. Endlich, dass die drei Kreise R_{24} und R_{34} und R_{23} sich in einem und demselben Punktepaar $(\sigma\sigma')_{234}$ treffen müssen. Wir ersehen hieraus, dass ebenso wie in dem früher betrachteten allgemeinen Falle je drei von den vier Systemen o_1, o_2, o_3, o_4 ein tricentrisches System bilden, nur tritt hier die besondere Eigenschaft hinzu, dass die Mittelpunkte der sechs Radicalkreise nicht zu dreien je einer Geraden angehören, sondern dass sie überhaupt alle auf einer und derselben Geraden liegen. Was nun den Werth von p^2 betrifft, so ist derselbe, wie schon oben ersichtlich war, davon abhängig, wie die Gerade h die Strecke $o_1 o_4$ theilt, also abhängig sowohl von der Lage des Punktes o_4 gegen das Dreieck $o_1 o_2 o_3$, als auch von der Lage von h gegen $o_1 o_2 o_3$, d. i. von l^2, m^2, n^2. Es wird demnach zwischen l^2, m^2, n^2, p^2 und den Bestimmungsstücken der gegenseitigen Lage von o_1, o_2, o_3, o_4 eine metrische Relation herrschen, die wir jetzt entwickeln wollen.

Fällen wir von o_1, o_2, o_3, o_4 Lothe auf h, die x_1, x_2, x_3, x_4 heissen mögen, so ist offenbar

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = l^2 : m^2 : n^2 : p^2.$$

Bezeichnen wir ferner mit ρ_1, ρ_2, ρ_3 die Strecken $o_1 o_4$, $o_2 o_4$, $o_3 o_4$ und mit γ_1, γ_2, γ_3 die drei Winkel $o_2 o_4 o_3$, $o_3 o_4 o_1$, $o_1 o_4 o_2$ zwischen denselben, mit Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4 die Flächen jener Dreiecke, in welchen die gleich indicirten Punkte o nicht als Eckpunkte auftreten, und endlich den Neigungswinkel der Geraden $o_1 o_4$ gegen die Lothe mit φ, so ist

$$\frac{x_1 - x_4}{\rho_1} = \cos\varphi,$$

$$\frac{x_4-x_2}{\rho_2} = -\cos(\gamma_3+\varphi) = -\cos\gamma_3 \cos\varphi + \sin\gamma_3 \sin\varphi,$$

$$\frac{x_4-x_3}{\rho_3} = -\cos(\gamma_2-\varphi) = -\cos\gamma_2 \cos\varphi - \sin\gamma_2 \sin\varphi.$$

Die Elimination von $\sin\varphi$ ergibt

$$(x_4-x_2)\frac{\sin\gamma_2}{\rho_2} + (x_4-x_3)\frac{\sin\varphi_3}{\rho_3} =$$

$$= -\cos\varphi(\cos\gamma_3 \sin\gamma_2 + \cos\gamma_2 \sin\gamma_3) = -\cos\varphi \cos\gamma_1$$

und die Substitution von $\cos\varphi$ aus der ersten Gleichung:

$$(x_4-x_1)\frac{\sin\gamma_1}{\rho_1} + (x_4-x_2)\frac{\sin\gamma_2}{\rho_2} + (x_4-x_3)\frac{\sin\gamma_3}{\rho_3} = o$$

oder

$$x_4\Delta_4 = x_1\Delta_1 + x_2\Delta_2 + x_3\Delta_3$$

und vermöge der obigen Proportionen

$$p^2\Delta_4 = l^2\Delta_1 + m^2\Delta_2 + n^2\Delta_3 \qquad \text{I)}$$

als die gesuchte Beziehung.

Insbesondere verdient der Fall hervorgehoben zu werden, wenn o_4 der Höhenschnittpunkt des ursprünglichen Dreieckes $o_1o_2o_3$ ist. Man findet leicht, dass dann für α_1, α_2, α_3 als die Winkel des Dreieckes $o_1o_2o_3$

$$\frac{\Delta_1}{\Delta_4} = \operatorname{ctg}\alpha_2 \operatorname{ctg}\alpha_3, \quad \frac{\Delta_2}{\Delta_4} = \operatorname{ctg}\alpha_3 \operatorname{ctg}\alpha_1, \quad \frac{\Delta_3}{\Delta_4} = \operatorname{ctg}\alpha_1 \operatorname{ctg}\alpha_2$$

ist, womit an Stelle der allgemeinen Relation I) die besondere

$$p^2 \operatorname{tg}\alpha_1 \operatorname{tg}\alpha_2 \operatorname{tg}\alpha_3 = l^2 \operatorname{tg}\alpha_1 + m^2 \operatorname{tg}\alpha_2 + n^2 \operatorname{tg}\alpha_3 \qquad \text{II)}$$

tritt.

Die Gesammtheit von vier solchen monocentrischen Systemen, welche zu je drei verbunden, tricentrische Systeme ergeben und deren sechs Radicalkreiscentren auf einer und derselben Geraden h liegen, soll, um die eingeführten Bezeichnungen consequent abzuschliessen, ein »tetracentrisches System« heissen.

Liegen die vier Punkte o_1, o_2, o_3, o_4 so, dass einer davon den Höhenschnitt des von den übrigen drei gebildeten Dreieckes darstellt, so ist überhaupt jeder der vier Punkte der Höhenschnitt des übrigen Dreieckes. Die vier Punkte können in diesem Falle auch als Eckpunkte eines vollständigen Viereckes angesehen werden, welches sich durch die besondere Eigenschaft auszeichnet, dass je zwei Gegenseiten auf einander senkrecht stehen und desshalb ein »orthogonales vollständiges Viereck« heisst und wir wollen aus diesem Grunde auch das tetracentrische System, dessen vier Mittelpunkte eine solche Lage haben, als ein »orthogonal-tetracentrisches« bezeichnen.

11. Seien o_1 und o_2 die Mittelpunkte eines dicentrischen Systems, R der Radicalkreis und c sein Mittelpunkt. Bezeichnen wir das Verhältniss $o_1c : o_2c$ wieder durch $l^2 : m^2$, so verhalten sich nach Satz *f)* die Potenzen eines jeden Punktes von R in Bezug auf irgend zwei conjugirte Kreise des Systems ebenfalls wie $l^2 : m^2$, oder was dasselbe ist, die von irgend einem Punkte des Radicalkreises R an ein beliebiges Paar conjugirter Kreise gezogenen Tangenten stehen in dem Verhältnisse $l : m$.

Theilen wir nun die Strecke o_1o_2 innerlich und äusserlich durch die Punkte f_x und f'_x, so dass

$$o_1f_x : o_2f'_x = o_1f : o_2f' = l : m.$$

Die Punkte f_x und f'_x liegen dann bekanntlich symmetrisch gegen den Punkt c, und sie können als Brennpunkte eines Kegelschnittes Σ angesehen werden, dessen Brennpunktsaxe dem Durchmesser von R gleich ist.

Sei nun s eine beliebige Tangente dieses Kegelschnittes, und w_1, w_2, ρ, ρ' die Fusspunkte der von o_1, o_2, f und f' auf dieselbe gefällten Lothe, wobei ρ und ρ' nach einem bekannten Satze aus der Kegelschnittstheorie auf dem Kreise R liegen müssen.

Sind endlich λ und μ die Sehnen, welche die Gerade s in den beiden Kreisen C_1 und C_2 bestimmt und deren Mittelpunkte offenbar w_1 und w_2 sind, so ergeben sich die Potenzen des Punktes ρ in Bezug auf C_1 und C_2 respective gleich $\frac{\lambda^2}{4} - \overline{\rho w_1^2}$ und $\frac{\mu^2}{4} - \overline{\rho w_2^2}$, und da ρ auf dem Radicalkreise R

liegt, so ist

$$\frac{\lambda^2}{4}-\overline{\rho w_1^2}:\frac{\mu^2}{4}-\overline{\rho w_2^2}=l^2:m^2. \qquad 1)$$

Ausserdem ist

$$\rho w_1:\rho w_2=fo_1:fo_2=l:m$$

oder

$$\rho w_1^2:\rho w_2^2=l^2:m^2. \qquad 2)$$

Aus 1) und 2) folgt aber unmittelbar

$$\lambda:\mu=l:m.$$

Bezeichnen wir den Kegelschnitt Σ als den dem dicentrischen Kreissystem »beigeordneten Kegelschnitt«, so folgt mit Rücksicht auf die willkürliche Wahl des conjugirten Kreispaares C_1C_2 der Satz:

k) »Das Verhältniss der Längen jener Sehnen, welche eine beliebige Tangente des einem dicentrischen Systeme beigeordneten Kegelschnittes in irgend zwei conjugirten Kreisen dieses Systemes bestimmt, ist constant, und zwar gleich dem Verhältnisse der Quadratwurzeln jener Strecken, in welchen der Mittelpunkt des Radicalkreises die Strecke der Mittelpunkte des dicentrischen Systems theilt«.

12. Jede beliebige Tangente t des Kegelschnittes Σ berührt stets auch einen Kreis C_1 mit dem Mittelpunkte o_1, d. h. sie bestimmt in demselben eine unendlich kleine Sehne. Dem eben bewiesenen Satze zufolge muss nun auch die Sehne, welche t in dem mit C_1 conjugirten Kreise C_2 bestimmt, unendlich klein sein, oder mit anderen Worten, jede Tangente des Kegelschnittes Σ ist gleichzeitig eine gemeinschaftliche Tangente irgend zweier conjugirter Kreise des dicentrischen Systems und umgekehrt, jede gemeinschaftliche Tangente irgend zweier conjugirter Keise ist eine Tangente des Kegelschnittes Σ (wie übrigens mit Hilfe einer ähnlichen Betrachtung wie in 9) auch direct leicht nachgewiesen werden kann). Daher:

l) »Die gemeinschaftlichen Tangenten aller Paare conjugirter Kreise eines dicentrischen Systems umhüllen den diesem System beigeordneten Kegelschnitt«.

13. Der Satz K gestattet, wie man unschwer erkennt folgende Umkehrungen:

m) Alle Geraden, welche in zwei gegebenen Kreisen C_1 und C_2 Sehnen bestimmen, welche in einem gegebenen Verhältnisse $l:m$ stehen, umhüllen einen Kegelschnitt. Die Brennpunkte des letzteren theilen die Strecke der beiden Kreismittelpunkte innerhalb und ausserhalb in dem Verhältnisse $l:m$ und der über der Brennpunktsaxe als Durchmesser beschriebene Kreis geht durch die (reellen oder imaginären) Schnittpunkte der beiden gegebenen Kreise. Die gemeinschaftlichen Tangenten der beiden Kreise sind ebenfalls Tangenten des genannten Kegelschnittes«.

Und insbesondere:

n) »Alle Geraden, welche in zwei gegebenen Kreisen gleiche Sehnen bestimmten, umhüllen jene Parabel, deren Scheiteltangente die Radicalaxe der Kreise ist und deren Brennpunkt in der Mitte zwischen den Kreismittelpunkten liegt. Unter den Parabeltangenten befinden sich auch die gemeinschaftlichen Tangenten der beiden Kreise«.

o) »Alle Kreispaare aus zwei gegebenen Mittelpunkten, welche auf einer gegebenen Geraden Sehnen von bestimmtem Längenverhältniss ausschneiden, sind conjugirte Kreispaare eines dicentrischen Systems«.

14. Erwähnenswerth ist, dass der einem dicentrischen Kreissystem beigeordnete Kegelschnitt unter besonderen Verhältnissen in zwei Einhüllende erster Classe, d. i. in zwei Strahlenbüschel zerfallen kann. Dieser Fall tritt jedesmal ein, wenn die Mittelpunkte o_1 und o_2 des dicentrischen Systems zugleich polar conjugirte Punkte des Radicalkreises R sind, d. h. wenn sie den in ihrer Verbindungslinie $o_1 o_2$ liegenden Durchmesser $\varphi\varphi'$ des Radicalkreises R innerhalb und ausserhalb in demselben Verhältnisse $l:m$ theilen. Bezeichnen wir noch den Mittelpunkt des Radicalkreises mit c, so bestehen folgende aus der Elementargeometrie bekannte Eigenschaften.

Das Verhältniss der Entfernungen eines jeden Punktes des Kreises R von den Punkten o_1 und o_2 ist ebenfalls gleich $l:m$ und das Verhältniss $o_1 c : o_2 c = l^2 : m^2$. Seien nun C_1 und C_2 irgend zwei conjugirte Kreise des dicentrischen Systems,

(o_1, o_2, R), d. h. zwei Kreise aus den Mittelpunkten o_1 und o_2, welche sich in den nämlichen zwei (reellen oder imaginären) Punkten von R treffen. Die Potenzen irgend eines beliebigen Punktes P von R in Bezug auf C_1 und C_2 verhalten sich nach *f)* wie $o_1 c : o_2 c$, d. h. wie $l^2 : m^2$. Mithin stehen die von P aus an C_1 und C_2 gezogenen Tangenten Pa_1 und Pa_2 im Verhältnisse $l : m$. Dieses Verhältniss weisen aber auch die Strecken Po_1 und Po_2 auf, so dass die beiden rechtwinkligen Dreiecke $Po_1 a_1$ und $Po_2 a_2$ ähnlich sind, und daher auch die Radien $r_1 = o_1 a_1$ und $r_2 = o_2 a_2$ sich wie $l : m$ verhalten. Hieraus folgt aber, dass φ und φ' die beiden Ähnlichkeitspunkte des beliebig gewählten Paares $C_1 C_2$, mithin überhaupt aller Paare conjugirter Kreise des dicentrischen Systems $(Ro_1 o_2)$ darstellen. Was den diesem Systeme beigeordneten Kegelschnitt Σ betrifft, so sieht man sofort, dass sowohl seine Brennpunkte, als auch seine Scheitel in die Punkte φ und φ' fallen, dass derselbe also in diesen beiden Punkten ausartet. Jede durch φ respective φ' gezogene Gerade ist diesfalls als eine Tangente von Σ anzusehen und sie besitzt auch thatsächlich die im Satze K ausgesprochene Eigenschaft, in conjugirten Kreisen C_1 und C_2 Sehnen von constantem Verhältnisse $(l : m)$ auszuschneiden.

Es gilt demgemäss der Satz:

p) »Sind die Mittelpunkte eines dicentrischen Kreissystems polar conjugirt in Bezug auf den Radicalkreis des Systems, so sind die in der Symmetrieaxe des letzteren gelegenen Punkte des Radicalkreises die Ähnlichkeitspunkte für sämmtliche Paare conjugirter Kreise; der dem System beigeordnete Kegelschnitt zerfällt zugleich in diese beiden Punkte«.

15. Die Ausdehnung der in den vorhergehenden Artikeln angestellten Betrachtungen auf ein tricentrisches Kreissystem führt zu merkwürdigen Beziehungen. Seien o_1, o_2, o_3 die Mittelpunkte eines derartigen Systems. Dasselbe stellt die Vereinigung dreier dicentrischen Systeme (o_1, o_2); (o_2, o_3); (o_3, o_1) dar, unter der Bedingung (§. 6.), dass die drei zugehörigen Radicalkreise R_{12}, R_{23}, R_{31} sich in den nämlichen zwei Punkten schneiden, ihre auf $o_1 o_2$, $o_2 o_3$, $o_3 o_1$ befindlichen Mittelpunkte c_{12}, c_{23}, c_{31} also auf einer und derselben Geraden liegen. Die Potenzver-

hältnisse der drei dicentrischen Systeme $(o_1 o_2 R_{12})$; $(o_2 o_3 R_{23})$; $(o_3 o_1 R_{31})$ sind, wie bereits bekannt, in der Form

$$\frac{o_1 c_{12}}{o_2 c_{12}} = \frac{l^2}{m^2}; \quad \frac{o_2 c_{23}}{o_3 c_{23}} = \frac{m^2}{n^2}; \quad \frac{o_3 c_{13}}{o_1 c_{13}} = \frac{n^2}{l^2}$$

darstellbar.

Den drei dicentrischen Systemen $(o_1 o_2 R_{12})$, $(o_2 o_3 R_{23})$ und $(o_3 o_1 R_{31})$ sind drei Kegelschnitte Σ_1, Σ_2, Σ_3 beigeordnet, deren Mittelpunkte c_{12}, c_{23}, c_{31} sind, und deren Brennpunktspaare f_{12}, f'_{12}; f_{23}, f'_{23}; f_{31}, f'_{31} die Strecken $o_1 o_2$, $o_2 o_3$, $o_3 o_1$ beziehungsweise in den Verhältnissen $l:m$, $m:n$, $n:l$ theilen. Diese drei Kegelschnitte Σ_{12}, Σ_{23}, Σ_{31} gehören ein und derselben Kegelschnittsschaar an, d. h. sie haben vier gemeinschaftliche Tangenten, wie folgende Überlegung lehrt. Stellen wir uns unter C_1, C_2, C_3 irgend ein Tripel conjugirter Kreise des tricentrischen Systems $(o_1 o_2 o_3)$ vor und bezeichnen wir die Sehnen, welche eine gemeinschaftliche Tangente t von Σ_{12} und Σ_{23} von ihnen bestimmt, mit s_1, s_2, s_3.

Nach Satz *k)* ist dann

$$s_1 : s_2 = l : m$$

und

$$s_2 : s_3 = m : n,$$

woraus sich unmittelbar $s_3 : s_1 = n : l$ ergibt; dies bedeutet aber nach Satz *m)*, dass die Gerade t auch den Kegelschnitt Σ_{31} berührt. Dasselbe gilt in gleicher Weise von den übrigen 3 gemeinschaftlichen Tangenten der Curven Σ_{12} und Σ_{23}.

Daher:

q) »Die drei Kegelschnitte, welche den drei dicentrischen Bestandtheilen eines tricentrischen Kreissystems beigeordnet sind, gehören derselben Kegelschnittschaar an«.

Zwischen den Brennpunktepaaren f_{12}, f'_{12}; f_{23}, f'_{23}; f_{31}, f'_{31} der drei Kegelschnitte Σ_{12}, Σ_{23}, Σ_{31} besteht eine leicht erkennbare Beziehung. Da nämlich f_{12} die Dreieckseite $o_1 o_2$ in dem Verhältnisse $l:m$ und f_{23} die Dreieckseite $o_2 o_3$ in dem Verhältnisse $m:n$ theilt, so wird die Gerade f_{12}, f_{23} nach dem bekannten Transversalensatze die Dreieckseite $o_3 o_1$ in dem Verhältnisse $n:l$ theilen, mithin nothwendig durch den einen der beiden Punkte f_{31}, f'_{31} gehen. Dasselbe gilt auch von den

drei Verbindungslinien $f_{12}f'_{23}$, $f'_{12}f_{23}$, $f'_{12}f'_{23}$. Berücksichtigt man nun, dass Σ_{12} und Σ_{23} als zwei beliebige Kegelschnitte einer Schaar angesehen werden können und wie vorhin gezeigt wurde, dass Σ_{31} derselben Schaar angehört, so folgt der Satz:

r) »Sind $f_{12}f'_{12}$ und $f_{23}f'_{23}$ die Brennpunkte zweier Kegelschnitte, so sind die Schnittpunkte der Strahlenpaare $f_{12}f_{23}$, $f'_{12}f'_{23}$ und $f'_{12}f_{23}$, $f_{12}f'_{23}$ stets Brennpunkte eines dritten Kegelschnittes, welcher der durch die beiden ersten bestimmten Kegelschnittschaar angehört«.

16. Den letzt ausgesprochenen Satz hat Herr Schröter[1] in seiner Abhandlung »Über Curven dritter Ordnung« auf einem anderen, directen Wege bewiesen. Die Resultate dieser Abhandlung mögen, so weit sie hier in Betracht kommen, angeführt werden.

»Die Brennpunktspaare aller Kegelschnitte einer Schaar sind conjugirte Punkte einer und derselben Curve dritter Ordnung. Alle Paare conjugirter Punkte dieser Curve werden von einem beliebigen Punkte der Curve durch ein hyperbolisch-gleichseitiges Strahlsystem (d. i. durch ein involutorisches Büschel mit rechtwinkligen Doppelstrahlen) projicirt. Die Axen aller Kegelschnitte der Schaar umhüllen eine Curve dritter Classe, welche die unendlich ferne Gerade zur Doppeltangente hat; beide Curven stehen zu einander in der Beziehung der Hesse'schen und Cayley'schen Curve«. Eine weitere, dort entwickelte Eigenschaft der Brennpunktscurve ist folgende:

Sind $f_{12}f'_{12}$, $f_{23}f'_{23}$ (bezugnehmend auf die vorgehenden Betrachtungen und Bezeichnungen) die Brennpunktspaare zweier Kegelschnitte Σ_{12}, Σ_{23} der Schaar und fasst man dieselben als 2 Paare von Gegenecken eines vollständigen Vierseites auf, so repräsentirt auch das dritte Paar f_{31}, f'_{31} von Gegenecken das Brennpunktspaar eines Kegelschnittes Σ_{31} der Schaar.

Denken wir uns in dem Diagonaldreiseit $o_1o_2o_3$ dieses vollständigen Viereckes eine Höhe, z. B. $o_1\pi_1$ gezogen, deren Fusspunkt auf der Gegenseite o_2o_3 der Punkt π_1 sei. Verbindet man π_1 mit f_{12}, f'_{12} und f_{23}, f'_{23} durch zwei Strahlenpaare, so stellen diese, da sie beide durch das rechtwinklige Strahlenpaar $o_1\pi_1$, o_2o_3 harmonisch getrennt werden, conjugirte Paare eines

[1] Mathem. Annalen, Band V.

gleichseitig involutorischen Büschels dar und π_1 ist demnach wieder ein Punkt der Brennpunktscurve und da ferner alle Brennpunktspaare von π_1 aus durch das eben genannte involutorische Büschel projicirt werden so folgt, dass der Doppelstrahl $\pi_1 o_1$ dieses Büschels ein Brennpunktspaar enthalten muss, oder mit anderen Worten, dass die Höhe $o_1 \pi_1$ des Dreieckes $o_1 o_2 o_3$ die Brennpunktsaxe eines gewissen Kegelschnittes Σ_{14} der Schaar ist. Dasselbe gilt auch von den beiden übrigen Höhen $o_2 \pi_2$ und $o_3 \pi_3$ von $o_1 o_2 o_3$.

Was die Brennpunkte der neuen drei Kegelschnitte Σ_{14}, Σ_{24}, Σ_{34} betrifft, so lässt sich leicht noch eine weitere Beziehung derselben zu dem Dreiecke $o_1 o_2 o_3$ erkennen. Denken wir uns nämlich alle möglichen Brennpunktspaare, darunter auch jenes des Kegelschnittes Σ_{14} von dem Höhenfusspunkt π_2 auf $o_1 o_3$ projicirt, so erhalten wir, wie schon vorhin gezeigt wurde, ein involutorisches Büschel, dessen Doppelstrahlen $o_1 o_3$ und $o_2 o_4$ sind. Hieraus folgt aber unmittelbar, dass die Brennpunkte des Kegelschnittes Σ_{14} nothwendig durch o_1 und o_4 harmonisch getrennt sein müssen. Da endlich die Mittelpunkte $c_{12}, c_{13} \ldots$ aller Kegelschnitte der Schaar auf einer und derselben Geraden h liegen, so ergibt sich auch der Mittelpunkt c_{14} von Σ_{14} im Schnitte dieser Geraden mit $o_1 o_4$.

Berücksichtigt man endlich, dass die Einhüllende aller Axen der Kegelschnittschaar von der dritten Classe ist, so leuchtet ein, dass ausser den Seiten und Höhen des Dreieckes $o_1 o_2 o_3$ keine weiteren Kegelschnittaxen durch die 4 Punkte $o_1 o_2 o_3 o_4$ gehen können. Die vorstehenden Betrachtungen ergeben sonach den Satz:

s) »Die Brennpunktaxen je dreier Kegelschnitte einer Schaar, deren Brennpunktspaare als Gegenecken eines vollständigen Vierseites angeordnet werden können, bilden ein Dreieck, dessen Höhen die Brennpunktsaxen dreier weiteren Kegelschnitte der Schaar sind. Die Brennpunktspaare der letzteren werden von dem Höhenpunkt und je einem Eckpunkt des Dreieckes harmonisch getrennt«.

17. Der letzt ausgesprochene Satz führt zu einer merkwürdigen Eigenschaft des orthogonal-tetracentrischen Kreissystems. Denken wir uns nämlich wieder ein tricentrisches

System $o_1 o_2 o_3$ gegeben, dessen Potenzverhältnisse vermöge der drei willkürlichen Werthe l^2, m^2, n^2 bestimmt sind. Desgleichen mögen alle übrigen Elemente in der gewohnten Weise bezeichnet werden.

Wir wissen nun, dass die drei den dicentrischen Systemen $o_1 o_2$, $o_2 o_3$, $o_3 o_1$ beigeordneten Kegelschnitte Σ_{12}, Σ_{23}, Σ_{31} einer Schaar angehören und ihre 4 gemeinschaftlichen Tangenten t, t', t'', t''' in je drei conjugirten Kreisen des Systems Sehnen ausschneiden, welche sich wie $l : m : n$ verhalten. Nach Satz *s)* gehört zu dieser Schaar aber unter anderem auch ein Kegelschnitt Σ_{14}, dessen Brennpunktsaxe in die Höhe $o_1 o_4$ des Dreieckes $o_1 o_2 o_3$ fällt. Es ist mithin möglich, diesen Kegelschnitt Σ_{14} als beigeordneten Kegelschnitt eines dicentrischen Systems anzusehen, welches aus dem System o_1 und einem zweiten monocentrischen System besteht. Da der Mittelpunkt des letzteren nothwendig auf der Brennpunktsaxe $o_1 o_4$ liegen und durch die Brennpunkte des Kegelschnittes Σ_{14} von o_1 harmonisch getrennt sein muss, so folgt aus Satz *s*, dass nur o_4 dieser Punkt sein kann. Da weiters der Mittelpunkt von Σ_{14} der Schnitt c_{14} der Axe $o_1 o_4$ mit der Mittelpunktsgeraden $h = c_{12}, c_{23}, c_{31}$ der Schaar ist, so wird zugleich das Potenzverhältniss des Systemes $o_1 o_4$, gleich $\frac{o_1 c_{14}}{o_4 c_{14}} = \frac{l^2}{p^2}$ erhalten, wobei

$$p^2 \operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{tg} \alpha_2 \operatorname{tg} \alpha_3 = l^2 \operatorname{tg} \alpha_1 + m^2 \operatorname{tg} \alpha_2 + n^2 \operatorname{tg} \alpha_3,$$

wie in 10) gezeigt wurde. Das System o_4 ist also mit $o_1 o_2 o_3$ zu einem orthogonal-tetracentrischen System verbunden. Endlich werden alle Tangenten von Σ_{14}, darunter auch die 4 vorgenannten Tangenten $t, t', t'' t'''$ in je zwei conjugirten Kreisen von $o_1 o_4$ Sehnen bestimmen, welche sich wie $l : p$ verhalten. Wir können daher den Satz aussprechen:

t) »Die sechs, einem orthogonal-tetracentrischen Kreissystem beigeordneten Kegelschnitte gehören einer und derselben Kegelschnittsschaar an und jede ihrer vier gemeinschaftlichen Tangenten bestimmt in je vier conjugirten Kreisen des Systemes Sehnen, welche sich wie $l : m : n : p$ verhalten, wobei die Verhältnisse von l^2, m^2, n^2, p^2, respective die Potenzverhältnisse der dicentrischen Systeme von o_1, o_2, o_3, o_4 darstellen«.

Zu diesem Satze findet man leicht die nachstehende, besondere Form:

t) Die sechs, einem geraden orthogonal-tetracentrischen System beigeordneten Parabeln gehören einer und derselben Parabelschaar an und jede ihrer drei gemeinschaftlichen Tangenten bestimmt in je vier conjugirten Kreisen des Systems gleiche Sehnen.»

18. Nehmen wir jetzt umgekehrt vier beliebige Gerade t, t', t'', t''' in einer Ebene an. Dieselben können stets als Basistangenten einer Kegelschnittsschaar gedacht werden. Wählen wir ausserdem einen beliebigen Punkt o_1, so gehen, da die Einhüllende aller Kegelschnittsaxen eine Curve dritter Classe ist, durch denselben die Axen $o_1 o_2$, $o_1 o_3$, $o_1 o_4$ dreier Kegelschnitte Σ_{12}, Σ_{23}, Σ_{31} der Schaar. Bezeichnen wir mit $f_{12} f'_{12}$ und $f_{13} f'_{13}$ die Brennpunktspaare von Σ_{12} und Σ_{13}, so werden nach Satz *r)* auch die Schnittpunkte f_{23}, f'_{23} der Strahlenpaare $f_{12}\, f_{13}$ und $f'_{12}\, f'_{13}$, $f_{12}\, f'_{13}$ und $f_{13}\, f'_{12}$ die Brennpunkte eines Kegelschnittes der Schaar darstellen, dessen Axe $o_2 o_3$ die Verbindungslinie $f_{23}\, f'_{23}$ darstellt. Die Höhen des von den Brennpunktsaxen der drei Curven C_{12}, C_{23}, C_{31} gebildeten Dreieckes $o_1 o_2 o_3$ sind ebenfalls Axen von Kegelschnitten $\Sigma_{14}\, \Sigma_{24}\, \Sigma_{31}$ der Schaar. Die sechs Kegelschnitte $\Sigma_{12} \ldots \Sigma_{34}$ können also als die beigeordneten Kegelschnitte eines orthogonal-tetracentrischen Systems $o_1\, o_2\, o_3\, o_4$ angesehen werden und ihre Axenkreise stellen zugleich die sechs Radicalkreise dieses Systems dar. Die Anwendung des Satzes *t)* auf dieses System und die vier Geraden t, t', t'', t''' liefert den weiteren Satz:

u) »Es gibt unendlich viele orthogonal-tetracentrische Kreissysteme, von solcher Beschaffenheit, dass je vier conjugirte Kreise eines derselben in einer jeden von vier gegebenen Geraden Sehnen bestimmen, deren Verhältniss für das betreffende orthogonal-tetracentrische Kreissystem constant ist. Die Mittelpunkte eines jeden solchen tetracentrischen Systems sind die Eckpunkte eines der unendlich vielen vollständigen orthogonalen Vierecke, die sich aus den Axen der den vier Geraden eingeschriebenen Kegelschnitte bilden lassen. Die Angabe eines Mittelpunktes bestimmt vollständig die drei übrigen«.

19. Seien endlich $C_1\, C_2\, C_3$ drei beliebige Kreise mit den Mittelpunkten $o_1\, o_2\, o_3$. Es können stets vier Gerade t, t', t'', t''' bestimmt werden, welche in den drei Kreisen Sehnen bestimmen, die proportional mit irgend drei gegebenen Strecken l, m, n sind, und zwar auf folgende Weise:

Wir fassen C_1, C_2, C_3 als conjugirte Kreise eines tricentrischen Systems o_1, o_2, o_3 auf, dessen Paare $o_1 o_2, o_2 o_3, o_3 o_1$ respective die Potenzverhältnisse $\frac{l^2}{m^2}, \frac{m^2}{n^2}, \frac{n^2}{p^2}$ besitzen und Radicalkreise, welche durch die Schnittpunkte von C_1, C_2; C_2, C_3; C_3, C_1 beziehungsweise gehen. Die vier gesuchten Geraden sind dann die gemeinschaftlichen Tangenten der diesem tricentrischen System beigeordneten Kegelschnitte. Dieselben vier Geraden werden aber nach Satz *t)* auch noch in einem vierten Kreise C_4, der mit $C_1 C_2 C_3$ in dem aus $o_1 o_2 o_3$ abgeleiteten orthogonal-tetracentrischen System conjugirt ist, Sehnen ausschneiden, welche proportional zu einer bestimmten Strecke p sind, nämlich jener, die mit l, m, n durch die Relation $p^2 \operatorname{tg}\alpha_1 \operatorname{tg}\alpha_2 \operatorname{tg}\alpha_3 = l^2 \operatorname{tg}\alpha_1 + m^2 \operatorname{tg}\alpha_2 + n^2 \operatorname{tg}\alpha_3$ verbunden ist, wobei $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ die Winkel des Dreieckes $o_1 o_2 o_3$ sind.

Wir wollen nun den Radius r_4 dieses Kreises unter der Voraussetzung bestimmen, dass r_1, r_2, r_3 die Radien von C_1, C_2, C_3 sind.

Sei t eine der vier vorgenannten Geraden. Bezeichnen s_1, s_2, s_3, s_4 die halben Sehnen, welche die vier Kreise C_1, C_2, C_3, C_4 auf ihr bestimmen, so ist

$$s_1 : s_2 : s_3 : s_4 = l : m : n : p,$$

woraus unmittelbar folgt:

$$s_4^2 \operatorname{tg}\alpha_1 \operatorname{tg}\alpha_2 \operatorname{tg}\alpha_3 = s_1^2 \operatorname{tg}\alpha_1 + s_2^2 \operatorname{tg}\alpha_2 + s_3^2 \operatorname{tg}\alpha_3. \qquad \text{III)}$$

Seien ferner $o_1 a_1 = x_1$, $o_2 a_2 = x_2$, $o_3 a_3 = x_3$, $o_4 a_4 = x_4$ die von den Eckpunkten o_1, o_2, o_3 und dem Höhenschnitt o_4 auf t gefällten Lothe.

Man findet nun

$$a_1 a_2 = \sqrt{\overline{o_1 o_2}^2 - (x_1 - x_2)^2}; \quad a_1 a_3 = \sqrt{\overline{o_1 o_3}^2 - (x_1 - x_3)^2};$$
$$a_2 a_3 = \sqrt{\overline{o_2 o_3}^2 - (x_2 - x_3)^2};$$

mithin

$$\sqrt{\overline{o_1o_2^2}-(x_1-x_2)^2}+\sqrt{\overline{o_1o_3^2}-(x_1-x_3)^2}=\sqrt{\overline{o_2o_3^2}-(x_2-x_3)^2}$$

und von den Wurzeln befreit:

$$x_1^2\overline{o_2o_3^2}+x_2^2.\overline{o_3o_1^2}+x_3^2.\overline{o_1o_2^2}-x_1x_2[\overline{o_2o_3^2}+\overline{o_3o_1^2}-\overline{o_1o_2^2}]-$$
$$-x_2x_3[\overline{o_3o_1^2}+\overline{o_1o_2^2}-\overline{o_2o_3^2}]-x_3x_1[\overline{o_1o_2^2}+\overline{o_2o_3^2}-\overline{o_3o_1^2}]=$$
$$=\overline{o_1o_2^2}.\overline{o_1o_3^2}-\frac{1}{4}[\overline{o_1o_2^2}+\overline{o_1o_3^2}-\overline{o_2o_3^2}]^2$$

oder vermöge bekannter Beziehungen am Dreiecke

$$x_1^2.\overline{o_2o_3^2}+x_2^2\overline{o_3o_1^2}+x_3^2\overline{o_1o_2^2}-2x_1x_2\overline{o_1o_3}.\overline{o_3o_1}\cos\alpha_3-$$
$$-2x_2x_3\overline{o_3o_1}.\overline{o_1o_2}._2\cos\alpha_2=\overline{o_1o_2^2}.\overline{o_1o_3^2}\sin\alpha_1^2.$$

Dividirt man durch $\overline{o_1o_2}.\overline{o_1o_3}$ und ersetzt man die auftretenden Seitenverhältnisse durch die Sinus-Verhältnisse der Gegenwinkel, so erhält man nach den nöthigen Reductionen unter Berücksichtigung der Winkelsumme die Gleichung:

$$(x_1^2\operatorname{tg}\alpha_1+x_2^2\operatorname{tg}\alpha_2+x_3^2\operatorname{tg}\alpha_3)\operatorname{tg}\alpha_1\operatorname{tg}\alpha_2\operatorname{tg}\alpha_3-$$
$$-[x_1\operatorname{tg}\alpha_1+x_2\operatorname{tg}\alpha_2+x_3\operatorname{tg}\alpha_3]^2=2F\operatorname{tg}\alpha_1\operatorname{tg}\alpha_2\operatorname{tg}\alpha_3,$$

worin F den Flächeninhalt des Dreieckes $o_1o_2o_3$ bedeutet.

Zwischen den Lothen besteht aber, wie bereits in 10) gezeigt wurde, auch die Relation

$$x_4\operatorname{tg}\alpha_1\operatorname{tg}\alpha_2\operatorname{tg}\alpha_3=x_1\operatorname{tg}\alpha_1+x_2\operatorname{tg}\alpha_2+x_3\operatorname{tg}\alpha_3.$$

Man erhält also schliesslich

$$x_1^2\operatorname{tg}\alpha_1+x_2^2\operatorname{tg}\alpha_2+x_3^2\operatorname{tg}\alpha_3-x_4^2\operatorname{tg}\alpha_1\operatorname{tg}\alpha_2\operatorname{tg}\alpha_3=2F.$$

Substituirt man hierin $x_1^2=r_1^2-s_1^2$ u. s. w., so folgt

$$r_1^2\operatorname{tg}\alpha_1+r_2^2\operatorname{tg}\alpha_2+r_3^2\operatorname{tg}\alpha_3-r_4^2\operatorname{tg}\alpha_1\operatorname{tg}\alpha_2\operatorname{tg}\alpha_3-2F=$$
$$=s_1^2\operatorname{tg}\alpha_1+s_2^2\operatorname{tg}\alpha_2+s_3^2\operatorname{tg}\alpha_3-s_4^2\operatorname{tg}\alpha_1\operatorname{tg}\alpha_2\operatorname{tg}\alpha_3$$

und mit Berücksichtigung von III.,

$$r_1^2\operatorname{tg}\alpha_1+r_2^2\operatorname{tg}\alpha_2+r_3^2\operatorname{tg}\alpha_3-r_4^2\operatorname{tg}\alpha_1\operatorname{tg}\alpha_2\operatorname{tg}\alpha_3=2F \qquad \text{IV)}$$

Man ersieht hieraus, dass der Radius r_4 bloss von den Winkeln des Dreieckes $o_1o_2o_3$ und von den Radien r_1, r_2, r_3,

nicht aber von den Verhältnissgrössen l, m, n, p oder s_1, s_2, s_3, s_4 abhängig ist, so dass sich unmittelbar folgende zwei Sätze ergeben:

v) »Sind drei conjugirte Kreise eines orthogonal-tetracentrischen Systems gegeben, so ist dadurch auch der vierte conjugirte Kreis unabhängig von den Potenzverhältnissen bestimmt; sein Radius r_4 ist mit den Radien r_1, r_2, r_3 der ersten drei Kreise durch die Beziehung

$$r_1^2 \operatorname{tg} \alpha_1 + r_2^2 \operatorname{tg} \alpha_2 + r_3^2 \operatorname{tg} \alpha_3 - r_4^2 \operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{tg} \alpha_2 \operatorname{tg} \alpha_3 = 2F$$

verbunden, worin α_1, α_2, α_3, F die Winkel und den Flächeninhalt des Mittelpunktdreieckes der ersten drei Kreise bedeuten«.

w) »Sind in einer Ebene drei beliebige Kreise C_1, C_2, C_3 mit den Radien r_1, r_2, r_3 gegeben, deren Mittelpunkte o_1, o_2, o_3 ein Dreieck mit den Winkeln α_1, α_2, α_3 und dem Flächeninhalt F bilden und wird der Höhenschnitt o_4 des Dreieckes zum Centrum eines vierten Kreises C_4 gemacht, dessen Radius r_4 durch die Gleichung

$$r_1 \operatorname{tg} \alpha_1 + r_2^2 \operatorname{tg} \alpha_2 + r_3^2 \operatorname{tg} \alpha_3 - r_4^2 \operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{tg} \alpha_2 \operatorname{tg} \alpha_3 = 2F$$

bestimmt ist, so sind die vier Sehnen s_1, s_2, s_3, s_4, welche diese Kreise auf einer beliebigen Geraden der Ebene ergeben, stets durch die Gleichung

$$s_1^2 \operatorname{tg} \alpha_1 + s_2^2 \operatorname{tg} \alpha_2 + s_3^2 \operatorname{tg} \alpha_3 = s_4^2 \operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{tg} \alpha_2 \operatorname{tg} \alpha_3$$

verbunden«.

Zum Schlusse sei mir die Bemerkung gestattet, dass die analogen Betrachtungen im Raume auf interessante Strahlencomplexe, Congruenzen und Regelflächen führen. Die diessbezüglichen Untersuchungen, welche sich mitunter sehr verwickelt und schwierig gestalten, beabsichtige ich zum Gegenstande einer weiteren Abhandlung zu machen.



Über die Beziehung zwischen der Widerstandsänderung von Wismuthplatten im Magnetfeld und dem rotatorischen oder transversen Effect

von

J. C. Beattie.

Aus dem physikalischen Institute der k. k. Universität in Wien.

(Mit 1 Tafel.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 24. Mai 1895.)

Kundt hat gezeigt, dass der transverse Effect in Eisen Kobalt und Nickel proportional der Magnetisirung ist.[1] Einen derartigen der Magnetisirung proportionalen Effect werden wir im Folgenden als einen reinen Halleffect bezeichnen. Indem Kundt dieselbe Methode auf dünne Platten von elektrolytisch abgeschiedenem Wismuth anwandte, fand er keinen transversalen Effect. Spätere Experimente bewiesen, dass die Abwesenheit des transversalen Effectes für umgeschmolzenes elektrolytisch abgeschiedenes Wismuth nicht gilt. Es entsteht die Frage nach der Beziehung des gesammten transversalen Effectes zur Magnetisirung. Diese Frage kann beantwortet werden, wenn man den transversalen Effect mit irgend einem in demselben Plattenindividuum auftretenden Effect vergleicht, dessen Beziehung zur Magnetisirung bekannt ist. Als ein derartiger Effect kann die Widerstandsänderung gewählt werden. Goldhammer hat gezeigt, dass letztere — wenigstens für schwache Felder — dem Quadrate der Magnetisirung proportional ist.[2]

[1] Wiedemann's Annalen, Neue Folge, Bd. 49, 1893.

[2] Wiedemann's Annalen, Neue Folge, Bd. 36, 1889.

Im Sommer 1894 machte ich auf Anregung Prof. Boltzmann's hin Experimente, um zu untersuchen, ob der transversale Effect im Wismuth das Ohm'sche Gesetz[1] befolgt. Dabei war es nothwendig, in derselben Platte bei gleicher Feldintensität die Widerstandsänderung und den Transversaleffect zu bestimmen. Doch war die dort angewandte Versuchsanordnung derart, dass sie für den Zweck der gegenwärtigen Untersuchung zu grosse Beobachtungsfehler zuliess. Trotzdem zeigte sich schon an den dort gefundenen Zahlen eine gesetzmässige Beziehung zwischen dem transversalen Effect und der Widerstandsänderung.

Der Strom, welcher von aussen durch die Platte geschickt wird, soll der Primärstrom heissen. In den Stromkreis desselben war ein dicker Kupferdraht eingeschaltet: Zwei Punkte desselben waren mit einem Galvanometer (Primärgalvanometer) verbunden, dessen Ausschlag als Mass der Intensität des Primärstromes diente. Dies kann geschehen, da die Messungen durchaus nur relative Werthe anstreben.

Zwei vis-à-vis liegende nahezu äquipotentiale Punkte der Platte wurden ebenfalls mit einem Galvanometer (Hallgalvanometer) verbunden, der halbe Ausschlag des letzteren Galvanometers mit Rücksicht auf sein Zeichen und dividirt durch die Intensität des Primärstromes soll der Transversaleffect heissen. Der numerische Werth desselben soll mit E bezeichnet werden.

Um den Widerstand der Platte zu messen, wurden zwei fixe längs der Bahn des Primärstromes liegende Punkte mit dem Galvanometer (Widerstandsgalvanometer) verbunden. Die in diesem Fall beobachtete Ablesung, dividirt durch die Intensität des Primärstromes, konnte dem Widerstand der Platte proportional gesetzt werden, da der Widerstand des Galvanometers ein sehr grosser war. In dieser Weise wurde das Mass des Widerstandes unabhängig von der Stärke des Primärstromes gemacht, was sich auch in den folgenden Experimenten zeigte. Mit einer Wismuthplatte, welche wir mit II bezeichnen wollen wurden folgende Resultate erhalten:

---

[1] Proc. Roy. Soc. Ed. Dec. 1894.

Feldstärke	Intensität des Primärstromes in Amp.	Ausschlag des Widerstandsgalv. / Ausschlag des Primärstromgalv.
17780	110/186	1·78
17780	110/762	1·76
17780	110/982	1·75
0	110/186	1·39
0	110/762	1·39
0	110/982	1·40

Der Widerstand $w+\Delta w$ einer Platte im magnetischen Felde weniger den Widerstand w derselben Platte ohne Feld, d. h. die Grösse Δw wurde proportional der Magnetisirung gesetzt. Das positive Zeichen wurde gewählt, wenn der Widerstand wächst. Wenn der Transversaleffect ein reiner Halleffect st, so folgt

$$c_1\sqrt{\Delta w} = \pm E. \tag{1}$$

Offenbar kann diese Gleichung für Platten nicht gelten, wo E ein Maximum erreicht. In derartigen Platten müssen wir eine Gleichung von der Form

$$c_1\sqrt{\Delta w}+c_2(\sqrt{\Delta w})^3 = \pm E \tag{2}$$

benützen.

Die folgenden Resultate wurden mit den beiden Platten erhalten, welche ich in der citirten Abhandlung mit VI und I*b* bezeichnet habe.

Platte VI.

Länge: 42·2
Breite: 23·6 } *mm*
Dicke: 1·4105

$w = 1·3097$

Feldstärke in C. G. S.-Einheiten	Trans.-Effect	Δw	$\sqrt{\Delta w}$	c_1	c_2
4710	—·02347	·0316	·1778		
8310	0	·07	·2646	—·240	+ 3·4
11910	+·03616	·1035	·3217	—·239	+ 3·4
15235	+·07304	·1307	·3615	—·238	+ 3·3
18000	+·0859	·1476	·3842	—·238	+ 3·1

Platte I *b*.

Länge: 60·45 }
Dicke: 25·8 } *mm*
Breite: 1·2235 }

$w = \cdot 9486$

Feldstärke in C. G. S.-Einheiten	Trans.-Effect	Δw	$\sqrt{\Delta w}$	c_1	c_2
3878	—·05517	·0387	·1969		
8725	—·003	·0950	·3082	—·45	+4·8
16720	+·14253	·1735	·4165	—·46	4·6
19390	+·20239	·2090	·4571	—·44	4·2
20500	+·22356	·2095	·4577	—·45	4·4

Die constanten c_1 und c_2 wurden durch Einsetzungen der beobachteten Werthe von Δw und E in Gleichung (2) berechnet.

Die so für die schwächsten Felder erhaltenen Resultate wurden der Reihe nach mit den für die übrigen Felder erhaltenen combinirt und für die verschiedenen Paare c_1 und c_2 berechnet. Offenbar ist der Fehler umso kleiner, je grösser der Unterschied der Feldstärken ist. In den oben mitgetheilten Experimenten war der Primärstrom senkrecht zur Feldrichtung. In den späteren Experimenten wurde ein D'Arsonval'sches Galvanometer benützt. Der Elektromagnet war ringförmig und mit einem Draht umwickelt, welcher einen Strom von etwa 30 Ampère vertrug. Die Endflächen der Pole waren Kreise von 60 *mm* Durchmesser und 18 *mm* Abstand. Durch Einschaltung eines Widerstandes in den Stromkreis des Elektromagneten konnte die Feldstärke nach Belieben geschwächt werden. Dieselbe wurde nach Verdet's Methode bestimmt.

Da die Feldstärke nicht direct in Rechnung kommt, so genügt es, dieselbe beiläufig zu kennen. Daher wurde ihre Bestimmung erst nach Beendigung der übrigen Versuche ausgeführt.

Die benutzten Wismuthplatten wurden alle an einem Ebonitstreifen befestigt; an beide Enden waren Kupferplatten von nahezu gleicher Breite und Dicke angelöthet. Die Enden

der beiden Kupferstreifen tauchten in Quecksilbernäpfe. Diese beiden Näpfe konnten nach Bedarf mit dem Primärstrom oder dem Galvanometer verbunden werden. In dieser Weise konnte der Widerstand der Platte senkrecht zur Feldrichtung gemessen werden. Selbstverständlich hat der Widerstand der Kupferstreifen keinen Einfluss auf Δw, da er durch die magnetische Kraft nicht geändert wird.

Um den Transversaleffect und den Widerstand längs der Kraftlinien zu messen, waren zwei Drähte, wie Fig. (2*a*) zeigt, an die Halbirungspunkte der Seiten der Wismuthplatte gelöthet, deren Enden in vier neue Quecksilbernäpfe tauchten.

Die so montirte Platte wurde durch eine Klemme im Felde gehalten und konnte nach Bedarf um einen rechten Winkel gedreht werden.

Drei verschiedene Stellungen der Platten gegen die Feldrichtungen wurden betrachtet. Es liege die Feldrichtung in der Ebene des Papiers; die y-Axe nach rechts, die x-Axe gegen den Beschauer, die z-Axe senkrecht zu beiden nach aufwärts gezogen. In der ersten Stellung — α — lag die Ebene der Platte in die xz-Ebene und der Primärstrom floss in der z-Richtung. In der zweiten Stellung — β — lag die Ebene der Platte in der yz-Ebene, während der Primärstrom wieder die z-Richtung hatte. In beiden Fällen wurde also der Widerstand senkrecht zu den Kraftlinien gemessen. In der dritten Lage — γ — lag die Ebene der Platte in der yz-Ebene, während der Primärstrom die y-Richtung hatte; bei dieser letzten Anordnung konnte also der Widerstand längs der Kraftlinien gemessen werden, indem der Primärstrom von (1) nach (2) geschickt wurde, während (3) und (4) mit dem Galvanometer verbunden waren. Es zeigte sich übrigens, dass diese letztere Anordnung nicht sehr vortheilhaft war, wesshalb in den meisten Fällen eine andere Anordnung benützt wurde. Die Platte war wieder an die Ebonite befestigt, aber es waren längs beiden Seitenflächen der Wismuthplatte dicke Kupferdrähte fast der ganzen Länge nach angelöthet; diese beiden Kupferdrähte dienten als Elektroden des Primärstromes. Zwei andere Drähte waren nach der Länge der Platte angelöthet, aber nicht in Contact mit den ersten beiden Drähten, sondern in einem kleinen

Abstand von denselben; letztere diente zu Widerstandsmessungen.

Der Transversaleffect wurde immer zu der Stellung α gemessen. Aus zahlreichen Ablesungen wurde immer das Mittel genommen.

Es wurde nicht versucht, die Temperatur durch Eintauchen der Platte in einer Flüssigkeit constant zu erhalten; doch wurde zwischen je zwei Ablesungen so lange gewartet, dass man annehmen konnte, dass die Platte nahezu die Temperatur des Beobachtungsraumes hatte. Die letztere Temperatur ist immer die angegebene.

Für schwache Felder ist die hier angewandte Widerstandsmessungsmethode nur mit Sicherheit anwendbar, wenn der transversale Effect ein reiner Halleffect ist.

Von den benutzten Platten bestand nur eine aus vollkommen reinem elektrolytisch hergestelltem Wismuth.

Länge: 16·75 }
Breite: 7·2 } *mm*
Dicke: ·9 }

Temp. 10° C.

$w =$ ·9521 für Lage α und β
$w =$ 1·5571 für Lage γ.

Feld-stärke	Trans.-Effect	α		β		γ		α	β	c_1
		Δw	$\sqrt{\Delta w}$	Δw	$\sqrt{\Delta w}$	Δw	$\sqrt{\Delta w}$	c_1	c_1	γ
8500	—·2311	·2949	·5430	·3144	·5648	·1489	·3858	—·42	—·41	—·60
9500	—·2455	·3292	·5738	·3556	·5963	·1622	·4927	—·42	—·41	—·60
11700	—·2627	·4001	·6325	·4333	·6582	·1780	·4219	—·41	—·40	—·62
12840	—·2708	·4552	·6747	·4717	·6768	·2066	·4545	—·40	—·40	—·59
14170	—·2974	·4815	·6932	·5258	·7251	·2357	·4855	—·42	—·40	—·61
15600	—·3071	·5881	·7669	·5684	·7539	·2500	·5000	—·40	—·40	—·61
17800	—·3273	·6281	·7926	·6252	·7902	·2704	·5389	—·41	—·41	—·60

Die zur Bestimmung von c_1 in den verschiedenen Stellungen benutzte Gleichung war

$$c_1\sqrt{\Delta w} = -E.$$

Die für α und β erhaltenen Werthe der Constanten sind dieselben; die im Falle γ erhaltenen sind verschieden, aber

man muss bedenken, dass die oben angeführten Resultate von der geometrischen Gestalt der Platte und dem Widerstand des Galvanometers abhängen. Um diese Störungen zu vermeiden, müsste die Grösse $\sqrt{\frac{\Delta n}{n}}$ an Stelle von $\sqrt{w}$ benützt werden.

Hierauf wurden zwei andere Platten, in denen der Transversaleffect kein Maximum zeigt, verwendet. Dieselben waren von zwei verschiedenen Proben käuflichen Wismuths hergestellt.

Platte II.

Länge: 16·5, Breite: 8·0, Dicke: ·827 } *mm*

Temp. 9° C.

$w = \cdot 83$ für Lage α und β

Feld-stärke	Trans.-Effect	α		β		(γ)		(α)		(β)		(γ)	
		Δw	$\sqrt{\Delta w}$	Δw	$\sqrt{\Delta w}$	Δw	$\sqrt{\Delta w}$	c_1	c_2	c_1	c_2	c_1	c_2
1170	—·1087	·0110	·1049										
1840	—·1270	·0150	·1279										
2520	—·2220	·0460	·2145					—1·04	+·30				
3180	—·3249	·1041	·3229	·1018	·3190			—1·04	+·30	—1·05	+·32		
5030	—·3840	·1499	·3872			·2865	·5352	—1·04	+·30				
8500	—·5147	·2945	·5427			·5696	·7540	—1·04	+·31			—·74	1·2
9500	—·5264	·3130	·5594					—1·04	+·30				
11740	—·5679	·3756	·6129	·3805	·6163	·7577	·8704	—1·04	+·30	—1·04	+·30	—·74	1·1
12840	—·6075	·4573	·6761					—1·04	+·30				
14200	—·6181	·4919	·7013	·4820	·6944			—1·04	+·30				
15600	—·6302	·5300	·7213					—1·04	+·30				
17780	—·6600	·6081	·7798	·6023	·7700	1·0062	1·0031	—1·04	+·31			—·75	1·2

In der Platte IX war allein die Beziehung zwischen dem transversalen Effecte und der Widerstandsänderung senkrecht zum Felde beobachtet. Wegen der eigenthümlichen Gestalt dieser Platte musste wiederum eine etwas verschiedene Anordnung — ε — benützt werden. Sie war an einem steifen Papierstreifen befestigt. Die transversalen Elektroden waren wie gewöhnlich an den Halbirungsstellen der Seiten angelöthet.

Die Primärelektroden waren in der Mitte der beiden Endflächen befestigt. Die Widerstandselektroden waren Kupferdrähte, welche längs der ganzen Breite herliefen.

Platte IX.

Länge: 00·1 mm
Breite: 30·3 mm
Dicke: 3·1738 mm

Temp. 14° C.

$w = 1 \cdot 4052$.

Feldstärke	Trans.-Effect	Δw	$\sqrt{\Delta w}$	c_1	c_2
1340	—·0469	·0240	·1549	—·30	+·097
3350	—·0943	·1020	·3194	—·30	+·097
5030	—·1202	·1760	·4195	—·30	+·107
6700	—·1505	·2975	·5454	—·30	+·098
8800	—·1700	·4190	·6473	—·30	+·101
11300	—·1879	·5823	·7631	—·30	+·101
14750	—·1999	·7735	·8795	—·30	+·100
17780	—·2072	·9870	·9985	—·30	+·098

Wir sehen, dass wir in diesen beiden Platten es nicht mehr mit einem reinen Halleffect zu thun haben, sondern dass ein zweiter Effect, welcher positiv und proportional $\Delta w^{1/2}$ ist, sich deutlich bemerkbar macht.

Die Resultate der Platte IX sind in Fig. (21) graphisch dargestellt. Die Widerstandsänderung ist auf die Horizontalaxe, die dazu gehörigen Werthe von $\frac{E}{\sqrt{\Delta w}}$ sind parallel zur Verticalaxe aufgetragen. Die Verbindungslinie ihrer Endpunkte ist eine gerade Linie, die Ordinate ihres Durchschnittspunktes mit der verticalen Axe ist der zugehörige Werth von c_1, wobei

jedoch die bei Darstellung der verschiedenen Zahlen benutzten Einheiten zu berücksichtigen sind.

Um eine solche Curve für irgend eine Platte zu erhalten, sind mindestens zwei directe Bestimmungen des transversalen Effectes und der Widerstandsänderung erforderlich. Mittelst dieser erhalten wir zwei Punkte unserer Linie und können daher für jede andere gegebene Widerstandsänderung den transversalen Effect finden und in seine beiden Componenten zerlegen. Offenbar können die Werthe von c_1 und c_2 gefunden werden, indem wir die Resultate in der beschriebenen Weise verbinden. Die Mittelwerthe aber wurden erhalten, indem wir die für jedes Feld gefundenen Resultate mit den für jedes andere gefundenen Resultaten combinirten, wobei aber die Combination zwei sich unmittelbar folgender Felder, da dieselbe zu geringe Genauigkeit geboten hätte, ausgelassen wurde. Wir erhalten so z. B. mit einer Reihe von 10 Feldern 1 . . . 10 sieben verschiedene Gleichungen (an Stelle von 9), indem wir z. B. 6 mit allen anderen ausser 5 und 7 verbinden.

Die nächsten beiden Platten, welche aus derselben Probe käuflichem Wismuths wie die beiden vorher betrachteten gemacht wurden, gaben ein Maximum von E.

Platte VIII.

Länge: 24·0 mm
Breite: 12·0 mm
Dicke: 1·1365 mm

Temp. 15° C.

$w = 1{\cdot}2815$ für Lage (δ)
$= 2{\cdot}07$ für Lage α.

Feldstärke	Trans.-Effect	α		δ		α		δ	
		Δw	$\sqrt{\Delta w}$	Δw	$\sqrt{\Delta w}$	c_1	c_2	c_1	c_2
1340	—·10221	·0320	·1780	—	—	—	—		
3350	—·19552	·1253	·3539	·0452	·2126	—	—		
5030	—·23712	·2029	·4500	·0712	·2668	—·58	+·27	—·96	+1·2
6700	—·28526	·3244	5697	·1135	·3369	—·58	+·25	—·96	+1·1
11300	—·33459	·6067	·7789	·1943	·4409	—·58	+·25	—·96	+1·1
12840	—·33879	7199	·8484			—·58	+·25		
14750	—·33456	·7803	·8833	·2416	·4914	—·58	+·26	—·96	+1·2
17780	—·3147	·9709	·9853	·2699	·5195	—·58	+·26	—·98	1·4

Die nächste Platte wurde in die Lage ε gebracht. Die Primärelektroden waren aber trotzdem Kupferstreifen, welche längs den ganzen Endflächen angelöthet waren. Die Widerstandselektroden waren längs der halben Breite der Platte angelöthet.

Platte I *a*.

Länge: 50 mm
Breite: 28·25 mm
Dicke: 1·305 mm

Temp. 10° C.

$w = 1 \cdot 0566$.

Feldstärke	Trans.-Effect	Δw	$\sqrt{\Delta w}$	c_1	c_2
8500	—·2902	·2529	·5029	—	—
11740	—·2900	·3262	·5712	—·83	+·98
12840	—·2898	·3274	·5722	—·81	+·94
14170	—·2739	·4121	·6419	—·83	+·95
15600	—·2621	·4321	·6573	—·80	+·99
17780	—·2503	·4816	·6939	—·82	+·95

Wir sehen, dass in diesen beiden Platten ebenfalls beide Effecte auftreten, und zwar der letztere relativ stärker als im vorigen Falle. In Fig. 3 ist die lineare Beziehung zwischen beide Constanten für die Tafel VIII graphisch dargestellt.

Zum Schluss wurden zwei Platten benutzt, in denen der zweite Effect so gross ist, dass er den Halleffect vollständig verdeckt und einen Zeichenwechsel des transversalen Effectes zur Folge hat.

Platte XII.

Länge: 24·0 mm
Breite: 11·75 mm
Dicke: ·95 mm

Temp. 14° C.

$w = 2 \cdot 0718$ für Lage α.

Feldstärke	Trans.-Effect	α		β		α		δ	
		Δw	$\sqrt{\Delta w}$	Δw	$\sqrt{\Delta w}$	c_1	c_2	c_1	c_2
1340	—·0475	·0139	·1179			—	—		
2680	—·07266	·0373	·1931			—	—		
3350	—·08131	·0517	·2274	·0382	·1955	—·41	+1·2	—	—
5030	—·08976	·0776	·2786	·0559	·2383	—·41	1·2	—·50	2·2
6700	—·08922	·1393	·3732	·0900	·3000	—·42	1·3	—·50	2·3
8820	—·07009	·1906	·4366	·1282	·3580	—·41	1·2	—·50	2·4
14750	—·00519	·3318	·5760			—·43	1·3	—	
17780	+·04202	·3816	·6177	·2322	·4819	—·42	1·3	—·50	2·4

Platte X.

Länge: 38·8
Breite: 20·5 *mm*
Dicke: 1·112

Temp. 9° C.

Feldstärke	Trans.-Effect	Δw	$\sqrt{\Delta w}$	c_1	c_2
1840	—·01708	·0148	·1217	—	—
2520	—·01944	·0221	·1487	—	—
3180	—·01974	·0400	·2000	—·16	+1·7
4100	—·01784	·0455	·2133	—·16	1·8
8500	+·01361	·1300	·3606	—·17	1·6
10800	+·02650	·1502	·5875	—·15	1·6
12840	+·06014	·1830	·4278	—·15	1·7
14170	+·07676	·1977	·4448	—·16	1·7
15600	+·09602	·2093	·4575	—·16	1·8
17780	+·12024	·2215	·4707	—·16	1·8

Wir können die bisherigen Resultate dahin zusammenfassen, dass das chemisch reine Wismuth nur den Halleffect zeigt, während in allen anderen, von käuflichem, daher wahrscheinlich unreinem Wismuth hergestellten Platten beide Effecte

vorhanden sind — der reine Halleffect und ein ebenfalls mit positivem Zeichen auftretender, der $\Delta w^{1/2}$ proportionaler Effect.

Prof. Ettingshausen beobachtete in seiner Untersuchung über den transversalen Effect in Wismuth,[1] dass die Werthe von E in verschiedenen Platten ein Maximum erreichten und dass dies selbst in reinem Wismuth der Fall war, wonach also der zweite Effect auch in reinem Wismuth auftreten könnte. Prof. Ettingshausen hat auch den transversalen Effect in einer Legirung von Zinn und Wismuth beobachtet und fand, dass er daselbst sein Zeichen wechselt. Der Zeichenwechsel findet für stärkere oder schwächere Felder statt, je nachdem der Zinngehalt der Legirung kleiner oder grösser ist. Wir bezeichnen dies als die Gegenwart dieses zweiten Effectes, dessen relative Grösse gegenüber dem Halleffecte mit dem Zinngehalt der Legirung wächst.

Der zweite Effect darf nicht mit dem von Ettingshausen und Nernst[2] beobachteten thermomagnetischen Effect verwechselt werden. Letzterer wurde in der reinen Wismuthplatte und in den Platten I, II, VIII, IX beobachtet, konnte dagegen in jenen Platten, wo der transversale Effect das Zeichen wechselt, nicht mit Sicherheit constatirt werden.

Der Halleffect und der zweite Effect treten in voller Stärke auf in dem Momente, wo der Primärstrom geschlossen wird, während der thermomagnetische Effect erst, nachdem der Primärstrom längere Zeit geschlossen ist, allmälig zu seinem vollen Werthe ansteigt. Er ist übrigens auch $\Delta w^{1/2}$ proportional und hat positive Zeichen.

Die obigen Resultate wurden erhalten, als die transversalen Elektroden an der Halbirungsstelle der Seitenflächen angelöthet waren. Es wurde nun eine Reihe von Experimenten gemacht, wobei diese Elektroden an verschiedenen Theilen, aber immer einander entgegengesetzt angebracht waren. In Platte I *a* war der Effect ein Maximum, wenn die Elektroden in der Mitte waren, und nahm umso mehr ab, je weiter sie sich von der Mitte entfernten.

---

[1] Diese Sitzungsberichte, XCIV, 1886.

[2] Diese Sitzungsberichte, XCIV, 1886.

Dieselbe Platte wurde nun längs der Mittellinie in ihrer halben Länge aufgeschnitten, wie es in Fig. 4 dargestellt ist. Die Elektroden waren in *ab*, *ed* oder *ef* befestigt; nun war der Effect in der Lage *ab* der grösste, geringer in *ef* und am schwächsten in *cd*. Letzteres rührt wahrscheinlich von der Gegenwart des Kupferstreifens her, in allen drei Fällen war das Zeichen negativ. Endlich wurde ein zweiter Schlitz längs der Mittellinie gemacht und die Elektroden in *gh* befestigt [siehe Fig. (5)]. Der Effect war nun noch viel schwächer, aber noch immer negativ. Es entsteht die Frage, ob diese Abnahme eine Abnahme des reinen Halleffectes oder eine Abnahme des zweiten Effectes der beiden zuzuschreiben ist. Wenn wir das Verhältniss $\frac{\Delta w}{w}$ für irgend eine Platte bei gegebener Temperatur betrachten, so erhalten wir eine Zahl, welche für die gegebene Platte und Temperatur charakteristisch ist: sie hängt nicht von der Form und Grösse der Platte, sondern nur von ihrer Materialbeschaffenheit ab. Wenn die Platte — wie wir annehmen — überall gleich beschaffen ist, so kann diese Zahl benutzt werden, um die relativen Werthe der beiden Effecte zu bestimmen, deren Summe den gesammten Transversaleffect liefert. Wenn wir die mit Platte I *a* erhaltenen Resultate in deren ursprünglicher Form in dieser Weise behandeln, die Gleichung

$$c_1 \sqrt{\frac{\Delta w}{w}} + c_2 \left(\sqrt{\frac{\Delta w}{w}} \right)^3 = -E \tag{3}$$

benutzen und die Resultate mit den in der aufgeschnittenen Platte vergleichen, finden wir, dass die Abnahme von einer Abnahme des Halleffectes und des zweiten Effectes gleichzeitig herrührt.

Die gleiche Methode, angewandt auf die Fälle, wo die Elektrode nahe dem Ende der Platten lagen, gab ebenfalls eine gleichzeitige Abnahme beider Effecte.

Der Rest der Platte, aus welcher die früher erwähnte Platte VIII geschnitten war, wurde nun in die Anordnung ε gebracht. Der transversale Effect und auch die Widerstandsänderung wurden mit in der Mitte befindlichen Elektroden gemessen.

Nun werden die Widerstandselektroden losgelöthet und der transversale Effect mit Elektroden beobachtet, welche nur zwei Millimeter von dem Ende der Platte abstanden. Die Resultate zeigten eine kleine Abnahme, an welcher wieder beide Effecte betheiligt waren.

Platte VIII *a*.

Länge: 44·0 }
Breite: 21·0 } *mm*
Dicke: 1·05 }

Temp. 15° C.

Feldstärke	Trans.-Effect mit		$\Delta w/w$	$\sqrt{\Delta w/w}$	Mitte		Ende	
	Mitte-Elektr.	Ende-Elektr.			c_1	c_2	c_1	c_2
3350	—·1616	—·1463	·0616	·2482	—·69	+·74	—·63	—·68
6700	—·2371	—·2070	·1716	·4142	—·61	·72	—·62	—·64
11300	—·262	—·2348	·3091	·5559	—·67	·70	—·63	—·68
17780	—·2377	—·2066	·5009	·7077	—	—	—	—

Platte X wurde in derselben Weise behandelt. Der Unterschied des transversalen Effectes in beiden Lagen war gering, sein Zeichen blieb jedoch dasselbe.

Platte X.

Feldstärke	Trans.-Effect		$\Delta w/w$	$\sqrt{\Delta w/w}$	Mitte		Ende	
	Mitte	Ende			c_1	c_2	c_1	c_2
3350	—·02630	—·02834	·0175	·1323	—	—	—	—
6700	—·01513	—·01648	·0535	·2313	—·26	+3·7	—·28	+3·9
11300	+·02028	+·02276	·0848	·2912	—·26	3·9	—·28	4·3
17780	+·08963	+·09197	·1267	·3559	—·29	4·2	—·28	4·3

Die Differenz der Werthe von c_1 und c_2 in den beiden Lagen ist zu klein, als dass sie sichere Schlüsse gestatten

würde; nachdem dieselbe Platte längere Zeit in Gebrauch war, zeigte sie eine Veränderung des Verschwindungspunktes des transversalen Effectes. Der Halleffect schien gewachsen zu sein, während der andere etwa constant blieb. Als der Platte die Form 5 ertheilt wurde, verminderte sich der Effect ohne sein Zeichen zu ändern.

In einer früheren Abhandlung[1] über den transversalen Effect in Wismuth wurde gezeigt, dass in Platten, wo E ein Maximum hat oder verschwindet, die Feldstärke, für welche dies stattfindet, durch Hämmern oder Feilen der Platte vermehrt werden kann.

Wenn wir die dritte der oben entwickelten Gleichungen benutzen, können wir sehen, welche Veränderungen der Effecte dadurch hervorgebracht werden. Die in einer früheren Reihe von Experimenten mit der Platte I *b* erhaltenen Resultate wurden hiebei benutzt. Sie setzen uns in den Stand, zu erkennen, dass hauptsächlich der Halleffect sich ändert, während der andere constant bleibt. Die transversalen Elektroden waren hiebei immer in der Mitte angelöthet.

Platte I *b*.

Länge: 44·7 mm
Breite: 20·8 mm
Dicke: 1·2235 mm

Feldstärke	Trans.-Effect	$\Delta w/w$	$\sqrt{\Delta w/w}$	c_1	c_2
3864	—·07693	·0408	·2019	—	—
8694	—·02957	·1002	·3165	—·58	+4·8
16284	+·15039	·1828	·4276	—·57	+5·1
19320	+·21259	·2203	·4639	—·57	+4·7

Nun wurde die Platte gehämmert und beinahe zu derselben Feldstärke untersucht. Es ergaben sich folgende Resultate:

[1] Proc. Roy. Soc. Ed. Dec. 1894.

Feldstärke	Trans.-Effect	$\Delta w/w$	$\sqrt{\Delta w/w}$	c_1	c_2
3864	−·10126	·0408		—	—
8694	−·05166			−·73	+5·7
16280	+·11249			−·72	5·3
19320	+·19027			−·73	5·2

Endlich wurde die Platte gefeilt. Ihre Dicke wurde auf 0·665 *mm* reducirt. Die übrigen Dimensionen blieben ungeändert.

Feldstärke	Trans.-Effect	$\Delta w/w$	$\sqrt{\Delta w/w}$	c_1	c_2
3864	−·21699			—	—
8694	−·13521			−1·52	10·9
16280	+·17013			−1·50	10·4

Wenn wir die Veränderung der Dicke in Rechnung ziehen, erhalten wir —0·76 und +5·4 für c_1 und c_2. Ähnliche Resultate wurden mit Platte IX erhalten. Sie war erst 3·18 *mm* dick. Die Werthe von c_1 und c_2 waren $c_1 = -0·18$ und $c_2 = +0·085$. Sie war dann auf eine Dicke von 1·56 *mm* abgefeilt. Unter Benutzung derselben Werthe von $\frac{\Delta w}{w}$ wurden die Werthe von c_1 und c_2 auf —0·42 und 1·71 reducirt, d. h. der reine Halleffect war ein wenig gewachsen, der zweite Effect blieb nahezu unverändert.

Wir sahen, dass wenn eine Platte längs der Mittellinie aufgeschnitten wird, der transversale Effect zwar der Grösse nach abnimmt, aber nicht sein Zeichen wechselt. Auch die Thatsache, dass der Effect abnimmt, aber das Zeichen beibehält, wenn wir von der Mitte gegen das Ende der Platte fortschreiten, kann in derselben Weise erklärt werden. Denn betrachten wir eine Platte mit transversalen Elektroden in *a* und *b*; der transversale Effect mag wie in Fig. 6 durch Stromlinien ausgedrückt werden. Nun schlitzen wir die Platte längs der Mittellinie auf, wie Fig. 7 zeigt, werden jetzt einige

Strömungslinien unterbrochen. Ähnlich werden nicht alle Strömungslinien erfasst, wenn die Elektroden in *c* und *d* angebracht werden. Beide Resultate scheinen zu zeigen, dass Herrn Bedwell's Erklärung auf keinen der beiden transversalen Effecte in Wismuth anwendbar ist. Nur der einzige Schluss kann mit Sicherheit gezogen werden, dass die Platte im Feld immer symmetrisch bezüglich ihrer Mittellinie ist. Die Ursachen des reinen Halleffectes und des zweiten Effectes scheinen aufs innigste mit einander verbunden zu sein. Nur durch Feilen oder Hämmern der Platte scheint es möglich, den einen ohne den anderen zu verändern.

Offenbar gestatten uns die zwischen dem transversalen Effect und der Widerstandsänderung erhaltenen Beziehungen nicht, die Werthe der Constanten in verschiedenen Platten zu vergleichen.

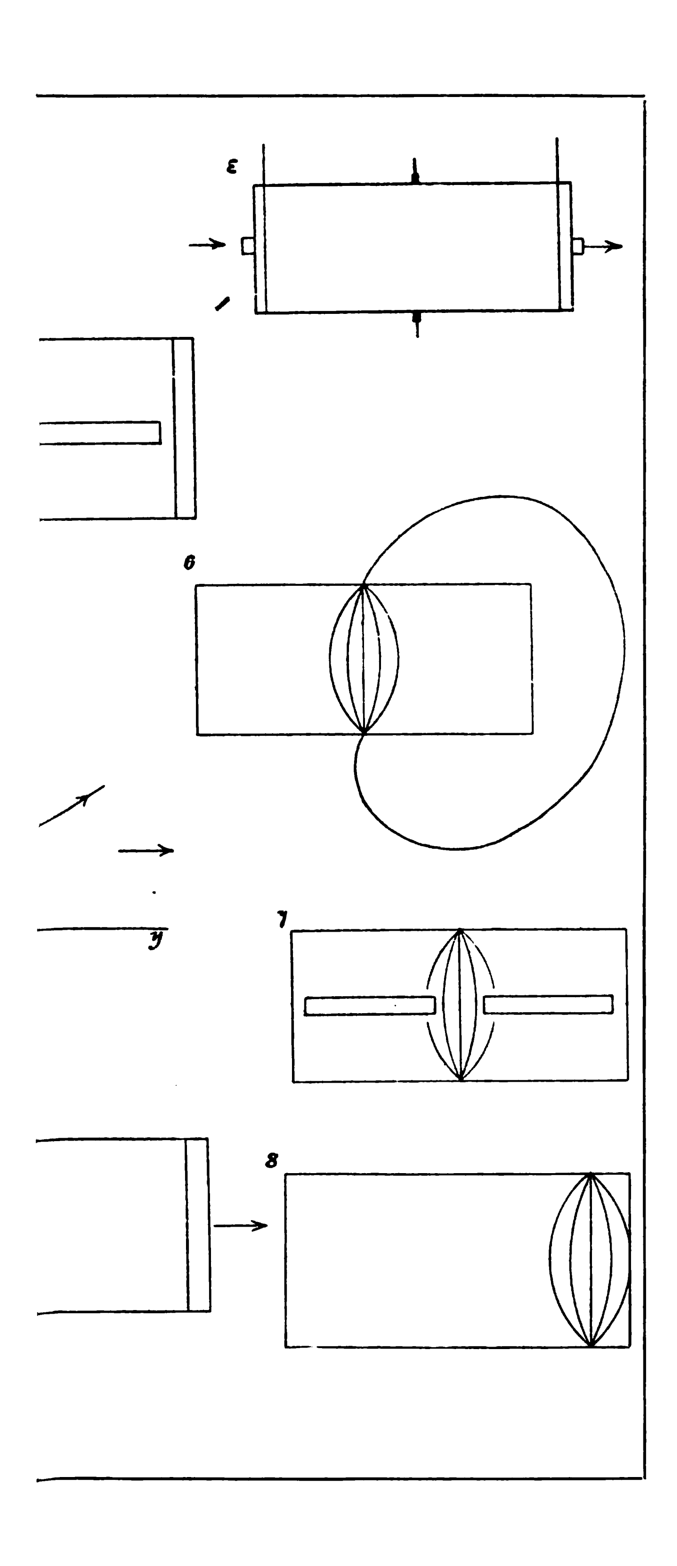
Verschiedene Beobachter fanden, dass der transversale Effect in Wismuth von der Temperatur abhängt.[1] Wenn wir $\frac{\Delta w}{w}$ bei einer fixen Temperatur, etwa 0° C., zu Grunde legen, so muss es möglich sein, zu untersuchen, ob sich der Halleffect oder der zweite Effect oder beide mit der Temperatur verändern. Auch der Widerstand des Wismuths ist von der Temperatur abhängig. Messungen des Widerstandes einer Platte und ihres transversalen Effectes bei verschiedenen Temperaturen würden zeigen, ob beide Effecte in derselben Weise wie der Widerstand von der Temperatur abhängen. Wenn wir den Rotationscoëfficienten — k — beibehalten, so sind die Gesetze des anomalen Verhaltens des transversalen Effectes verdeckt.

Es ist bekannt, dass die Widerstandsänderung des reinen Wismuths im constanten magnetischen Felde praktisch verwendet wurde, um unbekannte Feldstärken zu messen. Es könnte auch der transversale Effect zu dem gleichen Zwecke verwendet werden, wenn man sich den Zusammenhang desselben mit der Feldstärke graphisch darstellen würde. In

[1] On the effect of magnetic fields in the electric conductivites of bismuth. Phil. Mag. Nov. 1894.

mancher Beziehung wäre diese Methode, die Feldstärke zu messen, von Vortheil, aber es könnten nur solche Platten verwendet werden, welche blos den reinen Halleffect zeigen. Wo der zweite Effect vorhanden ist, könnte der gesammte transversale Effect durch längeren Gebrauch der Platte verändert werden.

Zum Schlusse sage ich Herrn Hofrath Prof. Dr. Boltzmann für die mannigfachen Unterstützungen und für die Freundlichkeit, mit welcher er mir die Apparate des physikalischen Institutes der Universität Wien zur Verfügung stellte, meinen besten Dank.





Zur Theorie der Dissociation der Gase

(II. Mittheilung)

von

Dr. **Gustav Jäger.**

(Vorgelegt in der Sitzung am 24. Mai 1895.)

Vor dreieinhalb Jahren veröffentlichte ich die erste Mittheilung über eine kinetische Theorie der Dissociation der Gase.[1] Die vorliegenden Ausführungen haben den Zweck, die seinerzeit gegebene Theorie etwas besser zu begründen und einen in der ersten Mittheilung unterlaufenen Rechenfehler zu corrigiren

Wir machen folgende Voraussetzungen:

1. Jede Molekel zerlege sich bei der Dissociation in zwei Theilmolekeln.

2. Die Theilmolekeln seien, wie dies bei der Untersalpetersäure, dem Joddampf und anderen Gasen der Fall ist, untereinander gleichartig.

3. So oft die Gesammtenergie einer nicht dissociirten Molekel einen gewissen Betrag übersteigt, muss sich diese Molekel zerlegen.

4. So oft die Gesammtenergie zweier zusammentreffender Theilmolekeln unter einem gewissen Betrag liegt, vereinigen sie sich wieder zu einer Molekel.

5. Das Verhältniss der Energie der fortschreitenden Bewegung einer Molekel zur Gesammtenergie derselben sei constant.

Zu diesen Voraussetzungen ist noch zu bemerken:

ad 1. Wir machen desshalb die Annahme, eine jede Molekel könne sich nur in zwei neue zerlegen, weil es praktisch

---

[1] Wiener Ber., C. (II.), 1182—1192 (1891).

überflüssig ist, eine Zerlegung in mehr als zwei Molekeln in Betracht zu ziehen, indem für die Dissociation bei einer bestimmten Temperatur der Grad der Dissociation thatsächlich nur durch die Zerlegung der ursprünglichen Molekel in zwei Theilmolekeln charakterisirt wird. So zerlegt sich z. B. bei verhältnissmässig niedriger Temperatur NH_4Cl in NH_3 und HCl. Wohl mag bei derselben Temperatur hie und da eine NH_3- oder HCl-Molekel sich in ihre weiteren Bestandtheile auflösen, doch kommt dies so selten vor, dass wir diese weitere Dissociation vollständig vernachlässigen können. Bei hinreichender Temperaturerhöhung wird allerdings eine häufigere Zersetzung des NH_3 und HCl eintreten, aber dann kommt der Fall, dass sich eine NH_4Cl-Molekel bildet, so selten vor, dass wir abermals davon vollständig absehen können, so dass sich von den beiden Gasen NH_3 und HCl jedes für sich betrachten lässt. Dann haben wir aber wiederum nur den Fall, dass sich bei weiterer Dissociation eine Molekel in zwei neue zerlegt. Desshalb halten wir unsere erste Voraussetzung für gerechtfertigt und ersparen uns dadurch eine bedeutende Complicirtheit der Rechnung.

ad 2. Diese Annahme wird bloss zur Vereinfachung der Rechnung gemacht. Ohne die Voraussetzung gleichartiger Theilmolekeln würde sich die Ableitung in genau derselben Weise gestalten, wie wir sie im Folgenden darstellen werden; nur müsste wiederum eine Menge neuer Zeichen eingeführt werden, ohne dass dadurch das Resultat eine Änderung erfahren würde.

ad 3. und 4. Hier haben wir es nur mit Hypothesen zu thun.

ad 5. Diese Voraussetzung ist strenge richtig, wenn wir das Mittel der Energien einer grossen Anzahl von Molekeln oder für eine grosse Anzahl von Stössen einer Molekel nehmen. Indem wir sie für jede einzelne Molekel jederzeit aufrecht halten, begehen wir zwar einen Fehler, der im Resultat jedoch ebenfalls eliminirt wird, da sich derselbe ja nur auf Mittelwerthe bezieht und nur die relative Änderung der Dissociation mit dem Druck und der Temperatur liefert.

Um den Dissociationsgrad für einen bestimmten Druck und eine bestimmte Temperatur zu bestimmen, ist es nothwendig, die Zahl der unter den gegebenen Bedingungen in der Zeiteinheit sich zerlegenden und die Zahl der sich neubildenden

Molekeln zu erfahren. Sind beide Zahlen einander gleich, so haben wir einen stationären Zustand vor uns.

Wir wollen die Zahl der nicht dissociirten Molekeln in der Masseneinheit des Gases N_1, die Zahl der dissociirten im nicht dissociirten Zustand N_2 nennen. Die Zahl der vorhandenen freien Molekeln ist demnach $N_1 + 2N_2$.

Nach dem Maxwell'schen Vertheilungsgesetz der Geschwindigkeiten haben von N-Molekeln

$$\nu = \frac{4N}{\sqrt{\pi \gamma^3}} c^2 e^{-\frac{c^2}{\gamma^2}} dc$$

eine Geschwindigkeit zwischen c und $c + dc$, wobei γ die wahrscheinlichste Geschwindigkeit der Molekeln ist. Nach unserer dritten Voraussetzung können wir den Grenzwerth der Energie, bei welcher eine Molekel zerfällt, ihre Dissociationstemperatur nennen, welche nach der fünften Voraussetzung an eine ganz bestimmte Geschwindigkeit c_1 gebunden ist. Es werden sich demnach alle Molekeln zerlegen, für welche $c > c_1$ ist. Ist die mittlere Geschwindigkeit einer Molekel $\bar{c}$, die mittlere Weglänge l, so ist $\frac{\bar{c}}{l}$ die Zahl der Zusammenstösse einer, $\frac{N\bar{c}}{l}$ die sämmtlicher Molekeln in der Secunde. Es erlangen daher in einer Secunde

$$\frac{4N\bar{c}}{\sqrt{\pi l \gamma^3}} c^2 e^{-\frac{c^2}{\gamma^2}} dc$$

Molekeln eine Geschwindigkeit zwischen c und $c + dc$. Ist $c > c_1$, so werden alle diese Molekeln die Tendenz haben, sich zu zerlegen; jedoch wird das nicht immer stattfinden, weil es eine gewisse Zeit erfordert, den Zusammenhang der Theilmolekeln zu lösen. Da die Geschwindigkeit c_1 bedeutend grösser als die mittlere Geschwindigkeit γ sein muss — dass dem so ist, wird sich aus dem Schlussresultat ergeben — so ist die Möglichkeit vorhanden, dass, bevor noch die Zerlegung der Molekel infolge einer Geschwindigkeit $c > c_1$ eingetreten ist, durch einen nachfolgenden Stoss ihr so viel Energie entzogen werden kann, dass dadurch die Zerlegung verhindert wird. Eine Molekel wird sich also umso sicherer zerlegen, je grösser ihre Energie, d. h. ihre

Geschwindigkeit c ist und je seltener die Zusammenstösse stattfinden. Wir wollen desshalb die Zahl der sich zerlegenden Molekeln proportional der Geschwindigkeit c und verkehrt proportional der Zahl der Zusammenstösse in der Secunde $\frac{\bar{c}}{l}$ setzen, was natürlich nur angenähert richtig ist. Wir erhalten dann für die in der Zeiteinheit sich zerlegenden Molekeln, welche eine Geschwindigkeit zwischen c und $c+dc$ besitzen,

$$\frac{aN}{\gamma^3}c^3 e^{-\frac{c^2}{\gamma^2}}dc = aN\gamma x^3 e^{-x^2}dx,$$

wenn wir die neue Veränderliche

$$x = \frac{c}{\gamma}$$

einführen. Wollen wir die Zahl sämmtlicher in der Zeiteinheit sich zerlegenden Molekeln, so haben wir in die letzte Gleichung alle Werthe von x, welche eine gewisse Grösse x_1 überschreiten, einzusetzen und die Summe zu bilden. Das ergibt aber, wenn wir noch überlegen, dass für unseren Fall die Gesammtzahl der nicht dissociirten Molekeln N_1 ist.

$$aN_1\gamma\int_{x_1}^{\infty} x^3 e^{-x^2}dx = \frac{aN_1\gamma}{2}(x_1^2+1)e^{-x_1^2} \tag{1}$$

Es handelt sich jetzt darum, einen Ausdruck für die Zahl der in der Zeiteinheit von neuem sich bildenden Molekeln zu finden. Damit zwei Theilmolekeln sich vereinigen können, darf nach der vierten Voraussetzung ihre Gesammtenergie mithin nach der fünften auch die Energie der fortschreitenden Bewegung eine gewisse Grösse nicht überschreiten. Diese Grösse sei für die Summe der Energien der fortschreitenden Bewegung ε, also muss

$$\frac{m\gamma_1^2}{2} + \frac{m\gamma_2^2}{2} \leqq \varepsilon \tag{2}$$

sein, wenn γ_1 und γ_2 die Geschwindigkeiten der beiden Theilmolekeln sind, deren jede die Masse m besitzt. Die Zahl der

Zusammenstösse, welche eine Theilmolekel in der Secunde mit anderen Theilmolekeln macht, sei C. Von N-Molekeln haben

$$\frac{4N}{\sqrt{\pi}\gamma'^3}\gamma_1^2 e^{-\frac{\gamma_1^2}{\gamma'^2}} d\gamma_1$$

die Geschwindigkeit γ_1. Für diese Zahl können wir auch

$$\frac{4N}{\sqrt{\pi}}\xi_1^2 e^{-\xi_1^2} d\xi_1$$

schreiben, wenn wir

$$\xi_1 = \frac{\gamma_1}{\gamma'}$$

setzen, wobei also γ' die wahrscheinlichste Geschwindigkeit einer Theilmolekel ist. Diese machen mit anderen Theilmolekeln in der Secunde

$$\frac{4NC}{\sqrt{\pi}}\xi_1^2 e^{-\xi_1^2} d\xi_1$$

Zusammenstösse. Die Wahrscheinlichkeit, dass die letzteren Theilmolekeln eine Geschwindigkeit

$$c \leqq \gamma_2$$

haben, ist nach der bereits eingangs gegebenen Ableitung

$$\frac{4}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\xi_2} x^2 e^{-x^2} dx,$$

wenn wir wiederum

$$\xi_2 = \frac{\gamma_2}{\gamma'}$$

setzen. Das Product aus dieser Wahrscheinlichkeit mit der Zahl der Zusammenstösse wird daher die Zahl der sich neu bildenden Molekeln ergeben, welche die Bedingung erfüllen, dass die eine Theilmolekel vor der Vereinigung die Geschwindigkeit γ_1 besass. Diese Zahl ist demnach

$$\frac{16}{\pi} NC\xi_1^2 e^{-\xi_1^2} d\xi_1 \int_0^{\xi_2} x^2 e^{-x^2} dx = \frac{16}{3\pi} NC\xi_1^2 \xi_2^3 e^{-(\xi_1^2+\xi_2^2)} d\xi_1. \quad (3)$$

Wir können nämlich für den Fall, dass wir ξ_2 als eine kleine Grösse annehmen,

$$\int_0^{\xi_2} x^2 e^{-x^2} dx = \frac{\xi_2^3 e^{-\xi_2^2}}{3}$$

setzen[1]. Unter ξ_2 ist jetzt der grösste Werth zu verstehen, welcher überhaupt möglich ist. Nach Formel (2) erhalten wir für diesen Fall

$$\frac{m\xi_1^2}{2} + \frac{m\xi_2^2}{2} = \frac{\varepsilon}{\gamma'^2},$$

also

$$\xi_2^2 = \frac{2\varepsilon}{m\gamma'^2} - \xi_1^2 = \xi^2 - \xi_1^2, \tag{4}$$

indem wir

$$\frac{2\varepsilon}{m\gamma'^2} = \xi^2$$

setzen. Aus der Gleichung (4) folgt

$$\xi_2 d\xi_2 = -\xi_1 d\xi_1,$$

woraus sich für die Gleichung (3) ergibt

$$\frac{16}{3\pi} NC\xi_1^2\xi_2^3 e^{-(\xi_1^2+\xi_2^2)} d\xi_1 = -\frac{16}{3\pi} NCe^{-\xi^2}\xi_1\xi_2^4 d\xi_2 =$$

$$= -\frac{16}{3\pi} NCe^{-\xi^2}\xi_2^4\sqrt{\xi^2-\xi_2^2}\, d\xi_2, \tag{5}$$

da wir ja nach Gleichung (4)

$$\xi_1 = \sqrt{\xi^2 - \xi_2^2}$$

setzen können. Wollen wir die Zahl sämmtlicher in der Zeiteinheit sich neu bildenden Molekeln, so brauchen wir Gleichung (3) nur nach ξ_1 zwischen den Grenzen 0 und dem grösstmöglichen Werth von ξ_1, das ist $\sqrt{\frac{2\varepsilon}{m\gamma'^2}} = \xi$, zu integriren, Wächst aber ξ_1 von 0 bis ξ, so nimmt nach Gleichung (4) ξ_2

[1] Ebenda 1187.

von ξ bis 0 ab. Wir werden also auch unser Ziel erreichen, wenn wir Gleichung (5) nach ξ_2 von ξ bis 0 integriren. Das ergibt

$$-\frac{16}{3\pi} NCe^{-\xi^2} \int_\xi^0 \xi_2^4 \sqrt{\xi^2 - \xi_2^2}\, d\xi_2 =$$

$$= -\frac{16}{3\pi} NCe^{-\xi^2} \Big[-\frac{1}{6} \xi_2^3 (\xi^2 - \xi_2^2)^{3/2} - \frac{1}{8} \xi^2 \xi_2 (\xi^2 - \xi_2^2)^{3/2} +$$

$$+ \frac{1}{16} \xi^4 \xi_2 \sqrt{\xi^2 - \xi_2^2} + \frac{1}{16} \xi^6 \arcsin \frac{\xi_2}{\xi} \Big]_\xi^0 = \frac{1}{6} NC\xi^6 e^{-\xi^2}.$$

Wenden wir dieses Resultat auf unser specielles Beispiel an, so haben wir für N die halbe Anzahl aller freien Theilmolekeln zu setzen, da ja bei der Integration jede freie Theilmolekel zweimal vorkommt. Es ist also

$$N = N_2.$$

Die Zahl der Zusammenstösse einer Molekel in der Secunde ist bekanntlich

$$C = \sqrt{2} N \pi \sigma^2 \bar{c},$$

wenn N die Zahl der Molekeln in der Volumeinheit, σ der Durchmesser einer Molekel und $\bar{c}$ die mittlere Geschwindigkeit bedeutet. Diese Grössen sind für unseren Fall

$$N = \frac{2N_2}{v}, \qquad \bar{c} = \frac{2\gamma'}{\sqrt{\pi}},$$

wobei also v das Volumen bedeutet, welches unser Gas einnimmt. Die wahrscheinlichste Geschwindigkeit γ' steht mit der wahrscheinlichsten Geschwindigkeit γ einer nicht dissociirten Molekel in der Beziehung

$$m\gamma'^2 = 2m\gamma^2,$$

also $\gamma' = \gamma\sqrt{2}$, folglich $\bar{c} = \dfrac{2\sqrt{2}\gamma}{\sqrt{\pi}}$ und

$$C = \frac{8\sqrt{\pi} N_2 \sigma^2 \gamma}{v}.$$

Und wir erhalten schliesslich für die Zahl der in der Secunde sich neu bildenden Molekeln

$$\frac{4\sqrt{\pi}\sigma^2 N_2^2 \gamma}{3v}\xi^6 e^{-\xi^2}. \tag{II}$$

Für den stationären Zustand haben wir die Ausdrücke (I) und (II) einander gleichzusetzen, woraus die Gleichung folgt

$$a_1 N_1 (x_1^2 + 1) e^{-x_1^2} = \frac{N_2^2}{v} \xi^6 e^{-\xi^2}.$$

Wir haben hier alles Constante unter dem Buchstaben a_1 zusammengefasst. Dieselbe Gleichung ist auch das Resultat meiner ersten Mittheilung, so dass die dort weiter vorgenommenen Umformungen ihre volle Giltigkeit behalten.

Nur noch auf eines ist aufmerksam zu machen. Es wurde bekanntlich

$$x_1^2 = \frac{c_1^2}{\gamma^2}$$

gesetzt. Dies können wir auch so schreiben

$$x_1^2 = \frac{c_0^2}{\gamma_0^2} \cdot \frac{1 + \alpha t_1}{1 + \alpha t},$$

wobei jetzt t_1 die Dissociationstemperatur einer Molekel und t die mittlere Temperatur des Gases bedeutet, während c_0^2 und γ_0^2 die für die Temperatur 0° giltigen Werthe von c^2 und γ^2 sind. Nun ist aber bekanntlich

$$\frac{c_0^2}{\gamma_0^2} = \frac{3}{2},$$

daher

$$x_1^2 = \frac{3}{2} \cdot \frac{1 + \alpha t_1}{1 + \alpha t}.$$

Gleicherweise ist

$$\xi^2 = \frac{3}{2} \cdot \frac{1 + \alpha \vartheta}{1 + \alpha t},$$

wenn wir unter ϑ jene Temperatur verstehen, welche eine Theilmolekel mit der Geschwindigkeit ξ besitzt. In der ersten Mittheilung wurde der Fehler begangen, dass

$$x_1^2 = \frac{1 + \alpha t_1}{1 + \alpha t}, \quad \xi^2 = \frac{1 + \alpha \vartheta}{1 + \alpha t}$$

gesetzt wurde[1]. Wir können daher auch nicht folgern, dass die Dissociationstemperatur einer Untersalpetersäuremolekel über 6000° liegt, sondern es wird in diesem speciellen Fall mit Rücksicht auf unsere letzte Bemerkung

$$t_1 > 4000°,$$

was immerhin eine ganz unerwartet hohe Zersetzungstemperatur darstellt. Im Übrigen haben wir aber durch unsere neuen Überlegungen an der Form der Gleichung, wie sie das Verhalten der Dissociation zum Druck und zur Temperatur darstellt, gar nichts geändert, so dass alle die darauf gegründeten Folgerungen — ich erwähne hier meine Abhandlung »Über die Temperaturfunction der Zustandsgleichung der Gase«[2] — keiner Berichtigung benöthigen.

---

[1] Ebenda 1185.

[2] Wiener Ber.; CI. (II), 1675—1684 (1892).



Zur Theorie der Dielektrica

von

Dr. **Anton Lampa.**

(Vorgelegt in der Sitzung am 14. Juni 1895.)

I.

Die mathematische Behandlung der Dielektrica von Clausius[1] gestattet eine Verallgemeinerung, welche geeignet ist, den Fall solcher Dielektrica zu umfassen, welche nach verschiedenen Richtungen verschiedene Dielektricitätsconstanten aufweisen. Die Giltigkeit der Clausius'schen Theorie ist auf isotrope Stoffe eingeschränkt; die Grundannahme, von welcher sie ausgeht, kommt schliesslich darauf hinaus, das Dielektricum als aus gleich grossen leitenden Kugeln constituirt anzusehen, welche in dem nichtleitenden Raume gleichmässig vertheilt sind, indem einerseits möglichen Verschiedenheiten in der Grösse und der Erstreckung nach den drei Dimensionen durch Einführung eines Mittelwerthes für den Radius der Kugeln Rechnung getragen, anderseits die Verschiedenheit der Orientirung durch die gleiche Wahrscheinlichkeit aller Lagen compensirt gedacht wird. Der Vorzug derselben ist wesentlich in dem Umstand begründet, dass sie zeigt, wie man vom Boden der Moleculartheorie aus zu den Gleichungen dielektrischer Medien gelangen kann; und in gleicher Weise dürfte die Verallgemeinerung der Clausius'schen Methode einiges Interesse für sich beanspruchen, da sie die Verschiedenheit der Dielektricitätsconstante krystallisirter Körper nach verschiedenen Richtungen in eine Beziehung bringt zu den Erstreckungen der Molekel nach diesen Richtungen.

---

[1] Clausius, Die mechanische Wärmetheorie. 2. Aufl., 2. Bd., S. 62—97.

Die einfachste Annahme, mittelst welcher eine Erklärung des nach drei Richtungen verschiedenen Verhaltens eines Dielektricums versucht werden kann, ist die, sich das Dielektricum aus gleich grossen, im nichtleitenden Raume gleichmässig vertheilten leitenden dreiaxigen Ellipsoiden mit (der Krystallstructur entsprechend) durchgängig analoger Orientirung constituirt zu denken. Bringt man ein derartiges Medium in ein elektrisches Feld, so werden die Ellipsoide durch Influenz elektrisch, und es handelt sich vor Allem darum, die äussere Potentialfunction eines solchen Ellipsoids zu bestimmen. Wenn nun auch das Feld im Dielektricum nicht homogen sein sollte, so ist doch die Annahme zulässig, dass es in jedem einzelnen Raumelement des Dielektricums homogen ist; es genügt daher, die Elektrisirung eines Ellipsoids im homogenen Felde zu kennen, um die weitere Entwicklung der Theorie zu ermöglichen. Man könnte die nothwendigen Formeln aus der Theorie der Magnetisirung eines Ellipsoids im homogenen Magnetfeld herleiten; da jedoch die Methode der Gleitschichten[1] unmittelbar zum Ziele führt, will ich hier die Elektrisirung eines leitenden Ellipsoids im homogenen Felde nach dieser Methode behandeln.

Die Vertheilung einer elektrischen Ladung auf einem Ellipsoid ist bekanntlich bestimmt in der Weise, dass sie in dem von der Oberfläche des Ellipsoids und eines mit demselben homothetischen mit constanter Raumdichte vertheilt erscheint. Ein unelektrisches Ellipsoid können wir uns mit zwei beliebigen, jedoch gleich grossen entgegengesetzten Ladungen versehen denken, welche den ganzen Raum zweier gleich grosser, zu dem gegebenen homothetischer Ellipsoide mit den constanten Raumdichten $+\rho$ und $-\rho$ erfüllen. Bringen wir nun ein solches Ellipsoid in ein homogenes Feld, welches einer der Axen parallel ist — jeder andere Fall lässt sich auf diesen zurückführen —, so erfahren diese homothetischen Ellipsoide gleich grosse, zu der Kraft parallele, jedoch entgegengesetzte Verschiebungen. In Folge dessen werden an den

[1] Über Gleitschichten siehe Joubert und Mascart: Lehrbuch der Elektricität und des Magnetismus. Deutsche Ausgabe, 1. Bd., S. 134.

beiden Halbellipsoiden entgegengesetzte Ladungen auftreten, welche dadurch bestimmt sind, dass die Räume, welche die homothetischen Ellipsoide von einander ausschneiden, mit den constanten Raumdichten $+\rho$, respective $-\rho$ geladen sind.

Das Feld habe die Stärke Φ und sei parallel der X-Axe, zugleich parallel der a-Axe des Ellipsoids, da wir das Coordinatensystem so legen, dass die X-Axe $\parallel a$, die Y-Axe $\parallel b$, die Z-Axe $\parallel c$. Die Richtung der Kraft brauchen wir nicht zu berücksichtigen, da es sich uns nur um die absoluten Werthe handelt. Die Grösse der Verschiebung betrage für jedes der Ellipsoide den Werth ε; die Poldichten werden dann, absolut genommen, durch die Strecke 2ε, die Dichte an einem beliebigen Punkte wird analog durch den Abstand der beiden homothetischen Ellipsoide an jener Stelle bestimmt sein. Bezeichnen wir das leitende Ellipsoid mit E, die homothetischen mit E' und E'', so wird gelten

$$\text{für } E: \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad \text{I)}$$

$$\text{für } E': \quad \frac{(x-\varepsilon)^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=p^2 \qquad \text{II)}$$

$$\text{für } E'': \quad \frac{(x+\varepsilon)^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=p^2 \qquad \text{III)}$$

worin

$$p=1+\frac{\varepsilon}{a}.$$

Die Normale in einem Oberflächenpunkte N des Ellipsoides E, dessen Coordinaten ξ, η, ζ sein sollen, ist gegeben durch die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}(\xi-x)+\frac{\partial z}{\partial x}(\zeta-z)&=0\\(\eta-y)+\frac{\partial z}{\partial y}(\zeta-z)&=0\end{aligned}\right\} \qquad \text{IV)}$$

Diese Normale wird das Ellipsoid E' im Punkte N', das Ellipsoid E'' im Punkte N'' schneiden. Da ε klein ist, kann angenommen werden, dass die durch IV) bestimmte Normale

auch zu E' und E'' normal ist, so dass die Strecke $N'N''$ den Abstand der beiden homothetischen Ellipsoide für den Punkt $N(\xi, \eta, \zeta)$ darstellt. Bedeutet df ein bei N genommenes Flächenelement, so wird daher sein (absolut genommen):

$$\left.\begin{aligned} h_a . df &= \rho . df . N'N'' \\ h_a &= \rho . N'N'', \end{aligned}\right\} \quad \text{V)}$$

wenn mit h_a die Flächendichte im Punkte N bezeichnet wird.

Der Punkt N' ist gegeben durch die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} (\xi - x) + \frac{\partial z}{\partial x}(\zeta - z) &= 0 \\ (\eta - y) + \frac{\partial z}{\partial y}(\zeta - z) &= 0 \\ \frac{(x-\varepsilon)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} &= p^2 \end{aligned}\right\} \quad \text{VI)}$$

und analog der Punkt N'' durch

$$\left.\begin{aligned} (\xi - x) + \frac{\partial z}{\partial x}(\zeta - z) &= 0 \\ (\eta - y) + \frac{\partial z}{\partial y}(\zeta - z) &= 0 \\ \frac{(x+\varepsilon)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} &= p^2 \end{aligned}\right\} \quad \text{VII)}$$

Die Gleichung I) liefert

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= -\frac{c^2 x}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{b^2}}} = -\frac{c^2 x}{z} \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= -\frac{c^2 y}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}} = -\frac{c^2 y}{z} \end{aligned}\right\} \quad \text{VIII)}$$

für den ersten Octanten, auf welchen wir uns beschränken können, da auf den andern Alles symmetrisch ist.

VIII) in VII) und VI) eingesetzt, würde uns zu Gleichungen vierten Grades zur Bestimmung von $\overline{N'N''}$ führen. Ziehen wir

aber vom Mittelpunkte von E (dem Coordinatenanfangspunkte) einen Radiusvector zu N' und bezeichnen den Punkt, in welchem dieser Radiusvector E'' schneidet, mit R'', den Winkel endlich, welchen $\overline{N'R''}$ mit $\overline{N'N''}$ einschliesst, mit ω, so ist

$$\overline{N'N''} = \overline{N'R''} . \cos \omega. \tag{IX)}$$

$N'R''$ lässt sich leicht berechnen. Wir können annehmen, dass der zu N' gezogene Radiusvector durch dieselben Gleichungen bestimmt ist wie der zum Punkte N gezogene, dessen Gleichungen lauten:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{\cos \alpha}{\cos \gamma} z \\ y &= \frac{\cos \beta}{\cos \gamma} z, \end{aligned}\right\} \tag{X)}$$

worin α, β, γ die Winkel bedeuten, welche er mit den Axen einschliesst. Man hat daher

$$\left.\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}} \\ \cos \beta &= \frac{\eta}{\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}} \\ \cos \gamma &= \frac{\zeta}{\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}} \end{aligned}\right\} \tag{XI)}$$

wodurch X) übergeht in

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{\xi}{\zeta} z \\ y &= \frac{\eta}{\zeta} z. \end{aligned}\right\} \tag{XII)}$$

Es dienen daher zur Bestimmung von N' die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{\xi}{\zeta} z \\ y &= \frac{\eta}{\zeta} z \\ \frac{(x-\varepsilon)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &+ \frac{z^2}{c^2} = p^2 \end{aligned}\right\} \tag{XIII)}$$

und zur Bestimmung von R'':

$$x = \frac{\xi}{\zeta} z$$

$$y = \frac{\eta}{\zeta} z \qquad \text{XIV)}$$

$$\frac{(x+\varepsilon)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = p^2.$$

Diese Gleichungen liefern für z — wobei das obere Zeichen für N', das untere für R'' gilt:

$$\frac{\left(\frac{\xi}{\zeta} z \mp \varepsilon\right)^2}{a^2} + \frac{\left(\frac{\eta}{\zeta} z\right)^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = p^2,$$

d. i. weiter

$$\frac{z^2}{c^2}\left(\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} + \frac{\zeta^2}{c^2}\right) \mp 2\varepsilon \frac{\xi}{\zeta a^2} z = p^2 - \frac{\varepsilon^2}{a^2}.$$

Da $\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} + \frac{\zeta^2}{c^2} = 1$, folgt weiter

$$z^2 \mp 2\varepsilon \frac{\xi}{\zeta a^2} z = \left(p^2 - \frac{\varepsilon^2}{a^2}\right) \zeta^2,$$

was der Kürze wegen geschrieben werden mag:

$$z^2 \mp 2\varepsilon S . z = T.$$

Wir haben also

$$\text{für } N'\text{: } z^2 - 2\varepsilon S . z = T$$

$$\text{für } R''\text{: } z^2 + 2\varepsilon S . z = T$$

und hieraus die Lösungen:

$$\text{für } N'\text{: } z' = \varepsilon S \pm \sqrt{\varepsilon^2 S^2 + T}$$

$$\text{für } R''\text{: } z'' = -\varepsilon S \pm \sqrt{\varepsilon^2 S^2 + T}. \qquad \text{XV)}$$

Nun ist $\overline{N'R''}^2 = (x''-x')^2 + (y''-y')^2 + (z''-z')^2$; das gibt mit Berücksichtigung von XII):

$$\overline{N'R''^2} = \left(\frac{\xi^2}{\zeta^2} + \frac{\eta^2}{\zeta^2} + 1\right)(z''-z')^2$$

und da $\xi^2+\eta^2+\zeta^2 = r^2$:

$$\overline{N'R''^2} = (z''-z')^2 \frac{r^2}{\zeta^2}.$$

Wir erhalten daher mit Rücksicht auf XV), indem wir bei der Wurzelausziehung jenes Zeichen wählen, welches, da die Normale für den ersten Octanten genommen wurde, $z''-z$ positiv macht:

$$\overline{N'R''} = 2\varepsilon S \frac{r}{\zeta}.$$

Nun war $S = \frac{\xi\zeta}{a^2}$, es ist also $\overline{N'R''} = 2\varepsilon \frac{\xi r}{a^2}$, somit

$$\overline{N'N''} = \overline{N'R''} \cos\omega = 2\varepsilon \frac{\xi r}{a^2} \cos\omega,$$

daher

$$h_a = 2\varepsilon\rho \frac{\xi r}{a^2} \cos\omega.$$

$2\varepsilon\rho$ ist die Dichte am Pole der a-Axe; sie heisse σ_a. Wir haben dann

$$h_a = \sigma_a \frac{\xi r}{a^2} \cos\omega. \qquad \text{XVI)}$$

Diesen Ausdruck wollen wir noch weiter transformiren. Die Winkel der Normale mit den Coordinatenaxen sind bestimmt durch

$$\cos\varphi = \frac{1}{Q} \frac{\partial E}{\partial x}$$

$$\cos\psi = \frac{1}{Q} \frac{\partial E}{\partial y}$$

$$\cos\chi = \frac{1}{Q} \frac{\partial E}{\partial z},$$

worin E die Gleichung der Fläche,

$$Q = \sqrt{\left(\frac{\partial E}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial z}\right)^2}$$

ist. In unserem Falle ist

$$\frac{\partial E}{\partial x} = \frac{2x}{a^2}, \quad \frac{\partial E}{\partial y} = \frac{2y}{b^2}, \quad \frac{\partial E}{\partial z} = \frac{2z}{c^2}$$

$$Q = +2\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}},$$

somit für den Punkt N:

$$\left.\begin{aligned}
\cos\varphi &= \frac{\xi}{a^2\sqrt{\frac{\xi^2}{a^4} + \frac{\eta^2}{b^4} + \frac{\zeta^2}{c^4}}} \\
\cos\psi &= \frac{\eta}{b^2\sqrt{\frac{\xi^2}{a^4} + \frac{\eta^2}{b^4} + \frac{\zeta^2}{c^4}}} \\
\cos\chi &= \frac{\zeta}{c^2\sqrt{\frac{\xi^2}{a^4} + \frac{\eta^2}{b^4} + \frac{\zeta^2}{c^4}}}.
\end{aligned}\right\} \qquad \text{XVII)}$$

Die Winkel des Radiusvector mit den Axen waren α, β, γ, somit ist

$$\cos\omega = \cos\alpha\cos\varphi + \cos\beta\cos\psi + \cos\gamma\cos\chi.$$

Das gibt mit Rücksicht auf XI) und XVII):

$$\cos\omega = \frac{1}{\sqrt{\frac{\xi^2}{a^4} + \frac{\eta^2}{b^4} + \frac{\zeta^2}{c^4}}\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}}\left(\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} + \frac{\zeta^2}{c^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{r\sqrt{\frac{\xi^2}{a^4} + \frac{\eta^2}{b^4} + \frac{\zeta^2}{c^4}}}.$$

Dies in XVI) eingesetzt, gibt

$$h_a = \sigma_a \frac{\xi r}{a^2} \frac{1}{r\sqrt{\frac{\xi^2}{a^4} + \frac{\eta^2}{b^4} + \frac{\zeta^2}{c^4}}},$$

(d. i. mit Rücksicht auf XVII) $= \sigma_a \cos\varphi$; d. h.:

Sind die Kraftlinien parallel zur a-Axe, so ist die Dichte in einem Punkte des Ellipsoids proportional dem Cosinus des Winkels, welchen die Normale in diesem Punkte mit der a-Axe einschliesst.

Analoges gilt, wenn die Feldrichtung parallel zur b-Axe oder parallel zur c-Axe ist. Man kann daher schreiben:

$$\begin{aligned} h_a &= \sigma_a \cos\varphi \\ h_b &= \sigma_b \cos\psi \\ h_c &= \sigma_c \cos\chi, \end{aligned} \qquad \text{XVIII)}$$

worin $\sigma_a, \sigma_b, \sigma_c$ die Poldichten bezeichnen.

Die Grössen $\sigma_a, \sigma_b, \sigma_c$ lassen sich leicht bestimmen. Für σ_a stellt sich die Rechnung wie folgt:

Im Innern des Ellipsoids darf keine Kraft herrschen, d. h. die Summe der darin herrschenden Kräfte muss gleich Null sein. Ist F die Wirkung des Ellipsoids auf einen Punkt im Innern, Φ die Feldstärke, so muss also $F+\Phi = 0$, d. i.

$$F = -\Phi \qquad \text{XIX)}$$

sein.

Die Grösse F ist selbst die Summe aus den Wirkungen der beiden Ellipsoide E' und E''. In Betracht kommen nur die Componenten parallel zur X-Axe. Denn die Componenten parallel zur Y-Axe und parallel zur Z-Axe sind gleich gross, aber entgegengesetzt gerichtet; die Y-Componenten sind für den betrachteten Punkt, der in E' die Coordinaten x', y, z, in E'' aber x'', y, z von den Mittelpunkten gezählt haben soll[1]

$$\text{für } E'\text{: } \mathfrak{Y}' = -\frac{3M'y}{a_1^3}\int_0^1 \frac{u^2du}{(1-\lambda_1^2u^2)^{3/2}(1-\lambda_1'^2u^2)^{1/2}}$$

$$\text{für } E''\text{: } \mathfrak{Y}'' = -\frac{3M''y}{a_1^3}\int_0^1 \frac{u^2du}{(1-\lambda_1^2u^2)^{3/2}(1-\lambda_1'^2u^2)^{1/2}}.$$

Der Werth des Integrales, in welchem u bestimmt ist durch $\frac{1}{u^2} = 1 + \frac{s}{a_1^2}$, wo $s = a_1^2 - \alpha^2$, wenn α die grösste Axe des

---

[1] Siehe Mathieu, Théorie des Potentials. Deutsche Ausgabe von Maser, S. 121.

durch den fraglichen Punkt zu dem betreffenden Ellipsoid confocal gelegten Ellipsoides bedeutet, hängt nur ab von $\lambda_1^2 = \frac{a_1^2-b_1^2}{a_1^2}$ und $\lambda_1'^2 = \frac{a_1^2-c_1^2}{a_1^2}$, nicht aber von u, ist daher für beide Ellipsoide gleich. Da ferner die Masse M'' des Ellipsoides $E'' = -M'$, der Masse des Ellipsoides E', folgt

$$\mathfrak{Y}'+\mathfrak{Y}''=0$$

und ebenso

$$\mathfrak{Z}'+\mathfrak{Z}''=0.$$

Dagegen ist, da wir $M' = M$, $M'' = -M$ schreiben können, wenn wir $\int_0^1 \frac{u^2 du}{(1-\lambda_1^2 u^2)^{1/2}(1-\lambda_1'^2 u^2)^{1/2}} = J$ setzen:

$$F = \mathfrak{X}_1+\mathfrak{X}_2 = -\frac{3MJ}{a_1^3}(x'-x'') = -\frac{2MJ}{a_1^3}\cdot 2\varepsilon.$$

Da nun $a_1 = ap$, $b_1 = bp$, $c_1 = cp$ ist, ist auch

$$J = \int_0^1 \frac{u^2 du}{(1-\lambda^2 u^2)^{1/2}(1-\lambda'^2 u^2)^{1/2}},$$

und $M = \frac{4\pi}{3} a_1 b_1 c_1 \rho = \frac{4\pi}{3} abcp^3\rho$; ferner war $2\varepsilon\rho = \sigma_a$; daher folgt

$$F = -4\pi J \frac{bc}{a^2}\cdot\sigma_a. \tag{XX}$$

Das gibt nach XVI):

$$\sigma_a = \frac{1}{4\pi J}\frac{a^2}{bc}\Phi.$$

Ist dasselbe Feld parallel zur b-Axe oder c-Axe, so folgen analoge Formeln. Wir haben daher

$$\left.\begin{aligned}\sigma_a &= \frac{1}{4\pi J}\frac{a^2}{bc}\Phi\\ \sigma_b &= \frac{1}{4\pi J}\frac{b^2}{ac}\Phi\\ \sigma_c &= \frac{1}{4\pi J}\frac{c^2}{ab}\Phi\end{aligned}\right\} \tag{XXI}$$

Bezüglich J ist noch eine Bemerkung zu machen. Es ist $\lambda^2 = \frac{a^2-b^2}{a^2}$ und $\lambda'^2 = \frac{a^2-c^2}{a^2}$ unter der Voraussetzung gesetzt, dass a die grösste Axe ist.

Die Formeln XVIII) und XXI) sind diejenigen, welche wir bei der Entwicklung der Gleichungen des dielektrischen Mediums brauchen werden. Der Vollständigkeit halber soll jedoch noch die Grösse der Fläche bestimmt werden, deren Kraftlinien von dem Ellipsoid aufgefangen werden. Dieselbe kann bestimmt werden durch die Erwägung, dass die Ladung des Halbellipsoids absolut genommen gleich sein muss der Ladung dieser unbekannten Fläche. Auf dieser selbst ist die Ladung gleichförmig vertheilt, da sie ja dem homogenen Felde angehört. Wir führen wieder die Rechnung durch für den Fall, dass die Kraftlinien parallel sind zur a-Axe.

Das Oberflächenelement ist[1]

$$df = \frac{\sqrt{1+\frac{c^2-a^2}{a^2}\frac{x^2}{a^2}+\frac{c^2-b^2}{c^2}\frac{y^2}{b^2}}}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}\,dx\,dy,$$

seine Ladung $h_a df = \sigma_a df \cos\varphi$, worin φ der Winkel der zugehörigen Normale mit der a-Axe. Es ist nach XVII)

$$\cos\varphi = \frac{x}{a^2\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}}.$$

Die Wurzel $\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}$ können wir mit Hilfe der Gleichung $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} = 1$ umformen. Wir haben

$$\frac{z^2}{c^2} = 1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2},$$

[1] Serret, Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung. Deutsch von Harnack, 2. Bd., S. 338.

somit

$$\frac{z^2}{c^4} = \frac{1}{c^2} - \frac{x^2}{a^2c^2} - \frac{y^2}{b^2c^2},$$

also

$$\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}} = \frac{1}{c}\sqrt{1 + \frac{c^2-a^2}{a^2}\frac{x^2}{a^2} + \frac{c^2-b^2}{b^2}\frac{y^2}{b^2}},$$

also schliesslich

$$\cos\varphi = \frac{cx}{a^2\sqrt{1 + \frac{c^2-a^2}{a^2}\frac{x^2}{a^2} + \frac{c^2-b^2}{b^2}\frac{y^2}{b^2}}}$$

und

$$\sigma_a df \cos\varphi = \frac{cx\,dy\,dz}{a^2\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}} \cdot \sigma_a.$$

Es genügt, die Ladung des ersten Octanten zu bestimmen; wir haben dann das Integral

$$\iint \frac{x\,dy\,dz}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}}$$

zu nehmen von

$$x = 0 \text{ bis } x = a$$
$$y = 0 \text{ bis } y = b,$$

wobei nur das positive Zeichen der Wurzel gilt, wie sich gleich zeigen wird. Wir führen neue Variable ein gemäss der Gleichung[1]

$$\iint V dx\,dy = \iint \left[\frac{\partial x}{\partial \theta}\frac{\partial y}{\partial \psi} - \frac{\partial x}{\partial \psi}\frac{\partial y}{\partial \theta}\right] V d\theta\,d\psi.$$

Wir haben

$$V = \frac{x}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}}$$

[1] Serret, im obengenannten Werke, 2. Bd., S. 326 u. folg.

und setzen

$$x = a \sin\theta \cos\psi$$
$$y = b \sin\theta \sin\psi$$
$$z = c \cos\theta,$$

was der Gleichung des Ellipsoids genügt. Man findet

$$\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} = \cos\theta,$$

und zwar $+\cos\theta$, da in dem ersten Octanten $z = c.\cos\theta$ positiv sein muss. Ferner ergibt sich

$$\frac{\partial x}{\partial\theta}\frac{\partial y}{\partial\psi} - \frac{\partial x}{\partial\psi}\frac{\partial y}{\partial\theta} = ab \sin\theta \cos\theta,$$

daher endlich

$$\iint \frac{x\,dx\,dy}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}} = a^2 b \iint \sin^2\theta \cos\psi\, d\theta\, d\psi, \quad \text{XXII)}$$

worin

$$\text{für } x = 0 \qquad a \sin\theta \cos\psi = 0$$
$$\text{für } y = 0 \qquad b \sin\theta \sin\psi = 0$$
$$z = c, \text{ also} \qquad c \cos\theta = c$$

ist, woraus $\theta = 0$ folgt. Der Werth $\theta = \frac{\pi}{2}$ liefert $z = 0$ und $\sin\theta = 1$; diesem Werthe entsprechen

$$\text{einerseits } x = 0, \quad \text{anderseits } x = a$$
$$y = b \qquad\qquad y = 0,$$

also

$$\text{einerseits } \psi = \frac{\pi}{2}, \quad \text{anderseits } \psi = 0.$$

Die Grenzen für θ sind also 0 bis $\frac{\pi}{2}$, für ψ entweder 0 bis $\frac{\pi}{2}$ oder $\frac{\pi}{2}$ bis 0. Wir haben jene zu wählen, welche unser Integral positiv machen, da ja dieses für den ersten Octanten gelten soll; diese sind $\frac{\pi}{2}$ bis 0; wir haben also

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta d\theta \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \cos \psi d\psi$$

zu berechnen. Man findet dafür leicht den Werth $\frac{\pi}{4}$, somit

$$\int_0^a \int_0^b \frac{x\,dx\,dy}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}} = \frac{\pi}{4} \cdot a^2 b,$$

und dementsprechend die Ladung des Octanten $\sigma_a \int df \cos \varphi = = \sigma_a \frac{bc\pi}{4}$ und die des Halbellipsoides $L_a = bc\pi . \sigma_a$, d. h. seine Ladung ist so gross, als ob seine ebene Begrenzung $bc\pi$ mit der Poldichte σ_a gleichförmig belegt wäre.

Bezeichnen wir die unbekannte herausgeschnittene Fläche mit Ψ_a, die auf derselben herrschende constante Dichte mit Σ, so muss absolut genommen

$$bc\pi . \sigma_a = \Psi_a . \Sigma.$$

Ist nun die Feldstärke Φ, so ist absolut genommen $\Sigma = \frac{1}{4\pi}\Phi$; da wir $\sigma_a = \frac{1}{4\pi J} \cdot \frac{a^2}{bc}\Phi$ gefunden haben, so erhalten wir endlich

$$\Psi_a = \frac{a^2\pi}{J}$$

und analog für die anderen Stellungen

$$\Psi_b = \frac{b^2\pi}{J}$$

$$\Psi_c = \frac{c^2\pi}{J}. \qquad \text{XXIII)}$$

Die Formeln XX) geben für die Kugel, indem wir $a = b = = c = r$ setzen und $J = \int_0^1 u^2 du = \frac{1}{3}$ finden:

$$\Psi_a = \Psi_b = \Psi_c = \Psi_r = 3r^2\pi$$

wie bekannt.[1]

[1] Joubert und Mascart, in dem oben genannten Werke, 1. Bd., S. 138.

II.

Wir gehen nun über zur Entwicklung der Gleichungen für ein dielektrisches Medium, welches in der oben geschilderten Weise constituirt ist. Das Coordinatensystem wählen wir abermals parallel zu den Axen des Ellipsoids, welche wir wie früher mit a, b, c bezeichnen; die X-Axe sei parallel zu a, die Y-Axe parallel zu b, die Z-Axe parallel zu c. Im Innern des Ellipsoids sei ferner ein Punkt p mit den Coordinaten x, y, z, etwa der Mittelpunkt des Ellipsoids, angenommen; die Coordinaten eines Oberflächenpunktes mögen dann mit $x+\xi$, $y+\eta$, $z+\zeta$ bezeichnet werden. Betrachten wir nun einen ausserhalb des Ellipsoids liegenden Punkt p' mit den Coordinaten x', y', z' und bezeichnen seinen Abstand vom Punkte p mit r und seinen Abstand von jenem Oberflächenpunkte mit r_1, so ist unter Vernachlässigung der Glieder höherer Ordnung

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{r} + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \xi + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} \eta + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \zeta. \tag{1}$$

Ist nun bei jenem Oberflächenpunkte ein Flächenelement dw genommen und wird die auf demselben befindliche Elektricitätsmenge mit $h\,dw$ bezeichnet; bezeichnen wir ferner die Potentialfunction des Ellipsoids mit u und ihren Werth im Punkte p' mit u', so ist

$$u' = \int \frac{h\,dw}{r_1} \tag{2}$$

über die ganze Oberfläche des Ellipsoids genommen.

Mit Berücksichtigung von 1) erhält man

$$u' = \frac{1}{r} \int h\,dw + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \int \xi h\,dw + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} \int \eta h\,dw + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \int \zeta h\,dw. \tag{3}$$

Das Integral $\int h\,dw$ stellt die Gesammtladung des Ellipsoides dar; da dieselbe nur von Influenz herrührt, ist sie gleich Null, daher

$$u' = \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \int \xi h\, dw + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} \int \eta h\, dw + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \int \zeta h\, dw. \qquad 4)$$

Die drei andern Integrale repräsentiren die elektrischen Momente des Ellipsoids, und diese sind vor Allem zu bestimmen. Diese Bestimmung ist möglich, da der Werth h, die elektrische Dichte in dem Oberflächenpunkte $x+\xi$, $y+\eta$, $z+\zeta$ eines Ellipsoids, dessen Mittelpunkt die Coordinaten x, y, z hat, bekannt ist, wenn sich das Ellipsoid in einem homogenen Felde von der Stärke K befindet. Die Bedingung der Homogenität des Feldes, trifft, wie oben bemerkt wurde, in unserem Falle zu.

Im Allgemeinen wird jedoch K mit den (in unserem Falle zu den Ellipsoidaxen parallelen) Coordinatenaxen Winkel einschliessen; die zu den Coordinatenaxen parallelen Componenten von K mögen mit X, Y, Z bezeichnet werden. Die Dichte h entsteht dann durch Superposition der von X, Y, Z herrührenden Dichten, welche bezüglich h_a, h_b, h_c heissen sollen, so dass

$$h = h_a + h_b + h_c. \qquad 5)$$

In der Gleichung 4) sind die Coordinaten ξ, η, ζ von x, y, z, dem Mittelpunkte, gezählt. Da aber h_a, h_b, h_c nur von den Cosinussen der Normalen mit den Axen, keineswegs jedoch von den Mittelpunktscoordinaten abhängen, können wir zu ihrer Bestimmung die im I. Theile entwickelten Formeln unmittelbar anwenden.

Die Formeln XVIII) und XXI) ergeben, wenn wir berücksichtigen, dass die Feldstärken in der Richtung der a-, b-, c-Axe beziehentlich X, Y, Z sind:

$$h_a = \sigma_a \cos\varphi = \frac{1}{4\pi J} \frac{a^2}{bc} X \cos\varphi$$

$$h_b = \sigma_b \cos\psi = \frac{1}{4\pi J} \frac{b^2}{ac} Y \cos\psi$$

$$h_c = \sigma_c \cos\chi = \frac{1}{4\pi J} \frac{c^2}{ab} Z \cos\chi$$

Mit Berücksichtigung der Gleichungen XVII), in welchen wir $\sqrt{\frac{\xi^2}{a^4} + \frac{\eta^2}{b^4} + \frac{\zeta^2}{c^4}} = T$ setzen, erhalten wir daher

$$u' = \frac{1}{4\pi J}\left[\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\left\{\frac{X}{bc}\int\frac{\xi^2 dw}{T} + \frac{Y}{ac}\int\frac{\xi\eta dw}{T} + \frac{Z}{ab}\int\frac{\xi\zeta dw}{T}\right\}\right. \tag{5}$$

$$+ \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y}\left\{\frac{X}{bc}\int\frac{\xi\eta dw}{T} + \frac{Y}{ac}\int\frac{\eta^2 dw}{T} + \frac{Z}{ab}\int\frac{\eta\zeta dw}{T}\right\}$$

$$\left.+ \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\left\{\frac{X}{bc}\int\frac{\xi\zeta dw}{T} + \frac{Y}{ac}\int\frac{\eta\zeta dw}{T} + \frac{Z}{ab}\int\frac{\zeta^2 dw}{T}\right\}\right]$$

Die in 5) vorkommenden Integrale sind nun zu bestimmen. Setzen wir $\xi = a \sin\theta \cos\psi$, $\eta = b \sin\theta \sin\psi$, $\zeta = c \cos\theta$, was der Gleichung des Ellipsoids genügt, so wird

$$dw = \sqrt{a^2b^2 \cos^2\theta + c^2 \sin^2\theta (a^2 \sin^2\psi + b^2 \cos^2\psi)} . \sin\theta d\theta d\psi$$ [1]

und

$$T = \sqrt{\frac{\xi^2}{a^4} + \frac{\eta^2}{b^4} + \frac{\zeta^2}{c^4}} =$$

$$= \frac{1}{abc}\sqrt{a^2b^2 \cos^2\theta + c^2 \sin^2\theta (a^2 \sin^2\psi + b^2 \cos^2\psi)},$$

somit

$$\frac{dw}{T} = abc . \sin\theta d\theta d\psi;$$

in 5) eingesetzt folgt:

$$u' = \frac{1}{4\pi J}\left[\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\left\{aX\int\int\xi^2 \sin\theta d\theta d\psi + bY\int\int\xi\eta \sin\theta d\theta d\psi + \right.\right.$$
$$\left. + cZ\int\int\xi\zeta \sin\theta d\theta d\psi\right\}$$

$$+ \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y}\left\{aX\int\int\xi\eta \sin\theta d\theta d\psi + bY\int\int\eta^2 \sin\theta d\theta d\psi + \right.$$
$$\left. + cZ\int\int\eta\zeta \sin\theta d\theta d\psi\right\}$$

$$+ \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\left\{aX\xi\zeta \sin\theta d\theta d\psi + bY\int\int\eta\zeta \sin\theta d\theta d\psi + \right.$$
$$\left.\left. + cZ\int\int\zeta^2 \sin\theta d\theta d\psi\right\}\right].$$

[1] Serret, in dem oben genannten Werke, 2. Bd., S. 338.

Die Integrationsgrenzen sind dabei, da die Integrale über die ganze Oberfläche des Ellipsoids zu nehmen sind, für $\theta : 0$ bis π, für $\psi : 0$ bis 2π. Man findet nach leichter Rechnung

$$\int\int \xi^2 \sin\theta d\theta d\psi = \frac{4\pi}{3} a^2$$

$$\int\int \eta^2 \sin\theta d\theta d\psi = \frac{4\pi}{3} b^2$$

$$\int\int \zeta^2 \sin\theta d\theta d\psi = \frac{4\pi}{3} c^2$$

Der Werth der übrigen Integrale ist, wie die Rechnung lehrt, gleich Null. Es resultirt somit

$$u' = \frac{a^3}{3J} X \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + \frac{b^3}{3J} Y \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + \frac{c^3}{3J} Z \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}.$$

Denken wir uns nun an der Stelle, wo das betrachtete Ellipsoid sich befindet, ein Raumelement $d\tau$ des Dielektricums genommen und nennen N die Zahl der in der Volumeinheit enthaltenen Ellipsoide, so ist $N d\tau$ die Anzahl der in dem herausgegriffenen Raumelement enthaltenen. Da wir nun alle diese Ellipsoide als gleich voraussetzen, so wird die Potentialfunction dieses Raumelementes gegeben sein durch

$$U' = \int \left[\frac{a^3}{3J} X \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + \frac{b^3}{3J} Y \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + \frac{c^3}{3J} Z \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \right] N d\tau,$$

was wir schreiben wollen:

$$U' = \int \left[\alpha \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + \beta \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + \gamma \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \right] d\tau. \tag{6}$$

Darin ist

$$\alpha = \frac{a^3 N}{3J} X$$

$$\beta = \frac{b^3 N}{3J} Y \tag{7}$$

$$\gamma = \frac{c^3 N}{3J} Z.$$

X, Y, Z sind die Componenten derjenigen Kraft, durch welche die Ellipsoide polar gemacht worden sind. Da nun diese zum Theil von solcher Elektricität, welche sich ausserhalb des Dielektricums, theilweise jedoch von der Elektricität im Dielektricum selbst herrührt, wird dieselbe nicht an allen Stellen des Dielektricums gleich gross sein. Jedoch können wir annehmen, dass sie innerhalb eines Raumelementes constant ist.

Die Componenten des ersten Theiles der Kraft sind, wenn V die Potentialfunction der nicht im Dielektricum befindlichen Elektricität bedeutet, gegeben durch $-\frac{\partial V}{\partial x}, -\frac{\partial V}{\partial y}, -\frac{\partial V}{\partial z}$. Die Componenten des zweiten Theiles lassen sich aus der Potentialfunction des Dielektricums bestimmen. Es handelt sich dabei um den Werth, welchen diese Potentialfunction im Punkte x, y, z hat. Wir erhalten sie aus 6), indem wir die Coordinaten des Raumelementes mit x', y', z' bezeichnen. Die Coëfficienten α, β, γ bleiben dieselben, da wir vorausgesetzt haben, dass die das Dielektricum constituirenden Ellipsoide alle gleich sind. Wir haben daher als Potentialfunction des Dielektricums im Raumelement $d\tau$:

$$U = \int \left(\alpha \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'} + \beta \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y'} + \gamma \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z'} \right) d\tau. \tag{8}$$

Die Kraftcomponenten für $d\tau$ sind aber nicht ohneweiters durch $-\frac{\partial U}{\partial x}, -\frac{\partial U}{\partial y}, -\frac{\partial U}{\partial z}$ darzustellen. Wenn wir von der Kraft sprechen, welche ein leitendes Körperchen erleidet und durch welche eine Influenz auf das Körperchen ausgeübt wird, so ist darin die von der Influenzelektricität des Körperchens ausgeübte Kraft nicht mit einbegriffen. Es ist daher von der Potentialfunction des Dielektricums noch jener Theil, welcher von der Elektricität des betrachteten Körperchens selbst herrührt, in Abzug zu bringen. Dasselbe gilt für unser Raumelement $d\tau$. Wollen wir die in $d\tau$ von dem übrigen Dielektricum ausgeübte Kraft kennen lernen, so müssen wir die von den in $d\tau$ enthaltenen polarisirten Ellipsoiden herrührende

Kraft subtrahiren. Das können wir dadurch, dass wir uns dieses Raumelement aus dem Dielektricum herausgenommen denken; es entsteht auf diese Weise ein Hohlraum, und die in diesem Hohlraum herrschende Kraft ist die zu bestimmende Kraft.

Da die Körperchen in dem Hohlraume Ellipsoide sind, so wird die von ihnen ausgeübte Kraft nach verschiedenen Richtungen verschieden sein. Wird der Hohlraum passend gewählt, so lässt sich jedoch das Potential der in ihm enthaltenen Ellipsoide leicht bestimmen. Dies findet in dem vorliegenden Falle dann statt, wenn wir $d\tau$ als ein Ellipsoid herausschneiden, welches zu einem der in ihm enthaltenen Ellipsoide homothetisch ist. Wir denken uns also aus dem Dielektricum einen kleinen ellipsoidischen Raum herausgeschnitten und bilden die Potentialfunction des ausserhalb dieses Raumes befindlichen Dielektricums für irgend einen innerhalb dieses Raumes liegenden Punkt x, y, z. Indem wir mit U die Potentialfunction des gesammten Dielektricums bezeichnen, möge die Potentialfunction des ausserhalb des herausgeschnittenen Theiles befindlichen Dielektricums mit U_1 bezeichnet werden. Dann werden die Componenten der gesuchten Kraft gegeben sein durch $-\frac{\partial U_1}{\partial x}, -\frac{\partial U_1}{\partial y}, -\frac{\partial U_1}{\partial z}$.

Bezeichnen wir nun noch die Potentialfunction der in dem herausgeschnittenen Ellipsoid befindlichen Ellipsoide mit U_0, so haben wir

$$U_1 = U - U_0. \tag{9}$$

Die Componenten $-\frac{\partial U_1}{\partial x}, -\frac{\partial U_1}{\partial y}, -\frac{\partial U_1}{\partial z}$ sind also bestimmt, wenn man U_0 kennt. U_0 ist gegeben durch das Integrale 8), welches über das ganze herausgeschnittene Ellipsoid zu erstrecken ist.

Da für das Raumelement X, Y, Z constant sind, sind auch α, β, γ für dasselbe constant, und wir haben

$$U_0 = \alpha \int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'} \, d\tau + \beta \int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y'} \, d\tau + \gamma \int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z'} \, d\tau. \tag{10}$$

Die Gleichung

$$r = \sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}$$

liefert

$$\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'} = -\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}, \quad \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y'} = -\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y}, \quad \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z'} = -\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}.$$

Wenn wir diese Werthe in den Ausdruck 10) einführen, so erhalten wir

$$U_0 = -\alpha \int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} d\tau - \beta \int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} d\tau - \gamma \int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} d\tau$$

oder

$$U_0 = -\alpha \frac{\partial}{\partial x} \int \frac{d\tau}{r} - \beta \frac{\partial}{\partial y} \int \frac{d\tau}{r} - \gamma \frac{\partial}{\partial z} \int \frac{d\tau}{r}. \tag{11}$$

$\int \frac{d\tau}{r}$ ist nun das Potential des mit der Dichte 1 erfüllten herausgeschnittenen Ellipsoids auf einen inneren Punkt und dementsprechend $\frac{\partial}{\partial x} \int \frac{d\tau}{r}$, $\frac{\partial}{\partial y} \int \frac{d\tau}{r}$, $\frac{\partial}{\partial z} \int \frac{d\tau}{r}$ die Componenten der Anziehung dieses Ellipsoids auf den betrachteten Punkt[1] parallel zu den Axen.

Bezeichnen wir die Axen des herausgeschnittenen Ellipsoids, welche den Axen eines, also bei der vorausgesetzten Constitution des Dielektricums, aller in ihm enthaltenen Ellipsoide parallel sind, mit A, B, C, ferner mit x_1, y_1, z_1 die Coordinaten des betrachteten Punktes (x, y, z) vom Mittelpunkt des Ellipsoides aus gezählt, so haben wir unter Berücksichtigung des Umstandes, dass die X-Kraft nur von den h_a-Dichten, die Y-Kraft nur von den h_b-Dichten, die Z-Kraft nur von den h_c-Dichten herrührt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \int \frac{d\tau}{r} &= -\frac{3 M x_1}{A} \int_0^1 \frac{u^2 du}{(1-\Lambda^2 u^2)^{1/2}(1-\Lambda'^2 u^2)^{1/2}} \\ \frac{\partial}{\partial y} \int \frac{d\tau}{r} &= -\frac{3 M y_1}{B} \int_0^1 \frac{u^2 du}{(1-\Lambda^2 u^2)^{3/2}(1-\Lambda'^2 u^2)^{1/2}} \\ \frac{\partial}{\partial z} \int \frac{d\tau}{r} &= -\frac{3 M z_1}{C} \int_0^1 \frac{u^2 du}{(1-\Lambda^2 u^2)^{1/2}(1-\Lambda'^2 u^2)^{3/2}} \end{aligned} \tag{12}$$

[1] Mathieu, in dem oben genannten Werke, S. 121, §. 8.

Da das herausgeschnittene Ellipsoid homothetisch ist mit einem der in ihm enthaltenen, ist $\Lambda^2 = \lambda^2$, $\Lambda'^2 = \lambda'^2$, also das in 12) auftretende Integral gleich dem früheren J. Ferner ist die Dichte gleich 1, die Masse des herausgeschnittenen Ellipsoids also gleich seinem Volum. Nun ist aber zufolge der Homotheticität

$$\frac{4ABC\pi}{3A^3} = \frac{4bc\pi}{3a^2}, \quad \frac{4ABC\pi}{3B^3} = \frac{4ac\pi}{3b^2}, \quad \frac{4ABC\pi}{3C^3} = \frac{4ab\pi}{3c^2},$$

somit:

$$\frac{\partial}{\partial x}\int\frac{d\tau}{r} = -4\pi J\frac{bc}{a^2}\cdot x_1$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\int\frac{d\tau}{r} = -4\pi J\frac{ac}{b^2}\cdot y_1$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\int\frac{d\tau}{r} = -4\pi J\frac{ab}{c^2}\cdot z_1$$

Bezeichnen wir noch die Coordinaten des Mittelpunktes des herausgeschnittenen Ellipsoids mit $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$, so wird, da x, y, z die Coordinaten des betrachteten Punktes waren,

$$x_1 = x - \mathfrak{x}, \quad y_1 = y - \mathfrak{y}, \quad z_1 = z - \mathfrak{z}$$

zu setzen sein. Wir erhalten dann

$$\frac{\partial}{\partial x}\int\frac{d\tau}{r} = -4\pi J\frac{bc}{a^2}(x - \mathfrak{x})$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\int\frac{d\tau}{r} = -4\pi J\frac{ac}{b^2}(y - \mathfrak{y})$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\int\frac{d\tau}{r} = -4\pi J\frac{ab}{c^2}(z - \mathfrak{z}).$$

Mit Hilfe dieser Gleichungen bestimmt sich der Werth U_0 zu

$$U_0 = 4\pi J\left[\frac{bc}{a^2}\alpha(x - \mathfrak{x}) + \frac{ac}{b^2}\beta(y - \mathfrak{y}) + \frac{ab}{c^2}\gamma(z - \mathfrak{z})\right] \qquad 13)$$

und

$$U_1 = U - 4\pi J\left[\frac{bc}{a^2}\alpha(x - \mathfrak{x}) + \frac{ac}{b^2}\beta(y - \mathfrak{y}) + \frac{ab}{c^2}\gamma(z - \mathfrak{z})\right] \qquad 14)$$

Die Axen des herausgeschnittenen Ellipsoids kommen in dieser Formel nicht vor, es ist daher nicht nöthig, ihre Werthe zu kennen. Aus 14) erhalten wir unmittelbar

$$\frac{\partial U_1}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial x} - 4\pi J \frac{bc}{a^2} \cdot \alpha$$

$$\frac{\partial U_1}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial y} - 4\pi J \frac{ac}{b^2} \cdot \beta \qquad 15)$$

$$\frac{\partial U_1}{\partial z} = \frac{\partial U}{\partial z} - 4\pi J \frac{ab}{c^2} \cdot \gamma.$$

Diese Gleichungen setzen uns endlich in Stand, die α, β, γ zu bestimmen. Die Componenten der ganzen auf die leitenden Körperchen in dem gewählten Raumelement wirkenden Kraft sind nach dem oben Gesagten:

$$X = -\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U_1}{\partial x}$$

$$Y = -\frac{\partial V}{\partial y} - \frac{\partial U_1}{\partial y} \qquad 16)$$

$$Z = -\frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial U_1}{\partial z},$$

also mit Rücksicht auf 15):

$$X = -\frac{\partial (V+U)}{\partial x} + 4\pi J \frac{bc}{a^2} \alpha$$

$$Y = -\frac{\partial (V+U)}{\partial y} + 4\pi J \frac{ac}{b^2} \beta \qquad 17)$$

$$Z = -\frac{\partial (V+U)}{\partial z} + 4\pi J \frac{ab}{c^2} \gamma$$

Nun ist nach 7)

$$X = \frac{3J}{a^3 N} \alpha$$

$$Y = \frac{3J}{b^3 N} \beta$$

$$Z = \frac{3J}{c^3 N} \gamma.$$

Diese Werthe liefern in Verbindung mit 17):

$$\alpha = -\frac{1}{\frac{3J}{a^3N} - 4\pi J \frac{bc}{a^2}} \cdot \frac{\partial (V+U)}{\partial x}$$

$$\beta = -\frac{1}{\frac{3J}{b^3N} - 4\pi J \frac{ac}{b^2}} \cdot \frac{\partial (V+U)}{\partial y}$$

$$\gamma = -\frac{1}{\frac{3J}{c^3N} - 4\pi J \frac{ab}{c^2}} \cdot \frac{\partial (V+U)}{\partial z}.$$

Eine einfache Umformung führt im Nenner aller dieser Grössen gleichen Werth herbei. Er wird dadurch $1 - \frac{4abc\pi}{3} N$. Nun ist $\frac{4abc\pi}{3}$ das Volum eines Ellipsoids, N die Anzahl derselben in der Volumseinheit, $\frac{4abc\pi}{3} N$ also nichts Anderes als die Raumerfüllung des Dielektricums. Bezeichnen wir diese Grösse mit g, so wird

$$\alpha = -\frac{\frac{a^3N}{3J}}{1-g} \cdot \frac{\partial (V+U)}{\partial x}$$

$$\beta = -\frac{\frac{b^3N}{3J}}{1-g} \cdot \frac{\partial (V+U)}{\partial y}$$

$$\gamma = -\frac{\frac{c^3N}{3J}}{1-g} \cdot \frac{\partial (V+U)}{\partial z}.$$

Setzen wir noch der Kürze wegen

$$\frac{a^3N}{3J(1-g)} = E_1, \quad \frac{b^3N}{3J(1-g)} = E_2, \quad \frac{c^3N}{3J(1-g)} = E_3, \qquad 18)$$

so können wir schreiben:

$$\alpha = -E_1 \frac{\partial (V+U)}{\partial x}, \quad \beta = -E_2 \frac{\partial (V+U)}{\partial y}, \quad \gamma = -E_3 \frac{\partial (U+V)}{\partial z}$$

und erhalten endlich, wenn wir diese Werthe in 6) einsetzen:

$$U' = -\int E_1 \frac{\partial (V+U)}{\partial x} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} d\tau - \int E_2 \frac{\partial (V+U)}{\partial y} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} d\tau - \int E_3 \frac{\partial (V+U)}{\partial z} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} d\tau. \qquad 19)$$

Dieses ist die zur Bestimmung der Potentialfunction unseres Dielektricums dienende Gleichung. Der Werth der Constanten E_1, E_2, E_3 ist in unserem Fall von einander verschieden; er hängt nicht nur von der Raumerfüllung, sondern auch von den Axen der Ellipsoide ab. Da wir jedoch alle Ellipsoide als gleich gross und gleichmässig vertheilt angenommen haben, werden sie für alle Theile des Dielektricums gleichen Werth haben.

Es ist nun noch die Aufgabe zu lösen, ihre Beziehung zu jenen Grössen abzuleiten, welche wir als die Dielektricitätsconstanten des Dielektricums bezeichnen. Zu diesem Zweck soll im Folgenden der Fall eines Plattencondensators behandelt werden.

III.

Wir formen die Gleichung 19) zunächst um, indem wir setzen

$$E_1 \frac{\partial (V+U)}{\partial x} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[E_1 (V+U) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\right] - (V+U) \frac{\partial}{\partial x}\left(E_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\right) \qquad 20)$$

und in ebensolcher Weise die Ausdrücke unter den beiden andern Integralen transformiren.

Die Gleichung 20) muss mit $d\tau = dx\,dy\,dz$ multiplicirt und über den ganzen von dem Dielektricum ausgefüllten Raum integrirt werden. Wir erhalten

$$\int E_1 \frac{\partial (V+U)}{\partial x} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} d\tau = \iiint \frac{\partial}{\partial x}\left[E_1(V+U)\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\right] dx\,dy\,dz -$$

$$-\iiint (V+U)\frac{\partial}{\partial x}\left(E_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\right) dx\,dy\,dz. \qquad 21)$$

Bei dem ersten rechts stehenden Integral lässt sich die Integration nach x ausführen. Man erhält

$$\iiint \frac{\partial}{\partial x}\left[E_1(V+U)\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\right] dx\,dy\,dz =$$

$$= \iint \left\{\left[E_1(V+U)\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\right]_2 - \left[E_1(V+U)\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\right]_1\right\} dx\,dy\,dz, \qquad 22)$$

worin die Indices 1 und 2 andeuten sollen, dass in dem in der Klammer stehenden Ausdruck die Werthe zu nehmen sind, welche an den Stellen stattfinden, wo eine der X-Axe parallele Gerade, deren andere Coordinaten y und z sind, die Oberfläche des Dielektricums schneidet. Der Fall, dass diese Gerade die Oberfläche an mehreren Stellen schneidet, tritt bei einem Plattencondensator nicht ein, ist also für uns belanglos.

Wir bezeichnen nun das Flächenelement an der durch den Index 1 angedeuteten Stelle, welches ein längs der Geraden gedachtes unendlich dünnes Prisma mit dem Querschnitte $dy\,dz$ aus der Oberfläche des Dielektricums herausschneidet, mit dw_1. Man hat dann

$$dy\,dz = \cos\lambda . dw_1,$$

worin λ den Winkel bedeutet, welchen die auf dw_1 nach Innen errichtete Normale mit der X-Axe einschliesst. Bezeichnen wir noch die Normale mit n_1, so haben wir weiter

$$\cos\lambda = \frac{\partial x}{\partial n_1},$$

woraus wir erhalten

$$dy\,dz = \frac{\partial x}{\partial n_1} dw_1.$$

Für die durch den Index 2 bezeichnete Stelle, an welcher die positive X-Richtung von der Fläche nicht nach Innen, sondern nach Aussen geht, lautet die entsprechende Gleichung

$$dy\,dz = -\frac{\partial x}{\partial n_2}\,dw_2.$$

Setzen wir diese Werthe in Gleichung 22) ein, so geht sie über in folgende

$$\iiint \frac{\partial}{\partial x}\left[E_1(V+U)\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\right] dx\,dy\,dz =$$
$$= -\int \left[E_1(V+U)\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\right]\frac{\partial x}{\partial n}\,dw, \qquad 23)$$

worin an der rechten Seite die Integration über die ganze Oberfläche des Dielektricums auszudehnen ist.

In 21) eingetragen folgt:

$$\int E_1 \frac{\partial(V+U)}{\partial x}\,\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\,d\tau = -\int \left[E_1(V+U)\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\right]\frac{\partial x}{\partial n}\,dw -$$
$$-\iiint (V+U)\frac{\partial}{\partial x}\left(E_1\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\right) dx\,dy\,dz$$

und analog

$$\int E_2 \frac{\partial(V+U)}{\partial y}\,\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y}\,d\tau = -\int \left[E_2(V+U)\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y}\right]\frac{\partial y}{\partial n}\,dw -$$
$$-\iiint (V+U)\frac{\partial}{\partial y}\left(E_2\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y}\right) dx\,dy\,dz$$

$$\int E_3 \frac{\partial(V+U)}{\partial z}\,\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\,d\tau = -\int \left[E_3(V+U)\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\right]\frac{\partial z}{\partial n}\,dw -$$
$$-\iiint (V+U)\frac{\partial}{\partial z}\left(E_3\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz.$$

Hieraus ergibt sich endlich

$$U' = \int \left[E_1 (V+U) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial n} + E_2 (V+U) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial n} + \right.$$
$$\left. + E_3 (V+U) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial n} \right] dw$$
$$+ \iiint (V+U) \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(E_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(E_2 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} \right) + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial}{\partial z} \left(E_3 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \right) \right] dx\,dy\,dz. \qquad 24)$$

Das zweite Integral lässt sich noch weiter vereinfachen, da wir voraussetzen, dass E_1, E_2, E_3 innerhalb des ganzen Dielektricums denselben Werth haben. Es ist dann:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(E_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \right) = E_1 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(E_2 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} \right) = E_2 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y^2},$$
$$\frac{\partial}{\partial z} \left(E_3 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \right) = E_3 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z^2},$$

somit:

$$U' = \int \left[E_1 (V+U) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial n} + E_2 (V+U) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial n} + \right.$$
$$\left. + E_3 (V+U) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial n} \right] dw$$
$$+ \iiint (V+U) \left(E_1 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2} + E_2 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y^2} + E_3 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z^2} \right) dx\,dy\,dz. \qquad 25)$$

Diese Gleichung kann zur Untersuchung eines Plattencondensators benützt werden. Wir nehmen an, dass wir aus unserem Dielektricum drei kreisförmige Platten von gleichem Radius ρ und gleicher Dicke d herausgeschnitten haben. Jedoch soll in der ersten Platte die Normale auf die Kreisflächen,

welche parallel ist zur Distanz d, parallel sein der a-Axe, in der zweiten der b-Axe, in der dritten der c-Axe der Ellipsoide. Diese Platten sollen der Reihe nach in denselben Condensator gestellt werden, dessen Platten kreisförmig vom Radius ρ, deren Distanz in gleicher Weise d sein soll, so dass sie also den Kreisflächen der dielektrischen Platten unmittelbar anliegen sollen. Bezeichnen wir noch die bezüglichen Werthe von $(V+U)$ mit $(V+U)_a$, $(V+U)_b$, $(V+U)_c$, so erhalten wir aus 25) für die erste Platte, für welche $\frac{\partial y}{\partial n} = 0$ und $\frac{\partial z}{\partial n} = 0$:

$$U'_a = E_1 \int (V+U)_a \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} dw +$$

$$+ \iiint (V+U)_a \left(E_1 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2} + E_2 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y^2} + E_3 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z^2} \right) dx\,dy\,dz. \quad 26)$$

Da wir das Coordinatensystem stets so legen, dass die X-Axe $\parallel a$, die Y-Axe $\parallel b$, die Z-Axe $\parallel c$, so ist für die zweite Platte $\frac{\partial x}{\partial n} = 0$ und $\frac{\partial z}{\partial n} = 0$, also

$$U'_b = E_2 \int (V+U)_b \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} dw +$$

$$+ \iiint (V+U)_b \left(E_1 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2} + E_2 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y^2} + E_3 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z^2} \right) dx\,dy\,dz \quad 27)$$

und analog für die dritte $\frac{\partial x}{\partial n} = 0$ und $\frac{\partial y}{\partial n} = 0$, also

$$U'_c = E_3 \int (V+U)_c \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} dw +$$

$$+ \iiint (V+U)_c \left(E_1 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2} + E_2 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y^2} + E_3 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z^2} \right) dx\,dy\,dz. \quad 28)$$

Die Integrationsgrenzen sind für das erste rechts stehende Integral in allen drei Gleichungen dieselben. Dagegen für das zweite Integral, da wir den Coordinatenanfangspunkt in den

Mittelpunkt der dielektrischen Platte anliegenden Seite der einen, sagen wir etwa der linken, Condensatorplatte verlegen:

in 26):	für x:	0	bis	d
	» y:	$-\rho$	»	$+\rho$
	» z:	$-\rho$	»	$+\rho$;
in 27):	für x:	$-\rho$	bis	$+\rho$
	» y:	0	»	d
	» z:	$-\rho$	»	$+\rho$;
in 28):	für x:	$-\rho$	bis	$+\rho$
	» y:	$-\rho$	»	$+\rho$
	» z:	0	»	d.

Wir wollen diese Integrationsgrenzen kurzweg dadurch bezeichnen, dass wir die dreifachen Integrale mit den Indices a, b, c versehen. Betrachten wir zunächst diese dreifachen Integrale. Herrscht auf der linken Condensatorplatte das Potential P, auf der rechten das Potential P', so wird, da das Feld zwischen den Platten homogen ist, das Potential $V+U$ an einer von der linken Platte um die Distanz u entfernten Stelle den Werth $P+\frac{P'-P}{d}u$ haben. Wir haben daher zu setzen:

$$(V+U)_a = P_a + \frac{P_a'-P_a}{d}x, \quad (V+U)_b = P_b + \frac{P_b'-P_b}{d}y,$$

$$(V+U)_c = P_c + \frac{P_c'-P_c}{d}z$$

und erhalten:

$$\iiint (V+U)_a \left(E_1 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2} + E_2 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y^2} + E_3 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z^2} \right) dx\,dy\,dz =$$

$$P_a \Bigg[-(E_1+E_2+E_3) \iiint_a \frac{dx\,dy\,dz}{r^3} + 3\,E_1 \iiint_a \frac{x^2 dx\,dy\,dz}{r^5} +$$

$$+ 3\,E_2 \iiint_a \frac{y^2 dx\,dy\,dz}{r^5} + 3\,E_3 \iiint_a \frac{z^2 dx\,dy\,dz}{r^5} \Bigg] +$$

$$\frac{P_a'-P_a}{d} \Bigg[-(E_1+E_2+E_3) \iiint_a \frac{x\,dx\,dy\,dz}{r^3} + 3\,E_1 \iiint_a \frac{x^3 dx\,dy\,dz}{r^5} +$$

$$+ 3\,E_2 \iiint_a \frac{xy^2\,dx\,dy\,dz}{r^5} + 3\,E^3 \iiint_a \frac{xz^2\,dx\,dy\,dz}{r^5} \Bigg] \qquad 29)$$

$$\iiint (V+U)_b \left(E_1 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2} + E_2 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y^2} + E_3 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz =$$

$$P_b \left[-(E_1+E_2+E_3)\iiint_b \frac{dx\,dy\,dz}{r^3} + 3E_1 \iiint_b \frac{x^2 dx\,dy\,dz}{r^5} + \right.$$

$$\left. + 3E_2 \iiint_b \frac{y^2 dx\,dy\,dz}{r^5} + 3E_3 \iiint_b \frac{z^2 dx\,dy\,dz}{r^5}\right] +$$

$$\frac{P_b'-P_b}{d}\left[-(E_1+E_2+E_3)\iiint_b \frac{y\,dx\,dy\,dz}{r^3} + \right.$$

$$+ 3E_1 \iiint_b \frac{yx^2 dx\,dy\,dz}{r^5} + 3E_2 \iiint_b \frac{y^3 dx\,dy\,dz}{r^5} +$$

$$\left. + 3E_3 \iiint_b \frac{yz^2 dx\,dy\,dz}{r^5}\right] \qquad 30)$$

$$\iiint (V+U)_c \left(E_1 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2} + E_2 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y^2} + E_3 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z^2}\right) dx\,dy\,dz =$$

$$P_c \left[-(E_1+E_2+E_3)\iiint_c \frac{dx\,dy\,dz}{r^3} + 3E_1 \iiint_c \frac{x^2 dx\,dy\,dz}{r^5} + \right.$$

$$\left. + 3E_2 \iiint_c \frac{y^2 dx\,dy\,dz}{r^5} + 3E_3 \iiint_c \frac{z^2 dx\,dy\,dz}{r^5}\right] +$$

$$\frac{P_c'-P_c}{d}\left[-(E_1+E_2+E_3)\iiint_c \frac{z\,dx\,dy\,dz}{r^3} + \right.$$

$$+ 3E_1 \iiint_c \frac{zx^2 dx\,dy\,dz}{r^5} + 3E_2 \iiint_c \frac{zy^2 dx\,dy\,dz}{r^5} +$$

$$\left. + 3E_3 \iiint_c \frac{z^3 dx\,dy\,dz}{r^5}\right]. \qquad 31)$$

Da $r = (x^2+y^2+z^2)^{1/2}$, sieht man bei den gegebenen Grenzen folgende Beziehungen unmittelbar ein, welche wir durch Einführung eines gleichen Buchstabens andeuten wollen:

$$\iiint_a \frac{dx\,dy\,dz}{r^3} = \iiint_b \frac{dx\,dy\,dz}{r^3} = \iiint_c \frac{dx\,dy\,dz}{r^3} = \mathfrak{A}$$

$$\iiint_a \frac{x^2 dx\,dy\,dz}{r^5} = \iiint_b \frac{y^2 dx\,dy\,dz}{r^5} = \iiint_c \frac{z^2 dx\,dy\,dz}{r^5} = \mathfrak{B}$$

$$\iiint_a \frac{y^2 dx\,dy\,dz}{r^5} = \iiint_a \frac{z^2\,dx\,dy\,dz}{r^5} = \iiint_b \frac{x^2 dx\,dy\,dz}{r^5} =$$

$$= \iiint_b \frac{z^2\,dx\,dy\,dz}{r^5} = \iiint_c \frac{x^2 dx\,dy\,dz}{r^5} = \iiint_c \frac{y^2 dx\,dy\,dz}{r^5} = \mathfrak{C}$$

$$\iiint_a \frac{x\,dx\,dy\,dz}{r^3} = \iiint_b \frac{y\,dx\,dy\,dz}{r^3} = \iiint_c \frac{z\,dx\,dy\,dz}{r^3} = \mathfrak{M}$$

$$\iiint_a \frac{x^3 dx\,dy\,dz}{r^5} = \iiint_b \frac{y^3 dx\,dy\,dz}{r^5} = \iiint_c \frac{z^3\,dx\,dy\,dz}{r^5} = \mathfrak{N}$$

$$\iiint_a \frac{xy^2 dx\,dy\,dz}{r^4} = \iiint_a \frac{xz^2 dx\,dy\,dz}{r^5} = \iiint_b \frac{yx^2 dx\,dy\,dz}{r^5} =$$

$$= \iiint_b \frac{yz^2 dx\,dy\,dz}{r^5} = \iiint_c \frac{zx^2 dx\,dy\,dz}{r^5} = \iiint_c \frac{zy^2 dx\,dy\,dz}{r^5} = \mathfrak{P}.$$

Wir können die Gleichungen 29)—31) hiemit kürzer schreiben:

$$\iiint (V+U)_a \left(E_1 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2} + E_2 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y^2} + E_3 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z^2}\right) dx\,dy\,dz =$$

$$P_a[-(E_1+E_2+E_3)\mathfrak{A} + 3E_1\mathfrak{B} + 3(E_2+E_3)\mathfrak{C}] +$$

$$+ \frac{P_a'-P_a}{d}[-(E_1+E_2+E_3)\mathfrak{M} + 3E_1\mathfrak{N} + 3(E_2+E_3)\mathfrak{P}] \qquad 32)$$

$$\iiint (V+U)_b \left(E_1 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2} + E_2 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y^2} + E_2 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z^2}\right) dx\,dy\,dz =$$

$$P_b[-(E_1+E_2+E_3)\mathfrak{A} + 3E_2\mathfrak{B} + 3(E_1+E_3)\mathfrak{C}] +$$

$$+ \frac{P_b'-P_b}{d}[-(E_1+E_2+E_3)\mathfrak{M} + 3E_2\mathfrak{N} + 3(E_1+E_3)\mathfrak{P}] \qquad 33)$$

$$\iiint (V+U)_c \left(E_1 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2} + E_2 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y^2} + E_3 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z^2}\right) dx\,dy\,dz =$$

$$P_c[-(E_1+E_2+E_3)\mathfrak{A} + 3E_3\mathfrak{B} + 3(E_1+E_2)\mathfrak{C}] +$$

$$+ \frac{P_c'-P_c}{d}[-(E_1+E_2+E_3)\mathfrak{M} + 3E_3\mathfrak{N} + 3(E_1+E_2)\mathfrak{P}]. \qquad 34)$$

Die Integrale $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{P}$ wären nun zu bestimmen. Vor Allem bemerken wir, dass der Punkt, für welchen die Potentialfunction des Dielektricums gesucht wird, sich ausserhalb des Dielektricums befindet. r kann also nie gleich Null werden und daher gilt die Gleichung

$$\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z} = 0,$$

aus welcher folgt:

$$\iiint_a \left(\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z^2} \right) dx\,dy\,dz = -\mathfrak{A} + \mathfrak{B} + 2\mathfrak{C} = 0$$

$$\iiint_a x \left(\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z^2} \right) dx\,dy\,dz = -\mathfrak{M} + \mathfrak{N} + 2\mathfrak{P} = 0.$$

Wir haben also die Relationen

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} &= \mathfrak{B} + 2\mathfrak{C} \\ \mathfrak{M} &= \mathfrak{N} + 2\mathfrak{P} \end{aligned} \qquad 35)$$

welche uns die Berechnung von $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{P}$ ersparen. Die Bestimmung von $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ wollen wir jedoch noch verschieben. Der Kürze wegen schreiben wir die rechten Seiten der Gleichungen 32)—34):

$$\begin{aligned} &P_a \cdot M_a + \frac{P_a' - P_a}{d} N_a \\ &P_b \cdot M_b + \frac{P_b' - P_b}{d} N_b \\ &P_c \cdot M_c + \frac{P_c' - P_c}{d} N_c \end{aligned} \qquad 36)$$

und damit gehen die Gleichungen 26)—28) über in:

$$U_a' = E_1 \int (V+U)_a \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} dw + P_a M_a + \frac{P_a' - P_a}{d} N_a \qquad 37)$$

$$U_b' = E_2 \int (V+U)_b \frac{\partial \frac{1}{r}}{dn} dw + P_b M_b + \frac{P_b' - P_b}{d} N_b \qquad 38)$$

$$U_c' = E_3 \int (V+U)_c \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} dw + P_c M_c + \frac{P_c' - P_c}{d} N_c. \qquad 39)$$

Wir können uns nun bei der weiteren Berechnung dieser Ausdrücke auf Gleichung 37) beschränken, da die beiden andern ganz analog gebaut sind. Es ist in 37) nun noch das Integrale

$$E_1 \int (V+U)_a \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} dw$$

zu bestimmen.

Da die Bestimmung dieses Integrals von Clausius durchgeführt worden ist, ist es überflüssig, sie hier zu wiederholen. Der Werth U_a' wird auf den beiden Platten des Condensators verschiedene, aber von der Randwirkung abgesehen, constante Werthe haben. Man kann daher U_a' einfach für die Mitte der Condensatorplatten bestimmen. Man erhält dann (Clausius, am angegebenen Orte, S. 85, Gleichung 34):

$$U_a' = 2\pi E_1 (P_a' - P_a)\left(1 - \frac{1}{2}\frac{d}{\rho}\right) + M_a P_a + (P_a' - P_a)\frac{N_a}{d} \qquad 40)$$

Da wir die Potentialfunctionen V_a und U_a nur in den Mittelpunkten der beiden Condensatorplatten zu betrachten haben, so wollen wir die Werthe, welche sie auf der linken Platte haben, einfach mit V_a und U_a, diejenigen, welche sie auf der rechten Platte haben, mit V_a' und U_a' bezeichnen. Dann ist zu setzen

$$\begin{aligned} P_a &= V_a + U_a \\ P_a' &= V_a' + U_a'. \end{aligned} \qquad 41)$$

Da ferner der Punkt, für welchen U_a' (Gleichung 40) bestimmt worden ist, der Mittelpunkt der linken Platte war, ist U_a' in dieser Gleichung gleich U_a zu setzen, und wir haben zunächst:

$$U_a = 2\pi E_1(P'_a - P_a)\left(1 - \frac{1}{2}\frac{d}{\rho}\right) + M_a P_a + (P'_a - P_a)\frac{N_a}{d}. \qquad 42)$$

Um die entsprechende Gleichung für den Mittelpunkt der rechten Platte zu bilden, haben wir an Stelle von U_a zu schreiben U'_a und P'_a und P_a zu vertauschen; sie lautet sonach

$$U'_a = 2\pi E_1(P_a - P'_a)\left(1 - \frac{1}{2}\frac{d}{\rho}\right) + M_a P'_a + (P_a - P'_a)\frac{N_a}{d}. \qquad 43)$$

Subtrahirt man die Gleichung 43) von 42), so folgt

$$U_a - U'_a = -\left[4\pi E_1\left(1 - \frac{1}{2}\frac{d}{\rho}\right) - \left(M_a - \frac{2N_a}{d}\right)\right](P_a - P'_a),$$

und wenn man hierin die Werthe von P_a und P'_a gemäss Gleichung 41) einsetzt:

$$U_a - U'_a =$$
$$= -\left[4\pi E_1\left(1 - \frac{1}{2}\frac{d}{\rho}\right) - \left(M_a - \frac{2N_a}{d}\right)\right](V_a + U_a - V'_a - U'_a);$$

wir erhalten daher

$$U_a - U'_a = -\frac{4\pi E_1\left(1 - \frac{1}{2}\frac{d}{\rho}\right) - \left(M_a - \frac{2N_a}{d}\right)}{1 + 4\pi E_1\left(1 - \frac{1}{2}\frac{d}{\rho}\right) - \left(M_a - \frac{2N_a}{d}\right)}(V_a - V'_a).$$

Vernachlässigen wir nun noch die Grösse $\frac{d}{\rho}$ (siehe Clausius, am angegebenen Orte S. 86), so kommt

$$U_a - U'_a = -\frac{4\pi E_1 - \left(M_a - \frac{2N_a}{d}\right)}{1 + 4\pi E_1 - \left(M_a - \frac{2N_a}{d}\right)}(V_a - V'_a) \qquad 44)$$

Dies ist die gesuchte, zur Bestimmung der Potentialdifferenz $U_a - U'_a$ dienende Gleichung. Aus derselben ergibt sich unmittelbar diejenige Gleichung, welche die ganze wirklich stattfindende Potentialdifferenz der beiden Condensatorplatten bestimmt. Die gesammte Potentialfunction aller getrennten Elektricitäten, sowohl jener auf den Platten, als auch jener im

Dielektricum, ist für die linke Platte $P_a = V_a + U_a$, für die rechte Platte $P_a' = V_a' + U_a'$, die zwischen den Platten stattfindende Potentialdifferenz somit $P_a - P_a' = V_a + U_a - V_a' - U_a'$. Wir erhalten sie aus Gleichung 44), wenn wir beiderseits $V_a - V_a'$ addiren. Es folgt:

$$P_a - P_a' = \frac{1}{1 + 4\pi E_1 - \left(M_a - \frac{2 N_a}{d}\right)} (V_a - V_a'). \tag{45}$$

Diese Gleichung besagt, dass die ursprüngliche Potentialdifferenz $V_a - V_a'$ des Condensators durch das Einschieben der dielektrischen Platte auf den Betrag $P_a - P_a'$ sich geändert hat. Ist Q die Elektricitätsmenge auf der linken Platte des Condensators, so gilt für den leeren Condensator die Gleichung

$$Q = \frac{f}{4\pi} \frac{V_a - V_a'}{d},$$

wenn f die Fläche der Platten bedeutet. Ist er dagegen mit einem Dielektricum, etwa unserer dielektrischen Platte, deren Dielektricitätsconstante wir mit D_a bezeichnen, ausgefüllt, so herrscht nunmehr die Potentialdifferenz $P_a - P_a'$ und es gilt die Beziehung:

$$Q = \frac{f}{4\pi} \cdot \frac{P_a - P_a'}{d} \cdot D_a.$$

Aus diesen Werthen von Q folgt:

$$P_a - P_a' = \frac{1}{D_a} (V_a - V_a'). \tag{46}$$

Der Vergleich von 45) und 46) liefert uns die Relation

$$D_a = 1 + 4\pi E_1 - \left(M_a - \frac{2 N_a}{d}\right). \tag{47}$$

Bezeichnen wir mit D_b und D_c die Dielektricitätsconstanten der beiden anderen Platten, in welchen die b, respective die c-Axe der Ellipsoide senkrecht zu den Kreisflächen stehen, so folgt durch Analogie

$$\left.\begin{aligned} D_b &= 1+4\pi E_2-\left(M_b-\frac{2N_b}{d}\right)\\ D_c &= 1+4\pi E_3-\left(M_c-\frac{2N_c}{d}\right)\end{aligned}\right\} \qquad 48)$$

Die Gleichungen 47) und 48) bestimmen die Beziehungen zwischen den Constanten E_1, E_2, E_3 und den Dielektricitätsconstanten D_a, D_b, D_c der Substanz.

Mit Berücksichtigung der Gleichungen 32) und 36) nimmt die Gleichung 47) folgende Gestalt an:

$$\begin{aligned} &E_1\left[4\pi+\left(\mathfrak{A}-\frac{2\mathfrak{M}}{d}\right)-3\left(\mathfrak{B}-\frac{2\mathfrak{N}}{d}\right)\right]\\ &+E_2\left[\left(\mathfrak{A}-\frac{2\mathfrak{M}}{d}\right)-3\left(\mathfrak{C}-\frac{2\mathfrak{P}}{d}\right)\right]\\ &+E_3\left[\left(\mathfrak{A}-\frac{2\mathfrak{M}}{d}\right)-3\left(\mathfrak{C}-\frac{2\mathfrak{P}}{d}\right)\right]=D_a-1. \end{aligned} \qquad 49)$$

Der Kürze wegen setzen wir

$$\mathfrak{A}-\frac{2\mathfrak{M}}{d}=\alpha$$

$$\mathfrak{B}-\frac{2\mathfrak{N}}{d}=\beta$$

$$\mathfrak{C}-\frac{2\mathfrak{P}}{d}=\gamma.$$

Dann nehmen die Gleichung 49) und die entsprechenden aus 48) abzuleitenden Gleichungen die Gestalt an:

$$\begin{aligned} 4\pi E_1+E_1(\alpha-3\beta)+E_2(\alpha-3\gamma)+E_3(\alpha-3\gamma)&=D_a-1\\ 4\pi E_1+E_1(\alpha-3\gamma)+E_2(\alpha-3\beta)+E_3(\alpha-3\gamma)&=D_b-1\\ 4\pi E_3+E_1(\alpha-3\gamma)+E_2(\alpha-3\gamma)+E_3(\alpha-3\beta)&=D_c-1 \end{aligned} \qquad 50)$$

Addiren wir diese drei Gleichungen, so folgt:

$$4\pi(E_1+E_2+E_3)+3(\alpha-\beta-2\gamma)(E_1+E_2+E_3)=D_a+D_b+D_c-3.$$

Lassen wir die Ellipsoide in Kugeln übergehen, so wird $E_1=E_2=E_3=E$ und $D_a=D_b=D_c=D$, während sich die Werthe von α, β, γ nicht ändern. Die Gleichung lautet dann

$$4\pi E+3(\alpha-\beta-2\gamma)E=D-1.$$

Clausius findet für Kugeln (am angegebenen Orte, S. 93, Gleichung 53):

$$4\pi E = D-1,$$

woraus sich ergibt:

$$\alpha-\beta-2\gamma = 0. \tag{51}$$

Setzen wir die ursprünglichen Werthe ein, so folgt:

$$[\mathfrak{A}-(\mathfrak{B}+2\mathfrak{C})]-\frac{2}{d}[\mathfrak{M}-(\mathfrak{N}+2\mathfrak{P})] = 0,$$

welche Beziehung durch die in 35) gegebenen Relationen erfüllt ist. Dieselbe Relation würde sich übrigens aus jeder der Gleichungen 50) ergeben, wenn $E_1 = E_2 = E_3 = E$ gesetzt wird.

Die Gleichungen 50) dienen zur Bestimmung von E_1, E_2, E_3. Setzen wir der Kürze wegen noch

$$4\pi+(\alpha-3\beta) = \lambda,$$
$$\alpha-3\gamma = \mu,$$

so findet man leicht

$$E_1 = \frac{(D_a-1)(\lambda^2-\mu^2)+(D_b-1)(\mu^2-\mu\lambda)+(D_c-1)(\mu^2-\mu\lambda)}{\lambda^3+2\mu^3-3\mu^2\lambda} \tag{52}$$

und ähnliche Werthe für E_2 und E_3.

Diese Gleichung ergibt für $D_a = D_b = D_c = D$ und $E_1 = E$:

$$E = \frac{(D-1)(\lambda^2+\mu^2-2\mu\lambda)}{\lambda^3+2\mu^3-3\mu^2\lambda}$$

und dies muss nach dem oben Gesagten gleich sein $\frac{D-1}{4\pi}$.

Es muss also $\frac{\lambda^3+2\mu^3-3\mu^2\lambda}{\lambda^2+\mu^2-2\mu\lambda} = \lambda+2\mu = 4\pi$ sein, d. h. mit Rücksicht auf die Werthe von λ und μ:

$$4\pi+3\alpha-3\beta-6\gamma = 4\pi$$

und

$$\alpha-\beta-2\gamma = 0,$$

dieselbe Relation, welche wir schon verificirt haben.

Unsere Formeln befinden sich also mit den Formeln von Clausius in voller Übereinstimmung.

Es handelt sich jedoch noch darum, E_1, E_2, E_3 wirklich zu bestimmen, und zu diesem Zwecke ist es vor Allem nöthig, den Werth der Coëfficienten $\alpha - 3\beta$ und $\alpha - 3\gamma$ in den Gleichungen 50) zu kennen. Es ist

$$\alpha - 3\beta = (\mathfrak{A} - 3\mathfrak{B}) - \frac{2}{d}(\mathfrak{M} - 3\mathfrak{N}).$$

Es war $\mathfrak{A} = \iiint_a \frac{dx\,dy\,dz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$. Man findet zunächst

$$\iint_{-\rho}^{+\rho} \frac{dy\,dz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} = \frac{4}{x} \operatorname{arc\,tg} \frac{\rho^2}{x\sqrt{x^2+2\rho^2}};$$

da wir $\frac{d}{\rho}$ vernachlässigt haben, können wir $\frac{x}{\rho}$ ebenfalls vernachlässigen, wodurch dieser Ausdruck in $\frac{4}{x} \operatorname{arc\,tg} \frac{\rho}{x\sqrt{2}}$ übergeht. Es wird hiedurch

$$\mathfrak{A} = 4 \int_0^d \frac{dx}{x} \operatorname{arc\,tg} \frac{\rho}{x\sqrt{2}}.$$

Was den Werth von $\mathfrak{B}$ betrifft, so kann man zunächst schreiben:

$$\mathfrak{B} = \iiint_a \frac{x^2\,dx\,dy\,dz}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} = \int_0^d x\,dx \iint_{-\rho}^{+\rho} \frac{x\,dy\,dz}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} =$$

$$= \int_0^d x\,dx \,.\, -\frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial x} \iint_{-\rho}^{+\rho} \frac{dy\,dz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}.$$

Nun ist

$$\frac{\partial}{\partial x} \iint_{-\rho}^{+\rho} \frac{dy\,dz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} = 4\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{x} \operatorname{arc\,tg} \frac{\rho}{x\sqrt{2}}\right) =$$

$$= -\frac{4}{x^2} \operatorname{arc\,tg} \frac{\rho}{x\sqrt{2}} - \frac{4\sqrt{2}}{x\rho},$$

wenn wir wieder $\frac{x}{\rho}$ vernachlässigen. Es ergibt sich daher

$$\mathfrak{B} = \frac{4}{3}\int_0^d \frac{dx}{x} \operatorname{arc\,tg} \frac{\rho}{x\sqrt{2}} + \frac{4\sqrt{2}}{3}\frac{d}{\rho} = \frac{1}{3}\mathfrak{A},$$

somit $\mathfrak{A} - 3\mathfrak{B} = 0$.

In gleicher Weise findet man

$$\mathfrak{M} = 4\int_0^d dx \operatorname{arc\,tg} \frac{\rho}{x\sqrt{2}}$$

und

$$\mathfrak{N} = \frac{4}{3}\int_0^d dx \operatorname{arc\,tg} \frac{\rho}{x\sqrt{2}} = \frac{1}{3}\mathfrak{M},$$

somit $\mathfrak{M}—3\mathfrak{N} = 0$, also endlich $\alpha—3\beta = 0$.

Nun war (Gleichung 51)

$$\alpha—\beta—2\gamma = 0,$$

was wir auch schreiben können

$$3\alpha—3\beta—6\gamma = \alpha—3\beta+2(\alpha—3\gamma) = 0.$$

Da $\alpha—3\beta = 0$, folgt hieraus auch $\alpha—3\gamma = 0$. Die Gleichungen 50) nehmen also die einfache Gestalt an:

$$\begin{aligned} 1+4\pi E_1 &= D_a \\ 1+4\pi E_2 &= D_b \\ 1+4\pi E_3 &= D_c, \end{aligned} \tag{53}$$

woraus mit Berücksichtigung der Werthe von E_1, E_2, E_3 (Gleichung 18):

$$\begin{aligned} D_a &= 1+\frac{4\pi a^3 N}{3J(1-g)} & & \frac{a^3 N}{3J(1-g)} = \frac{D_a-1}{4\pi} \\ D_b &= 1+\frac{4\pi b^3 N}{3J(1-g)} & \text{oder} \quad & \frac{b^3 N}{3J(1-g)} = \frac{D_b-1}{4\pi} \\ D_c &= 1+\frac{4\pi c^3 N}{3J(1-g)} & & \frac{c^3 N}{3J(1-g)} = \frac{D_c-1}{4\pi} \end{aligned} \tag{54}$$

Durch diese Gleichungen ist zunächst das Verhältniss der Axen der Ellipsoide bestimmt:

$$\begin{aligned} \frac{a}{c} &= \sqrt[3]{\frac{D_a-1}{D_c-1}} = \rho \\ \frac{b}{c} &= \sqrt[3]{\frac{D_b-1}{D_c-1}} = \sigma; \end{aligned} \tag{55}$$

ferner liefern sie einen Ausdruck für die Raumerfüllung, wenn wir sie mit einander multipliciren und berücksichtigen, dass $\frac{4\pi abc}{3}N = g$ ist:

$$\frac{g}{1-g} = J\sqrt[3]{(D_a-1)(D_b-1)(D_c-1)} \tag{56}$$

$$g = \frac{J\sqrt[3]{(D_a-1)(D_b-1)(D_c-1)}}{1+J\sqrt[3]{(D_a-1)(D_b-1)(D_c-1)}} \tag{57}$$

Für Kugeln wäre $D_a = D_b = D_c = D$ und $J = \frac{1}{3}$ zu setzen, somit

$$g = \frac{D-1}{D+2},$$

wie bekannt.

Es erübrigt noch, die gefundenen Formeln auf einen speciellen Fall anzuwenden. Es wurde vorausgesetzt, dass $a > b > c$, es muss also $D_a > D_b > D_c$ sein, wie aus den Gleichungen 54) ersichtlich ist.

Für krystallisirten Schwefel vom specifischen Gewichte 2·075 fand Boltzmann[1] die drei Dielektricitätsconstanten 4·773, 3·97, 3·81, während die elektromagnetische Lichttheorie 4·596, 3·886, 3·591 liefert. Näherungsweise dürfen wir die Richtungen, nach welchen diese Werthe gelten, als senkrecht auf einander ansehen. Es wird dann, wenn wir die aus der elektromagnetischen Lichttheorie fliessenden Werthe zu der Berechnung wählen, $\rho = 1{\cdot}1154$ und $\sigma = 1{\cdot}0366$. (Die Boltzmann'schen Werthe würden $\rho = 1{\cdot}1031$ und $\sigma = 1{\cdot}0185$ ergeben.) Hieraus folgt das Axenverhältniss

$$a : b : c = 1{\cdot}1154 : 1{\cdot}0366 : 1.$$

Ferner ist $J = \int_0^1 \frac{u^2 du}{(1-\lambda^2 u^2)^{1/2}(1-\lambda'^2 u^2)^{1/2}}$

und da $0 \begin{matrix} < \lambda u < \\ < \lambda' u < \end{matrix} 1$:

[1] Boltzmann, Über die Verschiedenheit der Dielektricitätsconstante des krystallisirten Schwefels nach verschiedenen Richtungen. Diese Sitzungsberichte, 70 (2), S. 366.

$$=\int_0^1\left[1+\frac{1}{2}(\lambda^2+\lambda'^2)u^2+\frac{1}{8}(3\lambda^4+2\lambda^2\lambda'^2+3\lambda'^4)u^4+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{16}(5\lambda^6+3\lambda^4\lambda'^2+3\lambda^2\lambda'^4+5\lambda'^6)u^6+\ldots\right]u^2du$$

$$=\frac{1}{3}+\frac{1}{10}(\lambda^2+\lambda'^2)+\frac{1}{56}(3\lambda^4+2\lambda^2\lambda'^2+3\lambda'^4)+$$

$$+\frac{1}{144}(5\lambda^6+3\lambda^4\lambda'^2+3\lambda^2\lambda'^4+5\lambda'^6)+\ldots$$

Es ist $\lambda^2=\frac{a^2-b^2}{a^2}=\frac{\rho^2-\sigma^2}{\rho^2}$, $\lambda'^2=\frac{a^2-c^2}{a^2}=\frac{\rho^2-1}{\rho^2}$,

das gibt

$$\lambda^2=0\cdot13639,\quad \lambda'^2=0\cdot19627,$$

daher

$$\lambda^2+\lambda'^2=0\cdot32266$$

$$3\lambda^4+2\lambda^2\lambda'^2+3\lambda'^4=0\cdot32489$$

$$5\lambda^6+3\lambda^4\lambda'^2+3\lambda^2\lambda'^4+5\lambda'^6=0\cdot07689,$$

woraus

$$J=0\cdot37193.$$

Mit Hilfe dieses Werthes findet man gemäss 56)

$$\frac{g}{1-g}=1\cdot11427$$

und gemäss 57)

$$g=0\cdot52703.$$

Unter der Voraussetzung, dass die Raumerfüllung sich nicht ändert, wenn der krystallisirte Schwefel in amorphen übergeführt wird, könnte man nun mit dem gefundenen Werthe von g die Dielektricitätsconstante des amorphen Schwefels berechnen. Nun ist aber das specifische Gewicht frischen amorphen Schwefels 1·92, seine Raumerfüllung g' also geringer als die des krystallisirten. Da sich die Raumerfüllungen verhalten wie die specifischen Gewichte, ist $g'=\frac{1\cdot92}{2\cdot075}g=$ $=0\cdot9253\,g=0\cdot48766.$

Gemäss der Formel $D=\frac{1+2g'}{1-g'}$ findet man

$$D=3\cdot853,$$

während Boltzmann[1] nach derselben Methode, mittelst welcher er die Dielektricitätsconstanten des krystallisirten Schwefels bestimmte, den Werth 3·90, aus Condensatorversuchen dagegen den Werth 3·84 gefunden hat.

Die gute Übereinstimmung dieser Werthe mit dem aus den Brechungsquotienten des krystallisirten Schwefels gefundenen darf wohl als ein Beleg für die aus der elektromagnetischen Lichttheorie sich ergebende Beziehung zwischen Brechungsquotient und Dielektricitätsconstante angesehen werden.

Es ist mir schliesslich eine angenehme Pflicht, dankbar zu erwähnen, dass ich die vorliegende Untersuchung auf eine Anregung hin unternommen habe, welche von Herrn Prof. Franz Exner ausgegangen ist.

---

[1] Boltzmann, Über einige an meinen Versuchen über die elektrostatische Fernwirkung dielektrischer Körper anzubringende Correctionen. Diese Sitzungsberichte, 70 (2), S. 339. Boltzmann hat allerdings nicht mit amorphem Schwefel gearbeitet; doch haben die Untersuchungen Benischke's (Experimentaluntersuchung über Dielectrica, diese Sitzungsberichte 1894) ergeben, dass sich die Dielektricitätsconstante des amorphen Schwefels nicht ändert, wenn er in gewöhnlichen übergeht.

Über den Energieverbrauch bei der Magnetisirung durch oscillatorische Condensatorentladungen

von

Ignaz Klemenčič.

Aus dem physikalischen Institute der k. k. Universität in Graz.

(Mit 1 Textfigur.)

Die ersten Messungen des Energieverbrauches bei der Magnetisirung hat bekanntlich Warburg im Vereine mit König[1] angestellt. Warburg zeigte zugleich, wie durch die Erscheinung der Hysteresis Energieverluste bedingt sind und lehrte auch, wie sich aus den bei langsamer cyclischer Magnetisirung aufgenommenen Curven, den sogenannten Hysteresisschleifen, diese Verluste berechnen lassen. Nach ihm beschäftigte sich Tanakadatè[2] mit dieser Frage und in neuerer Zeit ist sie hauptsächlich von Elektrotechnikern, wie J. und B. Hopkinson, Evershed und Vignoles, Ayrton und Sumpner[3] untersucht worden.

Der Energieverbrauch bei der Magnetisirung in einem Wechselfelde ist zum Theile eine Folge der Hysteresis, zum Theile eine Wirkung der Foucault'schen Ströme. Durch eine entsprechende Verkleinerung gewisser Dimensionen des Versuchsobjectes kann man den zweiten Theil beinahe ganz unterdrücken. Die Messungen der oben angeführten Beobachter

---

[1] Wied. Ann., 20, 1883, S. 814.

[2] Phil. Mag., 28, 1889, S. 207.

[3] Vide: Dr. H. du Bois, Magnetische Kreise, deren Theorie und Anwendung. S. 240.

hatten auch vornehmlich den Zweck, zu constatiren, ob die bei schnellen Feldwechseln gefundenen Hysteresisverluste mit den aus den Hysteresisschleifen berechneten übereinstimmen. Es wurde so ziemlich allgemein beobachtet, dass dies bis auf einige Procente zutrifft.

Die Zahl der Feldwechsel betrug in den untersuchten Fällen circa hundert. Weiter ist man bisher noch nicht gegangen. Beim gegenwärtigen Stande der Wechselstromtechnik haben auch Messungen bei höherer Wechselzahl keine rechte praktische Bedeutung. Mit Rücksicht auf gewisse theoretische Fragen ist es jedoch sicher wünschenswerth, den Energieverbrauch bei der Magnetisirung durch noch raschere Schwingungen zu studiren, als es jene sind, die uns die gewöhnlichen Wechselstrommaschinen liefern; und zwar wird es sich empfehlen, in diesem Falle das Augenmerk nicht nur auf die Hysteresisverluste, sondern auch auf den Energieverbrauch in Folge der Foucault'schen Ströme zu richten.

Wenn man nun solche Untersuchungen bei Feldwechseln, welche nach einigen Tausend pro Secunde zählen, anstellen will, dann muss man auf die Anwendung einer gewöhnlichen Wechselstrommaschine verzichten und es empfiehlt sich, in diesem Falle zu oscillatorischen Condensatorentladungen zu greifen, welche ja auch rasch wechselnde Magnetfelder, allerdings von abnehmender Intensität liefern.

Nachfolgend wird ein Verfahren beschrieben, welches den Zweck hat, den Energieverbrauch bei der Magnetisirung durch oscillatorische Condensatorentladungen zu messen. Die angeführten Beobachtungsresultate können nur als vorläufige betrachtet werden, da mit den hier benützten Apparaten eine sehr exacte Bestimmung dieses Verbrauches noch nicht gut möglich ist. Immerhin aber soll durch die mitgetheilten Zahlen die Brauchbarkeit des Verfahrens dargethan werden.

Das Wesen der Methode besteht in Folgendem. Entladet man einen Condensator durch eine Spirale von grossem Selbstinductionscoëfficienten und kleinem Widerstande, so geht die Entladung oscillatorisch vor sich; die Dauer der Oscillation ist bekanntlich bestimmt durch die Capacität des Condensators und durch den Selbstinductionscoëfficienten der Spirale. Die

Schwingungen sind gedämpft, hauptsächlich in Folge der Energieabsorption durch den Widerstand der Spirale. Legt man jedoch in das Innere der Spirale einen Eisendraht, so wird die Dämpfung durch den Energieverbrauch bei der Magnetisirung vergrössert. Aus den in beiden Fällen beobachteten Dämpfungsverhältnissen lässt sich der durch die Magnetisirung bedingte Energieaufwand angenähert berechnen, wenn man die Capacität des Condensators und das bei einer Maximalladung vorhandene Potential kennt.

Zur Aufnahme und Untersuchung der Schwingungscurven, respective der Ladungsmaxima eines Condensators diente eine Vorrichtung, welche von Hiecke[1] ersonnen und beschrieben wurde. Es ist dies ein Apparat, bei dem ein fallendes Gewicht zwei Contacte rasch, doch mit genau messbarer Zwischenzeit öffnet; ähnlich wie dies auch beim Pendel-Myographium von Helmholtz geschieht. Dieser Apparat, den ich fortan mit dem Namen »Fallapparat« bezeichnen will, eignet sich vortrefflich zur Untersuchung von oscillatorischen Condensatorentladungen, wovon die interessanten Beobachtungen Hiecke's (l. c.) einen deutlichen Beweis liefern. Daselbst ist auch eine ausführliche Beschreibung des Apparats gegeben.[2]

Zur Theorie der Versuche.

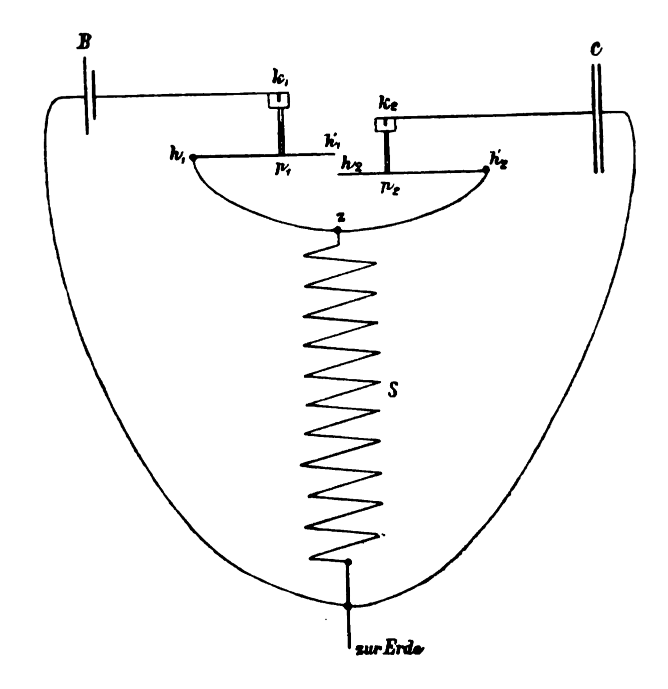
Zunächst soll eine kurze Erläuterung über die Schaltungs- und Beobachtungsweise mit dem Fallapparat gegeben werden. Die beiden Hebel $h_1 h'_1$ und $h_2 h'_2$ (Fig. 1), welche gegen die Stifte k_1 und k_2 drücken, bilden bei p_1 und p_2 die Contacte, welche durch ein fallendes Gewicht, das an die Enden h'_1 und h_2 der beiden Hebel aufschlägt, geöffnet werden. Contact p_2 ist fix, p_1 mittelst einer Mikrometerschraube in verticaler Richtung verschiebbar. B ist eine galvanische Batterie, C ein Condensator und S eine lange Drahtspirale. Von dem einen Pol der Batterie geht eine Leitung zum Stift k_1, von da durch den Contact und Hebel zu h_1, von da zu h'_2, welcher Punkt wieder über p_2 und k_2 mit der einen Belegung des Condensators

---

[1] Diese Sitzungsber., Bd. 96, Jahrg. 1887, S. 134.

[2] Der hier benützte Apparat wurde mit einigen Abänderungen im k. k. technologischen Gewerbemuseum in Wien neu angefertigt.

in Verbindung steht. An einer Stelle der Verbindung zwischen den beiden Contacthebeln, und zwar bei z, ist das eine Ende der Spirale angehängt; das zweite ist mit dem zweiten Pole der Batterie und mit der zweiten Condensatorbelegung leitend verbunden und zur Erde abgeleitet. Sind beide Contacte geschlossen, so fliesst ein Strom von der Batterie durch den Contact p_1 und durch die Spirale S zurück zur Batterie. Der Condensator ladet sich zum Potential, welches beim Punkte z



herrscht. Sobald p_1 aufgemacht wird, beginnt die Entladung des Condensators und sie dauert so lange, bis der Contact bei p_2 geöffnet wird. Nach dem Öffnen von p_2 verbleibt im Condensator ein Ladungsrest, der leicht bestimmt werden kann, indem man den Condensator durch ein Galvanometer entladet. Durch Verschieben des Contacts p_1 nach aufwärts wird die Zeit, während der sich der Condensator entladen kann, successive von 0 an vergrössert. — Untersucht man die jeweiligen Ladungsreste, so bekommt man eine genaue Kenntniss des Entladungsvorganges.

Die Formel für die Entladung eines Condensators (von der Capacität C, durch eine Spirale mit dem Selbstinductionscoëfficienten S und dem Widerstande R) haben bekanntlich schon Lord Kelvin und Kirchhoff aufgestellt. Es gilt für den Verlauf der Entladung die Differentialgleichung

$$\frac{d^2Q}{dt^2}+\frac{R}{S}\frac{dQ}{dt}+\frac{1}{CS}Q=0, \qquad 1)$$

wo Q die zur Zeit t im Condensator enthaltene Elektricitätsmenge bedeutet. Zur Zeit $t=0$ wird die Spirale von einem Strom durchflossen; es sind daher die Anfangsbedingungen[1]

$$t=0; \qquad Q=Q_0; \qquad \frac{dQ}{dt}=-\frac{Q_0}{CR}, \qquad 2)$$

woraus sich die Lösung

$$Q=Q_0e^{-\frac{\lambda t}{T}}\left[\cos\frac{\pi t}{T}+\frac{1}{\pi}\left(\lambda-\frac{T}{CR}\right)\sin\frac{\pi t}{T}\right] \qquad 3)$$

für die oscillatorische Entladung ergibt.

Dabei ist bekanntlich

$$T=\frac{\pi}{\sqrt{\frac{1}{CS}-\frac{R^2}{4S^2}}} \quad \text{und} \quad \lambda=\frac{R}{2S}T. \qquad 4)$$

Schon Hiecke hat auf den Vortheil der hier geübten Schaltungsweise aufmerksam gemacht, der darin liegt, dass beim Öffnen des Contacts p_1 kein Funke auftreten kann, weil der Batteriestrom im ersten Moment mit unverminderter Stärke in die Condensatorentladung übergeht. Eine zweite Eigenthümlichkeit besteht darin, dass die Entladungscurve mit ihrem Wendepunkt einsetzt, wie man sich leicht überzeugt, wenn man die Anfangsbedingungen in die Differentialgleichung einsetzt. — Es ist dann

$$\frac{d^2Q}{dt^2}=0.$$

[1] Vide: Hiecke (l. c.).

Die erste Maximalladung wird daher bei schwacher Dämpfung bedeutend grösser ausfallen, als die Anfangsladung. Dass es so sein muss, folgt übrigens auch aus folgender Überlegung. Im Momente des Öffnens des Contactes p_1, also zu Beginn der Entladung, sitzt ein Theil der Energie im Condensator als Ladung; dieser Theil ist gleich $\frac{1}{2} V_0 Q_0$, wenn wir mit V_0 das Anfangspotential bezeichnen. Ein zweiter Theil der Energie ist in der Spirale als Strom vorhanden, dieser ist gleich $\frac{1}{2} SJ_0^2$, wo J_0 die Anfangsstromstärke bedeutet. Im Verlaufe einer gewissen Zeit nach Beginn der Entladung ist die Spirale stromlos; da nun bei geringer Dämpfung, wie sie hier vorausgesetzt wird, nicht die ganze Energie durch die Widerstände oder andere Factoren absorbirt worden sein kann, so muss sie sich jetzt als Ladung des Condensators zeigen. Weil aber gewöhnlich der zweite Theil den ersten bedeutend überragt, so wird beim ersten Maximum das Ladungspotential bedeutend grösser sein, als zu Beginn der Entladung.[1]

---

[1] Das erste Maximum tritt ein zur Zeit

$$\vartheta = \frac{T}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\pi T}{\lambda T - (\pi^2 + \lambda^2) CR}. \qquad 5)$$

Setzen wir

$$\sigma = \frac{\pi T}{\lambda T - (\pi^2 + \lambda^2) CR}$$

und bezeichnen die erste Maximalladung mit Q_μ, so ist

$$Q_\mu = -Q_0 e^{-\frac{\lambda}{\pi} \operatorname{arctg} \sigma} \left[\frac{\pi + \left(\lambda - \frac{T}{CR}\right)\sigma}{\pi \sqrt{1+\sigma^2}} \right]. \qquad 6)$$

Bei geringer Dämpfung kann man übrigens auch mit genügender Genauigkeit

$$Q_\mu = -Q_0 e^{-\frac{\lambda}{\pi} \operatorname{arctg} \sigma} \cdot \frac{T}{\pi CR}$$

schreiben.

Das erste Maximum ist also entgegengesetzt der Anfangsladung und umso grösser, je grösser die Schwingungsdauer und je kleiner die Capacität und der Widerstand.

Zur Zeit der Ladungsmaxima sitzt also die ganze Energie im Condensator, da die Leitung stromlos ist. Bezeichnen wir die den Maximis entsprechenden Potentiale mit V_1, V_2, V_3 u. s. w., so sind die entsprechenden Energiequanta respective

$$\frac{1}{2} V_1^2 C; \qquad \frac{1}{2} V_2^2 C; \qquad \frac{1}{2} V_3^2 C \text{ u. s. w.}$$

Der Verbrauch an Energie W vom ersten Maximum bis zum dritten ist also

$$W = \frac{1}{2} C(V_1^2 - V_3^2),$$

und zwar direct in Erg. ausgedrückt, wenn man das Potential und die Capacität in absoluten Einheiten misst. Bezeichnen wir mit k das Dämpfungsverhältniss, also

$$k = \frac{V_1}{V_3}, \tag{7}$$

so ist auch

$$W = \frac{1}{2} C V_1^2 \left(\frac{k^2 - 1}{k}\right). \tag{8}$$

In einem concreten Beispiele war

$C = 2$ Mikrof.; $R = 3 \cdot 1\ \Omega$; $\lambda = 0 \cdot 1035$; $T = 0 \cdot 000492$ Sec.

Daraus rechnet sich

$$Q_\mu = -23 \cdot 95\ Q_0.$$

Die Beobachtung ergab

$$Q_\mu = -23 \cdot 7\ Q_0.$$

Bezeichnen wir das Ladungspotential des ersten Maximums mit V_1, so muss für diesen Moment, wo die Spirale stromlos ist, folgende Relation gelten

$$\frac{1}{2} V_0^2 C + \frac{1}{2} S J_0^2 = \frac{1}{2} V_1^2 C + A,$$

wo A die in der Zeit vom Beginn der Entladung bis zum ersten Maximum absorbirte Energie darstellt.

In einem speciellen Falle war $C = 2$ Mf., $V_0 = 8 \cdot 3$ Volt, $J_0 = 2 \cdot 7$ Ampère. — Die Beobachtung ergab $V_1 = 198$ Volt. Für $A = 0$ hätte man $V_1 = 214$ Volt beobachten müssen.

Befindet sich in der Spirale kein Eisendraht oder irgend ein anderer Leiter, so wird diese Energie lediglich durch die Widerstände der Leitung absorbirt, wenn wir von der sehr kleinen elektromagnetischen Ausstrahlung absehen.

Legen wir nun in die Spirale einen Eisendraht, so wird ein Theil der elektrischen Energie bei der Magnetisirung verbraucht. Diesen Antheil wollen wir mit W_m bezeichnen, während der durch die Widerstände bedingte Verlust W_w heissen soll. Es ist also

$$W = W_w + W_m .$$

Sind die entsprechenden Potentiale im Falle des eingelegten Eisendrahtes V_1', respective V_3', so ist

$$W_w + W_m = \frac{1}{2} C (V_1'^2 - V_3'^2) .$$

Aus dieser Summe lässt sich W_m nur angenähert berechnen. Es sei W_m klein gegen W_w, dann wollen wir annehmen, der Energieverbrauch gehe so vor sich, dass zuerst W_w und dann erst W_m consumirt wird. Unter diesen Umständen bekommen wir für W_m einen Werth, der sicher etwas zu klein ist. Wir erhalten[1] so

$$W_m = \frac{1}{2} C \left(\frac{V_1'^2}{k^2} - V_3'^2 \right) . \tag{9}$$

---

[1] Die Schwingungen des Condensators sind gedämpfte Pendelschwingungen, so lange der Selbstinductionscoëfficient eine constante Grösse ist. Sobald jedoch in die Spirale ein magnetisirbarer Draht gelegt wird, ist diese Bedingung nicht mehr erfüllt, die Schwingungen werden deformirt. Die Berechnung der Schwingungen in diesem Falle, sowie die exacte Berechnung von W_m würde wahrscheinlich auf grosse Schwierigkeiten stossen, da die Stromstärke und die Magnetisirungsintensität in keiner einfachen Weise zusammenhängen. Ich habe daher nur sehr dünne Drähte angewendet, welche die Schwingungen beinahe gar nicht deformirten. In der Formel 9) ist k eigentlich nicht identisch mit dem k der Formel 7), da durch das Einlegen des Drahtes die Schwingungsdauer, respective der Coëfficient der Selbstinduction vergrössert wird. Dieser Umstand, dass ich k, wie es sich ohne eingelegten Draht ergibt, zur Berechnung von W_m verwendet habe, bedingt ebenfalls einen zu kleinen Werth für diese Grösse. Eine durch diesen, sowie den schon oben angeführten Umstand bedingte Correctur habe ich vorläufig nicht angebracht, da eine solche den qualitativen Charakter des Resultates nicht wesentlich beeinflusst.

Vom 1. bis zum 3. Ladungsmaximum würde der Eisendraht gerade einen vollen Magnetisirungscyclus durchmachen, falls die Schwingungen nicht gedämpft wären. Nimmt man jedoch die Anfangsstromstärke entsprechend hoch und gibt der Spirale sehr viele Windungen pro Längeneinheit, so dass die erzeugten Maximalfeldstärken gross ausfallen, dann hat es auf den durch die Hysteresis verbrauchten Theil der Energie keinen Einfluss, wenn auch der Cyclus bezüglich der Feldstärken nicht vollkommen geschlossen ist.

Die Apparate und die Versuchsanordnung.

In ähnlicher Weise wie bei dem von Hiecke beschriebenen Apparate, waren auch hier zwei Hilfsvorrichtungen angebracht; eine um den Batteriestrom gleichzeitig mit dem Loslassen des Gewichtes zu schliessen,[1] und eine zweite, welche den Condensator gleich nach dem Öffnen des Contactes p_2 mit einem Galvanometer in leitende Verbindung setzte. Aus den bei der Entladung beobachteten Galvanometerausschlägen konnte das Ladungspotential leicht bestimmt werden, indem man ganz einfach zum Vergleiche den Condensator mit einer Kette von bekannter elektromotorischer Kraft lud und direct durch das Galvanometer entlud.

Die Schraube, mittelst welcher der Contact p_1 in verticaler Richtung verschoben wird, hat eine Ganghöhe von 0·692 *mm*, die Trommel ist in 100 Theile getheilt. Der Werth einer Trommelumdrehung im Zeitmass wurde mittelst eines Condensators von bekannter Capacität und eines grossen Widerstandes (ohne Selbstinduction), durch welchen sich der Condensator nur aperiodisch entladen konnte, bestimmt. Gleichzeitig konnte dieser Werth auch aus der Fallhöhe (ungefähr 1 M.) berechnet werden. Für die ersten zehn Trommelumdrehungen vom Anfangspunkte an (wo nämlich die beiden Contacte gleichzeitig geöffnet wurden, nahe bei Theilstrich 11) ergab die Beobachtung einen Werth

$$= 0 \cdot 001644,$$

---

[1] Da die Ströme ziemlich stark gehalten wurden, so durften sie die Spirale nicht längere Zeit durchfliessen, ohne sie beträchtlich zu erwärmen. In diesem Falle geschah der Stromschluss ungefähr $^1/_2$ Sec. vor dem Öffnen des Contacts p.

daher im Mittel für eine Trommelumdrehung

$$= 0\cdot0001644$$

$$\text{Berechnet} = 0\cdot0001614 \text{ Sec.}$$

Die beiden Zahlen sind in guter Übereinstimmung, wenn man bedenkt, dass die zweite Zahl etwas kleiner ausfallen muss, da bei der Berechnung auf den Luftwiderstand und die Reibung längs des Führungsdrahtes, an welchem das Gewicht fiel, keine Rücksicht genommen wurde.

Die Condensatoren waren Glimmercondensatoren; es standen zwei Stücke in Verwendung, à 1 Mikrofarad Capacität.

Die Entladungsspiralen hatten ganz bestimmten Bedingungen zu genügen und mussten dementsprechend hergestellt werden. Sie mussten erstens ziemlich lang sein, weil sie zugleich als Magnetisirungsrollen dienten, sodann mussten sie zweitens eine grosse Zahl von Windungen pro Längeneinheit haben und drittens durfte ihr Widerstand wegen der Dämpfung der Oscillationen nicht gross sein. Nach mehreren Versuchen, die nicht befriedigten, wickelte ich mir endlich zwei Rollen, mit denen ich die weiter unten beschriebenen Versuche ausführte. Eine nicht unbedeutende Schwierigkeit bei der Herstellung der Spiralen lag auch darin, dass sie nicht auf Metallröhren gewickelt werden durften; diese hätten ja in Folge der Foucault'schen Ströme einen Theil der Energie absorbirt und überhaupt den Verlauf der Schwingungen gestört. Glasröhren konnten wohl auch nicht verwendet werden. Schliesslich benützte ich dazu verschiedene Pfeifenrohre, deren Bohrung ich mittelst eines glühenden Eisendrahtes ein wenig regulirte.

Es wurden zwei Rollen verwendet:

1. Rolle f — 1 *mm* dicker, doppelt mit Seide übersponnener Draht. Länge der Rolle 55·5 *cm*. Innerer Durchmesser der Windungen 1·7 *cm*, äusserer 2·9 *cm*. Zahl der Windungen pro Längeneinheit 48·26, Widerstand 4·05 Ω. Selbstinductionscoëfficient $5\cdot82 \times 10^6$ abs. E.
2. Rolle g — 1·5 *mm* dicker, doppelt mit Wolle übersponnener Draht. Länge 58 *cm*. Innerer Durchmesser 1·6, äusserer 5·5 *cm*. Zahl der Windungen pro Längenein-

heit 50·4, Widerstand 3·05 Ω. Selbstinductionscoëfficient $12 \cdot 6 \times 10^6$ abs. E.

Es sei schon hier bemerkt, dass für weitere Untersuchungen auch diese Rollen nicht gut genug sein sollen; es scheint die Isolation der einzelnen Windungen gegeneinander nicht genügend zu sein, überdies ist auch das Verhältniss des Widerstandes zum Coëfficienten der Selbstinduction noch nicht das günstigste. Beide Umstände haben eine zu grosse Dämpfung der Schwingungen durch die Rolle selbst zur Folge. Die Energieabsorption in der Rolle soll aber möglichst klein sein, damit der Aufwand für die Magnetisirung die Hauptrolle spielt.

Es mögen hier zwei Beispiele angeführt werden, um die Übereinstimmung zwischen der Beobachtung und Berechnung zu zeigen. Unter der Schwingungsdauer soll fortan die sogenannte doppelte Dauer oder $T = 2\pi\sqrt{CS}$ angeführt werden, weil sie gerade der Dauer eines Magnetisirungscyclus entspricht. Demgemäss ist auch λ ausgedrückt. Es berechnet sich für

1. $C = 2$ Mikrof.;[1] Rolle g; $T = 0 \cdot 000985$ Sec.; $\lambda = 0 \cdot 119$.

   Die Beobachtung ergab:

   $T = 5 \cdot 98$ Tr.-U. $= 0 \cdot 000983$ Sec.; $\lambda = 0 \cdot 207$.

2. $C = 1$ Mikrof.; Rolle f; $T = 0 \cdot 000473$ Sec.; $\lambda = 0 \cdot 165$.

   Beobachtet:

   $T = 2 \cdot 85$ Tr.-U. $= 0 \cdot 000468$ Sec.; $\lambda = 0 \cdot 223$.

Wie man sieht, stimmen die beobachteten und berechneten Werthe der Schwingungsdauern gut überein; für die log. Decr. ist dies nicht der Fall; hier sind die berechneten Werthe stets kleiner als die beobachteten. Die Ursache liegt zum Theil im Condensator (dielektrische Hysteresis, mangelhafte Isolation), zum Theile in der Rolle, dann aber auch darin, dass für diese Schwingungen der Widerstand thatsächlich grösser ist, als er hier angenommen wurde.

---

[1] Die beiden Condensatoren hatten zusammen nicht genau zwei, sondern nur 1·98 Mikrof.

Der Vorgang bei der Beobachtung war nun folgender: Zuerst bestimmte man den Galvanometerausschlag, den die directe Entladung des zu einem bekannten Potential geladenen Condensators gab. Hiebei war der bewegliche Contact p_1 so gestellt, dass er entweder gleichzeitig oder später als p_2 geöffnet wurde. Hierauf wurde der bewegliche Contact soweit gehoben, dass die Entladung des Condensators in der Zwischenzeit nahe bis zum 1. Maximum vor sich gehen konnte. Von da an geschah die Verschiebung des Contacts von fünf zu fünf Trommelstrichen[1] mit jedesmaliger Untersuchung des Ladungsrestes. Es wurde, wie gesagt, angefangen mit einer Stellung, welche sicher noch nicht dem 1. Maximum entsprach und fortgesetzt bis zu einer Trommelstellung, bei welcher dieses Maximum sicher schon überschritten war. Das gleiche Verfahren diente zur Aufsuchung und Bestimmung des 3. Maximums.

Die Beobachtung in jeder Stellung setzte sich wieder aus zwei zusammen, entsprechend dem Polwechsel der Ladungsbatterie. Die Beobachtungen bei nicht eingelegtem Eisendraht ergaben das Dämpfungsverhältniss, mittelst dessen sodann aus den Beobachtungen mit eingelegtem Draht der Energieverbrauch berechnet werden konnte. Für jedes Probestück wurden mehrere Beobachtungsreihen gemacht. Es möge nachfolgend ein Beispiel angeführt werden.

2 Mf.; Rolle g; Ladungsbatt. 3 Acc. = 6·33 Volt. In der Spirale ein Bündel von 12 dünnen Drähten.

1. Maximum.

Trommelstellung	Galvanometerausschlag	Mittel
13·25	499·5, 491·0, 490·8	493·8
13·30	499·8, 493·1, 492·8	495·2
13·35	499·8, 495·1, 492·4	495·8
13·40	497·0, 489·0, 493·4	493·1

Das Maximum liegt also bei 13·35. 2 Mf. durch 3 Acc. geladen und direct entladen, gaben am Galvanometer einen Ausschlag von 20·3 Scth. Der Galvanometerausschlag von 495·8 Scth (corr. 485·1) bedeutet daher eine Ladung des Condensators auf 151·5 Volt. Die entsprechende Energie ist 229500 Erg.

[1] Der Trommelumfang ist in hundert Striche getheilt.

Ich habe mich bei den vorliegenden Beobachtungen darauf beschränkt, die Maxima aufzusuchen, was für unseren Zweck vollkommen genügt. Unter den hier obwaltenden Umständen ist es aber auch nicht möglich, die Schwingungscurve ganz aufzunehmen.

Um nämlich starke magnetische Felder in der Spirale zu erzeugen, war es nothwendig, die Ladungsbatterie ziemlich kräftig zu nehmen; überdies haben die Spiralen einen grossen Selbstinductionscoëfficienten. Alle diese Umstände bewirken beim Öffnen des Contacts p_2 Funken, welche die Beobachtungen stören. Die Funken bleiben nur dann aus oder sind sehr unbedeutend, wenn die Oscillation nahe bei einem Ladungsmaximum unterbrochen wird, wo die ganze Energie im Condensator sitzt und die Leitung stromlos ist. Bei schwächeren Potentialen gelingt es jedoch sehr gut, die Entladung des Condensators in allen Phasen zu verfolgen. Für noch höhere Spannungen als solche, wie sie hier benützt wurden, schien die Isolation der Rollen ungenügend zu sein. Es wird nothwendig sein, bei weiteren Versuchen der Isolation der Spiralenwindungen eine grössere Aufmerksamkeit zu schenken.

Die Beobachtungsresultate.

Nachdem ich behufs Orientirung viele Versuche mit verschiedenen Eisendrahtstücken gemacht hatte, wurden schliesslich zu den hier beschriebenen Messungen folgende Probestücke verwendet:

1. Ein Bündel aus 12 feinen ausgeglühten Eisendrähten (Blumendraht). Länge des Bündels 48 *cm*. Gewicht 1·405 *g*. Drahtdicke 0·02 *cm*.[1]
2. Ein Bündel aus 22 Drähten.[2] Gewicht 2·575 *g*. Sonst wie bei 1).
3. Ein ausgeglühter Eisendraht, 48 *cm* lang. Gewicht 0·706 *g*. Dicke 0·049 *cm*.

[1] Alle Versuchsdrähte waren in Glasröhren eingeschlossen.

[2] Die Drähte des Bündels waren ziemlich locker nebeneinandergelagert und berührten sich nur in wenigen Punkten. Um beim Magnetisiren Bewegungen auszuschliessen, habe ich das Glasrohr mit Paraffin ausgegossen.

4. Ein ausgeglühter Eisendraht, 16·3 *cm* lang. Gewicht 0·599 *g*. Dicke 0·077 *cm*.
5. Ein Bündel aus 4 Stahldrähten, 48 *cm* lang. Gewicht 1·374 *g*. Dicke 0·033 *cm*.
6. Ein Bündel aus 3 Nickeldrähten, 48 *cm* lang, Gewicht 2·454 *g*. Dicke 0·050 *cm*.

Die Beobachtungen wurden bei zwei Combinationen ausgeführt. Bei der ersten (eingetragen unter *A*) war die Dauer der Schwingung oder des Cyclus = 0·000983 oder ungefähr $\frac{1}{1000}$ Sec., bei der zweiten (unter *B*) betrug sie 0·000468 oder ungefähr $\frac{1}{2100}$ Sec.

Nachfolgend bezeichnet:

V das Potential der Condensatorladung in Volt.

α den Galvanometerausschlag, welcher der directen Entladung entspricht.[1]

β den beim Maximum beobachteten Galvanometerausschlag.

Tr.-St. die Trommelstellung, bei welcher das Maximum gefunden wurde.

L.-B. die Ladungsbatterie.

W_m den Energieverbrauch für das eingelegte Probestück.

W_g für die Gewichtseinheit, und

W_{vol} für die Volumseinheit.

A. 2 Mf. Rolle *g*. Dauer des Cyclus = $\frac{1}{1000}$ Sec.

a)

Bündel mit 12 Drähten; L.-B. 3 Acc. $V = 6·33$. $\alpha = 20·3$.

	1. Maximum				3. Maximum			
	Tr.-St.	β	V	Erg.	Tr.-St.	β	V	Erg.
Ohne	13·35	484·2			19·25	392·5		
Mit	13·35	485·1	151·5	229500	19·55	382·8	119·5	142900

[1] Vor dem Galvanometer war ein Nebenschluss, dessen Grösse je nach Bedarf regulirt wurde.

Daraus folgt

$$W_m = 6900, \qquad W_g = 4910, \qquad W_{vol} = 38540 \text{ Erg.}$$

Beim 1. Maximum ist der magnetisirende Strom Null, dann wächst er an bis zu einer Stärke J_1, geht wieder auf Null zurück, wechselt das Zeichen, erreicht sodann eine maximale Stärke $-J_2$ und fällt beim 3. Maximum wieder auf Null. Die maximalen Feldstärken in der Spule sind daher $H_1 = 4\pi N J_1$ und $H_2 = -4\pi N J_2$, wo N die Anzahl der Windungen pro 1 *cm* bedeutet. J_1 und J_2 lassen sich aus dem Potential der L.-B., aus dem Widerstande des Kreises und aus dem Dämpfungsverhältnisse leicht bestimmen.

Es ist in diesem Falle

$$H_1 = +116 \cdot 4, \qquad H_2 = -105 \cdot 1.$$

b)

Bündel mit 22 Drähten; L.-B. 3 Acc. $V = 6 \cdot 33$ Volt. $\alpha = 20 \cdot 3$.

	1. Maximum				3. Maximum			
	Tr.-St.	β	V	Erg.	Tr.-St.	β	V	Erg.
Ohne	13·35	484·3			19·30	392·2		
Mit	13·35	488·3	152·0	231000	19·80	378·1	117·7	138500

$$W_m = 13000, \quad W_g = 5050, \quad W_{vol} = 39640 \text{ Erg.}$$

$$H_1 = +116 \cdot 4, \qquad H_2 = -105 \cdot 1.$$

c)

Bündel mit 22 Drähten; L.-B. 4 Acc. $V = 8 \cdot 33$ Volt. $\alpha = 19 \cdot 0$.

	1. Maximum				3. Maximum			
	Tr.-St.	β	V	Erg.	Tr.-St.	β	V	Erg.
Ohne	13·30	446·9			19·30	363·0		
Mit	13·30	449·6	197·1	388500	19·70	354·2	155·3	241200

$$W_m = 15200, \quad W_g = 5900, \quad W_{vol} = 46300 \text{ Erg.}$$

$$H_1 = +153 \cdot 0, \qquad H_2 = -138 \cdot 3.$$

B. 1 Mf. Rolle *f.* Dauer des Cyclus $= \frac{1}{2100}$ Sec.

a)

Bündel mit 22 Drähten. L.-B. 5 Acc. $V = 10\cdot45$ Volt. $\alpha = 27\cdot5$.

	1. Maximum				3. Maximum			
	Tr.-St.	β	V	Erg.	Tr.-St.	β	V	Erg.
Ohne	12·53	449·5			15·38	360·4		
Mit......	12·56	460·8	175·1	153300	15·86	336·8	128·0	81900

$$W_m = 16600, \quad W'_g = 6450, \quad W'_{vol} = 50600 \text{ Erg.}$$

$$H_1 = +138\cdot2, \qquad H_2 = -123\cdot6.$$

b)

Eisendraht, 48 *cm* lang. L.-B. 5 Acc. $V = 10\cdot45$ Volt. $\alpha = 27\cdot5$.

	1. Maximum				3. Maximum			
	Tr.-St.	β	V	Erg.	Tr.-St.	β	V	Erg.
Ohne	12·55	460·4			15·40	367·9		
Mit......	12·55	454·5	172·7	149100	15·45	333·1	126·8	80400

$$W_m = 14870, \quad W_g = 21060, \quad W_{vol} = 165300 \text{ Erg.}$$

$$H_1 = +138\cdot2, \qquad H_2 = -123\cdot6.$$

c)

Eisendraht, 16·3 *cm* lang. L.-B. 5 Acc. $V = 10\cdot45$ Volt. $\alpha = 27\cdot5$.

	1. Maximum				3. Maximum			
	Tr.-St.	β	V	Erg.	Tr.-St.	β	V	Erg.
Ohne	12·20	440·2			15·25	354·3		
Mit......	12·35	444·3	168·8	142500	15·35	317·7	120·7	72800

$$W_m = 19400, \quad W'_g = 32400, \quad W_{vol} = 254300 \text{ Erg.}$$

$$H_1 = +138\cdot2, \qquad H_2 = -123\cdot6.$$

d)

Bündel von 4 Stahldrähten. L.-B. 5 Acc. $V = 10 \cdot 45$ Volt. $\alpha = 26 \cdot 8$.

	1. Maximum				3. Maximum			
	Tr.-St.	β	V	Erg.	Tr.-St.	β	V	Erg.
Ohne	12·55	437·3			15·4	355·4		
Mit.	12·55	449·5	175·3	153600	15·55	317·1	123·6	76400

$$W_m = 25100, \quad W_g = 18300, \quad W_{vol} = 143700 \text{ Erg.}$$

$$H_1 = +138 \cdot 2, \quad H_2 = -123 \cdot 6.$$

e)

Drei Nickeldrähte. L.-B. 5 Acc. $V = 10 \cdot 45$ Volt. $\alpha = 27 \cdot 5$.

	1. Maximum				3. Maximum			
	Tr.-St.	β	V	Erg.	Tr.-St.	β	V	Erg.
Ohne	12·55	460·4			15·40	367·9		
Mit......	12·55	461·3	175·3	153700	15·45	352·0	133 8	89500

$$W_m = 8700, \quad W_g = 3550, \quad W_{vol} = 31600 \text{ Erg.}$$

$$H_1 = +138 \cdot 2, \quad H_2 = -123 \cdot 6.$$

Die Foucault'schen Ströme.

Der Energieverbrauch W_m setzt sich aus zwei Theilen zusammen. Der eine, W_h, entspricht dem durch die Hysteresis bedingten Arbeitsaufwande; der andere, W_f, entfällt auf die Foucault'schen Ströme. Es handelt sich nun darum, die beiden Theile zu trennen. W_f lässt sich angenähert wie folgt berechnen.

Es sei ρ der Radius eines innerhalb des Drahtes liegenden und mit der Axe desselben concentrischen Ringes; $d\rho$ die Dicke dieses Ringes und seine Länge in der Richtung der Axe $= 1$. Dann ist die elektromotorische Kraft e, welche in dem Ringe bei einer Änderung der Induction B erzeugt wird.

$$e = \rho^2 \pi \frac{dB}{dt}.$$

Der Widerstand w dieses Ringes ist

$$w = \frac{2\rho\pi\sigma}{d\rho},$$

wenn wir mit σ den specifischen Widerstand bezeichnen. Es ist also die inducirte Stromstärke

$$i = \frac{e}{w} = \frac{\rho d\rho}{2\sigma}\frac{dB}{dt}$$

und die in der Zeit dt absorbirte Energie

$$dW_f = i^2 w dt = \frac{\pi\rho^3 d\rho}{2\sigma}\left(\frac{dB}{dt}\right)^2 dt$$

und

$$W_f = \frac{\pi}{2\sigma}\frac{1}{4}r^4\int_0^T\left(\frac{dB}{dt}\right)^2 dt$$

für einen Draht vom Radius r und für eine volle Schwingungsdauer T.

Um die Integration auszuführen, muss man $\frac{dB}{dt}$ kennen. Diese Grösse ist nun allerdings in Wirklichkeit durch keine einfache Function gegeben. In erster Annäherung können wir aber in unserem Falle

$$B = B_m \sin\frac{2\pi t}{T} \quad \text{und} \quad \frac{dB}{dt} = \frac{2\pi}{T}B_m \cos\frac{2\pi t}{T}$$

setzen, wo B_m die erreichte Maximalinduction bedeutet. Unter Zugrundelegung dieser Annahme bekommen wir

$$W_f = \frac{\pi^3 r^4}{4\sigma T}B_m^2 \tag{10}$$

für die Längeneinheit und

$$W_f = \frac{\pi^2 r^2}{4\sigma T}B_m^2 \tag{11}$$

für die Volumenseinheit.

Die auf Foucault'sche Ströme verwendete Energie wächst also bei gleicher Länge der Drähte mit der 4. Potenz des Radius, und ist dem Quadrate der Induction direct und der Dauer des Cyclus verkehrt proportional.

Discussion der Resultate.

Die nachfolgende Tabelle I enthält die Resultate über den Energieverbrauch in übersichtlicher Weise zusammengestellt.

Tabelle I.

Dauer des Cyclus	Grenzen des Cyclus	Drahtsorte	Drahtdicke cm	Verbrauchte Energie in Erg. für 1 g	Verbrauchte Energie in Erg. für 1 cm^3
1 : 2100 Sec.	$H_1 = +138 \cdot 2$ $H_2 = -123 \cdot 6$	Weiches Eisen	0·020	6450	50600
		Weiches Eisen	0·049	21100	165000
		Weiches Eisen	0·077	32400	254000
		Stahl	0·033	18300	144000
		Nickel	0·050	3550	31600
1 : 1000 Sec.	$H_1 = +116 \cdot 4$ $H_2 = -105 \cdot 1$	Weiches Eisen	0·020	4900	38500
				5050	39600
	$H_1 = +153 \cdot 0$ $H_2 = -138 \cdot 3$			5900	46300

Die für verschiedene Drahtdicken beim weichen Eisen erhaltenen Zahlen zeigen, dass bei dieser kurzen Dauer des Cyclus, selbst bei verhältnissmässig dünnen Drähten, der Energieverbrauch hauptsächlich durch die Foucault'schen Ströme beherrscht wird, denn der Theil, welcher durch die Hysteresis bedingt ist, soll ja von der Drahtdicke unabhängig sein.[1]

Die oben für den Energieverbrauch erhaltenen Zahlen setzen sich also aus zwei Werthe zusammen; aus dem von der Drahtdicke unabhängigen Hysteresisverlust W_h und aus dem Energieaufwand für die Foucault'schen Ströme W_f.

[1] Die Elektrotechniker benützen bei der Construction ihrer Wechselstromtransformatoren eine Eisenblechdicke von ungefähr 0·3 *mm* um den Energieverbrauch durch die Foucault'schen Ströme beinahe ganz zu unterdrücken.

Beziehen wir beide auf die Volumenseinheit, so ist der zweite Theil gemäss Formel 11) proportional dem Quadrate des Radius.

Wir können also schreiben:

$$W_m = W_h + W_f r^2, \qquad 12)$$

wobei sodann W_f den Energieverbrauch der Foucault'schen Ströme für die Volumenseinheit eines Drahtes vom Radius 1 bezeichnet. Die Beobachtungen mit verschieden dicken Drähten geben uns also ein Mittel an die Hand, die beiden Theile zu trennen und zugleich die Formel 11) zu controliren. Wir bekommen für das weiche Eisen folgende Gleichungen:

$$50600 = W_h + (0 \cdot 010)^2 W_f \qquad \alpha)$$

$$165000 = W_h + (0 \cdot 0245)^2 W_f \qquad \beta)$$

$$254000 = W_h + (0 \cdot 0385)^2 W_f \qquad \gamma)$$

Wir bekommen daraus W_f für einen Draht vom Volumen 1 cm^3 und vom Radius 1 cm.

Es folgt aus

α und β . . . . . . $W_f = 2 \cdot 3 \times 10^8$ Erg.

β und γ . . . . . . $1 \cdot 0 \times 10^8$ Erg.

Für die Berechnung von W_f nach der Formel 11) können wir folgende Werthe benützen:

$$B = 19000; \; \sigma = 10700; \; T = 0 \cdot 000468 \text{ Sec.}$$

und finden

$$W_f = 1 \cdot 78 \times 10^8 \text{ Erg.}$$

Wie man sieht, stimmen weder die beobachteten Werthe untereinander, noch harmoniren sie mit dem berechneten. Die Erklärung für diese Thatsache kann in verschiedenen Umständen gesucht werden. Die Drahtsorten sind hinsichtlich der Hysteresis vielleicht individuell verschieden; sodann ist der dritte und dickste Drath viel kürzer als die beiden anderen. Der berechnete Werth von W_f fällt zwar zwischen die beiden Beobachtungen, doch kann man eigentlich nur sagen, dass

die Versuche mit der Formel 11) der Grössenordnung nach übereinstimmen. Messungen mit durchaus gleichmässigen Drähten verschiedener Dicke werden wohl zeigen, inwieweit die Theorie mit der Praxis harmonirt; dann aber wird man wahrscheinlich auch die Foucault'schen Ströme mit Erfolg zum Studium der Magnetisirungs-Vorgänge heranziehen können.

Immerhin kann man vorläufig die Formel 11) dort anwenden, wo die Hysteresisverluste den Energieaufwand für die Foucault'schen Ströme bedeutend überwiegen, um den ersten Theil für sich zu finden. Unter Zugrundelegung dieser Formel ergibt sich für einen Draht von der Dicke 0·02 *cm* innerhalb der beim Cyclus vorhandenen Maximalstärken $W_f = 17800$ Erg. Es wurde $W_m = 50600$ Erg. gefunden, daher entfällt auf die Hysteresis der Verbrauch $W_h = 32800$ Erg., bei einer Dauer des Cyclus = 1 : 2100 Sec. Bestimmungen des Inhalts der Hysteresisschleifen, welche bei einer früheren Gelegenheit, allerdings nicht mit diesen, aber doch mit Drähten gleicher Provenienz gemacht wurden, ergaben innerhalb derselben Feldgrenzen einen Verlust von 17000 bis 18000 Erg. Demnach scheint der Energieverbrauch durch die Hysteresis für das weiche Eisen bei dieser kurzen Dauer des Cyclus bedeutend grösser zu sein, als der bei langsamer cyclischer Magnetisirung gefundene.

Bei der Berechnung von W_f für die Stahldrähte müssen wir berücksichtigen, dass die Induction in hohen Feldstärken nahezu jene des Eisens erreicht. Aus dem Vergleich der Magnetisirungscurven, die mit ähnlichen Stahlsorten aufgenommen wurden, wäre für unsere Rechnung etwa $B = 18000$ zu nehmen.

Der spec. Widerstand dieser Stahlsorte wurde gleich 16900 abs. E. gefunden; daraus folgt für eine Drahtdicke von 0·033 *cm*

$$W_f = 27500 \text{ Erg.}$$

Beobachtet wurde $W_m = 143700$ Erg.; daher

$$W_h = 116200 \text{ Erg.}$$

Ewing[1] gibt für Klaviersaitendraht Werthe von W_h, die zwischen 94000 und 117000 Erg. liegen. Demnach scheinen die Hysteresisverluste für Stahl auch bei diesen schnellen Schwingungen nicht grösser zu sein als bei langsamen.

Beim Nickeldraht wurde $\sigma = 10200$ abs. E. beobachtet. Ebenso ergaben Messungen bei einer früheren Gelegenheit für die hier verwendete Drahtsorte innerhalb der hier in Betracht kommenden Feldgrenzen eine maximale Induction von 5500 Einh. Demzufolge berechnet sich $W_f = 9700$ Ergs.

Gefunden wurde $W_m = 31600$; daher ist

$$W_h = 21900 \text{ Erg.}$$

Für dieselbe Drahtsorte ergaben Messungen der Hysteresisschleifen

$$W_h = 16600 \text{ Erg.}$$

Dieser Werth ist zwar kleiner wie der obige, doch kann man mit Rücksicht auf die möglichen Beobachtungsfehler nur sagen, dass der Energieverbrauch bei der Magnetisirung des Nickels durch elektrische Oscillationen von der hier vorhandenen Dauer nicht gerade wesentlich grösser ist, als der aus den Hysteresisschleifen berechnete. Schliesslich wollen wir noch jene Werthe betrachten, welche bei der Cyclusdauer von $\frac{1}{1000}$ Sec. erhalten wurden. Wir haben da zwei Werthe, die verschiedenen Feldgrenzen entsprechen. Die Feldgrenzen sind in beiden Fällen ziemlich hoch, wir können daher zur Berechnung von W_f dieselben Daten benützen wie im ersten Falle, nur ist jetzt $T = 0 \cdot 000983$ Sec. zu setzen. — Es folgt $W_f = 8320$ Erg. und daraus

$$W_p = 38000 \text{ Erg.}$$

für die Grenzen $H_1 = +153 \cdot 0$; $H_2 = -138 \cdot 3$ und

$$W_p = 31300 \text{ Erg.}$$

für die Grenzen $H_1 = +116 \cdot 4$; $H_2 = -105 \cdot 1$.

[1] Ewing, Magnetische Induction in Eisen und verwandten Metallen. S. 103.

Es ist auffallend, dass der Energieverbrauch durch die Hysteresis bei dieser Cyclusdauer beinahe ebenso gross ist wie bei der vorigen. Es mag die richtige Thatsche zum Theile durch Beobachtungsfehler verdeckt sein, doch auch aus diesen Werthen geht hervor, dass die Hysteresisverluste für das weiche Eisen bei schnellen Schwingungen von 1000 bis 2000 pro Sec. beträchtlich grösser ausfallen, als bei langsamer cyclischer Magnetisirung.

Die vorliegenden Zahlen können auf eine besondere Exactheit keinen Anspruch machen; es sind eben verschiedene, zum Theile schon angeführte Umstände, welche eine genaue Bestimmung des Energieverbrauchs bei der hier angewandten Versuchsanordnung nicht gestatten. Ich hoffe jedoch bald neue Messungen unter besseren Bedingungen vornehmen zu können. Was diese Bedingungen anbelangt, so soll zunächst darauf gesehen werden, dass durch passende Rollen und Condensatoren die Dämpfung der Schwingungen in der Leitung selbst thunlichst herabgedrückt wird; dann sollen möglichst gleichmässige Drähte (gleiches Material und eventuell gleicher Ausglühprocess) von verschiedener Dicke untersucht werden. Schliesslich wird es sich empfehlen, die Dauer der Schwingungen innerhalb weiterer Grenzen zu variiren und auf der einen Seite an die schon von anderen untersuchten Cyclusperioden anzuschliessen.

Die Resultate dieser Untersuchung lehren also, dass im Falle der Magnetisirung durch elektrische Schwingungen von $\frac{1}{2000}$ Sec. Dauer der Energieverbrauch selbst bei verhältnissmässig dünnen Eisendrähten (Radius etwa $= 0 \cdot 25$ *mm*) hauptsächlich durch die Foucault'schen Ströme beherrscht wird. Überdies folgt aus den Versuchen mit grosser Wahrscheinlichkeit, dass bei diesen Schwingungen die Hysteresisverluste für weiches Eisen wesentlich grösser sind als jene, die man aus den Hysteresisschleifen bei langsamer Magnetisirung berechnet; während sie für Stahl und Nickel in beiden Fällen nahezu dieselbe Höhe aufweisen.

Longitudinales Licht

von

G. Jaumann.

(Mit 1 Textfigur.)

Die folgende theoretische Abhandlung zerfällt in zwei Theile: im I., II. und V. Capitel werden Ergebnisse über die Natur des Lichtes in verdünnter Luft und der Kathodenstrahlen mitgetheilt, welche durch Zusammenstellung von Experimenten von Elster und Geitel, Lenard, dem Verfasser u. A. folgen; im III. und IV. Capitel wird eine Theorie der elektrischen Vorgänge in verdünnter Luft begründet, welche die Kathodenstrahlen und verwandte Erscheinungen völlig verständlich macht.

I. Bestimmung der Schwingungsrichtung elektrischer Strahlen.

1. Methode. Der in einer früheren Arbeit[1] nachgewiesene Einfluss elektrischer Kraftschwankungen auf die Entladung gibt ein Mittel, elektrische Strahlen zu untersuchen. Diese Methode hat sich, wie zunächst gezeigt werden soll, für die von der Maxwell'schen Theorie beherrschten Fälle bewährt und soll nun auf weitergehende Erscheinungen angewendet werden.

Das hier zu Grunde liegende Entladungsgesetz ist unabhängig von dem Erscheinungsgebiet aufgestellt worden, auf welches es bezogen werden soll. Experimente mit elektrischen Strahlen oder photoelektrische Experimente haben bisher

---

[1] Jaumann, Einfluss rascher Potentialänderungen auf den Entladungsvorgang (Diese Sitzungsber. Bd., 97, S. 765), 1888.

durchaus nichts dazu beigetragen. Auch theoretische Vermuthungen von dieser Richtung haben die Aufstellung desselben nicht beinflusst. Man erkennt aus der ganzen Ausdrucksweise und dem Datum der citirten Arbeit, dass dieselbe noch in die Vor-Hertz'sche Periode fällt.

2. Beschränkung der Methode. Es wurde a. a. O., S. 784 ff. und S. 802 nachgewiesen, dass fast ausschliesslich die in unmittelbarer Nähe der Elektrodenoberfläche stattfindenden elektrischen Schwingungen auf die Entladung Einfluss haben.

Ein freier Strahl lässt sich also mit Hilfe von Entladungsexperimenten schwerlich untersuchen, sondern nur ein von einem Leiter, Halbleiter oder Elektrolyten reflectirter Strahl, und zwar nur in seinem Reflexionspunkte. Es sind jedoch ausser den Hertz'schen Strahlen auch Lichtstrahlen und Strahlen anderer Natur (Kathodenstrahlen) der Untersuchung zugänglich.

Ferner untersucht man den Strahl nicht unter normalen Umständen, sondern in Gegenwart der Entladung oder doch der grossen statischen Kraft des Entladungsfeldes. Dies braucht nicht gleichgiltig zu sein. Der Strahl superponirt sich nicht einfach über das Entladungsfeld, sondern veranlasst die Entladung, und kann also ebensogut auch selbst eine Modification erleiden.

3. Prüfung der Methode an Hertz'schen Strahlen. A. a. O. S. 793 wurde gezeigt, dass nur jene Componente der excitirenden Kraftschwankungen, welche in die Normale der Elektrodenoberfläche fällt, die Entladung beeinflusst. Dies gibt ein Mittel, die Richtung der elektrischen Schwingungen eines Strahles experimentell zu bestimmen.

Faraday,[1] Hertz[2] u. A. beschreiben ein Experiment, welches ich als Hervorrufung eines Funkens durch den von einem nebenstehenden Entlader ausgehenden Hertz'schen Strahl anspreche. Doch beschreiben sie dieses Experiment als richtungslos. Es muss aber der Strahl nach dem Entladungs-

---

[1] Faraday, Exp. Reas.

[2] Hertz, Ges. Werke, Bd. II, Anhang.

gesetze ein Maximum der Wirkung zeigen, wenn seine elektrischen Schwingungen auf der Elektrodenfläche senkrecht stehen und keine Wirkung, wenn sie ihr parallel sind.

Herr J. Wanka[1] machte dieses Experiment (verschiedene Orientirung des Excitators) mit dem vollen vorausgesagten Erfolge.

Die Richtung der elektrischen Schwingungen eines Strahles lässt sich also in verlässlicher Weise durch Entladungsexperimente bestimmen.

4. Nachweis zur elektrischen Natur des Lichtes. Es lässt sich auf und nur auf Grund des Entladungsgesetzes das Hertz'sche Lichtexperiment als ein qualitativer Beweis der elektrischen Natur des Lichtes hinstellen, vorausgesetzt, dass die zeitlichen Änderungen keines anderen Vectors als der elektrischen Kraft Einfluss auf die Entladung haben. Zu einer anderen Voraussetzung fehlt jeder Anlass. Nach Hertz begünstigt nun das Licht die Entladung, also ist einer der schwingenden Lichtvectoren elektrische Kraft

5. Bestimmung der Richtung der elektrischen Schwingungen eines Lichtstrahls. Über die Richtung der elektrischen Schwingungen eines polarisirten Lichtstrahls ist man durch die Theorie unterrichtet. Ich habe 1892 vorausgesagt,[2] dass ein polarisirter Lichstrahl nur dann entladende Wirkung haben kann, wenn seine elektrischen Schwingungen eine Componente in der Einfallsebene haben. Das zugehörige Experiment, welches auch Hertz (1888) und Wanka (1892), Ersterer ohne theoretische Gesichtspunkte, vergeblich durchzuführen versucht hatten, gelang auch mir nicht, der Schwierigkeit wegen, kräftiges, parallelstrahliges, polarisirtes ultraviolettes Licht zu erhalten.

Diese Schwierigkeit wurde in der schönsten Weise durch die Herren Elster und Geitel gehoben, welche gefunden hatten, dass Alkalimetallelektroden für gewöhnliches Licht empfindlich sind, und einen Spiegel von Kaliumnatriumlegirung als Elektrode verwendeten. Ihr Experiment (1894) hatte fast

---

[1] Wanka, Mittheil. d. deutschen math. Ges., Prag 1892, S. 57.

[2] Vergl. hierüber auch Jaumann, Inconstanz des Funkenpotentials (diese Sitzungsber. Bd., 104, S. 7), 1895.

ganz genau den von mir vorausgesagten Erfolg.[1] Ein unter dem Einfallswinkel von 70° einfallender Strahl hat fast ganz genau keine Wirkung, wenn seine elektrischen Schwingungen senkrecht zur Einfallsebene stehen, und die grösste Wirkung, wenn seine elektrischen Schwingungen in der Einfallsebene liegen.

Durch eine präcise Voraussage wie diese, erhält mein Entladungsgesetz einen grossen Anspruch auf Vertrauen. Im Folgenden soll dasselbe verwendet werden:

1. Zur Bestimmung der Richtung der elektrischen Schwingungen der Kathodenstrahlen, unter Zugrundelegung älterer Experimente von Lenard und mir (Capitel II).

2. Zur Bestimmung der Richtung der elektrischen Schwingungen des Lichtes in verdünnter Luft, unter Zugrundelegung der Messungen von Elster und Geitel (Capitel V).

6. Messung der Grösse der elektrischen Schwingungen von Strahlen. In quantitativer Beziehung ist mein Entladungsgesetz noch wenig ausgebildet. Es wurde nur sichergestellt, dass ausser dem bekannten Einfluss der statischen Kraft E des Feldes, die Geschwindigkeit ihrer Änderung $\frac{\partial E}{\partial t}$ einen Einfluss auf die Entladung hat,[2] nicht aber die Beschleunigung $\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$,[3] und dass die Verbindung dieser beiden Entladungsfactoren eine productische ist.[4] Einfluss auf die Entladung hat ungefähr das Product $E.\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2}\frac{dE^2}{dt}$.

So weit wurde das Gesetz durch Experimente bestimmt, bei welchen die excitirenden Kraftschwankungen durch zugeleitete Drahtwellen geliefert wurden. Nun kann man aber bei Excitation durch Strahlen viel reinere Aufstellungen und

[1] Die Herren Elster und Geitel haben nur einen schüchternen Hinweis auf meine Ansicht ohne Nennung meines Namens gegeben (Berl. Akad., 6, S. 133, 1894) und auch diesen in dem Abdruck ihrer Arbeit in Wied. Ann., 52, S. 440 zurückgezogen. Sie vermögen sich auch in ihrer letzten Publication (Berl. Akad., 1895, S. 209) noch nicht für das Verdienst meines Entladungsgesetzes zu entscheiden.

[2] Am erstangeführten Ort S. 793.

[3] Diese Sitzungsber. Bd., 104, S. 10.

[4] Am erstangeführten Ort S. 793.

bessere Angaben über die Grösse $\frac{dE}{dt}$ machen. Die quantitative Vervollständigung des Entladungsgesetzes dürfte also von Messungen der Excitation der Entladung durch Hertz'sche Strahlen zu erwarten sein. Auch elektrooptische Experimente können hier viel beitragen.

Bei quantitativer Vollständigkeit wird dann das Gesetz zur Bestimmung der Grösse der elektrischen Schwingungen von Strahlen verwendbar sein. Zur Schätzung dieser Grösse reicht es schon jetzt aus.

7. Einfaches Zutreffen des Entladungsgesetzes. Das ganze mit der Entladung zusammenhängende Erscheinungsgebiet ist in wesentlichen Punkten der Aufklärung bedürftig. Ein voller Einblick in den Ablauf des Entladungsvorganges ist mit dem Entladungsgesetz durchaus nicht gegeben.

Umso bemerkenswerther ist es, dass sich dieses Gesetz so ganz glatt und einfach auf die entfernt liegenden optischen Erscheinungen anwenden lässt. Diese Erleichterung, dieses Wegfallen von Bedenken ohne weiteres Zuthun bildet ein Zeichen, dass die vorliegenden Untersuchungen eine gute Richtung haben.

Die Excitation der Entladung durch Kraftschwankungen ist die einfachste aller Entladungserscheinungen, die erste Abstraction aus denselben und ein Einsatzpunkt für die Theorie.

II. Natur der Kathodenstrahlen.

8. Über das Auftreten von Interferenzflächen in dem blauen Kathodenlicht. Unter diesem Titel habe ich 1892 eine Abhandlung veröffentlicht, welche zu dem Folgenden Beziehung hat, und deren wesentlichste Abschnitte ich mir hier anführungsweise mitzutheilen erlaube, weil dieselbe an sehr unzugänglichem Orte publicirt ist.

(Aus den Mittheilungen der deutschen mathematischen Gesellschaft in Prag, 1892 — referirt in Wied. Beibl. 17).

»Die Kathodenstrahlen nehmen an der Entladung nach Hertz gar keinen Antheil, sie ähneln eher Lichtstrahlen, welche

die Kathode aussendet, freilich Lichtstrahlen von besonderen Eigenschaften. E. Wiedemann hält dieselben für gewöhnliches ultraviolettes Licht. Dies würde zwar ihre hohe Absorbirbarkeit erklären, nicht aber die eigenthümlichen Deflexionserscheinungen und es bliebe unverständlich, wieso die Kathode parallelstrahliges ultraviolettes Licht aussenden kann. Viel näher liegt es, die Kathodenstrahlen für longitudinale elektrische Wellen, also vielleicht für longitudinales Licht anzusehen. Solche Wellen müssen thatsächlich bei den heftigen Potentialschwankungen, welche die Elektroden erfahren, von denselben ausgesendet werden.[1] Die hohe Absorbirbarkeit dieser Strahlen müsste wohl eine specifische Eigenschaft dieser Strahlen sein, wegen welcher auch das natürliche Licht keine longitudinalen Componenten besitzt. Vielleicht neigt auch Hertz zu dieser Auffassung, da er die magnetische Ablenkung der Kathodenstrahlen mit der magnetischen Drehung der Polarisationsebene des Lichtes vergleicht.[2] Hierüber müssen Interferenzexperimente Aufschluss geben. Im Folgenden sind einige Experimente zu dieser Sache mitgetheilt, welche aber nicht Interferenzversuche der Optik nachahmen, sondern sich der Eigenart der Kathodenstrahlen vorläufig fügen. Eine Periodicität der Kathodenstrahlen konnte nicht nachgewiesen werden, wohl aber der grosse Einfluss, welchen die Cohaerenz und Gleichphasigkeit derselben bei ihrer Interferenz ausüben. Vielleicht, dass die Wellenlänge dieser Strahlen eine sehr grosse ist«.

»Als ich das erstemal dazukam, mir die Entladung in einem sogenannten elektrischen Ei, also zwischen kugelförmigen Elektroden in verdünnter Luft genauer anzusehen, bemerkte

---

[1] Diese richtige Bemerkung machte ich in noch unvollständiger Kenntniss der Maxwell'schen Theorie. Jetzt weiss ich, dass diese Theorie nicht völlig zutreffend sein kann, weil sie dieser Bemerkung widerspricht.

[2] Wie hieraus hervorgeht, bin ich der Erste und, soviel ich weiss, bis jetzt der Einzige, der (1892) Gründe hatte, die Kathodenstrahlen bestimmt für longitudinale elektrische Wellen zu erklären. Es freut mich, dass ich dabei nicht verschwiegen habe, dass ich durch die Hertz'sche Arbeit auf diesen Gedanken gebracht wurde. Dass dieser Eindruck richtig war, geht aus einem soeben (1895) in den gesammelten Werken von Hertz Bd., I, S. XXV) publicirten Brief von Helmholtz an Hertz hervor.

ich in dem einspringenden Winkel, in welchem die negative Kugel in ihren Stiel übergeht, eine viel heller als die blaue Schichte leuchtende Kegelfläche, welche den Stiel manchettenartig umgibt und den einspringenden Winkel halbirt. Dieselbe entsteht durch das Zusammentreffen der blauen Schichten, welche von der Kugel und dem Stiel ausgehen. Auffallend ist es jedoch, dass dieses Zusammentreffen und die dadurch bewirkte grössere Helligkeit sich auf einen scharf flächenförmigen Ort von mittlerer Lage beschränkt. Stellt man einer plattenförmigen negativen Elektrode eine zweite cylindrische von paralleler Axe gegenüber, so erhält man eine scharfe parabolische Interferenzfläche. Die Interferenzfläche zwischen zwei gegeneinander geneigten plattenförmigen Kathoden ist eben und halbirt ihren Winkel. Bei complicirter gestalteten Kathoden bemerkt man innerhalb des blauen Kathodenlichtes diese Interferenzflächen überall an allen eingeengten Stellen. Diese Flächen ragen ihrer grösseren Helligkeit wegen etwas über die blauen Schichten hinaus. Die Stellung der positiven Elektrode ist bei diesen Versuchen fast gleichgiltig. Diese Interferenzflächen werden durch magnetische Kräfte sehr stark abgebogen, und zwar wie Kathodenstrahlen, welche längs derselben von der Kathode ausgehen. Die Kathodenstrahlen, welche normal von den beiden Kathodenflächen ausgehen, biegen demnach bei ihrem Zusammentreffen in der Interferenzfläche an einander um und verlaufen in dieser Fläche«.

»Zum genaueren Studium der Erscheinung wurden als Kathode zwei längliche, parallele Platten von 1 *cm* Distanz verwendet, deren Enden in derselben Entfernung und senkrecht zu den negativen Platten die positive Platte gegenübergestellt wurde. Die beiden negativen Platten bedecken sich innen ebensowohl mit dem blauen Kathodenlichte als aussen, doch sind die inneren Lichtschichten weitaus schmäler, heller und den Elektroden näher. Dies mag von der Deflexion der Kathodenstrahlen durch die zweite Kathodenplatte herrühren, welche vielleicht ebenso wie die magnetische Deflexion bei höherem Druck ausgiebiger ist. Bei Herabsetzung des Druckes rücken diese blauen Schichten gegeneinander und verschmelzen dann unter Bildung einer scharfen ebenen Interferenzfläche, welche

schliesslich allein übrig bleibt und den sonst dunklen Raum zwischen beiden Platten genau halbirt.« — »Die Kathodenstrahlen verlaufen in dieser Interferenzebene den Kathoden parallel, treten aber nach allen Richtungen zwischen ihnen hervor«.

»Von dem negativen Pol einer Influenzmaschine wurden nach Vorschaltung einer Funkenstrecke zwei Drahtleitungen zu den Kathodenplatten geführt. So erhält man auch dann noch, wenn diese Drahtleitungen viele Meter lang sind, die Interferenzfläche völlig scharf, aber nur dann, wenn diese Drahtleitungen in jeder Beziehung vollkommen gleich sind. Bei ganz geringen Differenzen, z. B. Längenunterschieden von 10 *cm*, verbreitert sich die Fläche ganz bedeutend. Bei grösseren Unterschieden der Zuleitungen erfüllt sich der ganze Zwischenraum zwischen den Platten mit Licht, welches sich endlich hart an jener Platte, welche die kürzere Zuleitung hat, zu einer hellen Schichte sammelt. Die elektrischen Wellen, welche durch die vorgeschaltete Funkenstrecke angeregt werden und in den Zuleitungen heranfliessen, müssen also mit genau gleichen Phasen in den beiden Kathoden eintreffen, damit die Kathodenstrahlen die Interferenzfläche bilden. Verbindet man die beiden Kathodenplatten durch eine längere Drahtschlinge und führt man die negative Leitung der Maschine dieser Drahtschlinge durch einen Schleifcontact zu, so kann man die grosse Empfindlichkeit der Interferenzfläche für eine Verschiebung des Contactes aus der Mitte der Schlinge deutlich machen. Soll nach dieser Empfindlichkeit auf die Länge jener Wellen in den Drähten, welche die Kathodenstrahlen erzeugen, geschlossen werden, so wird man die Wellenlängen wohl auf 0·5—1 *m* schätzen dürfen. Ich habe längs der Drahtschlinge nach anderen Punkten gesucht, welche von der Mitte um ganze Wellenlängen abliegen und also ebensogut wie die Mitte sich zur Zuführung der Wellen eignen, um die Interferenzfläche auftreten zu lassen, habe aber keine solchen Punkte gefunden, offenbar desshalb, weil es Wellen von sehr verschiedener Länge sind, welche die Kathodenstrahlen erzeugen«.

Die verbreiterte Interferenzfläche bei geringer Verschiebung des Contactes aus der Mitte der Schlinge entspricht

ungefähr einem Spectrum von Interferenzflächen, welche Kathodenstrahlen verschiedener Schwingungsdauer angehören.

9. Kathodenstrahlen in der Symmetrieaxe. Es sollen zunächst die Gründe angeführt werden, welche sich sogleich darbieten, um die Kathodenstrahlen für longitudinale elektrische Wellen zu halten.

Hiefür spricht zunächst das kräftige Auftreten der Kathodenstrahlen in der Symmetrieaxe des Entladungsraumes. Ihre Intensität ist dort am grössten und nimmt nach aussen ab. Sie sind also schon aus Symmetriegründen (zum mindesten in der Axe, d. i. wesentlich) longitudinal oder scalar. Letzteres ist ausgeschlossen, da sie längst für elektrische Wellen erkannt sind (E. Wiedemann, Hertz). Nach ihrem Umfange zu kann allerdings eine unwesentliche radiale oder tangentiale Transversalität hinzutreten.

Ich kann nur so verstehen, dass E. Wiedemann bestimmt und Helmholtz (in dem citirten Brief) allenfalls den Kathodenstrahlen Transversalität zusprechen, wenn man sich dieselben nach Art des natürlichen Lichtes als eine Erscheinung von unregelmässiger und wechselnder Transversalität vorstellt, halte dies aber weder für ausreichend, noch empfehlenswerth.

10. Nothwendiges Vorhandensein longitudinaler elektrischer Wellen. Es ist eine ganz specifische Eigenschaft der Maxwell—Hertz'schen Gleichungen, dass sie longitudinale Wellen nicht zulassen. Fast jede beliebige Änderung derselben lässt longitudinale Wellen als möglich erscheinen.

Nun verhält sich vornehmlich verdünnte Luft in elektrischer Beziehung so eigenthümlich, dass man unmöglich die Maxwell'schen Gleichungen für ausreichend halten kann. Die blosse Thatsache der Entladung widerspricht ihnen schon.

Mit der Ungiltigkeit dieser Gleichungen ist aber die Möglichkeit longitudinaler Wellen nahegerückt, und dieselben werden wirklich eintreten, wenn die nöthigen Grenzbedingungen vorhanden sind.

Diese nöthige Anregung liefern aber die Schwankungen der elektrischen Kraft an der Elektrodenoberfläche, welche durch die zufliessenden elektrischen Drahtwellen bewirkt

werden. Thatsächlich werden die Kathodenstrahlen bei Vorschaltung einer kleinen Funkenstrecke (stärker zufliessenden Drahtwellen) viel lebhafter.

11. Schwingungsdauer der Kathodenstrahlen. Die angeführten Experimente über das Verhalten der Interferenzfläche bei Verschiebung des Schleifcontactes lassen die Grössenordnung der Schwingungsdauer der Kathodenstrahlen deutlich erkennen. Die anregenden Drahtwellen haben eine Wellenlänge von der Grössenordnung 1 *m*, also eine Schwingungsdauer von 10^{-8} bis 10^{-9} Sec. Dies ist also gewiss die Schwingungsdauer der Kathodenstrahlen. Mit dieser experimentellen Angabe stehe ich in stärkstem Widerspruch zu den Vermuthungen aller anderen Autoren.

E. Wiedemann hält dieselben für ultraviolettes Licht, schreibt ihnen also eine Schwingungsdauer von 10^{-15} bis 10^{-16} Sec. zu. Dann müssten die anregenden Drathwellen Wellenlängen haben, welche jenen des ultravioletten Lichtes gleich sind, was mit meinem Experiment ganz unverträglich ist. Lenard schreibt den Kathodenstrahlen gar Wellenlängen von der Grössenordnung der »Moleküldurchmesser« zu. Sie sollen an den »Molekülen« diffundiren.

Nun fällt aber mit der ultravioletten Natur der Kathodenstrahlen auch ihre Transversalität. Denn wären sie transversal, aber nicht ultraviolett, so wären sie gewöhnliches Licht oder Hertz'sche Strahlen. Das können sie aber nicht sein, weil sie ganz andere Eigenschaften haben.

Der Nachweis, dass die Kathodenstrahlen die Schwingungsdauer gewöhnlicher Drahtwellen haben, ist also ein weiterer Beweis für ihre longitudinale Natur.

12. Experimenteller Nachweis der Longitudinalität der Kathodenstrahlen. Dieser Nachweis ist nach der im I. Capitel angegebenen Methode auf das Studium der entladenden Wirkung der Kathodenstrahlen zu gründen.

Hierüber sind von Lenard[1] Experimente angestellt worden, welche immerhin für diesen Nachweis hinreichen, wenn sie auch bisher lange nicht genügend variirt sind.

[1] Lenard, Wied. Ann. 51 (1894), S. 267 ff.

Die Kathodenstrahlen haben nach Lenard lebhaft entladende Wirkung, also sind sie (nach Abschnitt 4, Cap. I) elektrische Wellen grosser Amplitude.

Die Kathodenstrahlen haben ferner dann lebhaft entladende Wirkung, wenn ihre Richtung senkrecht steht auf der Elektrodenfläche. Also fällt (nach Abschnitt 3, Cap. I) die Richtung ihrer elektrischen Schwingungen in ihre Fortpflanzungsrichtung. Sie sind Strahlen von grosser longitudinaler Componente, also aus Symmetriegründen im Wesentlichen rein longitudinale elektrische Strahlen.

III. Theorie der elektrischen Erscheinungen in verdünnten Gasen.

14. Die physikalischen Erscheinungen ordnen sich in einige grosse Gruppen (Wärme, Elektricität, Bewegung etc.), so dass es den Anschein hat, als gäbe es eine discrete Zahl von Naturagentien. Es entsteht das Bedürfniss, die Stellung derselben zu einander zu begreifen. Versuche einer Aufklärung werden vielfach gemacht, jedoch stets in der Richtung, dass man sämmtliche verschiedenen Arten der physikalisehen Erscheinungen auf eine derselben zurückführt.

Die vergleichende Physik, welche hier Klarheit zu schaffen hat, ist trotz der hohen Entwicklung der speciellen Physik noch in ihrem Anfangszustand. Wenn man Bewegung, Wärme, Elektricität etc. als Naturagentien aufzählt, so dürfte dies (Grosses mit Kleinem verglichen) einem Zustande der Wissenschaft entsprechen, wie jener der Chemie war, als man erst vier Elemente kannte: Wasser, Luft, Erde und Feuer.

Der allerdings mit einem unvergleichlich höheren Aufgebot an Kenntnissen einhergehende Versuch, alle Naturerscheinungen auf Bewegung zurückzuführen, ist vielleicht das Analogon zu dem Versuche, das Wasser als den Urgrund aller Dinge anzusehen.

Die vier Elemente waren falsch bestimmt. Der Eintritt der modernen Chemie ist wesentlich dadurch bezeichnet, dass Watt mit dem altem Dogma brach und dem Wasser die elementare Natur völlig absprach. Er unterschied auch zuerst aus-

reichend zwischen den jetzt als wesentlich verschieden erkannten farblosen Gasen.

Bald darauf kannte man 70 richtig bestimmte Elemente. Diese immer noch discrete Zahl lässt sich schon in eine natürliche Reihe bringen und streckt sich (vom Standpunkte meiner chemischen Theorie [1]) in eine continuirliche lineare Mannigfaltigkeit aus.

Man muss in allen Fällen von der Kenntniss einer discreten Zahl einander ähnlicher Erscheinungen auf das Vorhandensein aller unendlich vielen Zwischenformen schliessen.[2]

Die grossen Gruppen der Physik stellen viel mehr das System dar, nach welchem die Experimentatoren fortgeschritten sind, als ein natürliches System der physikalischen Grundwirkungen. Man wird vielleicht später an Stelle desselben eine richtiger bestimmte discrete Zahl von Grundwirkungen aufstellen, welche sich dann als eine Reihe zu erkennen gibt, so dass man ihre unendliche Mannigfaltigkeit erkennt. Dies wäre ein Endziel für die vergleichende Physik.

Nach dieser Richtung ist es aber ein Rückschritt, wenn man beispielsweise die elektrischen Kräfte für eine specielle chemische oder mechanische Erscheinung hält. Die ver-

---

[1] Jaumann, Versuch einer chemischen Theorie auf vergleichend-physikalischer Grundlage. (Diese Sitzungsber., Bd. 101, S. 488) 1892.

Über meine Stellung zu E. Mach vergleiche dort S. 489.

[2] Es liegt hier der Vergleich mit der Darwin'schen Theorie nahe, welche in dieser Richtung ungewöhnlich fortgeschritten ist. Es ist eine discrete Zahl von Arten bekannt, welche sich so gut und schlecht, wie die chemischen Elemente in eine natürliche Reihe ordnen lassen. Hieraus folgt die Möglichkeit aller unendlich vielen Zwischenformen.

Damit ist das Erklärungsbedürfniss der Chemie befriedigt. Man hat es nicht nöthig zu schliessen: Weil man weissen Phosphor in rothen Phosphor durch gewisse Einflüsse verwandeln kann, ist das Gold und das Kupfer durch ähnliche, natürliche Einflüsse aus einer gemeinsamen Stammform entstanden. Darwin macht jedoch mit Erfolg den entsprechenden Schluss von der künstlichen Zucht der Species auf die natürliche Zucht der Arten. Er erklärt aber ferner auch, warum die discreten, bekannten Arten, im Gegensatze zu den übrigen Gliedern der unendlichen Reihe eine höhere Bestandkraft haben. Dementsprechend ist auch in der Chemie das Bedürfniss vorhanden, den Grund zu kennen, warum nur 70 Elemente wirklich existiren und nicht die unendlich vielen Zwischenformen derselben.

gleichende Physik hat qualitativ möglichst zu trennen und zu unterscheiden, quantitativ aber Ähnlichkeiten aufzusuchen.

15. Zur chemischen Lichttheorie. Die folgende Theorie geht, wie es recht ist, aus einer unabhängigen Betrachtung hervor. Man würde es schwer erkennen, wenn ich nicht ausdrücklich darauf hinweise, dass ihr Hintergrund gegeben ist durch das allerdings vorsichtige Bestreben, etwas zu der von E. Mach[1] angeregten chemischen Lichttheorie beizutragen.

Mach denkt dabei noch an Zersetzungs- und Verbindungsschwingungen vectorischen Charakters. Vom Standpunkte meiner chemischen Theorie kann man sich aber eine vectorische chemische Welle nach Art der Lichtwellen kaum vorstellen, weil dies ein vieldeutig vertheiltes Chemial voraussetzen würde. Desto besser stellt diese Theorie jedoch eine scalare chemische Welle dar, in welcher das Chemial (zeitlich und nach einer Richtung) periodisch vertheilt ist, und zwar kann man eine solche Welle ganz ebenso gut in einem chemischen Element als in einer Verbindung fortschreitend sich denken.

Ich bin ebenso überzeugt, dass es richtig ist, wenn Mach den optischen Besonderheiten der Stoffe chemischen Charakter zuschreibt und sie dadurch erklärt, dass das Licht eine chemische Welle ist, als dass es richtig ist, dass Maxwell aus ähnlichen Gründen das Licht für eine elektromagnetische Welle gehalten hat.

Nun bin ich, wie im vorigen Abschnitt erklärt worden ist, weit entfernt, hieraus zu schliessen, dass Chemismus und Elektricität wesentlich identische Vorgänge sind. Ferner kann eine scalare chemische Welle auch formal niemals die Maxwell'schen Wellen ersetzen.

Es folgt somit die Vermuthung: Das Licht ist eine elektromagnetische Welle, welche von einer scalaren chemischen Welle begleitet wird. Diese hat besonders in jenen Medien eine merkliche Stärke, welche optische Besonderheiten aufweisen.

---

[1] E. Mach, Beiträge zur Analyse der Sinnesempfindungen. Jena 1886, S. 42.

Dieser Satz findet in der folgenden Theorie keine explicite Anwendung, ist aber zum Verständniss derselben nöthig und stimmt mit ihrem Resultat genau überein.

16. Veränderung der verdünnten Luft durch elektrische Wirkungen. Die auffallendste Eigenthümlichkeit der verdünnten Luft besteht darin, dass sie schon durch kleine Wirkungen (kleine Energieänderungen) grosse Eigenschaftsänderungen (z. B. Temperatur-, Volumänderungen etc.) erfährt. Es rührt dies von der sehr kleinen Capacität ihrer Volumeinheit für die Wärme und für andere Energien her.

Es ist nun zu vermuthen, dass aus gleichem Grunde auch elektrische Vorgänge eine starke Zustandsänderung der verdünnten Luft herbeiführen. Die elektrische Entladung hängt augenscheinlich mit starken Eigenschaftsänderungen des Mediums zusammen, ja vielleicht von vorausgehenden Eigenschaftsänderungen desselben ab, welche nicht ausschliesslich auf Temperaturänderungen zurückgeführt werden können.

Über die Natur des Zustandes, welcher direct durch die elektrischen Kräfte geändert wird, soll keine Voraussetzung gemacht werden. Mit jeder Zustandsänderung des Mediums ist jedoch auch eine Änderung seiner dielektrischen und diamagnetischen Constanten verbunden. Das besondere elektrische Verhalten der verdünnten Luft rührt davon her, dass durch elektrische Vorgänge mittelbar ihre elektrische und magnetische Constante geändert wird, was auf den Ablauf dieser Vorgänge zurückwirkt.

17. Beibehaltung der Maxwell'schen Gleichungen für Nichtleiter. Die folgende Theorie geht naturgemäss weit über die Maxwell'sche Theorie hinaus, unterscheidet sich jedoch dadurch wesentlich von allen anderen, in letzter Zeit so vielfach versuchten Erweiterungen dieser Theorie, dass sie von den ungeänderten Maxwell'schen Gleichungen ausgeht.

Es ist eine wichtige Eigenthümlichkeit dieser Gleichungen, dass sie Longitudinalwellen unmöglich erscheinen lassen. Diese Eigenthümlichkeit geht ihnen jedoch bei fast jeder beliebigen Änderung ihrer Form verloren. Es ist also sehr

leicht überhaupt eine Theorie longitudinaler elektrischer Wellen zu machen, aber desto schwerer die richtige Theorie zu finden. Es erfordert dies eine strenge Kritik der Methoden, nach welchen man bei Aufstellung der Theorie fortschreitet und eine gute Darstellung der Eigenschaften der Kathodenstrahlen durch die vollendete Theorie.

Die Helmholtz'sche Theorie (und andere Theorien) ist eine beliebige Erweiterung der Maxwell'schen Theorie und stellt deswegen Longitudinalwellen dar. Diese haben jedoch alle Eigenschaften von Schallwellen, nicht aber von Kathodenstrahlen. Dementsprechend ist auch diese Theorie sehr willkürlich auf die Annahme einer elektrischen Molecularpolarisation gegründet.

Hertz empfiehlt eine rein formalistische Aufstellung der elektrischen Grundgleichungen und es ist seither auch vielfach versucht worden, durch freies Errathen die Maxwell'schen Gleichungen zu vervollständigen. Dies ist eine ganz berechtigte, aber aussichtslose Methode. Sie geht nämlich von der falschen Voraussetzung aus, dass die gesuchten Gleichungen überhaupt noch einigermassen einfach sein müssen. Directe Naturgesetze sind immer einfach, die vervollständigten Maxwell'schen Gleichungen sind aber wahrscheinlich ein Eliminationsresultat aus zwei einfachen Differentialgleichungen und solche Eliminationsresultate sind nicht selten ausserordentlich complicirt. Formalistische Schlüsse dürfen nur zur Aufstellung von Gleichungen verwendet werden, von welchen man schon sicher weiss, dass sie ganz einfach sind. In complicirten Fällen ist es übrigens auch sehr schwer, fehlerfreie formalistische Schlüsse zu machen.[1]

---

[1] Ein formalistischer Fehler unterliegt z. B. der gangbaren Erklärung der Drehung der Polarisationsebene und also auch der Stereochemie. Es ist nicht richtig, dass active Medien eine besondere (dissymmetrische) Structur haben müssen. Sonst müssten Leiter eine ganz ähnliche Structur haben, denn Leitung und Drehung der Polarisationsebene stehen in formaler Analogie. Es würde dies jedermann deutlich sein, wenn man Leiter kennen würde, für welche die Ampère'sche Regel umgekehrt gilt. Dieselben müssten freilich auch die Energie in umgekehrter Richtung verwandeln. Ein Medium, in welchem ein Strom auftritt, nicht wie in einem Leiter, wenn eine elektrische Kraft vorhanden

Wohin kommt man auch, wenn man für jede elektrooptische Besonderheit eine formalistische Vervollständigung der Maxwell'schen Gleichungen aufstellt.

Im Folgenden wird von den im Wesentlichen ungeänderten Maxwell'schen Gleichungen ausgegangen und die einfache simultan geltende Beziehung aufgesucht, welche den elektrischen Erscheinungen in verdünnter Luft ihren eigenthümlichen Charakter verleiht. Die Aufstellung dieser Beziehung erfolgt durch vergleichend physikalische Schlüsse, welche durch nebenhergehende formalistische Betrachtungen geleitet, aber nicht auf dieselben gestützt werden.

18. Maxwell'sche Gleichungen für ein veränderliches Medium. Da der elektrische und magnetische Coëfficient ε und μ in den Maxwell'schen Gleichungen während des elektrischen Vorganges in verdünnter Luft nach Abschnitt 16 veränderlich ist, erhalten diese Gleichungen die Form:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon X) &= c_0 \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial z} - c_0 \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial y}, & \frac{\partial}{\partial t}(\mu \mathfrak{X}) &= c_0 \frac{\partial Z}{\partial y} - c_0 \frac{\partial Y}{\partial z} \\
\frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon Y) &= c_0 \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial x} - c_0 \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial z}, & \frac{\partial}{\partial t}(\mu \mathfrak{Y}) &= c_0 \frac{\partial X}{\partial z} - c_0 \frac{\partial Z}{\partial x} \qquad \text{I)} \\
\frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon Z) &= c_0 \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial y} - c_0 \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial x}, & \frac{\partial}{\partial t}(\mu \mathfrak{Z}) &= c_0 \frac{\partial Y}{\partial x} - c_0 \frac{\partial X}{\partial y}
\end{aligned}$$

Hierin bedeuten X, Y, Z die elektrischen Kraftcomponenten, $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$ die magnetischen Kraftcomponenten, ε und μ zwei Variable, welche in einfacher Beziehung zu der elektrischen und magnetischen Constanten ε_0 und μ_0 des Mediums stehen, sich nämlich im Ruhezustande auf dieselben reduciren, und c_0 die normale Lichtgeschwindigkeit.

ist, sondern wenn eine magnetische Kraft vorhanden ist, muss ohne dissymmetrische Structur Drehung der Polarisationsebene zeigen, und zwar von verschiedener Richtung, je nachdem der auftretende Strom gleiche oder entgegengesetzte Richtung hat, wie die ihn verursachende magnetische Kraft. Vergl. im Gegensatze hiezu die Theorie der Drehung, welche Drude (Physik des Äthers, Stuttgart 1894, S. 535) aufstellt.

Aus den Gleichungen I) folgt unmittelbar

$$\frac{\partial}{\partial x}(\varepsilon X) + \frac{\partial}{\partial y}(\varepsilon Y) + \frac{\partial}{\partial z}(\varepsilon Z) = 0, \qquad \text{I}a)$$
$$\frac{\partial}{\partial x}(\mu \mathfrak{X}) + \frac{\partial}{\partial y}(\mu \mathfrak{Y}) + \frac{\partial}{\partial z}(\mu \mathfrak{Z}) = 0.$$

Für den Ruhezustand, in welchem ε und μ in ε_0 und μ_0 übergehen, sind nämlich diese Ausdrücke anerkanntermassen gleich Null und sie erfahren nach den Gleichungen I) durch keinen elektrischen Vorgang eine zeitliche Änderung.

Der Umstand allein schon, dass die Maxwell'schen Gleichungen die nichtlineare Form I) annehmen, wenn das Medium durch den Vorgang verändert wird, lässt den Vorzug dieser Voraussetzung erkennen. Elektrische Vorgänge müssten sich immer einfach superponiren, wenn die Maxwell'schen Gleichungen wirklich linear wären. Nun haben aber die meisten höheren elektrischen Vorgänge einen entschieden nichtsuperpositorischen Charakter (z. B. Entladung durch Licht, gegenseitige Abstossung der Kathodenstrahlen etc.). Der hier eingeschlagene Weg, den Maxwell'schen Gleichungen die Linearität zu nehmen, kann schwerlich durch einen anderen übertroffen werden.

19. Einfluss grosser constanter Kräfte. Falls man die Änderungen $\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}$ und $\frac{\partial \mu}{\partial t}$ nicht zu berücksichtigen braucht, sind die Maxwell'schen Gleichungen linear und stellen die elementaren optischen Erscheinungen dar.

Aber auch in Medien, in welchen die Änderungen $\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}$ und $\frac{\partial \mu}{\partial t}$ grosse Werthe haben, sind noch rein superpositorische Strahlungserscheinungen möglich, und zwar dann, wenn so grosse statische Kräfte X_0, Y_0, Z_0 und $\mathfrak{X}_0$, $\mathfrak{Y}_0$, $\mathfrak{Z}_0$ vorhanden sind, dass die durch den betrachteten Vorgang eingeführten Änderungen $(X - X_0)$, $(Y - Y_0)$ etc. gegen sie verschwinden und auch $(\varepsilon - \varepsilon_0)$ gegen ε_0 und $(\mu - \mu_0)$ gegen μ_0 verschwindet.

Dann nehmen die Maxwell'schen Gleichungen die Form an:

$$
\left.
\begin{array}{ll}
1\ldots\ldots & \varepsilon_0 \frac{\partial X}{\partial t} + X_0 \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = c_0 \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial z} - c_0 \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial y} \\
2\ldots\ldots & \varepsilon_0 \frac{\partial Y}{\partial t} + Y_0 \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = c_0 \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial x} - c_0 \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial z} \\
3\ldots\ldots & \varepsilon_0 \frac{\partial Z}{\partial t} + Z_0 \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = c_0 \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial y} - c_0 \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial x} \\
4\ldots\ldots & \mu_0 \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t} + \mathfrak{X}_0 \frac{\partial \mu}{\partial t} = c_0 \frac{\partial Z}{\partial y} - c_0 \frac{\partial Y}{\partial z} \\
5\ldots\ldots & \mu_0 \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial t} + \mathfrak{Y}_0 \frac{\partial \mu}{\partial t} = c_0 \frac{\partial X}{\partial z} - c_0 \frac{\partial Z}{\partial x} \\
6\ldots\ldots & \mu_0 \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial t} + \mathfrak{Z}_0 \frac{\partial \mu}{\partial t} = c_0 \frac{\partial Y}{\partial x} - c_0 \frac{\partial X}{\partial y}
\end{array}
\right\} \quad \text{I}')
$$

Diese Gleichungen sind linear, also sind superpositorische Strahlungen möglich.

Jedoch superponiren sich die constanten Kräfte und die Kräfte der Strahlung nicht, sondern die constanten Kräfte treten als Coëfficienten in die Gleichungen, wohl aber superponiren sich verschiedene in demselben constanten Feld auftretende Strahlungen.

Auch verdünnte Luft verhält sich, wenn keine grossen constanten Kräfte in ihr vorhanden sind und die Amplitude der Strahlung sehr klein ist, ganz normal nach der ursprünglichen Maxwell'schen Theorie. Für Strahlungen von grosser Amplitude folgt sie jedoch auch bei Abwesenheit constanter Kräfte den Gleichungen I) und lässt also Longitudinalstrahlen zu.

Verdünnte Luft, in welcher grosse constante Kräfte vorhanden sind, verhält sich jedoch auch für die schwächsten Strahlungen ganz eigenthümlich, nämlich nach Gleichung I').

Die auffällige Abhängigkeit der Kathodenstrahlen von der constanten elektrischen und magnetischen Kraft des Feldes kommt also hier schon aus der Theorie hervor und hat nach Gleichung I') darin ihre Ursache, dass in verdünnter Luft auch

für die schwächsten Strahlungen $\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}$ und $\frac{\partial \mu}{\partial t}$ gegen die zeitlichen Änderungen der Kräfte nicht verschwinden.

So also unterscheidet sich meine Vorstellung von elektrischen Longitudinalwellen entscheidend von jener von Helmholtz, dessen Longitudinalwellen sich superpositorisch wie Schallwellen verhalten, so dass constante Kräfte ganz gleichgiltig sind. Man kann den Artunterschied, von welchem die Kathodenstrahlen ihren Namen haben, unmöglich erklären, wenn die constanten Ladungen der Elektroden, welche diesen Artunterschied definiren, gleichgiltig sind.

Ich glaube nun die Vorzüglichkeit der Grundannahme dass ε und μ durch elektrische Vorgänge in verdünnter Luft geändert werden, hinreichend nachgewiesen zu haben.

20. Ursache der Veränderlichkeit von ε und μ. Es handelt sich nun um die Aufstellung zweier wesentlich neuer Gleichungen für die neu hinzugekommenen Variablen ε und μ. Diese Gleichungen können so aufgefasst und geformt werden, dass sie als die Ursache der zeitlichen Änderungen dieser Variablen eine gewisse Function der Kräfte angeben.

Man hat nun freilich keine directen Beobachtungen über die Veränderlichkeit von ε und μ während elektrischer Vorgänge. Eine solche Veränderlichkeit kann aber wohl ohne theoretische Hilfe überhaupt nicht erkannt werden, des raschen Ablaufes aller Vorgänge wegen, welche sie herbeiführen können.

Aber auch ohne directe Grundlage können theoretische Überlegungen die Aufstellung der Gleichungen für $\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}$ und $\frac{\partial \mu}{\partial t}$ ermöglichen. Der Erfolg derselben hängt aber davon ab, dass es richtig ist, dass diese Änderungen unter dem directen Einfluss der Kräfte auftreten. Nur directe, einfache Zusammenhänge kann man ihrer Form nach frei oder durch vergleichend-physikalische Schlüsse errathen.

21. Vorläufiger Schluss auf die gesuchten Gleichungen nach dem formalen Bedürfniss. Es werden explicite Gleichungen für $\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}$ und $\frac{\partial \mu}{\partial t}$ gesucht, welche als

Ursache dieser Änderungen gewisse Functionen der Kräfte angeben.

Diese Functionen müssen sich wenigstens annäherungsweise linear aus Ableitungen erster Ordnung der Kraftcomponenten zusammensetzen. Dies wird gefordert durch die Möglichkeit annäherungsweise ungedämpfter Strahlen.

Diese Ableitungen müssen räumliche sein, es würden sonst Strahlen unbestimmter Fortpflanzungsgeschwindigkeit möglich sein.

Die ganze Function, also die Summe dieser Ableitungen muss bei Änderungen des Coordinatensystems invariant und scalarisch sein, denn sie ist gleichgesetzt den invarianten und scalarischen Ausdrücken $\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}$ und $\frac{\partial \mu}{\partial t}$.

Man ist damit auf die Laplace'schen Ausdrücke hingewiesen und wird die Giltigkeit ungefähr folgender Gleichungen vermuthen

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} &= \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \\ \frac{\partial \mu}{\partial t} &= \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial z} \end{aligned}\right\} \text{ungiltig.}$$

Man erkennt sogleich als eine Übereinstimmung, dass es nach Abschnitt 19 die Bedingung für das Auftreten longitudinaler Wellen ist, dass $\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}$ und $\frac{\partial \mu}{\partial t}$ nicht verschwinden und dass es bekanntlich ein Kennzeichen rein transversaler Wellen ist, dass der Laplace'sche Ausdruck verschwindet.

Diese formalistische Überlegung ist natürlich in allen Theilen auf die Voraussetzung möglichster Einfachheit der gesuchten Beziehung gegründet. Sie hat sich später als nicht scharf zutreffend und in einem wesentlichen Punkte principiell unrichtig erwiesen. Doch enthält sie den richtigen Hinweis auf den Laplace'schen Ausdruck, was der folgenden Überlegung sogleich eine gute Richtung gab.

22. Über die stofflichen Änderungen, welche vectorische Vorgänge begleiten. Beginnen wir mit der

Frage, ob eine directe Abhängigkeit von ε und μ von den elektrischen und magnetischen Kräften nicht an sich widersinnig ist.

Es würde z. B. den Sinn aller mechanischen Gleichungen ändern, wenn man annehmen wollte, dass die Dichte ρ eines Körpers eine directe Function seiner Geschwindigkeitscomponenten Ξ, H, Z ist. Eine solche Annahme ist ausgeschlossen, auch bei den grössten Geschwindigkeiten bewahren z. B. Projectile ihre Masse.

Nichtsdestoweniger ist die folgende Differentialgleichung giltig und enthält keinen Widerspruch:

$$-\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}(\rho \Xi) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho \mathrm{H}) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho \mathrm{Z}) \qquad \mathrm{II}\,a)$$

Ich halte dafür, dass diese Gleichung der Specialfall eines weit allgemeineren Princips ist, welches alle vectorischen Vorgänge beherrscht.

Andeutungen dieses Princips finden sich in allen Gebieten der Physik, dort wo der Laplace'sche Ausdruck von Bedeutung wird, z. B. bei der Wärmeleitung, Stromvertheilung etc. Doch sind dies nur Anzeichen der vorhandenen Analogie, nicht aber genaue Analogien der Gleichung II*a*).

Man betrachtet die Gleichung II*a*) gar nicht als ein eigentliches Naturgesetz, welches auch andere Formen haben könnte, sondern nennt sie die Continuitätsgleichung. Man hält sie mehr für einen geometrischen Satz als für den Ausdruck einer unabhängigen physikalischen Beobachtung, welche auch ganz etwas anderes hätte ergeben können, z. B. ein anderes Vorzeichen.

Thatsächlich spricht die Gleichung II*a*) nichts anderes aus, als den populären Satz, dass eine Masse dorthin kommt, wohin ihre Geschwindigkeit gerichtet ist. Dieser Satz ist jedem Menschen von Kindheit an und selbst den Thieren bekannt, wie überhaupt eine ungefähre Kenntniss der wichtigsten mechanischen Principien und vor Allem eine grosse Sinnesschärfe für mechanische Vorgänge den willkürlich beweglichen Thieren nothwendig und auch eigenthümlich ist. Würde unser Wille nicht durch mechanische Mittel nach aussen wirken, sondern durch elektrische, so hätten wir von

Geburt an elektrische Kenntnisse, statt, wie jetzt, mechanische. In der grossen praktischen (aber nicht theoretischen) Selbstverständlichkeit der Gleichung IIa) liegt es, dass man das »Ding an sich« an die Masse und ferner die Ortsänderung an die Geschwindigkeit gebunden sich vorzustellen liebt.

Der Satz, dass ein Körper dorthin kommt, wohin seine Geschwindigkeit gerichtet ist, ist nur dann selbstverständlich, wenn man die Geschwindigkeit durch Gleichung IIa), also durch Ortsänderung von Massen *definirt*. Die Ortsänderung ist zwar bei den *zufällig* gegebenen Verhältnissen weitaus das beste Kriterium der Geschwindigkeit, aber durchaus nicht das einzige. Man muss sich in Gleichung IIa) die Geschwindigkeiten anders als durch Ortsänderungen gemessen denken, um die Bedeutung derselben richtig zu verstehen.

Man denke sich ein Schiff inmitten des Oceans. Jedermann wird die Geschwindigkeit des Schiffes nach anderen Kriterien beurtheilen, als nach der Ortsänderung, z. B. nach der Richtung des Kiels und der Schwellung der Segel, oder nach der Stellung und Form der Welle, welche $>$ förmig vor seiner Spitze steht, oder nach der Tourenzahl und dem Drehungssinn der Räder, oder nach der Dampfspannung und der Stellung des Ventils. A priori kann Niemand auf den Gedanken kommen, dass mit allen diesen Erscheinungen eine *Ortsänderung* des Schiffes gegen die entfernten *Ufer* verbunden ist. Hat man die Beobachtungsmittel so weit verschärft, dass man diese Ortsänderung constatiren kann, so kann man wieder a priori nur aus Symmetriegründen vermuthen, dass sich das Schiff in seiner Kielrichtung bewegt, ob es sich aber dem Punkt des Ufers, wohin seine Segel concav sind und wohin sein Steuer gerichtet ist, nähert oder entfernt, kann man nur durch Beobachtung erkennen und diese Beobachtung hat (wie überhaupt alle Beziehungen zwischen zwei Vectoren) den Charakter eines *Artunterschiedes*.

Wäre man an das Studium der Geschwindigkeitsvorgänge in continuirlichen Flüssigkeiten gegangen, ohne Kenntniss der mit der Geschwindigkeit discreter fester Körper verbundenen Ortsänderung, hätte man also beispielsweise die Flüssigkeitsgeschwindigkeit so gemessen, wie die Meteorologen den Wind-

druck messen, so hätte es wohl lange gedauert, bis man auf die Gleichung IIa) gekommen wäre. Von dieser Seite hat sich jedoch die Elektricitätslehre entwickelt und hier ist noch die Schwierigkeit des allzu raschen Ablaufes aller Vorgänge hinzugekommen.

23. Gleichung für die Änderung des Zustandes σ. Die Beziehung zwischen der Dichteveränderung und der Geschwindigkeitsvertheilung ist so charakteristisch für die Mechanik, dass man annehmen muss, dass die anderen vectorischen Vorgänge einer ähnlichen Wirkung nicht entbehren, falls überhaupt von einer quantitativen Analogie der mechanischen und elektrischen Vorgänge die Rede sein kann, und dies wird Niemand bezweifeln.

Damit ist einer der stärksten Gründe aufgeführt, die man überhaupt einer Theorie zu Grunde legen kann.

Es muss eine elektrische Gleichung existiren, welche vollkommen genau der Gleichung IIa) entspricht; also die Form hat:

$$\alpha_0 \frac{\partial \sigma}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}(\sigma X) + \frac{\partial}{\partial y}(\sigma Y) + \frac{\partial}{\partial z}(\sigma Z). \qquad \text{II)}$$

An Stelle der Geschwindigkeiten in Gleichung IIa) treten hier die elektrischen Kraftcomponenten. Dies ist die natürlichste Analogie. Sollte doch darin ein Fehler liegen, so wird sich derselbe späterhin leicht ersehen und verbessern lassen.

An Stelle der Dichte ρ tritt eine neue physikalische Variable σ, über deren Natur man erst im Weiteren einen Aufschluss erhält. Wesentlich ist, dass sie scalarisch ist. Sie ist entweder der Dichte oder dem Druck, der Temperatur, dem Chemial, etc. vergleichbar.

α_0 ist ein, wie sich später zeigen wird, wesentlich positiver Reductionsfactor, dessen Dimension die einer elektrischen Kraft, gebrochen durch eine Geschwindigkeit ist. Seine Grösse und sein Vorzeichen hängt nur von der üblichen Zählung der Kräfte ab, nicht aber von der Natur des Mediums. Die Gleichung II) gilt in gleicher Weise für alle Medien.

24. Die Mannigfaltigkeit in dem elastischen Verhalten der Körper (es gibt elastische und flüssige, Körper von begrenztem

Volum und ausdehnsamflüssige, compressible und incompressible) zeigt, dass dasselbe nicht nahe mit den Geschwindigkeitsvorgängen zusammenhängt. Die Wahrscheinlichkeit, dass die elektrischen Vorgänge mit den Geschwindigkeitsvorgängen in einem Stoff, welcher irgend eine dieser elastischen Specialitäten aufweist, übereinstimmen werden, ist sehr gering und thatsächlich sind die Versuche, hier einen Vergleich herzustellen, misslungen. Eine Erscheinung, welche z. B. den Kathodenstrahlen entspricht, kann man weder in einem elastisch-compressiblen, noch flüssig-incompressiblen etc. Medium herstellen.

Der hier eingeschlagene Weg führt desshalb zu einem Resultat, weil die Analogie mit den Geschwindigkeitsvorgängen in dem nicht auf eine bestimmte Art von Medien specialisirten Gesetz II*a*), welches also eine directe und tiefliegende Beziehung darstellt, gesucht wurde. Der specielle Charakter der elektrischen Erscheinungen, sowie derselbe aus meiner Theorie folgt, entspricht keineswegs dem mechanischen Verhalten irgend eines bekannten Mediums. Sollte ein künstliches mechanisches Bild für meine Theorie möglich sein, so versichere ich nur (zur Methode), dass ich nicht (wie man mir das bei meiner chemischen Theorie zu meinem Erstaunen nachsagen wollte) ein solches Bild weiss und verschwiegen habe.

25. Zusammenhang zwischen ε und σ. Alle physikalischen Zustände hängen von einander ab, alle Eigenschaften der Körper sind Functionen der Temperatur, des Druckes etc., besser gesagt, sind Functionen von einander. ε und σ werden sich mitsammen ändern, wie sie sich mit der Temperatur, dem Druck, dem Chemial etc. ändern.

Die Beziehung zwischen ε und σ muss eine äusserst einfache sein. Wäre dies nicht der Fall, so hätten mich die formalistischen Schlüsse in Abschnitt 21 irre, aber nicht so nahe an Gleichung II*a*) geführt. Man konnte auch voraus wissen, dass ε und σ sehr einfach zusammenhängen, es folgt dies aus der Form der Energiegleichung.

σ steht in Analogie zur Dichte ρ. Die kinetische Energie eines Raumelementes stellt sich dar durch

$$\frac{1}{2}\rho(\Xi^2+\mathrm{H}^2+\mathrm{Z}^2)\,dx\,dy\,dz.$$

Die elektrische Energie E eines Raumelementes bestimmt sich sonach zu:

$$E = \frac{1}{2}\sigma(X^2+Y^2+Z^2)\,dx\,dy\,dz. \qquad \text{III)}$$

Erfahrungsgemäss ist sie im Ruhezustande durch ε_0 bestimmt

$$E_0 = \frac{1}{2}\varepsilon_0(X^2+Y^2+Z^2)\,dx\,dy\,dz.$$

Hieraus folgt, dass ε und σ im Ruhezustande geradezu gleich sein müssen

$$\varepsilon_0 = \sigma_0. \qquad \text{IV}a)$$

Eine einfache Gleichheit kann jedoch zwischen ε und σ nur im Ruhezustande stattfinden. Würde nämlich σ immer gleich ε gesetzt, so müsste nach den Gleichungen I*a*) und II) die Änderung $\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}$ immer gleich Null sein und die Theorie würde sich dadurch auf die Maxwell'sche Theorie reduciren. Nächst der Gleichheit ist die folgende Beziehung die einfachste:

$$\varepsilon - \varepsilon_0 = \eta_0(\sigma - \sigma_0) \qquad \text{IV)}$$

Hierin ist η_0 eine von der Natur des Mediums abhängende Constante. Man erkennt die Richtigkeit der Gleichung IV) sogleich an folgender Übereinstimmung. Die Gleichung IV), zunächst hingestellt, muss die Bedingung erfüllen, dass sich für einen einfachen Zahlwerth von η_0 (etwa für $\eta_0 = 0$ oder $\eta_0 = 1$) die Theorie auf die Maxwell'sche Theorie reducirt.

Es findet dies nun statt sowohl für $\eta_0 = 1$, als für $\eta_0 = 0$, aber für keinen anderen Werth von η_0.

Für $\eta_0 = 1$ ergibt sich $\sigma = \varepsilon$ und Gleichung IV*a*). Bei einfacher Gleichheit von σ und ε reducirt sich aber, wie schon erwähnt, die Theorie auf die Maxwell'sche.

Für $\eta_0 = 0$ müsste $\sigma = \infty$ werden, damit ε sich von ε_0 unterscheiden kann. Nun kann aber nach Gleichung II) σ nur durch unendliche Kräfte oder Discontinuitäten unendliche Werthe annehmen. Für $\eta_0 = 0$ ist also $\varepsilon = \varepsilon_0$, was ebenfalls auf die Maxwell'sche Theorie führt.

Falls man annimmt, dass für alle gewöhnlichen dichten Körper die Maxwell'sche Theorie in jeder Beziehung, auch die Energiegleichung derselben, Giltigkeit hat, so hat η_0 für diese Körper den Werth 1.

Beim Verdünnen der Luft sinkt jedoch der Werth von η_0 ab und Longitudinalwellen werden möglich. Im absoluten Vacuum erreicht η_0 den Werth 0. In diesem Grenzfall sind Longitudinalwellen wieder unmöglich.

η_0 hat also für verdünnte Gase einen wesentlich positiven Werth, welcher je nach der Dichte des Gases zwischen 0 und +1 liegt, für dichte Körper einen Werth, welcher sehr nahe an +1 liegt.

Aus II) und IV) folgt unter Berücksichtigung von IVa) und des Umstandes, dass der Ausdruck Ia) nach I) einen constanten Werth hat, folgende Gleichung:

$$\frac{\alpha_0}{\eta_0 - 1}\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}(\varepsilon_0 X) + \frac{\partial}{\partial y}(\varepsilon_0 Y) + \frac{\partial}{\partial z}(\varepsilon_0 Z). \qquad \text{II}')$$

Dies ist die gesuchte Gleichung, welche die Änderung $\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}$ als Function der Kraftvertheilung darstellt.

Man bemerkt, dass dieselbe auch für im Ruhezustande inhomogene Medien anwendbar ist. Sie erfüllt von selbst für den Ruhezustand, d. i. für $\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = 0$ die bekannte, aber den hier durchgeführten Betrachtungen nicht eigentlich zu Grunde gelegte Beziehung

$$0 = \frac{\partial}{\partial x}(\varepsilon_0 X) + \frac{\partial}{\partial y}(\varepsilon_0 Y) + \frac{\partial}{\partial z}(\varepsilon_0 Z). \qquad 1)$$

Die Gleichungen I, II, III und IV sprechen die Theorie völlig aus. Die Beziehung 1) ist ein Deductionsresultat dieser Theorie.

26. Der Zustand τ. Zusammenhang zwischen μ und τ. Die magnetischen Erscheinungen stehen ebensogut in Analogie zu den mechanischen, wie die elektrischen. Es lassen sich also die Betrachtungen des vorigen Abschnittes wörtlich wiederholen, wenn man statt von elektrischen Kräften von

magnetischen Kräften und statt von ε von μ spricht, endlich statt von σ von einem neuen physikalischen Zustand τ spricht, der durch die Vertheilung der magnetischen Kräfte beeinflusst wird.

Dies gibt eine der Gleichung II') analoge Gleichung und diese könnte man für die gesuchte Gleichung halten, welche $\frac{\partial \mu}{\partial t}$ als Function der Vertheilung der magnetischen Kräfte darstellt. Sie ist auch richtig, aber nicht die gesuchte Gleichung. Wir acceptiren von dieser conformen Betrachtung nur die schliesslich sich ergebende Gleichung für den Ruhezustand jedes Mediums:

$$0 = \frac{\partial}{\partial x}(\mu_0 \mathfrak{X}) + \frac{\partial}{\partial y}(\mu_0 \mathfrak{Y}) + \frac{\partial}{\partial z}(\mu_0 \mathfrak{Z}).$$

So lange man nicht Beweise hat, und ich weiss keine solchen, dass die Maxwell'sche Theorie nach der magnetischen Seite ebenfalls unzureichend ist, empfiehlt es sich nicht, dies anzunehmen. So richtig es ist, die Betrachtungen des vorigen Abschnittes ins Magnetische umzusetzen, bleibt doch die freie Wahl über die der Constanten η_0 entsprechende neue Constante. Diese letztere muss für alle Medien, auch für verdünnte Luft den Werth 1 erhalten. Dann ist μ von der Vertheilung der magnetischen Kräfte unabhängig.

Die Annahme verschiedener Werthe für η_0 und bloss des Werthes 1 für die entsprechende magnetische Constante, also einer rein zahlenmässigen Ungleichheit, entspricht der vom vergleichend-physikalischen Standpunkt auffallenden Unsymmetrie der bekannten elektrischen und magnetischen Erscheinungen.

Die elektrischen Erscheinungen sind viel reichhaltiger: Es gibt elektrische Kathodenstrahlen, aber nicht magnetische; elektrische Leiter, aber nicht magnetische; elektrische Entladung, aber nicht magnetische; elektrochemische, aber nicht magnetochemische Erscheinungen.

Man kann aus der Verschiedenheit dieses Capitels von dem vorigen erkennen, dass die hier vorgetragene Theorie

nicht formalistisch aufgebaut ist, sonst wäre sie gewiss hier in die symmetrischen Betrachtungen verfallen.

27. Zusammenhang zwischen μ und σ. Aus den im vorigen Abschnitt gemachten Bemerkungen folgt nicht, dass μ bei elektromagnetischen Vorgängen einen constanten Werth behält. Dies kann gar nicht sein. Es würden in diesem Falle die constanten magnetischen Kräfte $\mathfrak{X}_0, \mathfrak{Y}_0, \mathfrak{Z}_0$ aus den Gleichungen I′) ganz wegfallen, während man doch weiss, dass constante magnetische Kräfte auf den Verlauf der Kathodenstrahlen von grossem Einflusse sind.

Thatsächlich muss sich μ mit σ ändern. σ ist ein physikalischer Zustand wie Temperatur, Druck etc. Mit der Temperatur etc. ändern sich alle Eigenschaften der Körper und auch ε und μ. Ebenso werden sich sowohl ε als μ mit σ ändern. ε steht zwar zu σ in einer anderen Beziehung als μ, weil σ von den elektrischen, nicht von den magnetischen Kräften abhängt. Aber diese andere Beziehung spricht sich in I) und II), nicht aber in IV) aus.

Der Zusammenhang zwischen μ und σ wird dargestellt durch

$$\mu - \mu_0 = \nu_0 (\sigma - \sigma_0). \qquad \text{V)}$$

Hierin ist ν_0 eine von der Natur des Mediums abhängende Constante, welche für dichte Körper den Werth 1, für verdünnte Luft, entsprechend dem abnehmenden Druck derselben, kleinere Werthe, für das absolute Vacuum den Werth 0 hat.

Endlich ergibt sich aus V), IV) und II′):

$$\frac{\varkappa_0}{\eta_0 - 1} \cdot \frac{\eta_0}{\nu_0} \cdot \frac{\partial \mu}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} (\varepsilon_0 X) + \frac{\partial}{\partial y} (\varepsilon_0 Y) + \frac{\partial}{\partial z} (\varepsilon_0 Z). \qquad \text{II″)}$$

Dies ist die gesuchte Gleichung, welche $\frac{\partial \mu}{\partial t}$ als Function der Kraftvertheilung darstellt, aber nicht wie in Abschnitt 21 vermuthet wurde, der magnetischen, sondern der elektrischen Kraftvertheilung.

Der Grund, warum der η_0 entsprechenden Constanten im vorigen Abschnitt für alle Körper der Werth 1 zugesprochen wurde, ist, dass es keine magnetischen Kathodenstrahlen gibt.

Der Grund, warum dann ν_0 für verdünnte Luft ein kleinerer Werth als 1 zugeschrieben werden musste, ist, dass constante magnetische Kräfte nicht ohne Einfluss auf die Kathodenstrahlen sind.

IV. Deductionen (vorläufig mitgetheilt).

Aus der obigen Theorie folgt die Nothwendigkeit des Auftretens longitudinaler elektrischer Strahlen (vornehmlich in verdünnter Luft bei Gegenwart grosser statischer elektrischer Kräfte), welche vollkommen den Charakter von Kathodenstrahlen haben.

Auch auf elektrooptischem Gebiete gibt die Theorie eine bemerkenswerthe Übereinstimmung.

Aus derselben folgen eine grosse Zahl neuer experimenteller Motive, von welchen jedoch erst die Rede sein soll, bis die betreffenden Experimente gemacht sind, wozu mir gegenwärtig alle Mittel fehlen.

28. Longitudinale ebene Welle. Artunterschied der Kathodenstrahlen. Es sei im luftverdünnten Raum eine statische elektrische Kraft Z_0 und keine magnetische Kraft vorhanden. Dann ist eine elektrische Longitudinalwelle in der z-Richtung möglich. Die Gleichungen I') und II') reduciren sich auf

$$\varepsilon_0 \frac{\partial Z}{\partial t} + Z_0 \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = 0, \qquad \text{I}'\,3)$$

$$\frac{\varkappa_0}{\eta_0 - 1} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \varepsilon_0 \frac{\partial Z}{\partial z}. \qquad \text{II}')$$

Eine Lösung derselben ist:

$$Z = Z_0 + C \sin \frac{2\pi}{\tau}\left(t - \frac{z}{c}\right), \qquad a)$$

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + E \sin \frac{2\pi}{\tau}\left(t - \frac{z}{c}\right).$$

Die Schwingungsdauer τ dieser Strahlen ist beliebig, sie verhalten sich superpositorisch.

Das Verhältniss der Amplituden E und C bestimmt sich zu

$$\frac{E}{C} = - \frac{\varepsilon_0}{Z_0}.$$

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit c ergibt sich zu

$$c = \frac{\eta_0 - 1}{\alpha_0} . Z_0 . \qquad 3)$$

So wie das Argument der Sinus in a) geschrieben ist, erfolgt die Fortpflanzung in der positiven z-Richtung, falls c positiv ist. Ob also überhaupt eine Fortpflanzung in der positiven z-Richtung möglich ist, hängt noch davon ab, ob c durch Gleichung 3) einen positiven Werth erhält.

Da $\frac{\eta_0 - 1}{\alpha_0}$ einen bestimmten Werth hat, hängt es vom Vorzeichen der statischen elektrischen Kraft Z_0 ab, ob eine Fortpflanzung in der + oder in der — z-Richtung möglich ist. Jedenfalls ist nur eines, nicht beides möglich, wie bei Transversalwellen, wo sich c durch eine quadratische Gleichung bestimmt. Die Longitudinalwelle kann sich, falls α_0 einen positiven Werth hat, nur in der Richtung der negativen elektrischen Kraft fortpflanzen, denn $\eta_0 - 1$ hat nach Abschnitt 25 einen wesentlich negativen Werth.

Hiemit ist der Artunterschied der Kathodenstrahlen erklärt. Die nöthigen Grenzbedingungen zur Anregung der Kathodenstrahlen, nämlich die Schwingungen der elektrischen Kraft in der Normale der Oberflächenschichte der zur z-Richtung senkrechten Elektrodenflächen, werden von den zufliessenden elektrischen Drahtwellen an beiden Elektroden in völlig gleicher Weise geliefert. Nur von der Kathode können jedoch die Strahlen ausgehen, denn dort haben sie in der Richtung nach aussen (Metall—Luft) positive Fortpflanzungsgeschwindigkeit. An der Anode jedoch haben sie in der Richtung nach aussen negative Fortpflanzungsgeschwindigkeit, sie können dort also nicht auftreten.

η_0 hat nach Abschnitt 25 für dichte Körper einen sehr nahe um 1 liegenden Werth. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit ist also in dichten Körpern sehr klein und Longitudinal-

strahlen werden nur schwer zu erhalten sein. Bei grösserer Verdünnung wird jedoch η_0 immer kleiner, so dass die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Kathodenstrahlen wächst, bis sie im absoluten Vacuum den Grenzwerth $\frac{Z_0}{\alpha_0}$ erreicht.[1]

29. Das blaue Kathodenlicht. Es kann vorausgesetzt werden, dass das blaue positive Glimmlicht in gewöhnlicher Luft dem blauen Kathodenlicht in verdünnter Luft entspricht. Letzteres ist nachweislich eine Wirkung der Kathodenstrahlen. Das blaue positive Glimmlicht ist dann eine Wirkung von Anodenstrahlen und zwar seiner geringeren Dicke und grösseren Helligkeit wegen, von Anodenstrahlen sehr kleiner Fortpflanzungsgeschwindigkeit.

Hieraus ist zu vermuthen, dass η_0 in dichter Luft einen ein wenig grösseren Werth als 1 hat. Dann sind nach 3) nur Anodenstrahlen kleiner Fortpflanzungsgeschwindigkeit möglich. Beim Verdünnen sinkt η_0 zunächst auf 1 ab, dann ist nach 3) $c = 0$ und es sind keine Longitudinalstrahlen möglich. Beim weiteren Verdünnen sinkt η_0 unter 1 bis 0. Dann sind keine Anoden-, aber Kathodenstrahlen möglich, welche desto grössere Fortpflanzungsgeschwindigkeit haben, je weiter die Verdünnung geht. Es tritt dementsprechend die blaue Lichtschichte an der Kathode auf und gewinnt bei fortschreitender Verdünnung an Dicke, verliert aber an Leuchtkraft.

Die Production des blauen Lichtes muss mit einer Schwächung der Kathodenstrahlen zusammenhängen. Nach den hier benützten Annäherungsgleichungen I'), welche für grössere statische Kräfte gelten, sind jedoch die Kathodenstrahlen ungedämpft. In der Nähe der Kathode, wo die statische Kraft überwiegt, kann also die blaue Lichtschichte nicht auftreten. Es ist dort thatsächlich ein dunkler Raum[2] vorhanden, welcher allmälig in die blaue Lichtschichte übergeht.

---

[1] Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit von longitudinalen elastischen Wellen in einem compressiblen Medium ändert sich umgekehrt, und zwar zwischen ∞ und 0.

[2] Dieser dunkle Raum und die blaue Lichtschichte darf nicht verwechselt werden mit dem scharf gegen das blaue Ende des Entladungsbogens abgegrenzten dunklen Raum.

In grösserer Entfernung von der Kathode, wo die Amplitude des Strahles gegen die statische Kraft des Feldes nicht verschwindet, gelten die Gleichungen I), welche Sinusstrahlen nicht mehr zulassen. Beim Eintritt in dieses Gebiet erfahren die Kathodenstrahlen eine leicht berechenbare Modification und Abschwächung.

30. Fortpflanzung von Longitudinalstrahlen schief zur statischen Kraft. Transversalwellen. Es sind in verdünnter Luft auch Longitudinalstrahlen möglich, deren Wellenebene schief gegen die statische elektrische Kraft liegt und deren Richtung, wie sich später zeigt, auf der Wellenebene senkrecht steht. Diese Strahlen sind jedoch nicht rein longitudinal, sondern sind mit Transversalcomponenten ausgerüstet.

Es gelten die Gleichungen:

$$\varepsilon_0 \frac{\partial X}{\partial t} + X_0 \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} - c_0 \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial z} = 0. \qquad \text{I}'1)$$

$$\varepsilon_0 \frac{\partial Z}{\partial t} + Z_0 \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + c_0 \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial x} = 0. \qquad \text{I}'3)$$

$$\mu_0 \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial t} - c_0 \frac{\partial X}{\partial z} + c_0 \frac{\partial Z}{\partial x} = 0. \qquad \text{I}'5)$$

$$\frac{\alpha_0}{\eta_0 - 1} \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} - \varepsilon_0 \frac{\partial Z}{\partial z} - \varepsilon_0 \frac{\partial X}{\partial x} = 0. \qquad \text{II}')$$

Eine Lösung derselben ist:

$$Z = Z_0 + C \sin \frac{2\pi}{\tau}\left(t - \frac{mx + nz}{c}\right).$$

Die drei übrigen Variablen $X \mathfrak{Y}$ und ε sind cohaerent und gleichphasig und ihre Amplituden sind der Amplitude C proportional. Durch Einsetzen dieser Lösung erhält man zur Bestimmung dieser Amplituden vier homogene Gleichungen. Die Determinante ihrer Coëfficienten muss verschwinden. Dies gibt die Bedingung:

$$\left(c_0^2 - \mu_0 \varepsilon_0 c^2\right) \cdot \left[\frac{\alpha_0}{\eta_0 - 1} \cdot c - \left(m X_0 + n Z_0\right)\right] = 0. \qquad 4)$$

In Wellenebenen von den Richtungscosinus m und n der Normale können sich also drei verschiedene Wellen fortpflanzen. Zwei davon entsprechen den Fortpflanzungsgeschwindigkeiten

$$c = \pm c_0 \sqrt{\frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0}}$$

und sind, wie man sich durch Einsetzen dieser Werthe von c in die Amplitudengleichung überzeugt, gewöhnliche Maxwell'sche Transversalwellen. Für dieselben ist $\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = 0$.

Auch in verdünnter Luft und bei Gegenwart grosser statischer Kräfte können sich also gewöhnliche Transversalwellen nach jeder Richtung fortpflanzen.

Die dritte Welle ist theilweise longitudinal. Sie hat die Fortpflanzungsgeschwindigkeit

$$c = \frac{\eta_0 - 1}{\alpha_0}(mX_0 + nZ_0). \tag{5}$$

Dieselbe ist also proportional dem Cosinus des Winkels, welchen die totale statische elektrische Kraft mit der Wellennormalen einschliesst. Longitudinalstrahlen können sich also nicht nur in der Richtung der negativen Kraft fortpflanzen, sondern allerdings bei abnehmender Geschwindigkeit auch schief dazu. Senkrecht zur elektrischen Kraft haben sie die Geschwindigkeit 0. Dreht man sie noch weiter in die Richtung der positiven Kraft, so können sie sich nicht mehr fortpflanzen, weil ihre Geschwindigkeit negativ wird.

Durch Einsetzen von 5) in die Amplitudengleichungen zeigt sich, dass diese Strahlen desto stärkere Transversalcomponenten benöthigen, je schiefer sie gegen die statische Kraft verlaufen. Diese Transversalcomponenten liegen in der Wellenebene und zwar die elektrische Transversalcomponente X in der Einfallsebene der statischen Kraft, die magnetische Transversalcomponente $\mathfrak{Y}$ senkrecht dazu.

Nicht ohne Interesse ist die Bedingung, welche eine senkrecht wirkende magnetische Kraft $\mathfrak{Y}_0$ dem Strahl auferlegt.

Dieselbe tritt in Gleichung I'5) in dem Glied $+\mathfrak{Y}_0 \frac{\partial \mu}{\partial t}$ auf. Sie kommt dann auch in die Determinante, aber gerade an der Stelle, wo sie zum Werthe derselben nichts beiträgt. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit wird also durch eine magnetische Kraft nicht beeinflusst. Auch die Transversalcomponenten bleiben gleichphasig, aber sie ändern ihr Amplitudenverhältniss zur Longitudinalcomponente. Die totale elektrische Schwingung erhält dadurch eine andere Richtung gegen die Wellennormale. Es wäre nicht richtig, dies dahin zu deuten, dass die magnetische Kraft $\mathfrak{Y}_0$ die Richtung der elektrischen Schwingungen des Strahles dreht, sondern es bedeutet, dass ein Strahl von solcher Wellenebene nur dann möglich ist, wenn man ihn durch die Grenzbedingungen mit Transversalcomponenten versieht, die verschieden sein müssen, je nachdem eine senkrecht wirkende magnetische Kraft vorhanden ist oder nicht.

31. Reflexion. Unanwendbarkeit des Huyghens'schen Principes. Diese Strahlen können an der Grenzebene eines anderen Mediums reflectirt werden, vorausgesetzt, dass ihr Einfallswinkel grösser ist als das Complement des Einfallswinkels der statischen elektrischen Kraft[1]. Hieran kann man erkennen, dass das Huyghens'sche Princip für Kathodenstrahlen nicht anwendbar ist. Gleichung 5) bestimmt die Normalenfläche. Diese ist hier eine Kugel, deren Oberfläche jedoch durch das Erregungscentrum geht und deren Mittelpunkt in der Richtung der negativen Kraft liegt. Alle Wellenebenen umhüllen den Gegenpol dieser Kugel. Dieser Gegenpol stellt also die ganze Huyghens'sche Fläche dar. Hieraus würde folgen, dass die Strahlenrichtung nur in die Richtung der negativen Kraft fallen kann, was nicht der Fall ist, da Reflexion möglich ist.

In diesem Falle und im Folgenden stehen die Schlüsse aus dem Huyghens'schen Princip mit der directen Rechnung aus denselben zu Grunde gelegten Differentialgleichungen im

[1] Sie dringen auch (und zwar bei senkrechter Incidenz völlig) in das neue Medium, z. B. in Glas, ein, aber unter enormer Schwächung nicht im Innern des Glases, sondern schon in der Oberflächenschichte. Dies berechnet sich leicht aus der Energiegleichung III) unter Berücksichtigung des Umstandes, dass sich η_0 in der Oberflächenschichte fast von 0 bis 1 ändert.

Widerspruch. Das Huyghens'sche Princip gibt für Transversalwellen und Schallwellen, welche einen Fall zweiten Grades darstellen, zwei Lösungen (eine vor- und eine rückschreitende Welle). Eine davon ist richtig, die andere falsch. In dem hier vorliegenden Falle ersten Grades gibt dieses Princip nur eine Lösung und zwar eine falsche.

32. Scharf begrenzte Kathodenstrahlen. Begrenzte Transversalstrahlen. Die Kathodenstrahlen haben nach Abschnitt 11 eine Schwingungsdauer von 10^{-9} Sec., also eine viel grössere als Licht. Ausserdem sind sie longitudinal. Es muss somit wundern, dass sie nicht wie Schall sich fortpflanzen, sondern in scharf begrenzten Strahlen wie Licht. Es soll nun gezeigt werden, dass gerade die Longitudinalstrahlen meiner Theorie bei beliebig grosser Schwingungsdauer die Fähigkeit haben, scharfe Strahlen zu liefern, während das transversale Licht erst bei kleinen Wellenlängen scharfe Strahlen liefert.

Der Einfachheit wegen soll nur die Fortpflanzung scharfer Strahlen in der Richtung der negativen elektrischen Kraft Z_0 behandelt werden. Man kann dann in den Differentialgleichungen, welche in Abschnitt 30 vorangestellt wurden, noch $X_0 = 0$ setzen.

Eine charakteristische Lösung dieser Gleichungen (nach Elimination von $\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}$) ist:

$$\begin{aligned} Z &= Z_0 + C \sin \frac{2\pi}{\varkappa} x . \sin \frac{2\pi}{\tau}\left(t - \frac{z}{c}\right) \\ X &= A \cos \frac{2\pi}{\varkappa} x . \cos \frac{2\pi}{\tau}\left(t - \frac{z}{c}\right) \\ \mathfrak{Y} &= \mathfrak{B} \cos \frac{2\pi}{\varkappa} x . \cos \frac{2\pi}{\tau}\left(t - \frac{z'}{c}\right) \end{aligned} \qquad 6)$$

Dieselbe stellt einen Strahl von unendlicher Wellenebene $z = \text{Const.}$ dar, dessen Richtung $x = \text{Const.}$ ist, weil seine Intensität sich in der Richtung x ändert. Diese Änderung mit x ist sinusförmig.

Die Coëfficientendeterminante der Amplitudengleichungen ergibt sich zu

$$\left[c_0^2 - \left(\varepsilon_0\mu_0 - c_0^2\frac{\tau^2}{\varkappa^2}\right)c^2\right]\cdot\left(c - \frac{\eta_0 - 1}{\alpha_0}Z_0\right) = 0. \qquad 7)$$

Es ergeben sich wieder drei Lösungen.

Zunächst ist eine Longitudinalwelle von der normalen Fortpflanzungsgeschwindigkeit

$$c = \frac{\eta_0 - 1}{\alpha_0}Z_0$$

möglich. Die sinusförmige Vertheilung der Intensität im Querschnitte des Strahles ändert also seine Fortpflanzungsgeschwindigkeit nicht.

Man kann zu Folge dessen in der Lösung 6) der Streifenbreite $\varkappa$ beliebige Werthe geben, kann dann eine Reihe solcher Lösungen nach dem Fourier'schen Theorem zusammensetzen und erkennt hieraus den Satz:

Longitudinalstrahlen kleiner Amplitude sind mit jeder beliebigen Intensitätsvertheilung in ihrem Querschnitt, also auch mit vollkommen scharf begrenztem Querschnitt ohne beschränkende Bedingungen (für jede Schwingungsdauer) möglich, und haben die normale Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Kathodenstrahlen.

Wie man aus Gleichung 6) ersieht, sind bei einem begrenzten Kathodenstrahl in der Mitte keine Transversalcomponenten vorhanden, gegen die Ränder hin sind aber solche vorhanden (eine radiale elektrische und tangentiale magnetische Transversalcomponente) und zwar sind sie um eine Viertelwellenlänge gegen die longitudinale Schwingung verschoben.

Ferner ergeben sich aus 7) noch die zwei Fortpflanzungsgeschwindigkeiten

$$c = \pm c_0\sqrt{\frac{1}{\varepsilon_0\mu_0 - c_0^2\frac{\tau^2}{\varkappa^2}}}\,.$$

Diese entsprechen Transversalstrahlen von sinusförmiger Vertheilung der Intensität im Querschnitt. Falls $c_0\frac{\tau}{\varkappa}$

nicht verschwindet, d. h. falls die Querstreifung von der Grössenordnung der Wellenlänge des Strahles ist, haben diese Strahlen nicht die normale Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Transversalstrahlen.

Man kann also eine Reihe solcher Strahlen von verschiedener Streifenbreite $\varkappa$ nur dann nach dem Fourier'schen Theorem zusammensetzen zu einem scharf begrenzten Strahl, wenn der Querschnitt desselben gross ist gegen die Wellenlänge.

Transversalstrahlen werden also immer an den Rändern unscharf sein müssen. Wie man aus 6) ersieht, tritt an dem Rande jedes transversalen Lichtstrahles longitudinales Licht auf, welches gegen das transversale um eine Viertelwellenlänge verschoben ist.

33. Drehung der Wellenebene durch eine senkrecht wirkende magnetische Kraft. Eine reine Longitudinalwelle von unendlicher Wellenebene behält unter dem Einfluss einer senkrecht wirkenden magnetischen Kraft $\mathfrak{Y}_0$ nur dann die Richtung ihrer elektrischen Schwingung und hat nur dann keine transversale magnetische Componente nöthig, wenn sich die Wellenebene unter dem Einflusse der magnetischen Kraft dreht.

Dies ergibt sich aus den Gleichungen:

$$\varepsilon_0 \frac{\partial Z}{\partial t} + Z_0 \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = 0 \qquad \text{I}'3)$$

$$\mathfrak{Y}_0 \frac{\partial \mu}{\partial t} + c_0 \frac{\partial Z}{\partial x} = 0 \qquad \text{I}'5)$$

$$\frac{\alpha_0}{\eta_0 - 1} \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} - \varepsilon_0 \frac{\partial Z}{\partial z} = 0 \qquad \text{II}')$$

$$\frac{\alpha_0}{\eta_0 - 1} \cdot \frac{\eta_0}{\nu_0} \cdot \frac{\partial \mu}{\partial t} - \varepsilon_0 \frac{\partial Z}{\partial z} = 0 \qquad \text{II}'')$$

Die Lösung derselben ist

$$Z = Z_0 + C \sin \frac{2\pi}{\tau} \left(t - \frac{mx + nz}{c} \right).$$

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + E \sin \frac{2\pi}{\tau}\left(t - \frac{mx+nz}{c}\right)$$

Für die Cotangente des Winkels um welchen die Wellenebene gedreht wird, ergibt sich

$$-\frac{m}{n} = \frac{\nu_0}{\eta_0} \cdot \frac{\eta_0 - 1}{\alpha_0} \cdot \frac{\varepsilon_0}{c_0}\, \mathfrak{Y}_0. \tag{8}$$

Die positive Z-Richtung gehe von links nach rechts, in dieser schreitet der Kathodenstrahl fort. Die $+x$-Richtung gehe von unten nach oben, dann geht die $+y$-Richtung gegen den Beschauer. Wenn $\mathfrak{Y}_0$ positiv ist, so wird nach 8) die Wellennormale nach oben abgelenkt. Es ist dies der Sinn, in welchem die Richtung eines Kathodenstrahles erfahrungsgemäss durch eine senkrecht wirkende magnetische Kraft abgelenkt wird. Um sich zu vergewissern, dass dabei wirklich die Richtung des Strahls und die Wellennormale identisch sind, soll die folgende Rechnung dienen.

34. Magnetische Krümmung der Kathodenstrahlen. Es sollen die Bedingungen aufgesucht werden, unter welchen ein Kathodenstrahl eine kreisförmig gekrümmte Bahn einschlägt. Es wird dies natürlich nur mit Annäherung oder für ein kurzes Stück seiner Bahn möglich sein. Im Falle eine senkrecht wirkende magnetische Kraft $\mathfrak{Y}_0$ vorhanden ist, ist ein gekrümmter Kathodenstrahl das einfachste Integral der Gleichungen I') und II') und das einzige, welches sich mit den Grenzbedingungen verträgt.

Die Gleichungen sollen auf cylindrische Coordinaten transformirt werden, und zwar bedeute y die Axialrichtung, x die Radialrichtung und ζ den Polarwinkel. Z sei die tangentiale, X die radiale Componente der elektrischen Kraft, $\mathfrak{Y}_0$ die axiale magnetische Kraft.

Die Gleichungen müssen reducirt werden auf:

$$\varepsilon_0 \frac{\partial X}{\partial t} + X_0 \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = 0. \tag{I' 1}$$

$$\varepsilon_0 \frac{\partial Z}{\partial t} + Z_0 \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = 0. \tag{I' 3}$$

$$\mathfrak{Y}_0 \frac{\partial \mu}{\partial t} = \frac{c_0}{x} \frac{\partial X}{\partial \zeta} - c_0 \frac{\partial Z}{\partial x} - c_0 \frac{Z}{x}. \qquad \text{I}' 5)$$

$$\frac{\alpha_0}{\eta_0 - 1} \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \varepsilon_0 \frac{\partial X}{\partial x} + \varepsilon_0 \frac{X}{x} + \frac{\varepsilon_0}{x} \cdot \frac{\partial Z}{\partial \zeta}. \qquad \text{II}')$$

$$\frac{\eta_0}{\nu_0} \cdot \frac{\partial \mu}{\partial t} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}. \qquad \text{II}'')$$

Wir betrachten nur ein schmales Bündel eines Kathodenstrahles, dessen Dicke $(x - x_0)$ gegen den Krümmungsradius x_0 verschwindet.

Die einfachste Lösung ist folgende:

$$Z = Z_0 + C\left(1 - \frac{x - x_0}{x_0}\right) \sin \frac{2\pi}{\tau}\left(t - \frac{\zeta}{w}\right),$$

$$X = X_0 + A\left(1 - \frac{x - x_0}{x_0}\right) \sin \frac{2\pi}{\tau}\left(t - \frac{\zeta}{w}\right).$$

Die Intensität des Strahles nimmt nach seiner convexen Seite etwas ab. Die Wellenebenen $\zeta =$ Const. liegen radial. Für die Winkelgeschwindigkeit w des Strahles ergibt sich hier nur eine Lösung:

$$w = \frac{1}{x_0} \cdot \frac{\eta_0 - 1}{\alpha_0} \cdot Z_0. \qquad 9)$$

Diese Lösung gilt für longitudinale Strahlen. Transversale Strahlen von diesem Verlaufe sind nicht möglich und können hier schon desshalb nicht als Lösung erscheinen, weil für keine magnetische Transversalcomponente $\mathfrak{Y}$ gesorgt ist.

Man erhält ferner für die Amplituden A und C die Beziehung

$$\frac{A}{C} = \frac{X_0}{Z_0}, \qquad 10)$$

d. h. die elektrischen Schwingungen des Strahles finden in jedem Theile desselben in der dort vorhandenen Richtung der totalen statischen elektrischen Kraft statt.

Endlich ergibt sich

$$\mathfrak{Y}_0 = \frac{\eta_0}{\nu_0} \cdot \frac{c_0}{\varepsilon_0} \cdot \frac{\varkappa_0}{\eta_0 - 1} \cdot \frac{X_0}{Z_0}. \tag{11)}$$

Dies ist die Bedingung, dass der Strahl die Kreisbahn einschlägt. Falls $X_0 = 0$, also die totale elektrische Kraft ohnehin kreisförmig verläuft, so muss nach 11) $\mathfrak{Y}_0 = 0$ sein, d. h. der Strahl folgt genau einer gekrümmten elektrischen Kraftröhre, falls ihn nicht eine senkrecht wirkende magnetische Kraft ablenkt.

Man darf hienach Kathodenstrahlen kleiner Amplitude, welche keine magnetischen Transversalcomponenten besitzen, die Neigung zusprechen, längs der elektrischen Kraftlinien des Feldes zu verlaufen, also elektrische Deflexion zu zeigen.[1]

Kathodenstrahlen, welche durch die Grenzbedingungen mit magnetischen Transversalcomponenten versehen werden, sind jedoch ihrer Richtung nach von dem Verlauf der Kraftlinien entsprechend unabhängiger. Für Kathodenstrahlen grosser Amplitude gilt dies in erhöhtem Masse.

Falls jedoch X_0 nicht Null ist, also die elektrische Kraft nicht kreisförmig verläuft, so ist nach 11) eine senkrecht wirkende magnetische Kraft $\mathfrak{Y}_0$ nothwendig, um den Strahl aus der elektrischen Kraftröhre abzulenken und in die Kreisform zu biegen. Der Ablenkungssinn ergibt sich ebenso wie in Abschnitt 33. Die dort behandelte Drehung der Wellenebene durch eine magnetische Kraft ist überhaupt dieselbe Erscheinung wie die hier behandelte Krümmung der Strahlrichtung.

Nach Gleichung 10) wird jedoch die Schwingungsrichtung des magnetisch gekrümmten Strahles durch die magnetische Kraft nicht beinflusst, sie findet nach wie vor in der Richtung der elektrischen Kraft statt.[2]

---

[1] Das Huyghens'sche Princip stellt hier ausnahmsweise die Richtung des Strahles gut, aber auch hier die Lage der Wellenebene unrichtig dar. Diese haben radiale Lage, während sie nach dem Huyghens'schen Princip im homogenen Felde einander parallel bleiben sollten.

[2] Hertz vergleicht die magnetische Krümmung der Kathodenstrahlen mit der magnetischen Drehung der Schwingungsrichtung des Lichtes. So

Das hier betrachtete dünne, gekrümmte Bündel eines Kathodenstrahles entspricht dem axialen Theile eines begrenzten Kathodenstrahles von grösserer Dicke. Die Ränder desselben verhalten sich complicirter, weil sie magnetische Transversalcomponenten führen. Auch im axialen Bündel wird streng genommen an den Stellen starker Ablenkung des Strahles eine magnetische Transversalcomponente $\mathfrak{Y}$ auftreten, welche ihren Grund hat in der Änderung der Amplitude A nach 10). Diese Änderung verschwindet jedoch vollständig gegen die Änderungen, welche die Schwingung des Strahles einführt, der kurzen Schwingungsdauer derselben wegen.

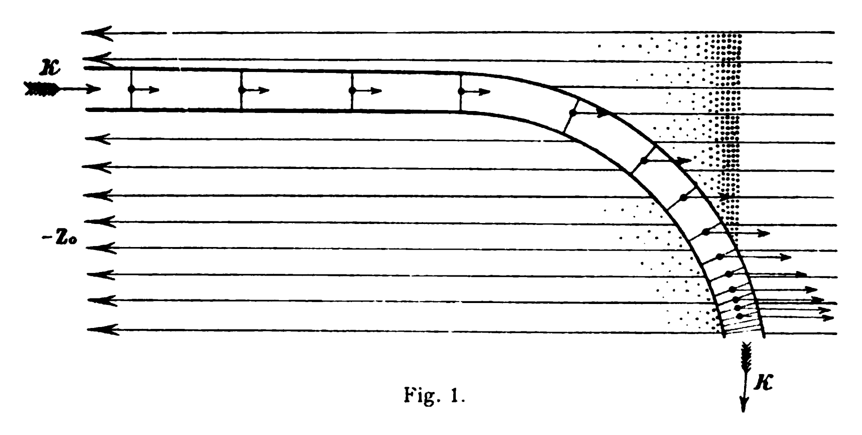


Fig. 1.

Fig. 1 macht das Verhalten eines im homogenen elektrischen Feld durch eine senkrecht wirkende magnetische Kraft gekrümmten Kathodenstrahles anschaulich.

Die parallelen, von rechts nach links gehenden Pfeile bezeichnen die positive Richtung der elektrischen Kraft. Die Stärke der magnetischen Kraft $\mathfrak{Y}_0$, welche von vorn nach hinten geht, ist durch die Dichte der zwischengesetzten Punkte angedeutet. Sie ist in der linken Hälfte des Feldes sehr klein, nach rechts hin immer grösser angenommen, so dass der Strahl nach 11) nach rechts hin immer stärker abgelenkt wird und also ungefähr Kreisform annimmt.

charakteristisch dieser Vergleich auch ist, so trifft er doch nach der hier vorgetragenen Theorie zufällig gerade das Gegentheil der thatsächlich stattfindenden Verhältnisse.

Der Kathodenstrahl KK verläuft in der linken Hälfte des Feldes, wo keine magnetische Kraft wirkt, geradlinig in der Richtung der negativen elektrischen Kraft, in der rechten Hälfte des Feldes biegt er aus dieser Richtung ab. Nach Gleichung 11) ist die Tangente des Winkels, welcher seine Richtung mit der Richtung der negativen elektrischen Kraft einschliesst, überall der Kraft $\mathfrak{Y}_0$ proportional.

Es sind ferner die Wellenebenen des Strahles, welche überall auf seiner Richtung senkrecht stehen, eingezeichnet, und zwar in solchen Distanzen, wie sie der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Strahles entsprechen. Dieselbe nimmt nach 9) mit dem Cosinus des Ablenkungswinkels ab. In der Mitte jeder Wellenebene sind durch einen kleinen Pfeil der Richtung und Grösse nach die elektrischen Schwingungen des Strahles bezeichnet. Dieselben bewahren im homogenen elektrischen Felde ihre Richtung. Was ihre Grösse anbelangt, so wird die Grösse der longitudinalen Componente C im ganzen Verlaufe des Strahles annähernd dieselbe sein. Die radiale Componente A muss aber nach 10) beträchtlich zunehmen. Die Intensität der totalen Schwingung des Strahles muss also desto mehr zunehmen, je weiter der Strahl abgelenkt wird. Gleichzeitig nimmt aber die Fortpflanzungsgeschwindigkeit desselben ab, so dass die in einer halben Wellenlänge des Strahles vorhandene Energie überall denselben Werth hat.

35. Gegenseitige Abstossung der Kathodenstrahlen. Die Gleichungen I), welche für Kathodenstrahlen grosser Amplitude gelten, sind geeignet, die gegenseitige Abstossung zweier Kathodenstrahlen darzustellen. Es ist dies eine nichtsuperpositorische Erscheinung, kann also durch die annähernd giltigen linearen Gleichungen I') nicht erklärt werden, wohl aber durch die nichtlinearen Gleichungen I). Man denke sich als Grenzbedingung in der xy-Ebene elektrische Z-Schwingungen gegeben, wie sie in den zwei Spalten des Crooke'schen Schirmes auftreten. Das Integral der Gleichungen I) wird dann jedenfalls zwei von diesen Spalten ausgehende Strahlen darstellen, und zwar der nichtlinearen Form dieser Gleichungen wegen keine geradlinigen Strahlen, sondern ungefähr hyperbolisch auseinander gekrümmte Strahlen.

36. Magnetischer Longitudinalstrahl. Rein magnetische Longitudinalstrahlen sind der Unsymmetrie der Gleichungen II′) und II″) wegen nicht möglich.

Ein elektrischer Kathodenstrahl, welcher in der Richtung einer zusammenfallenden elektrischen Kraftlinie Z_0 und magnetischen Kraftlinie $\mathfrak{Z}_0$ fortschreitet, zeigt ausser seiner elektrischen Longitudinalschwingung Z auch eine magnetische Longitudinalschwingung $\mathfrak{Z}$.

Diese könnte auf eine Spule, in deren Axe der Strahl fortschreitet, inducirend wirken, ein Experiment, welches unter den Strahlungsexperimenten eine besondere Stellung einnehmen würde.

V. Longitudinales Licht.

37. Longitudinale Antheile des natürlichen Lichtes. Nach der zu Ende des Abschnittes 32 gegebenen Entwicklung soll das transversale Licht im luftverdünnten Raum (wenigstens an seinen Rändern) von Longitudinalstrahlen begleitet werden, welche cohaerent sind und in der Phase um eine Viertelwellenlänge gegen das transversale Licht verschoben sind. Im Folgenden wird dies an Experimenten von Elster und Geitel bestätigt.

Von theoretischem Interesse ist die Frage nach dem Grenzübergang des transversalen Lichtes durch eine Oberflächenschichte, in welcher ε_0 sich ändert, während η_0 nicht den Werth 1 hat. Es findet sich eine solche Schichte an der Grenze jedes luftverdünnten Raumes.

In dieser Grenzschichte muss das transversale Licht die Longitudinalcomponenten, welche es dann im luftverdünnten Raume zeigt, angenommen haben. Es könnte dies so zu Stande kommen, dass die Kräfte des Transversalstrahles auch in dieser Grenzschichte die Laplace'sche Gleichung erfüllen.

Dann gilt nach II′):

$$\frac{\alpha_0}{\eta_0 - 1} \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = X \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial x} + Y \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial y} + Z \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial z}. \qquad 12)$$

Nur dann, wenn die Richtung der elektrischen Schwingungen des Transversalstrahles auf der Richtung des Gefälles

von ε_0 senkrecht steht, ist dann $\frac{d\varepsilon}{\partial t} = 0$ und werden keine Longitudinalstrahlen angeregt.

Die angeregten Longitudinalschwingungen haben, wie durch den Vergleich von 12) mit I') folgt, eine Viertelwellenlänge Phasenunterschied gegen die transversalen Schwingungen X, Y, Z. Sie sind nämlich mit ε gleichphasig.

38. Die Messungen von Elster und Geitel Als ich die jüngst erschienene Arbeit der Herren Elster und Geitel[1] erhielt, erkannte ich auf den ersten Blick, dass bei ihren Entladungsexperimenten theilweise longitudinales Licht auftritt und dass dasselbe eine Phasenverschiebung von einer Viertelwellenlänge gegen das transversale Licht hat.[2]

Dies folgt aus meinem Entladungsgesetz nach Capitel I, also auf rein experimentellem Wege.

Der lichtelektrische Strom J ist nach Elster und Geitel cet. par. der Lichtintensität (dem Quadrat der Amplitude) proportional und befolgt das Gesetz

$$J = A \cos^2 \alpha + B \sin^2 \alpha,$$

worin α das Azimuth der elektrischen Schwingungsebene des einfallenden Lichtes gegen die Einfallsebene ist. Die Constanten A und B haben folgende Werthe

Einfallswinkel i	70°	66°	40°	23°
A	149·6	144·0	161·3	96·8
B	3·2	4·0	7·1	28·1

Diese Gleichung zeigt in der Form:

$$J = A - B) \cos^2 \alpha + B,$$

[1] Elster und Geitel, Abhängigkeit des elektrischen Stromes vom Azimuth und Einfallswinkel des Lichtes (Sitzber. d. Berl. Akad., 1895, S. 209).

[2] Die Herren Elster und Geitel, vergl. l. c. S. 213, Z. 14 v. u. erkennen keineswegs, dass sie es mit longitudinalem Licht zu thun haben.

dass B (die Abweichung von meiner Voraussage, vergl. Cap. I, Abschnitt 5) für grosse Einfallswinkel sehr klein ist, aber für kleine Einfallswinkel stark anwächst.

Bei constantem Einfallswinkel und variablem Azimuth zeigt das Licht eine constante Abweichung B von der Wirkung, welche es haben muss, wenn mein Entladungsgesetz richtig ist und das Licht rein transversal wäre.

Das Licht hat also eine longitudinale Componente und diese ist um eine Viertelwellenlänge verschoben. Dann werden sich die Quadrate der Schwingungen, welche beziehungsweise die transversale und die longitudinale Schwingung des Lichtes in die Elektrodennormale senden, zu dem Quadrat der resultirenden Schwingung in der Normale addiren, welches die lichtelektrische Wirkung bestimmt.

B steht zu der Amplitude L der Longitudinalschwingung in der Beziehung

$$B = L^2 \cos^2 i.$$

$(A-B)$ steht zu der Amplitude T der transversalen Schwingung in der Beziehung

$$(A-B) = T^2 \sin^2 i.$$

Hieraus folgt:

$$\frac{L}{T} = \operatorname{tg} i \sqrt{\frac{B}{A-B}}.$$

Aus den angeführten Messungsresultaten von Elster und Geitel ergibt sich hienach:

Einfallswinkel i	70°	66°	40°	23°
$\frac{L}{T}$	0·407	0 380	0·230	0·287

Ungeachtet die Intensität des bei verschiedenem Einfallswinkel verwendeten Lichtes nicht dieselbe war, ergibt sich ein ziemlich regelmässig, mit dem Einfallswinkel abnehmendes

Verhältniss des Longitudinalantheils L des Lichtes und der anregenden transversalen Amplitude T desselben, was die Übereinstimmung mit der obigen Theorie vervollständigt.

Das transversale Licht zeigt longitudinale Antheile, deren Phase um eine Viertelwellenlänge verschoben ist, deren Amplitude mit dem Einfallswinkel abnimmt und in den angeführten Messungen ungefähr den dritten Theil der Transversalamplitude ausmacht.

Die Gesellschaft zur Förderung deutscher Wissenschaft, Kunst und Literatur in Böhmen hat das Zustandekommen dieser Arbeit unterstützt, wofür ich hiemit meinen Dank sage.

XVIII. SITZUNG VOM 11. JULI 1895.

Der Vorsitzende, Herr Vicepräsident Prof. E. Suess, gedenkt des Verlustes, welchen die kaiserliche Akademie und speciell diese Classe durch das am 8. Juli l. J. erfolgte Ableben des wirklichen Mitgliedes Herrn emerit. k. k. Universitätsprofessors Dr. Josef Loschmidt in Wien erlitten hat.

Die anwesenden Mitglieder geben ihrem Beileide über diesen Verlust durch Erheben von den Sitzen Ausdruck.

Das c. M. Herr Regierungsrath Prof. C. Freiherr v. Ettingshausen in Graz übersendet eine Abhandlung, betitelt: »Über die Nervation der Blätter bei der Gattung *Quercus* mit besonderer Berücksichtigung ihrer vorweltlichen Arten«.

Das c. M. Herr Prof. Franz Exner in Wien übersendet eine von ihm in Gemeinschaft mit Herrn stud. phil. E. Haschek ausgeführte Arbeit, betitelt: »Über die ultravioletten Funkenspectra der Elemente«. I. Mittheilung.

Ferner übersendet Herr Prof. Franz Exner eine im physikalisch-chemischen Institute der Wiener Universität ausgeführte Arbeit von Herrn Hans Benndorf, betitelt: »Über den Druck in Seifenblasen«.

Das c. M. Herr Prof. H. Molisch übersendet eine Arbeit: »Die Ernährung der Algen«. (Süsswasseralgen, I. Abhandlung.)

Das w. M. Herr k. u. k. Hofrath Director F. Steindachner überreicht eine »Vorläufige Mittheilung über einige neue Fischarten aus der ichthyologischen Sammlung des k. k. naturhistorischen Hofmuseums in Wien«.

Das w. M. Herr Intendant Hofrath Fr. Ritter v. Hauer legt eine Abhandlung vor unter dem Titel: »Nautileen und Ammoniten mit ceratitischen Loben aus dem Muschelkalk von Haliluci bei Sarajevo in Bosnien«.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. V. v. Lang überreicht folgende drei Abhandlungen aus dem physikalischen Institute der k. k. Universität zu Innsbruck:

1. »Über das magnetische Kraftfeld einer von elektrischen Schwingungen durchflossenen Spirale«, von Prof. Dr. Ernst Lecher.
2. »Über den Sahulka'schen Gleichstrom im Wechselstrom-Lichtbogen Eisen—Kohle«, von Franz Gold.
3. »Über die Bestimmung der Frequenz von Wechselströmen«, von Theodor Wulf, S. J.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. C. Toldt überreicht eine Abhandlung von Dr. Josef Lartschneider, emerit. Assistent des anatomischen Institutes der k. k. Universität in Wien, betitelt: »Zur vergleichenden Anatomie des Diaphragma pelvis«.

Das w. M. Herr Prof. H. Weidel überreicht folgende drei Arbeiten aus dem I. chemischen Laboratorium der k. k. Universität in Wien:

1. »Über die Bildung von Thiazolderivaten aus Harnsäure«, von H. Weidel und L. Niemiłowicz.
2. »Zur Kenntniss einiger Nitroverbindungen der Pyridinreihe«, von H. Weidel und E. Murmann.
3. »Über die directe Einführung von Hydroxylgruppen in Oxychinoline«, von Julius Diamant.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. Ad. Lieben überreicht eine in seinem Laboratorium ausgeführte Arbeit: »Elektrolytische Bestimmung der Halogene«, von Dr. G. Vortmann.

Ferner überreicht Herr Hofrath Lieben eine Arbeit von Dr. Adolf Jolles in Wien: »Über eine einfache und empfindliche Methode zum qualitativen und quantitativen Nachweis von Quecksilber in Harn«.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. V. v. Ebner überreicht eine Abhandlung: »Über den feineren Bau der Chorda dorsalis von Acipenser«.

Das c. M. Herr Custos E. v. Marenzeller überreicht eine für die Berichte der Commission zur Erforschung des östlichen Mittelmeeres bestimmte Abhandlung mit dem Titel: »Echinodermen«, gesammelt 1893 und 1894.

Ferner überreicht Herr Custos v. Marenzeller unter dem Titel: »Über eine neue *Echinaster*-Art von den Salomonsinseln« die Beschreibung eines *Echinaster callosus* genannten Seesternes.

Schliesslich übergibt Herr Custos v. Marenzeller die vorläufige Beschreibung einer neuen Polychäten-Gattung und Art aus der Familie der Goldkrönchen, unter dem Titel: »*Phalacrostemma cidariophilum*, eine neue Gattung und Art der Hermelliden«.

Derselbe berichtet auch über die Auffindung einer *Myzostoma*-Art in Seesternen unter dem Titel: »*Myzostoma asteriae* n. sp., ein Endoparasit von *Asterias*-Arten«.

Herr Prof. Dr. Ed. Lippmann überreicht eine Arbeit aus dem III. chemischen Laboratorium der k. k. Universität in Wien von Dr. Paul Cohn: »Über Tetraalkyldiamidoazonaphthalin«.

Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:

Julius Plücker's gesammelte wissenschaftliche Abhandlungen. Im Auftrage der königl. Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen herausgegeben von A. Schoenflies und Fr. Pockeis. I. Band. Mathematische Abhandlungen. (Mit dem Bildnisse Plücker's und 73 Textfiguren.) Leipzig, 1895; 8°.

Fresenius C. R., Anleitung zur qualitativen chemischen Analyse. (Mit 1 Tafel und 48 Textfiguren.) Braunschweig, 1895; 8°.

Über den Druck in Seifenblasen

von

Dr. **Hans Benndorf.**

Aus dem physikalisch-chemischen Institute der k. k. Universität in Wien.

(Mit 1 Textfigur.)

Ursprünglich in der Absicht, das Verhalten elektrisirter Seifenblasen zu untersuchen, unternahm ich es, den Druck in Seifenblasen zu messen, da es nicht uninteressant schien, das Gesetz der Proportionalität von Oberflächenspannung mit dem reciproken Krümmungsradius auch für grössere Krümmungsradien einmal experimentell zu verificiren.

Es liegen zwar schon einige derartige Messungen vor, von denen aber nur die Plateau'schen von Interesse sind, als die einzigen, über die ziffernmässige Resultate mitgetheilt sind.

Als Erster hat im Jahre 1844 M. Henry,[1] nach einer mündlichen Mittheilung in der »American Philosophical Society« am 17. Mai, den Druck in Seifenblasen mittelst eines einfachen Wassermanometers gemessen, dessen Stand mit einem Mikroskop abgelesen wurde. Er fand im Grossen und Ganzen das Gesetz der Constanz des Productes aus Druck in den Durchmesser der Blase bestätigt. Doch hatten seine Messungen noch nicht die wünschenswerthe Genauigkeit erreicht, wesshalb er es unterliess, specielle Zahlenangaben zu machen; später scheint er nicht mehr darauf zurückgekommen zu sein.

Dieselbe Methode der Druckbestimmung wendet Plateau[2] an. Er gibt eine ausführliche Beschreibung seiner Versuche

---

[1] Phil. Mag. Vol. XXVI, 1845, p. 542.

[2] J. Plateau, Statique expérimentale et théorique des liquides, 1873, Bd. I, p. 187 ff.

und theilt in einer Tabelle die erhaltenen Zahlenresultate mit. Auf das Nähere darüber werde ich weiter unten zurückkommen.

Eines anderen von Tisley construirten Manometers bediente sich Dewar;[1] dasselbe bestand im Wesentlichen aus einem U-Rohr, dessen einer Schenkel rechtwinkelig umgebogen und in eine enge Röhre ausgezogen war, die genau horizontal gestellt werden konnte; als Manometerflüssigkeit diente Alkohol. Aus der Grösse der Verschiebung des Flüssigkeitsmeniscus im horizontalen Schenkel wurde der Druck bestimmt und es leuchtet ein, dass, im Princip wenigstens, die Empfindlichkeit eines solchen Manometers gegen die eines gewöhnlichen beliebig gross gemacht werden kann, da sie vom Verhältniss der Querschnitte der beiden Schenkel abhängt. In der Sitzung der »Physical Society of London«, wo dieses Instrument ausgestellt war, machte Dewar auch einen Versuch über den Druck in Seifenblasen; ausser diesem Vorlesungsversuch scheinen keine weiteren Messungen gemacht worden zu sein.

Schliesslich hat K. Waitz[2] eine Reihe Versuche gemacht, in denen er allerdings nicht den absoluten Druck in Seifenblasen, sondern nur die Abnahme desselben bei Elektrisirung der Blase misst. Er bedient sich eines einfachen U-Rohres, das mit Wasser gefüllt war, dessen Stand mit einem Mikroskop abgelesen wurde.

Zunächst versuchte ich nun, diese manometrischen Messungen zu wiederholen; allein es glückte mir nicht, weder mit einem gewöhnlichen U-Rohr-Manometer, noch mit einem Tisley'schen Horizontalmanometer, wesentlich genauere Resultate zu erhalten als Plateau, dessen Tabelle ich hier einfüge, um ein Bild der Grössenordnung der Fehler zu geben. In der ersten Columne stehen die Durchmesser der Blasen in Millimeter, in der zweiten die entsprechenden Drucke in Millimeter Wasser und in der dritten das Product beider, welches theoretisch constant sein sollte.

---

[1] Nature, XV, p. 210.

[2] Über eine Methode zur absoluten Messung hoher Potentiale. Wied. Ann., Bd. 37, 1889, S. 330.

d	p	pd
7·55	3·00	22·65
10·37	2·17	22·50
10·55	2·13	22·47
23·35	0·98	22·88
26·44	0·83	21·94
27·58	0·83	22·89
46·60	0·48	22·37
47·47	0·48	22·78
47·85	0·43	20·57
48·10	0·55	26·45
Mittel	....	22·75

Wie man sieht, keine allzu gute Übereinstimmung; selbst wenn man vom letzten abnorm hohen Werthe absieht, betragen die Abweichungen vom Mittel noch gegen 10%.

Was die Messungen mit dem U-Rohr-Manometer anlangt, zeigten sich im Wesentlichen dieselben Übelstände, die schon Plateau ausführlich auseinandersetzt; das Horizontalmanometer erwies sich dagegen trotz seiner viel grösseren Empfindlichkeit unbrauchbar wegen seiner grossen Trägheit, die sich mit kleiner werdenden Drucken natürlich steigert. Abgesehen von lästigen Temperaturschwankungen, zerplatzte die Blase meist, ehe sich der Meniscus im horizontalen Rohre beruhigt hatte.

Nach alledem schien es nothwendig, wollte man sich nicht mit diesem geringen Grade der Genauigkeit begnügen, nach einer anderen Methode sich umzusehen.

Eine solche, allerdings indirecte, bietet sich, wenn man den Druck berechnet aus der Zeit, die die Seifenblase braucht, um sich um ein Gewisses zusammenzuziehen, wenn sie am Ende einer engen Röhre hängend, durch dieselbe die Luft pressen kann.

Aus der unten folgenden Rechnung ergibt sich, in welcher Weise dies geschehen kann. Dieselbe ist angestellt unter der

Voraussetzung, dass Product aus Druck und Durchmesser constant ist; stimmen die Messungen mit der Theorie, so ist zugleich diese Voraussetzung innnerhalb der Grenzen der Versuche erwiesen.

In Folgendem ist zunächst die Theorie, dann die Beschreibung der Versuche gegeben und zum Schluss sollen die erhaltenen Resultate mitgetheilt und in Kürze besprochen werden.

Theorie der Versuche.

Es kamen als Ausflussröhren durchwegs so dimensionirte Röhren in Verwendung, dass für sie das Poiseuille'sche Gesetz galt.

Nach Poiseuille ist bekanntlich

$$dv = \frac{\pi}{8\eta} \frac{R^4}{L} . p . dt, \tag{1}$$

wenn dv das in der Zeit dt ausgeflossene Volum, η den Coëfficienten der inneren Reibung des Gases, R den Radius, L die Länge des Ausflussrohres, p die Druckdifferenz zwischen beiden Enden der Röhre bedeutet.

In unserem Falle, wo an einem Ende des Rohres die Seifenblase hängt, ist unter Annahme der Kugelgestalt $dv = 4\rho^2\pi d\rho$ und $p = \frac{4\alpha}{\rho}$ zu setzen, wenn ρ den Radius der Kugel und α die Capillaritätsconstante der Seifenlösung bezeichnet.

Durch Einsetzen dieser Werthe in die Gleichung 1) ergibt sich

$$\rho^3 d\rho = \frac{1}{8\eta} \frac{R^4}{L} . \alpha . dt;$$

integrirt man nun zwischen den Grenzen ρ_1 und ρ_0, so ergibt sich für α der Werth

$$\alpha = \frac{2\eta L}{R^4} \frac{\rho_1^4 - \rho_0^4}{t_1 - t_0}. \tag{2}$$

Da $\frac{2\eta L}{R^4} = \text{const.}$, muss der Ausdruck $\frac{\rho_1^4 - \rho_0^4}{t_1 - t_0}$ ebenfalls constant sein. Misst man also die Zeit $(t_1 - t_0)$, die verstreicht, während sich die Blase vom Radius ρ_1 auf den Radius ρ_0

zusammenzieht, und bildet den obigen Ausdruck für beliebige Werthe von ρ_1 und ρ_0, so müsste derselbe, soll die Annahme $\rho . p =$ const. richtig sein, constant bleiben.

Zunächst wurden nun aus den experimentell gefundenen Daten nach obiger Formel die Werthe für α berechnet; dabei zeigte sich, dass dieselben nicht constant waren, sondern einen ganz bestimmten, wenn auch verhältnissmässig kleinen Gang zeigten, und zwar in dem Sinne, dass α für kleinere ρ continuirlich kleiner wurde oder was dasselbe ist, dass das Product $2p . \rho$ (Druck × Durchmesser) mit abnehmendem ρ kleiner wird.

Als Grund hievon erwies sich, dass der Rechnung die Annahme einer vollkommenen Kugelgestalt der Seifenblase zu Grunde gelegt war, während sie in Wirklichkeit nur eine Kugelcalotte ist, deren Grösse vom Radius des Rohres abhängt, an dem die Seifenblase befestigt ist.

Legt man der Rechnung die Annahme einer Kugelcalotte zu Grunde, so ergibt sich Folgendes:

Bezeichnet h die Höhe der Kugelcalotte, also den Abstand des tiefsten Punktes der Blase von der Ebene des Mündungsrohres, r den Radius desselben, so ist

$$\rho = \frac{r^2 + h^2}{2h} \quad \text{und} \quad v = \frac{\pi}{6} h (3r^2 + h^2);$$

daraus ist:

$$dv = \frac{\pi}{2}(r^2 + h^2)\, dh \quad \text{und} \quad p = \frac{8\alpha h}{r^2 + h^2}.$$

Setzt man dies in Gleichung 1) ein und integrirt zwischen h_1 und h_0, so erhält man für α

$$\alpha = \frac{2\eta L}{R^4}\left[\frac{1}{16}\frac{h_1^4 - h_0^4}{t_1 - t_0} + \frac{r^2}{4}\frac{h_1^2 - h_0^2}{t_1 - t_0} + \frac{r^4}{4}\log\frac{h_1}{h_0}\right];$$

das Glied $\frac{r^4}{4}\log\frac{h_1}{h_0}$ ist zu vernachlässigen und es bleibt

$$\alpha = \frac{2\eta L}{R^4}\left|\frac{\left(\frac{h_1}{2}\right)^4 - \left(\frac{h_0}{2}\right)^4}{t_1 - t_0} + r^2\frac{\left(\frac{h_1}{2}\right)^2 - \left(\frac{h_0}{2}\right)^2}{t_1 - t_0}\right| \qquad 3)$$

Ferner musste berücksichtigt werden, dass die Seifenblasen in Folge ihres Gewichtes etwas immerhin von der Kugelgestalt abwichen, so dass, da die Verticaldurchmesser der Seifenblasen gemessen wurden, von den gemessenen Werthen eine kleine Grösse, die natürlich experimentell bestimmt werden muss, abzuziehen ist.

Sei $\frac{h_1}{2}$ um δ_1 und $\frac{h_0}{2}$ um δ_0 zu gross gemessen, so ergibt sich, wenn man statt $\frac{h_1}{2}$, $\frac{h_1}{2}-\delta_1$ und statt $\frac{h_0}{2}$, $\frac{h_0}{2}-\delta_0$ in Gleichung 3) einführt nach Vernachlässigung Glieder höherer Ordnung:

$$\alpha = \frac{2\eta L}{R^4}\left|\frac{\left(\frac{h_1}{2}\right)^4-\left(\frac{h_0}{2}\right)^4}{t_1-t_0}+r^2\frac{\left(\frac{h_1}{2}\right)^2-\left(\frac{h_0}{2}\right)^2}{t_1-t_0}-4\frac{\delta_1\left(\frac{h_1}{2}\right)^3-\delta_0\left(\frac{h_0}{2}\right)^3}{t_1-t_0}\right|. \quad 4)$$

Die Grössen h_1, h_0, r, δ_1, δ_0 wurden mit einem Ocularmikrometer gemessen und der bequemeren Rechnung halber ihre Werthe, angegeben in Theilstrichen des Mikrometers, beim Rechnen benutzt. Es tritt daher in Formel 4) vor dem Klammerausdruck noch die 4. Potenz des Reductionsfactors des Ocularmikrometers, den wir n nennen wollen, so dass der endgiltige Ausdruck, der den Rechnungen zu Grunde gelegt wurde, lautet

$$\alpha = \frac{2\eta L}{R^4}n^4\left|\frac{\left(\frac{h_1}{2}\right)^4-\left(\frac{h_0}{2}\right)^4}{t_1-t_0}+r^2\frac{\left(\frac{h_1}{2}\right)^2-\left(\frac{h_0}{2}\right)^2}{t_1-t_0}-4\frac{\delta_1\left(\frac{h_1}{2}\right)^3-\delta_0\left(\frac{h_0}{2}\right)^3}{t_1-t_0}\right|.$$

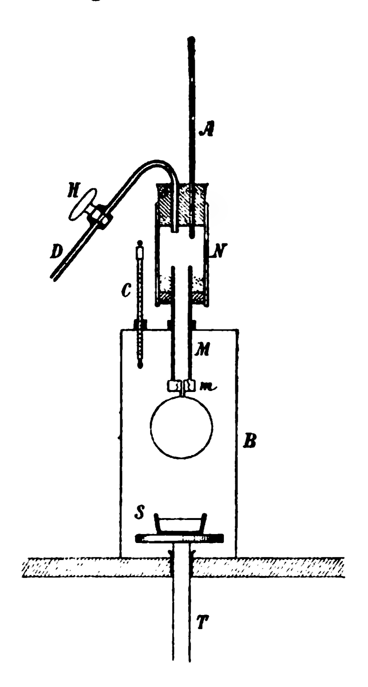
Wurde mit dieser Formel gerechnet, so zeigte sich, dass der oben erwähnte Gang der Werthe für α verschwand und die einzelnen Werthe unregelmässig um einen Mittelwerth vertheilt waren.

Die Versuche.

Die endgiltigen Versuche, deren Resultate unten angegeben werden, wurden in folgender Weise angestellt.

In einem Blechkasten B (siehe nachstehende Figur) von 30 *cm* Höhe, je 16 *cm* Tiefe und Breite war die Vorder- und Rückwand herausgenommen. Die letztere wurde durch einen

aufgeklebten Bogen Schreibpapier ersetzt, während vorne eine Spiegelglasplatte den Kasten abschloss. In seinem Deckel hatte er zwei Öffnungen; in der einen war ein Thermometer *C* eingepfropft, durch die andere führte ein 15 *cm* langes und 2 *cm* weites Glasrohr *M*, an dessen unterem Ende eine Messingfassung *m* mit Schraubengewinde aufgekittet war, in welches verschieden weite, 1 *cm* lange Messingröhrchen eingeschraubt werden konnten; an ihnen hingen die Seifenblasen. Das andere Ende der Röhre *M* führte in das bedeutend weitere Rohr *N* luftdicht durch einen Kautschukstöpsel. Geschlossen wurde das Rohr *N* durch einen doppelt durchbohrten Stöpsel, in dessen einer Bohrung die Röhre *A* stak, durch welche die Luft aus der Seifenblase entweichen sollte. Durch die zweite Bohrung führte ein Glasrohr *D* mit Hahn *H*, durch welches die Luft zum Aufblasen getrieben wurde. Am Boden des Rohres *N* lag Chlorcalcium, um die Luft trocken zu halten. Die Seifenlösung befand sich in einem Schälchen *S* auf einem Tisch *T*, dessen Fuss durch ein Loch in der Mitte des Kastenbodens und der Console, auf der das Ganze stand, nach aussen reichte, so dass man von aussen den Tisch auf- und niederschieben konnte.



Eine einzelne Versuchsreihe verlief nun in folgender Weise:

Zuerst wurde eine Seifenblase etwas grösser, als es zur Messung nothwendig war, aufgeblasen, der Hahn *H* geschlossen und ein etwa an der Blase hängender Tropfen vorsichtig mit Filtrirpapier entfernt, darauf der Kasten mit der Spiegelglasplatte verschlossen.

Nun wurde die Seifenblase mit einem Fernrohr beobachtet, das in einiger Entfernung vom Kasten stand, sie hob sich

scharf vom weissen Papierhintergrunde ab, der durch eine Glühlampe gleichmässig beleuchtet war. Das Fernrohr trug ein 100-theiliges Ocularmikrometer. Der Nullstrich desselben wurde auf den Rand der Röhre, an dem die Seifenblase hing, eingestellt. Während sich nun die Seifenblase langsam zusammenzog, wurde jedesmal, wenn der unterste Punkt der Seifenblase einen Zehnerstrich passirte, auf einem durch ein Uhrwerk gezogenen Papierstreifen auf elektrischem Wege eine Zeitmarke gemacht. Ein parallel geschaltetes Secundenpendel markirte auf demselben Streifen die ganzen Secunden. Aus je 10 solchen Versuchsreihen wurden die Zeitmittel gebildet und mit ihnen dann rechnerisch verfahren.

Als Ausflussröhren für die Luft mussten für verschiedene Grössenordnungen der Seifenblasen verschieden dimensionirte Rohre verwendet werden, um überall eine mittelgrosse Zusammenziehungsgeschwindigkeit zu erhalten. Gar zu langsames Zusammenziehen der Blase musste wegen der Gefahr des frühzeitigen Platzens vermieden werden, während anderseits zu rasches Zusammenziehen die Pointirungsfehler zu gross werden liess. Aus demselben Grunde konnte auch bei ein und derselben Seifenblase nur ein bestimmter Rayon ausgemessen werden.

Es sollen in Folgendem die Resultate von vier Gruppen von Messungen mitgetheilt werden.

I. Die erste wurde ausgeführt am 14. März 1895. Die Länge L und der Radius R der Ausflussröhre waren $L = 14\cdot65$ *cm*, $R = 0\cdot1386$ *cm*, der Radius r des Röhrchens, an dem die Seifenblase hing, $r = 0\cdot7$ *cm*, der Reductionsfactor des Ocularmikrometers $n = 0\cdot0990$, d. h. ein Theilstrich des Mikrometers $= 0\cdot099$ *cm*; es wurden die Seifenblasen von ungefähr 7 *cm* bis 4 *cm* Durchmesser beobachtet.

II. Die zweite Gruppe wurde am 22. März 1895 gemessen. Die entsprechenden Dimensionen sind:

$L = 14\cdot65$ *cm*, $R = 0\cdot1386$ *cm*, $r = 0\cdot75$ *cm*, $n = 0\cdot0990$

von circa 8—5 *cm* Durchmesser.

III. Die dritte Gruppe ist ausgeführt am 22. März 1895.

$L = 30\cdot00$ *cm*, $R = 0\cdot1276$ *cm*, $r = 0\cdot5$ *cm*, $n = 0\cdot0990$,

von circa 6—3 *cm* Durchmesser.

IV. Die vierte Gruppe ist ausgeführt worden am 23. März 1895.

$L = 25 \cdot 7\, cm, \quad R = 0 \cdot 07795, \quad r = 0 \cdot 25\, cm, \quad n = 0 \cdot 0378$

und beobachtet wurde zwischen circa 4—2·3 *cm* Durchmesser.

Bei allen Messungen schwankte die Temperatur nur wenig um 24° C.

Als Seifenlösung wurde, nach dem Plateau'schen Recept, 1 Gewichtstheil geschabter Marseiller Seife in 40 Theilen Wasser gelöst und dann noch 30 Theile Glycerin hinzugesetzt. In den ersten drei Gruppen ist ein und dieselbe Lösung benutzt.

Als Coëfficient der inneren Reibung ist der Werth $0 \cdot 000179 \left(\frac{g}{cm\,\text{sec.}}\right)$ den Rechnungen zu Grunde gelegt.

Was die Werthe der δ anlangt, so wurde für verschiedene Blasengrössen der Unterschied zwischen Horizontal- und Verticaldurchmesser mit dem Ocularmikrometer gemessen und gleich 4δ angenommen. Die δ sind natürlich für die einzelnen Blasen gleicher Grösse nicht gleich, da eine Spur eines Tropfens am unteren Ende der Blase dieselbe gleich merklich verlängert und es nicht immer gelingt, die überschüssige Flüssigkeit in demselben Grade zu entfernen.

Es sind daher die den Rechnungen zu Grunde gelegten Werthe der δ Mittel aus einer Reihe von Beobachtungen und nur als ungefähre Annäherung zu betrachten.

In der nachfolgenden Tabelle sind alle Daten noch einmal übersichtlich zusammengestellt und, um den Einfluss der Correctionsglieder auf die Werthe von α zu zeigen, in der vorletzten Columne die Werthe von α zusammengestellt, die sich durch Rechnung mit der einfachen Formel

$$\alpha = \frac{2\eta L}{R^4} n^4 \frac{\rho_1^4 - \rho_0^4}{t_1 - t_0}$$

ergeben.

Man sieht, dass sie im Allgemeinen grösser sind, als die corrigirten Werthe, und zugleich innerhalb der einzelnen Gruppen den obenerwähnten Gang.

Gruppe	R	L	r	n	h_1	h_0	$+\delta_1$	$+\delta_0$	t_1-t_0 in Sec. als Mittel aus	Anzahl der Messungen	α $\frac{Dyn.}{cm}$ ohne	mit
	in Centimetern				in Theilstrichen des Ocularmikrometers						Correctur	
II	0·1386	14·65	0·75	0·0990	80	70	2·8	2·2	47·85	10	30·18	28·29
II	0·1386	14·65	0·75	0·0990	80	60	2·8	1·7	79·79	10	29·89	28·21
II	0·1386	14·65	0·75	0·0990	80	50	2·8	1·3	99·64	10	29·67	28·17
II	0·1386	14·65	0·75	0·0990	70	60	2·2	1·7	31·94	10	29·47	28·10
I	0·1386	14·65	0·70	0·0990	70	60	2·2	1·7	32·02	10	29·40	28·01
II	0·1386	14·65	0·75	0·0990	70	50	2·2	1·3	51·79	10	29·21	28·05
I	0·1386	14·65	0·70	0·0990	70	50	2·2	1·3	51·56	10	29·34	28·16
I	0·1386	14·65	0·70	0·0990	70	40	2·2	1·0	62·99	10	29·00	28·01
III	0·1276	30·00	0·50	0·0990	60	50	1·7	1·3	55·30	10	29·40	28·17
II	0·1386	14·65	0·75	0·0990	60	50	1·7	1·3	19·85	10	28·78	27·98
I	0·1386	14·65	0·70	0·0990	60	50	1·7	1·3	19·55	10	29·23	28·39
III	0·1276	30·00	0·50	0·0990	60	40	1·7	1·0	86·46	10	29·23	28·09
I	0·1386	14·65	0·70	0·0990	60	40	1·7	1·0	30·97	10	28·61	28·02
III	0·1276	30·00	0·50	0·0990	60	30	1·7	0·8	101·48	10	29·10	28·09
III	0·1276	30·00	0·50	0·0990	50	40	1·3	1·0	31·16	10	28·78	27·95
III	0·1276	30·00	0·50	0·0990	50	30	1·3	0·8	46·18	10	28·63	27·99
III	0·1276	30·00	0·50	0·0990	40	30	1·0	0·8	15·02	10	28·31	28·07
IV	0·07795	25·70	0·25	0·0378	100	90	2·5	2·2	35·85	10	30·51	29·20
IV	0·07795	25·70	0·25	0·0378	100	80	2·5	1·8	61·68	10	30·44	29·12
IV	0·07795	25·70	0·25	0·0378	100	70	2·5	1·6	79·20	9	30·48	29·26
IV	0·07795	25·70	0·25	0·0378	100	60	2·5	1·5	91·12	8	30·37	29·23
IV	0·07795	25·70	0·25	0·0378	90	80	2·2	1·8	25·84	10	30·33	29·01
IV	0·07795	25·70	0·25	0·0378	90	70	2·2	1·6	43·68	9	30·29	29·14
IV	0·07795	25·70	0·25	0·0378	90	60	2·2	1·5	55·19	8	30·33	29·30
IV	0·07795	25·70	0·25	0·0378	80	70	1·8	1·6	17·86	9	30·18	29·30
IV	0·07795	25·70	0·25	0·0378	80	60	1·8	1·5	29·42	8	30·26	29·48
IV	0·07795	25·70	0·25	0·0378	70	60	1·6	1·5	11·67	7	30·11	29·48

Die Abweichungen vom Mittel innerhalb der einzelnen Gruppen betragen bei den ersten drei Gruppen nirgends mehr als 1‰, bei der vierten Gruppe nicht ganz 2‰; diese grössere Abweichung erklärt sich leicht daraus, dass in der vierten

Gruppe die kleinsten Seifenblasen gemessen wurden, ein kleiner Fehler in der Bestimmung des Durchmessers also schon sehr viel ausgibt.

Was die Übereinstimmung der einzelnen Gruppen untereinander anlangt, so ist es wohl dem Zufall zuzuschreiben, dass die Mittelwerthe der Gruppe III und I und II (Mittel aus I und II: 28·12, aus III: 28·06) so gut stimmen, wenn man bedenkt, dass dabei verschiedene Ausflussröhren verwendet sind.

In Gruppe IV, bei der eine andere Seifenlösung verwendet wurde, ist der Mittelwerth von α circa $5^0/_0$ höher als bei den ersten drei Gruppen, was bei einer so schlecht definirten Substanz, wie es die Seifenlösung ist, nicht Wunder nehmen kann.

Alles in Allem ist die Übereinstimmung innerhalb der einzelnen Gruppen, auf die es hier ankommt, eine befriedigende zu nennen und die Genauigkeit circa die 10-fache der von Plateau erreichten.

Berechnet man aus den gefundenen Werthen für α die Plateau'sche Constante $c = 2\rho p$ in $\frac{mg}{mm}$, so ergibt sich 23·36, ein Werth, der in die Plateau'schen Werthe hineinfällt.

Wir sehen also, dass die gemachte Voraussetzung $p = \frac{4\alpha}{\rho}$ durch die Experimente als richtig sich bestätigt hat, dass innerhalb der Versuchsgrenzen, also bei Krümmungsradien zwischen 4 *cm* und 1 *cm* das Gesetz erwiesen ist, dass der Oberflächendruck bei Flüssigkeiten umgekehrt proportional dem Krümmungsradius ist.

Diese Arbeit wurde im physikalisch-chemischen Institute der Universität Wien ausgeführt und es sei mir an dieser Stelle gestattet, Herrn Prof. F. Exner für die vielseitige Unterstützung, die er mir zu Theil werden liess, meinen herzlichsten Dank auszusprechen.

Über das magnetische Kraftfeld einer von elektrischen Schwingungen durchflossenen Spirale

von

Prof. Dr. **Ernst Lecher.**

Aus dem physikalischen Institute der k. k. Universität in Innsbruck.

(Mit 4 Textfiguren.)

In bekannten Versuchen von Elihu Thomson[1] und V. v. Lang[2] wird ein Drahtring durch eine vom Wechselstrom durchflossene Spirale abgestossen. v. Lang citirt da eine calorimetrische Messung von mir, welche die inducirte Stromstärke im Drahtringe zu schätzen gestattet. Diese Stromstärke bestimmte ich in folgender Notiz experimentell noch auf eine andere Weise, wobei aber die Bedingungen so vereinfacht wurden, dass auch gleichzeitig eine theoretische Berechnung des Verhältnisses der Stromstärken in beiden Kreisen möglich war. Zu dem Zwecke wurde die Frequenz der Wechselströme möglichst gesteigert und die Verwendung von Eisen ganz vermieden.

Zuerst bestimmte ich experimentell das magnetische Kraftfeld des Wechselstromes; hierauf wurden im Solenoide und im Drahtringe zwei entgegengesetzte Gleichströme in ihrem Verhältnisse so lange geändert, bis dasselbe Feld wie früher entstand. Eine Berechnung dieses Verhältnisses ergab dann unter so vereinfachten Bedingungen eine überraschend genaue Übereinstimmung mit den beobachteten Thatsachen.

---

[1] E. Thomson, »Was ist Elektricität?« Übersetzt von H. Discher. Leipzig und Wien, 1890.

[2] Diese Sitzungsber., 102, S. 523, 1893.

F ist ein zwischen Magnetpolen überspringender Funke von 10000 Volt Potentialdifferenz, erzeugt durch Transformation des 100 Volt-Wechselstromes der Innsbrucker Centrale mit circa 43·5 Schwingungen per Secunde. A und A sind zwei Leydnerflaschen mit 5000 cm^2 Fläche und einer (nur sehr) ungefähren[1] Glasstärke von 0·2 *cm*. SS' ist die aus 38 Windungen bestehende Primärspule; äusserer Durchmesser der Spule 22·8, Länge derselben 29·5, Durchmesser des blanken Drahtes 0·3 und Durchmesser des umsponnenen 0·69 *cm*. Der secundäre Inductionsring ss ist in 5·6 Entfernung von S' (Rand der Spule bis zum Rand des Ringes) so angeordnet, dass seine Enden mn

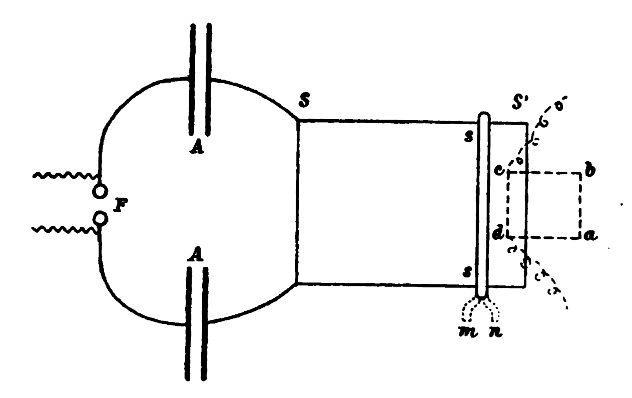


Fig. 1. 1/10 natürl. Grösse. (Von oben gesehen).

durch Heben eines mit Hg gefüllten Troges rasch mit einander elektrisch verbunden werden können. Der mittlere Durchmesser dieses Secundärkreises ist 24·5, der Durchmesser des blanken Drahtes 0·85, des umsponnenen 1·0 *cm*. Die Frequenz der elektrischen Schwingungen braucht nicht genau bestimmt zu werden, es genügt zu wissen, dass n über 10000 liegt.

Die Richtung der Kraftlinien wurde experimentell in folgender Weise bestimmt.

abcd (Fig. 1 und 2) ist ein rechteckiger Drahtrahmen, bestehend aus circa 300 Windungen eines 0·04 *cm* dicken Drahtes; ab steht horizontal und senkrecht auf der Axe SS' und ist als

---

[1] Es wurden zur Herstellung dieser Flaschen sogenannte Christusstürze verwendet, deren Glas sehr unrein war.

Rotationsaxe fixirt, indess die Lage von *cd* und somit die Neigung des Rahmens leicht geändert werden kann. Die Drahtenden führen über *c* und *d* zu einem dreizelligen Quadrantenelektrometer mit drei Lemniscaten; letztere und die eine Quadrantenserie sind mit *c*, die andere Quadrantenserie ist mit *d* und der Erde verbunden. Liegen nun *ab* und *cd* in derselben Kraftlinie, so heben sich die in *ab* und *cd* inducirten elektromotorischen Kräfte auf und das Elektrometer bleibt ruhig.[1] Ich verwendete drei verschiedene Spulen *abcd*; bei allen war $ab = cd = 6 \cdot 6$ *cm*, hingegen hatte $ad = bc$ die Längen 5, respective 8 oder $12 \cdot 5$ *cm*.

Da aber der Ausschlag des Elektrometers stets nach derselben Seite geht, ob nun *cd* über oder unter der Kraftlinie von *ab* ist, so wurde zuerst *c* und *d* mit einem vierspuligen Galvanometer (von H. du Bois und H. Rubens) verbunden, dessen vier 10000 Ω Rollen parallel geschaltet waren und die Spule *SS'* mit Gleichstrom von etwa 50 Ampère beschickt. Jetzt ist der Inductionsstoss in *abcd* bei Stromschluss je nach der Lage von *cd* positiv oder negativ, die Einstellung auf Null geht daher ziemlich rasch. Wir erhalten so eine Sehne einer Kraftlinie des Gleichstromes.

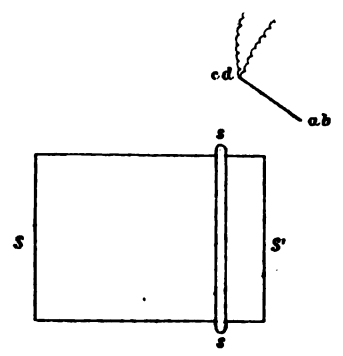


Fig. 2. $^1/_{10}$ nat. Grösse. (Von der Seite gesehen.)

Um diese Lage zu fixiren, wird durch eine 8 *m* vor *SS'* brennende Bogenlampe der Schatten der ganzen Einstellung scharf auf ein hinter *SS'* gespanntes Papier geworfen. Passende Merkzeichen gestatten genau, die Mitte der Drahtmasse *ab* und *cd* zu finden, die dann auf dem Papier mittelst des Schattens durch Punkte bezeichnet wurden.

Nachdem dies geschehen, wird die in den meisten Fällen benachbarte Einstellung mit den elektrischen Schwingungen durch das Elektrometer gesucht und diese wieder nach dem

[1] Die grosse Empfindlichkeit des Elektrometers hat leider den Nachtheil einer sehr langsamen Schwingungsdauer (fast $^3/_4$ Minuten).

Schattenbilde aufgezeichnet. Durch Bestimmung möglichst vieler Punkte, wobei alle drei verschieden grossen Rahmen *abcd* verwendet werden, gelingt es, die Curven sehr genau zu ziehen.

Als erstes wohl zu erwartendes Resultat ergab sich, dass die Gleichstrom-Kraftlinien und die Kraftlinien der hier angewendeten elektrischen Schwingungen identisch sind, so lange *ss* nicht geschlossen oder nicht über den Ring geschoben ist.[1]

War so die Richtung der Wechselstrom-Kraftlinien und ihre Anzahl[2] bei ungeschlossenem Inductionsringe bestimmt, so geschah dann dasselbe mit geschlossenem Ringe *ss*. Das

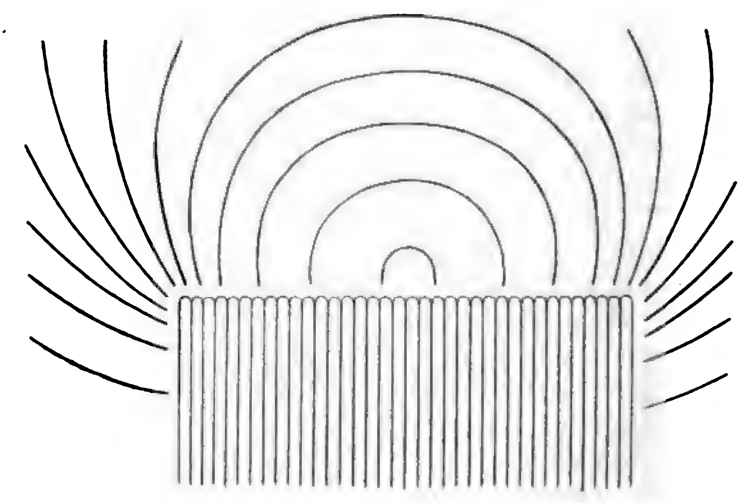


Fig. 3. $^1/_5$ natürl. Grösse.

Resultat gibt Fig. 3 für den ersten und Fig. 4 für den zweiten Fall, wobei immer nur die obere Hälfte der Spule gezeichnet ist.

Besondere Schwierigkeiten machte in Fig. 4 der Raum über *s*. Hier wurden natürlich viel mehr Linien bestimmt, als

[1] Gleichzeitig auftretende elektrostatische Spannungen gaben keinen merklichen Einfluss auf den Verlauf der Linien. Um dies zu sehen, wurden zwei kleine Condensatorplatten von 30 *cm* Durchmesser zu beiden Seiten von *abcd* mittelst eines Tesla'schen Öltransformators auf mindestens 100.000 V. Potentialdifferenz geladen. Die Einstellungen der Spulen blieben so ziemlich die gleichen, die hohen Spannungen machten zwar die Ablesungen unsicher, ein eventueller Einfluss ist aber minimal. Es war die Aufsuchung dieser Thatsache der eigentliche Ausgangspunkt der Arbeit.

[2] Wie bei Zuchristian, diese Sitzungsber., 103, S. 943, 1894.

in der Figur gegeben sind. Interessant ist, dass man oft vier verschiedene Null-Lagen des Rahmens *abcd* hat, z. B. von 1 nach 2, oder nach 3, 4 oder 5.

Ein einfacher Blick auf Fig. 4 zeigt den Thomson—Lang'schen Abstossungseffect. Der Ring *s* erhält hier in seinem oberen Theile einen Impuls, der circa unter 45° nach rechts aufwärts gerichtet ist. Dieser Winkel wird umso kleiner, je mehr *s* an den Rand rückt.

Interessant ist auch, dass die Anzahl[1] der Kraftlinien durch Schliessen des secundären Kreises nicht geändert wird; bei

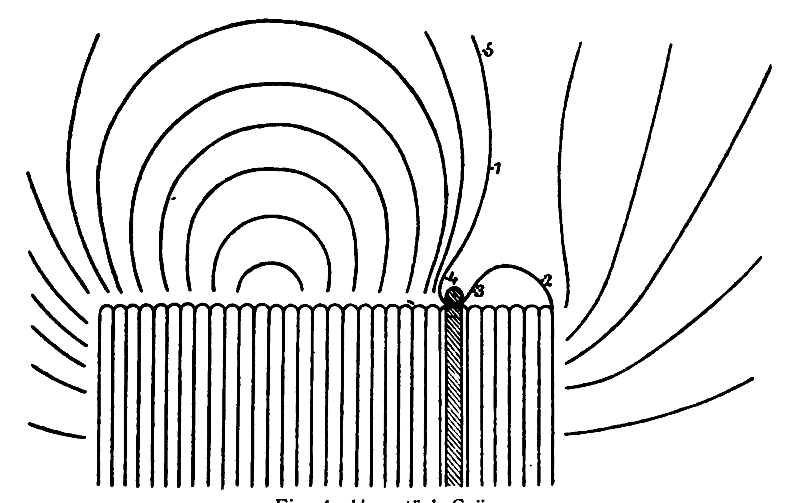


Fig. 4. 1/5 natürl. Grösse.

elektrischen Schwingungen muss die ganze Energie abwechselnd elektrostatische oder magnetische Energie sein.

Theoretisch ist die Phasenverschiebung φ des secundären Stromes gegeben durch

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{W_2}{2\pi n L_2}.$$

Hier bedeutet n die Frequenz der Schwingungen, W_2 den Widerstand des secundären Kreises, nämlich 330000 *c.g.s* Einheiten und L_2 dessen Selbstinductionscoëfficienten, der 596 *c.g.s* Einheiten ist, berechnet nach Blathy's Formel[2]

[1] Diese Anzahl ist in willkürlichem Maassystem gezeichnet.

[2] Elektr. techn. Z. Berlin, 11, S. 346, 1891.

$$4\pi r\left\{0\cdot5794+\log n\frac{2r}{d}-\frac{d}{r}-\ldots\right\},$$

wo $r = 12\cdot25$ und $d = 0\cdot85$ sind.

Das gibt für $\mathrm{tg}\,\varphi$ ungefähr $-\frac{100}{n}$. Da nun n gewiss über 10000 liegt, ist φ fast 180°, d. h. inducirender und inducirter Strom laufen bei dieser Frequenz schon fast entgegengesetzt.

Man muss daher genau das gleiche Feld wie in Fig. 4 auch dadurch erhalten können, dass man zwei Gleichströme in entgegengesetzter Richtung durch SS' und ss sendet. Es wurde zuerst der Rahmen *abcd* in die Lage 12 gebracht und dann das Verhältniss zweier solcher Gleichströme so lange geändert, bis beim Stromschluss durch *abcd* kein Inductionsstoss ging. Das wurde erreicht, wenn durch SS' 0·764 und durch ss 5·21 Ampère gingen. Dann trat aber beim Stromschlusse auch keine Induction auf, wenn *abcd* die Lagen 13, 14 oder 15 hatte. Ebenso wurden andere Stellen des Kraftfeldes geprüft und immer, wenn das Verhältniss des Stromes in SS' zu dem in ss $\frac{0\cdot764}{5\cdot21} = 0\cdot147$ war, ergab sich derselbe Verlauf der Kraftlinien.

Es stehen somit auch bei den elektrischen Schwingungen die primäre Stromstärke J_1 in SS_1 und die Intensität J_2 des entgegengesetzt fliessenden secundären Stromes in ss im Verhältnisse 0·147.

In unserem Falle lässt sich dieses Verhältniss aber auch theoretisch leicht berechnen. Da keinerlei Capacitäten eingeschaltet sind, hat man, wenn M der gegenseitige Inductionscoëfficient von SS' auf ss ist

$$\frac{J_1}{J_2} = \frac{\sqrt{W_2^2+(2\pi n)^2L_2^2}}{2\pi n M}.$$

Es war $W_2 = 330000$ und $L_2 = 596$, n mindestens 10000, somit verschwindet W_2^2 gegen den zweiten Ausdruck und es bleibt

$$\frac{J_1}{J_2} = \frac{L_2}{M}.$$

Zur Bestimmung schliesslich dieses M wendete ich die bekannte Vergleichungsmethode Maxwell's mit einem Normalsystem an, dessen M_1 sich nach der Formel von Himstedt[1] mit beliebiger Genauigkeit rechnen liess; so fand ich für M 3923 $c.g.s$ Einheiten.

$\frac{J}{J_1}$ soll somit theoretisch 0·152 sein, indess obige experimentelle Methode dafür 0·147 lieferte. Die Übereinstimmung ist bei der grossen Anzahl der gemessenen Grössen und der Thatsache, dass die an die Oberfläche drängenden Schwingungen andere Inductionsverhältnisse finden, als die gerechneten, eine genauere, als man von vorneherein erwarten durfte.

---

[1] Wied. Ann. 23, S. 547, 1885.

Über den Sahulka'schen Gleichstrom im Wechselstromlichtbogen Eisen—Kohle

von

Franz Gold.

Aus dem physikalischen Institute der k. k. Universität in Innsbruck.

(Mit 2 Textfiguren.)

Fr. Sahulka[1] stellte durch eine Reihe von Versuchen fest, dass im Wechselstromlichtbogen zwischen einer Eisen- und Kohlenelektrode ein verhältnissmässig starker Gleichstrom in der Richtung Eisen—Kohle auftrete. Die Resultate wurden durch die ablenkende Einwirkung des Stromes auf eine Magnetnadel gewonnen, wodurch von vornherein die Möglichkeit der Fehlerquelle nicht ganz ausgeschlossen erscheint, dass der beobachtete Gleichstrom durch den Einfluss des Wechselstromes auf die Magnetnadel zu erklären sei.[2]

Ich machte daher dieselben Versuche nochmals, aber mit Benützung eines Kupfervoltameters zur Constatirung des Gleichstromes. Dabei hatte ich unter dem Übelstande zu leiden, dass bei mir die Messung längere Zeit dauerte. Nun ist es, wie wiederholte Versuche zeigen, nicht gleichgiltig, ob die Eisenelektrode einen ausgebildeten Tropfen trägt oder nicht, ob der Bogen ruhig brennt oder ob er spritzt; desshalb schaltete ich ohne Stromunterbrechung das Kupfervoltameter durch einen

---

[1] Sahulka, diese Berichte, 103, S. 414, 1894.

[2] Nur bei besonders gehärteten Stahlmagneten übt der Wechselstrom keine richtende Kraft aus. Die Magnetnadeln der gewöhnlichen Tangentenboussole u. dergl. werden durch Wechselströme stark abgelenkt, wobei die Richtung von der Anfangslage der Nadel abhängig ist.

Nebenschluss rasch aus, sowie der Bogen unruhig wurde. Da dies jedoch nicht immer bewirkt werden konnte, so geben die folgenden Zahlen nur Näherungswerthe an. Die Stärke und die Beschaffenheit der Elektroden war dieselbe, wie sie Sahulka anwendete, nämlich ein Eisenstab von 4 *mm*, eine Dochtkohle von 10 *mm* Durchmesser. Die Fläche der Kupferelektroden war je 160 cm^2.

In der folgenden Tabelle steht an erster Stelle die Stromstärke des Wechselstromes (A), welche durch Regulirung des Lichtbogens ohne Änderung des vorgeschalteten Widerstandes constant erhalten wurde, an zweiter Stelle die Dauer der einzelnen Versuche (T), an dritter die Gleichstromstärke (A'), welche das Kupfervoltameter lieferte. Die Stellung der Elektroden war eine verticale, und zwar Eisen unten, Kohle oben.

A	T	A'
5	15 Minuten	3·20 Ampère
6	15 »	4·05 »
7	20 »	4·75 »
7	20 »	4·76 »

Die folgende Tabelle enthält die Werthe, welche sich ergaben, wenn Eisen oben und Kohle unten war.

A	T	A'
5	15 Minuten	3·07 Ampère
5	15 »	3·16 »
5	15 »	3·29 »
6	15 »	3·88 »
6	15 »	3·89 »
6·6	15 »	4·23 »
7	15 »	4·78 »
7	15 »	4·62 »
7	10 »	4·67 »
8	15 »	5·59 »

Zu ähnlichen Resultaten gelangte ich bei horizontaler Lage der Spitzen. Es ist somit der Sahulka-Effect von der Lage der Spitzen unabhängig. Die Versuche mit höheren

Stromstärken mussten wegen des starken Schmelzens des Eisens aufgegeben werden.

Ausserdem zeigte sich regelmässig die merkwürdige Thatsache, dass der auftretende Gleichstrom weit schwächer war, wenn die Eisenelektrode während der Versuchszeit öfter sprühte, was immer eintrat, wenn dieselbe keinen Tropfen trug. So gab z. B. ein 8 Ampère starker Strom nur 4·83 *A*, oder gar nur 4·27 *A* statt 5·59 *A*, wenn der Lichtbogen sprühte.

Einen weiteren und sehr bequemen Beweis für das Auftreten des Sahulka'schen Gleichstromes bietet folgender Versuch. Bekanntlich lenkt ein Magnet den Gleichstromlichtbogen nach einer, den Wechselstromlichtbogen nach zwei Seiten ab; ein Wechselstromlichtbogen Eisen—Kohle wird durch den Magneten so abgelenkt, als ob von Eisen zu Kohle ein Gleichstrom flösse.

Nachdem so die von Sahulka entdeckte Thatsache über jeden Zweifel gesichert erscheint, liegt die Idee nahe, eine Erklärung dieser merkwürdigen Erscheinung zu suchen. Zunächst stellte ich Versuche an über das Verhalten des Gleichstromlichtbogens Eisen—Kohle. Als Stromquelle diente mir eine Accumulatorenbatterie von 60 Volt. Ein Hitzdrahtvoltmeter diente zur Messung der Potentialdifferenz des Gleichstrom-Lichtbogens, ein Ampèremeter zur Bestimmung der Stromstärke; ausserdem wurde noch ein Rheostat und ein Commutator eingeschaltet. Die Bogenlänge wurde durch einen Keil gemessen. Die Beobachtungen geschahen in folgender Weise. Zuerst wurde Stromstärke, Potentialdifferenz und Bogenlänge für eine Stromrichtung bestimmt, dann wurde der Commutator umgelegt und, nachdem durch Regulirung des Lichtbogens dieselbe Stromstärke erzielt worden war, Spannung und Bogenlänge wieder gemessen. Der vorgeschaltete Widerstand blieb derselbe. Dabei zeigte sich, dass die Potentialdifferenz im zweiten Falle ganz dieselbe war, wie im ersten, bis auf wenige Ausnahmen, in denen übrigens der Unterschied höchstens 0·2 V. betrug. Anfangs wurden die Versuche mit denselben Elektroden angestellt, wie bei Anwendung von Wechselstrom. Da sich aber in der 10 *mm* starken Dochtkohle bald ein Krater bildete, der die Messung des Bogens sehr erschwerte, so wurden auch

Kohlen von 4 und 6 *mm* Dicke verwendet; das Eisen war wie früher 4 *mm* stark.

In der folgenden Tabelle enthält die erste Columne (*A*) die Stromstärke, die zweite (*V*) die Potentialdifferenz, die dritte (*B*) die Bogenlänge bei der Stromrichtung Kohle—Eisen, die vierte (*B'*) die Bogenlänge für die entgegengesetzte Stromrichtung, die fünfte (V.-A.) die Volt-Ampère, die sechste (*D*) die Kohlenstärke. Aus den vielen hundert Beobachtungen sollen nur jene angeführt werden, welche dann vorgenommen wurden, wenn der Lichtbogen ruhig und ohne Sprühen brannte und die Eisenelektrode einen ausgebildeten Tropfen trug. Es sind Mittelwerthe die aus Sätzen von 5 bis 15 Ablesungen zusammengestellt sind. An erster Stelle (I.) befindet sich das Resultat aus einer Reihe von Beobachtungen, bei denen ein kleinerer Widerstand eingeschaltet war, als in (II.).

A	*V*	*B*	*B'*	V.-A.	*D*
		mm			*mm*
		I.			
3·5	39·5	3	2·4	138	4
4	36	2·75	2·26	144	
4·5	33	2·38	1·9	148	
5	30	2·0	1·5	150	
5·5	27·6	1·9	1·16	151	
6	25	1·6	1	150	
6·5	22	1·0	0·8	143	
4	36	3·45	2	144	6
4·5	33	3	1·85	148	
5	29·7	2·	1·45	148	
5·5	27	1·6	1	148	
6	24·2	1·1	0·88	145	
6·5	22	0·98	0·82	143	
5	31	4	2·8	155	10
5·5	28	2·6	1·6	154	
6	25·7	2·3	1·3	154	
6·5	23	1·65	0 95	149	
		II.			
3·5	33·2	2·83	1·93	116	4
4	30 06	2·5	1·6	120	
4 5	26·4	1·99	1·09	118	
4·7	23·7	1·4	0·88	121	
5	21·7	1	0·78	108	

Aus den vorliegenden Zahlen erhellt:

a) Dass die Bogenlänge bei derselben Stromstärke und derselben Spannungsdifferenz bedeutend geringer ist, wenn der Strom im Lichtbogen von Eisen zu Kohle fliesst, als für die entgegengesetzte Richtung;

b) dass sich auf diesem Wege kaum ein allgemeines Gesetz ableiten lassen wird, welches das Verhältniss zwischen den drei Grössen und der Stromrichtung ausdrücke, da die ungleichmässige Zusammensetzung und die inhomogene Beschaffenheit der Elektroden wahrscheinlich einen grossen Einfluss ausübt. Ausserdem ist noch zu beachten, dass, wie der Tropfen an der Eisenelektrode sich beim Erhitzen ziemlich stark ausdehnt und bei der Erkaltung zusammenzieht, so auch der Lichtbogen immerwährend seinen Ort wechselt und meistentheils nicht von der Spitze, sondern von der Seite des Tropfens zur Kohle überspringt, wie dies die Projection des Lichtbogens deutlich zeigt;

c) dass die geleistete Arbeit bei derselben Kohlenstärke und demselben äusseren Widerstande fast gleich ist für verschiedene Combinationen.

Was schliesslich die Werthe betrifft, welche die Bogenlänge dann zeigte, wenn die Eisenelektrode keinen Tropfen trug, so waren dieselben für beide Stromrichtungen fast gleich, eher noch grösser für die Richtung Kohle—Eisen. Die genaue Bestimmung derselben wurde durch folgende Umstände sehr erschwert. Sobald der Tropfen, zu dessen Bildung oft eine längere Zeit nothwendig war, herabgefallen war, zerfranste sich die Eisenelektrode, zeigte viele Spitzen, auf die der Lichtbogen abwechselnd übersprang; zugleich sprühte das Eisen sehr heftig bei einem nur etwas stärkerem Strome.

Nachdem diese Erfahrungen mit Gleichstrom eine Erklärung des Sahulka-Effectes nicht lieferten, so stellte ich neue Versuche an, um zu sehen, ob vielleicht die Ursache dieser Erscheinung eine neu auftretende Gegenkraft sei, wie noch trotz der Arbeiten Lecher's[1] und Stenger's[2] für zwei

[1] Lecher, diese Ber., 95, S. 629, 1887. Wied. Ann., 33, S. 609, 1888.
[2] Stenger, Wied. Ann. 45, S. 33, 1892.

Kohlenelektroden oft angenommen wird. Die ersten Versuche fanden auch genau nach der Methode Lecher—Stenger statt, nur wurde an Stelle einer Tangentenboussole ein ballistisches, einseitig gehemmtes Galvanometer verwendet. Trotzdem die mechanische Hemmung eine ergiebige Fehlerquelle bot, so schien es doch, dass die Leitungsfähigkeit des Lichtbogens Kohle—Eisen von der Richtung des Hauptstromes abhänge.

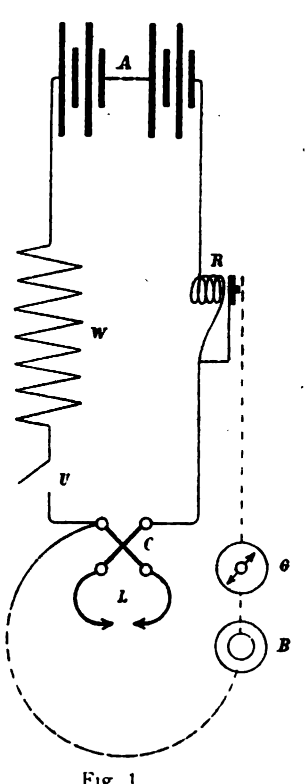


Fig. 1.

Nachdem verschiedene Methoden, die einseitige Hemmung der Galvanometernadel elektrisch zu insceniren, wegen Inconstanz des Lichtbogens gescheitert waren, wurde darauf verzichtet, gleichzeitig mit der Unterbrechung des Hauptstromes die Leitungsfähigkeit des Lichtbogens zu untersuchen. Es wurde der Hauptstrom unterbrochen und nach möglichst kurzer Zeit, circa $^1/_{200}$ Secunde, die Untersuchung vorgenommen.

In Fig. 1 bedeutet *A* die Accumulatorenbatterie, *W* einen Rheostaten, *U* einen Unterbrecher, *C* einen Commutator, *L* den Lichtbogen, *R* den Elektromagneten eines ungemein kleinen, sehr empfindlichen Relais. So lange der Hauptstrom durch den Lichtbogen fliesst, ist die punktirte Nebenschaltung, in der sich das ballistische Galvanometer *G* und eine galvanische Batterie *B* befinden, geöffnet. Im Moment, wo der Hauptstrom bei *U* unterbrochen wird, erlischt der Lichtbogen, die Batterie *B* wird mittels *R* durch den Lichtbogen und das Galvanometer hindurch geschlossen und es bringt die elektromotorische Kraft der Batterie *B* durch die Reste des Lichtbogens hindurch eventuell eine Ablenkung der Galvanometernadel hervor. Der Lichtbogen wird auf einen Schirm projicirt und

immer möglichst gleich gross erhalten. Die Länge desselben betrug auf dem Projectionsschirme 5 *mm*, der eine wahre Länge von 1 *mm* entsprach. Diese Anordnung hat den grossen Vortheil, dass die Galvanometernadel ruhig erhalten werden kann, dass kein Extrastrom wirksam auftritt und so die Fehlerquellen auf ein Minimum reducirt werden. Zuerst wurde unter Hinweglassung der Batterie *B* nach einer eventuellen elektrischen Gegenkraft im Lichtbogen selbst gefahndet.

Fliesst der Accumulatorenstrom im Lichtbogen von Eisen zu Kohle, so erhielt man nach Öffnung von *U* und dem fast momentan erfolgenden Schlusse bei *R* den Ausschlag 0·1 *mm* im Mittel (0·3, 0·0, 0·1, 0·0); fliesst der Accumulatorenstrom aber in der Richtung Kohle — Eisen, so war das Mittel —0·03 *mm* (—0·1, 0·6, —0·1, —0·3, —0·0, —0·5). Es ist somit die elektrische Gegenkraft unmittelbar nach dem Erlöschen des Lichtbogens, wenn überhaupt vorhanden, minimal.

Hierauf wurden Versuche, sowohl mit 3 Daniel, als auch mit 4 Bunsen in *B* angestellt. Da die Resultate ziemlich genau übereinstimmen, so sollen hier nur jene Werthe angeführt werden, welche sich im letzteren Falle ergaben.

a) Die Bunsenbatterie ist gegen die Accumulatoren geschaltet.

α) Der Hauptstrom fliesst im Lichtbogen von Eisen zu Kohle; die Ablenkung beträgt

0·2, 0·3, 0·4, 0·1, 0·1 *mm*.

β) Der Hauptstrom fliesst von Kohle zu Eisen:

31·4, 39·4, 40·23, 33·48, 41 6 *mm*.

b) Der Bunsenstrom hat dieselbe Richtung wie der Accumulatorenstrom, und zwar

α) Eisen—Kohle:

8·4, 6·7, 5·0, 4·2, 6·0 *mm*.

β) Kohle—Eisen:

0·0, 0·2, 0·06, —0·1, 0·2 *mm*.

Die Abweichungen in den einzelnen Gruppen erklären sich wenigstens theilweise dadurch, dass der Lichtbogen trotz aller Sorgfalt Ort und Länge wechselt. Wie aus den vorausgehenden Zahlen erhellt, fliesst der Strom der Bunsenbatterie nur in der Richtung Eisen—Kohle und zwar bedeutend leichter, wenn der Hauptstrom die entgegengesetzte Richtung hatte. Muthmassungen über diese merkwürdige Thatsache liessen sich wohl aufstellen, es seien aber die experimentell gesicherten Thatsachen hier nur angeführt, um die Erscheinungen im Wechselstromlichtbogen zu erklären. Wenn der Wechselstrom in der Richtung Eisen—Kohle einsetzt, so findet er einen viel geringeren Widerstand als in umgekehrter Richtung. Ob dieser Grund auch quantitativ ausreicht, lässt sich schwer bestimmen.

Es ist nämlich auch noch eine weitere Erklärung des Sahulka'schen Phänomens möglich. Ich erwähnte bereits, dass bei Unterbrechung des Gleichstromes der Eisentropfen sich stark zusammenzieht und der Lichtbogen sich vergrössert. Dies geschieht in viel stärkerem Masse in der Richtung Eisen—Kohle. Betrachtet man nun den Wechselstromlichtbogen Eisen—Kohle durch eine stroboskopische Scheibe, die fast synchron mit den Wechselstromschwingungen rotirt wird, so schwingt der Eisentropfen zwischen den nebenbei in Fig. 2 gezeichneten Tropfen hin und her, ein Beweis dafür, dass der Tropfen Pendelbewegungen in der Richtung des Stromes ausführt. Durch diese mechanische Verkürzung des Lichtbogens wird dem Durchgang des Stromes in der Richtung Eisen—Kohle ein geringerer Widerstand entgegengesetzt, als bei der Richtung Kohle--Eisen. Dieses Phänomen des oscillirenden Tropfens konnte bei Anwendung von Gleichstrom nicht wahrgenommen werden.

Fig. 2.

Bei letzterer Untersuchung trat noch eine andere Erscheinung zu Tage, die hier nur nebenbei erwähnt werden soll.

Der Tropfen zeigt, durch die stroboskopische Scheibe gesehen, dunkle Curven, fünf bis sieben an der Zahl, die nach der Krümmung zu urtheilen, geschlossen sind. Die Ebenen der einzelnen Curven stehen auf der Stromrichtung senkrecht, oder genauer, auf der Lichtbogenrichtung. Denn zieht man z. B. durch einen Magneten den Lichtbogen auf die Aussenseite des

Tropfens, so stellen sich die Curven beinahe in die Richtung der Elektroden. Bei einer bestimmten Drehungsgeschwindigkeit der Scheibe scheinen dieselben an der Austrittstelle des Stromes zu entstehen und sich in rascher Aufeinanderfolge von derselben zu entfernen, um auf der entgegengesetzten Seite zu verschwinden; ihre grösste gegenseitige Entfernung, welche ungefähr 0·5 *mm* beträgt, erreichen sie unmittelbar vor ihrem Verschwinden. Diese Erscheinung macht den Eindruck einer Wellenbewegung an der Oberfläche, welche durch den raschen Stromwechsel verursacht wird. Eine Bekräftigung findet diese Ansicht in dem Ausbleiben des Phänomens, wenn statt des Wechselstromes Gleichstrom angewendet wird.

Resultate. 1. Bei Anwendung von Wechselstrom tritt bei ruhig brennendem Lichtbogen Eisen—Kohle der Sahulka'sche Gleichstrom in der Richtung Eisen—Kohle auf.

2. Unmittelbar nach dem Verlöschen des Lichtbogens lässt sich eine elektromotorische Gegenkraft, welche jenen Gleichstrom erzeugte, nicht nachweisen.

3. Der auftretende Gleichstrom findet eine Erklärung in der grösseren Leitungsfähigkeit des Lichtbogens in der Richtung Eisen—Kohle, wenn vorher ein entgegengesetzter Strom floss, und in den Schwingungen, welche die flüssige Eisenelektrode ausführt.

4. Bei Anwendung von Gleichstrom ist der Lichtbogen Eisen—Kohle bedeutend länger, für die Stromrichtung Kohle —Eisen als für Eisen—Kohle bei gleicher Stromstärke und gleicher Potentialdifferenz.

Über die Bestimmung der Frequenz von Wechselströmen

von

Theodor Wulf, S. J.

Aus dem physikalischen Institute der k. k. Universität in Innsbruck.

Da heutzutage viele physikalische Institute von einer Centrale aus mit Wechselstrom versehen werden, so dürfte die Schilderung einer Methode, welche die Frequenz solcher Ströme mit den gewöhnlichen Laboratoriums-Hilfsmitteln rasch und bequem zu bestimmen gestattet, nicht ohne Interesse sein.

Auf einem Eisenstativ von 0·5—1 *m* Höhe steht eine Mariotte'sche Flasche, deren horizontale Ausflussröhre an der Spitze einen Durchmesser von etwa 2 *mm* hat. Wenn man jetzt einen hufeisenförmigen Elektromagneten bis auf 1—2 *cm* nähert und den Wechselstrom durchschickt, so dient das Stativ als Anker, es erfährt bei jedem Stromwechsel eine kleine Erschütterung. Bei jedem Stosse wird aber auch ein Wassertropfen hinausgeschleudert und der Strahl, der sich vorher ganz unregelmässig zertheilte, löst sich jetzt in ganz gleichmässig aufeinander folgende Tropfen auf, so dass man mit der Zahl der Wassertropfen, die in einer Secunde durch irgend einen Querschnitt der Bahn gehen, zugleich die doppelte Frequenz des Stromes hat.

Betrachtet man den Strahl durch eine stroboskopische Scheibe, so ist es leicht, die Scheibe so zu drehen, dass die Tropfen scheinbar still stehen. Zur Ermittelung dieser Umdrehungsgeschwindigkeit kann man sich eines Zählwerkes bedienen; in Ermangelung eines solchen benützte ich einen

gewöhnlichen Morse'schen Schreibapparat. An die Axe der Scheibe war ein Kupferstift angelöthet, welcher bei jeder Umdrehung einmal in ein Quecksilbernäpfchen tauchte und dadurch, einen Hilfsstrom schliessend, auf dem Streifen des Morse-Apparates einen Punkt erzeugte.

Wenn nun der Strahl scheinbar still stand und der Schreibapparat bereits functionirte, wurde durch constantes mechanisches Niederdrücken des Ankers ein längerer Strich auf das Papier gezeichnet, und sobald die Aufzeichnung beginnen sollte, wurde der Anker freigelassen. Ebenso wurde zu Ende der Beobachtung zuerst der Anker angehalten und dann erst der Hilfsstrom geöffnet. Auf diese Weise wurden nicht nur alle Verzögerungen, die das Öffnen und Schliessen des Stromes immer mit sich bringt, ausgeschlossen, sondern es konnten auch aus der Entfernung des ersten und letzten Punktes vom Beginn und Schluss der Beobachtungszeit noch Bruchtheile von Umdrehungen geschätzt werden.

Ist dann s die Zahl der Umdrehungen, welche die Scheibe während t Secunden machen musste, damit der Strahl stillstehend erschien, ist ferner k die Anzahl der Öffnungen in der Scheibe, so ergibt sich n, die Frequenz des Stromes, aus der Gleichung

$$2\,n\,t = k\,s, \qquad \text{oder} \qquad n = c\,s,$$

wo $c = \frac{k}{s\,t}$ gesetzt ist.

Es wurden stündlich meist drei Sätze von Beobachtungen gemacht, deren jeder sich über 60 Secunden erstreckte. Da es nach einiger Übung keine Schwierigkeit mehr hatte, den Strahl mehrere Minuten lang fast unbeweglich zu erhalten, so wurde zwischen je zwei Sätzen einfach der Anker des Schreibapparates fünf Secunden hindurch angehalten, so dass man für diese drei Minuten die mittlere Geschwindigkeit der Maschine als constant voraussetzen durfte.

Obwohl die Einzelresultate kein allgemeines Interesse beanspruchen können, so mögen doch zur Beurtheilung der Methode einige der besseren Beobachtungen beispielsweise hier angeführt werden.

Zeit der Beobachtung	Tourenzahl der strobosk. Scheibe während 60 Sec.			Frequenz des Wechselstromes während 1 Sec.		
	s_1	s_2	s_3	n_1	n_2	n_3
11 Uhr Abends....	291·5	291·4	291·2	43·72	43·71	43·68
4 » Morgens...	292	292	292·5	43·80	43·80	43·87
9 » Morgens...	289·5	289·6	289·4	43·43	43·44	43·41

In keinem der angeführten Fälle betrug die Differenz zwischen zwei Beobachtungen mehr als 0·5 Umdrehungen unter nahezu 300. Es ist also schon das Einzelresultat auf $^1/_6$% genau.

Eine bedeutend grössere Übereinstimmung liesse sich natürlich erzielen, wenn man für jeden Satz eine längere Beobachtungszeit nähme, so dass die angegebene Methode bei aller Einfachheit der Ausführung den für wissenschaftliche Untersuchungen erforderlichen Grad der Genauigkeit gewähren dürfte.

Dass solche Bestimmungen bei Wechselstrommessungen von grösstem Werthe sind, mag folgende Tabelle zeigen, welche für den Verlauf eines Tages die am Innsbrucker Elektricitätswerk[1] beobachteten Schwankungen registrirt.

Beobachtungszeit	Frequenz	Beobachtungszeit	Frequenz	Beobachtungszeit	Frequenz
7ʰ Vorm.	43·46	1ʰ Nachm.	43·65	8ʰ Abends	43·50
8 »	43·52	2 »	43·50	9 «	43·45
9 »	43·58	3 »	43 50	10 »	43·38
10 »	43·50	4 »	43·45	11ʰ Nachts	43·70
11 »	43·56	5 »	43·52	4 »	43 80
12 »	43·63	6 »	43·55	5 »	43 63
		7 »	43·62	7ʰ Vorm.	43·47

[1] Dasselbe wird durch Wasserkraft betrieben.

Man sieht, dass die Geschwindigkeit sich Vormittags ziemlich constant erhält; zur Mittagszeit, wo die Maschine weniger belastet ist, steigt sie merklich an und nimmt Nachmittags wieder ab bis gegen 5 Uhr. Zwischen 5 und 7 Uhr Abends zeigten sich durchgehends grössere Unregelmässigkeiten. Auf eine diesbezügliche Anfrage ertheilte die Verwaltung des Elektricitätswerkes bereitwilligst die Auskunft, dass zu dieser Zeit einerseits verschiedene Motoren die Arbeit einstellen, anderseits für die Abendbeleuchtung eine Umschaltung der Maschinen vorzunehmen sei. Das Minimum der Geschwindigkeit gegen 9—10 Uhr Abends wie das Maximum während der Nacht erklären sich von selbst. Die grösste Differenz, welche innerhalb einer Zeit von 14 Stunden beobachtet wurde, betrug nahezu 2 Procent.

Ähnliche Schwankungen, wie zwischen den einzelnen Stunden, bestehen zwischen den Tagesmitteln, doch ist der allgemeine Verlauf der Geschwindigkeit an den verschiedenen Arbeitstagen dem mitgetheilten durchaus ähnlich. Wesentlich anders werden sich die Verhältnisse selbstredend an Sonn- und Feiertagen und wieder anders im Winter gestalten.

Über die Verdampfungswärme von Lösungen

von

O. Tumlirz.

(Vorgelegt in der Sitzung am 20. Juni 1895.)

Gerade so wie beim Erstarren einer Lösung die Erstarrungswärme der ausgeschiedenen Componente von jener Wärme verschieden ist, welche bei der normalen Erstarrung dieser Substanz frei wird[1], ist auch die Verdampfungswärme einer Substanz, welche beim Sieden einer Lösung aus dieser verdampft wird, von jener Wärme verschieden, welche verbraucht wird, wenn derselbe Dampf aus seiner Flüssigkeit bei demselben Druck entsteht. Wir werden uns im Folgenden ausschliesslich auf solche Fälle beschränken, bei denen nur eine Componente in Dampf verwandelt wird, wie z. B. bei den Salzlösungen und bei verdünnter Schwefelsäure.

Die Lösung enthalte zwei Bestandtheile; der eine, welcher beim Sieden der Lösung nicht in Dampf verwandelt wird, habe das Gewicht 1 *g*, der andere dagegen, welcher Dampf entwickelt, vor dem Sieden das Gewicht *n g*. Wir stellen uns ferner vor, dass die Lösung sich in einem cylindrischen Gefäss mit verschiebbarem Kolben befinde, stets unter dem Drucke einer Atmosphäre stehe und zu Beginn des Versuches die Temperatur T habe, welche für die zweite Componente der normale Siedepunkt bei dem Drucke einer Atmosphäre ist. Wird nun der Lösung beständig Wärme zugeführt, dann beginnt sie bei der Temperatur $T+\Delta$ zu sieden und es entstehen Dämpfe der zweiten Componente, welche den Kolben heben. Da aber in dem Masse, als die Dämpfe aus der Lösung entweichen, das

[1] Vergl. meine Abhandlung über »Die Erstarrungswärme in Lösungen«. Diese Sitzungsberichte, Bd. CIV, Abth. II. a. 1895.

Verhältniss der beiden Componenten in der Lösung geändert wird, so wird der Siedepunkt der Lösung stetig steigen. Die Steigerung des Siedepunktes und die Menge des entwickelten Dampfes stehen zu einander in einer bestimmten Beziehung.

Wir nehmen an, der Siedepunkt sei bis $T+\Delta+\tau$ gestiegen und die entwickelte Dampfmenge habe die Grösse M. Die Wärme, welche bis zu diesem Zustande zugeführt wurde, besteht aus zwei Theilen: 1. aus der Wärme, welche zur Temperatursteigerung von T auf $T+\Delta$ nothwendig war, und 2. aus der Wärme, welche von der Temperatur $T+\Delta$ bis zur Temperatur $T+\Delta+\tau$ verbraucht wurde. Die erstere Wärme ist gleich

$$(1+n)\,C\Delta, \tag{1}$$

wo C die mittlere specifische Wärme der Lösung zwischen den Temperaturen T und $T+\Delta$ bedeutet. Um die zweite Wärmezufuhr zu bestimmen, betrachten wir eine zwischen $T+\Delta$ und $T+\Delta+\tau$ gelegene Temperatur $T+\Delta+t$ mit der zugehörigen Dampfmenge m. Wird durch die Wärmezufuhr dQ die Temperatur auf $T+\Delta+t+dt$ und die Dampfmenge auf $m+dm$ erhöht, dann besteht die Wärmemenge dQ aus den folgenden drei Theilen: 1. aus der Wärmemenge, welche die Lösung von dem Gewicht $(1+n-m)$ um dt erwärmt, — ihre Grösse ist $(1+n-m)\,C_{n-m}\,dt$, wo C_{n-m} die specifische Wärme der Lösung bedeutet, — 2. aus der Wärmemenge, welche die Dampfmenge m um dt erwärmt, — ihre Grösse ist $m\,\mathfrak{C}\,dt$, wo $\mathfrak{C}$ die specifische Wärme des Dampfes bedeutet — und 3. aus jener Wärme, welche beim Entwickeln der Dampfmenge dm verbraucht wird; ihre Grösse sei mit $\lambda_m\,dm$ bezeichnet. Wir erhalten demnach die Gleichung

$$dQ = (1+n-m)\,C_{n-m}\,dt + m\,\mathfrak{C}\,dt + \lambda_m\,dm$$

und sehen, dass die von $T+\Delta$ bis $T+\Delta+\tau$ zugeführte Wärmemenge Q durch die Gleichung

$$Q = \int_{T+\Delta}^{T+\Delta+\tau} (1+n-m)\,C_{n-m}\,dt + \int_{T+\Delta}^{T+\Delta+\tau} m\,\mathfrak{C}\,dt + \int_{0}^{M} \lambda_m\,dm \tag{2}$$

gegeben ist.

Ist die Temperatur $T+\Delta+\tau$ erreicht, dann möge der Dampf von der darunter befindlichen Flüssigkeit getrennt werden, etwa durch Dazwischenschieben einer Scheidewand. Diese Scheidewand stellen wir uns in dem Cylinder verschiebbar vor, damit, wenn wir das Ganze abkühlen, die Flüssigkeit immer unter dem gleichen Drucke steht. Wenn wir jetzt den Dampf und die Flüssigkeit auf die Temperatur T abkühlen, dann beträgt die entzogene Wärme

$$(1+n-M)\int_T^{T+\Delta+\tau} C_{n-M}dt+M\int_T^{T+\Delta+\tau} \mathfrak{C}\,dt. \qquad (3)$$

Und ist die Temperatur T erreicht, dann denken wir uns dem Dampfe allein solange Wärme entzogen, bis er bei der Temperatur T vollständig condensirt ist. Diese Condensationswärme hat die Grösse

$$M\lambda_T. \qquad (4)$$

Auf diese Weise haben wir in den getrennten Abtheilungen des cylindrischen Gefässes zwei Flüssigkeiten erhalten, nämlich 1. die Lösung, welche von der ersten Componente die Gewichtsmenge 1 g und von der zweiten Componente die Gewichtsmenge $(n-M)\,g$ enthält und 2. eine Flüssigkeit, welche lediglich aus der zweiten Componente besteht und das Gewicht $M\,g$ hat. Ziehen wir endlich die Scheidewand weg und mischen wir die beiden Flüssigkeiten bei der Temperatur T unter entsprechender Wärmeabfuhr mit einander, so erhalten wir schliesslich wieder jene Lösung von dem Gewichte $(1+n)\,g$ und von der Temperatur T, von welcher wir ausgegangen sind und haben damit einen Kreisprocess geschlossen. Die bei der zuletzt vorgenommenen Mischung entzogene Wärme wollen wir mit

$$\int_{n-M}^{n} G(n,\,T)\,dn \qquad (5)$$

bezeichnen.

Bei dem Kreisprocesse haben wir ausser der Wärme noch die Arbeit der äusseren Kräfte in Rechnung zu ziehen. Von den äusseren Kräften kommt nur der Druck in Betracht. Da aber der Druck während des ganzen Kreisprocesses constant

bleibt, so ist seine während des Kreisprocesses im Ganzen geleistete Arbeit gleich Null, und wir gelangen demnach zu dem Schlusse, dass die Wärmemengen, welche während des Kreisprocesses zugeführt und entzogen wurden, einander gleich sind, oder dass

$$(1+n)C\Delta+\int_{T+\Delta}^{T+\Delta+\tau}(1+n-m)C_{n-m}\,dt+\int_{T+\Delta}^{T+\Delta+\tau}m\mathfrak{C}\,dt+$$
$$+\int_0^M\lambda_m\,dm-(1+n-M)\int_T^{T+\Delta+\tau}C_{n-\mathrm{M}}\,dt-\mathrm{M}\int_T^{T+\Delta+\tau}\mathfrak{C}\,dt-$$
$$-\mathrm{M}\lambda_T-\int_{n-M}^{n}G(n,T)\,dn=0.$$

In derselben Weise, wie wir den Kreisprocess zwischen den Temperaturen T und $T+\Delta+\tau$ durchgeführt haben, können wir ihn auch zwischen den Temperaturen T und $T+\Delta+\tau+d\tau$ durchführen und erhalten dann eine ganz analoge Gleichung. Ziehen wir die beiden Gleichungen von einander ab, so kommen wir zu einer neuen Gleichung, welche, wie man ohne weiters einsieht, aus der früheren durch Differentiation entsteht. Diese Gleichung ist

$$(1+n-M)C_{n-\mathrm{M}}+\mathrm{M}\mathfrak{C}+\lambda_{\mathrm{M}}\frac{d\mathrm{M}}{d\tau}+$$
$$\frac{d\mathrm{M}}{d\tau}\int_T^{T+\Delta+\tau}C_{n-\mathrm{M}}\,dt-(1+n-M)C_{\mathrm{M}}-\frac{dM}{d\tau}\int_T^{T+\Delta+\tau}\mathfrak{C}\,dt-$$
$$-M\mathfrak{C}-\frac{dM}{d\tau}\cdot\lambda_T-G(n-M,T)\frac{dM}{d\tau}=0,$$

oder

$$\lambda_{\mathrm{M}}=\lambda_T-\int_T^{T+\Delta+\tau}(C_{n-\mathrm{M}}-\mathfrak{C})\,dt+G(n-M,T). \qquad (6)$$

Hierin bedeutet, wie wir nochmals hervorheben wollen, λ_T die Verdampfungswärme der zweiten Componente beim Sieden ihrer Flüssigkeit unter dem Druck einer Atmosphäre, λ_{M} die Verdampfungswärme derselben Componente, wenn sie beim Sieden einer Lösung, welche 1 g von der ersten Componente und $(n-\mathrm{M})\,g$ von der zweiten Componente enthält, bei der Siedetemperatur $T+\Delta+\tau$ als Dampf entweicht. $C_{n-\mathrm{M}}$ ist die

specifische Wärme der genannten Lösung und $\mathfrak{C}$ die specifische Wärme des Dampfes. $G(n-M, T)$ ist jene Grösse, welche wir in der oben citirten Abhandlung die »Bindungswärme pro Masseneinheit« genannt haben.

Wir wollen die gewonnene Beziehung durch ein Beispiel erläutern, indem wir das Sieden der Mischungen von Schwefelsäure und Wasser betrachten. Beim Sieden verdünnter Schwefelsäure scheidet sich reines Wasser als Dampf ab[1]. Was die Siedepunkte der Mischungen von Schwefelsäure und Wasser anbelangt, so hat Herr Hämmerle im Laboratorium des Herrn Prof. Pfaundler darüber eine sehr sorgfältige Untersuchung angestellt[2], aus welcher wir die folgenden vier Daten herausgreifen wollen, die sich auf einen Luftdruck von 760 *mm* beziehen. m bedeutet dabei die Anzahl Gramm Wasser, welche in der Mischung auf 1 *g* Schwefelsäurehydrat H_2SO_4 kommen und θ den zugehörigen Siedepunkt.

$$m = 2\cdot020,\quad 1\cdot469,\quad 1\cdot102,\quad 0\cdot7347$$
$$\theta = 109\cdot4°,\quad 114\cdot15°,\quad 120\cdot05°,\quad 134\cdot18° \text{ C.}$$

Was die specifische Wärme der Mischungen von Schwefelsäure und Wasser anbelangt, so liegen darüber mehrere Bestimmungen von J. Thomsen vor[3], welche in der folgenden Tabelle zusammengestellt sind.

m	0·7347	1·653	3·490	9·000	18·180	36·55
Specifische Wärme bei 18° C.	0·545	0·700	0·821	0·918	0·956	0·977
Specifische Wärme berechnet......	0·555	0·699	0·818	0·916	0·956	0·977
Differenz	+0·010	−0·001	−0·003	−0·002	±0·000	±0·000

Die Berechnung geschah nach der Formel

$$C_m = 1 - \frac{0\cdot8513}{m+1\cdot17676}.$$

[1] Pfaundler, Lehrbuch der Physik, II, 2, S. 217. 1879.

[2] Diese Sitzungsber. 59, 2, S. 862. 1869.

[3] Thermochemische Untersuchungen, I, S. 46. 1882.

Um diese Zahlen auf die Formel für λ_M anwenden zu können, haben wir m durch $n-M$ und θ durch $T+\Delta+\tau$ zu ersetzen. Ferner haben wir $T = 100$, $\lambda_{100} = 536\cdot50$ und $\mathfrak{C} = 0\cdot4805$ (Regnault) zu setzen. Die Mischungswärme, welche entsteht, wenn 1 g Schwefelsäurehydrat H_2SO_4 mit $m\,g$ Wasser gemischt wird, beträgt nach den Untersuchungen von J. Thomsen bei etwa 18° C.

$$\Psi(m, 18) = \frac{m}{m+0\cdot3204}\cdot 177\cdot 1\, g\,\text{cal.};$$

also ist

$$G(m, 18) = \frac{56\cdot742}{(m+0\cdot3204)^2}\, g\,\text{cal.}^1$$

Um nun daraus $G(m, 100)$ oder $G(n-M, 100)$ bestimmen zu können, haben wir von der Formel (7) der erwähnten Abhandlung auszugehen, welche für diese Verhältnisse lautet:

$$\frac{\partial G(m,t)}{\partial t} = 1 - C_m - (1+m)\frac{\partial C_m}{\partial m}.$$

Benützen wir die obige empirische Formel für C_m, so erhalten wir für die Temperatur von 18°

$$\frac{\partial G(m,t)}{\partial t} = \frac{0\cdot1505}{(m+1\cdot17676)^2}.$$

Weil aber der Werth des Differentialquotienten $\frac{\partial G(m,t)}{\partial t}$ sich mit der Temperatur nur wenig ändert, so können wir ihn für unsere Correctionsrechnung als constant ansehen und schreiben:

$$G(m, 100) = G(m, 18) + \frac{0\cdot1505\times82}{(m+1\cdot17676)^2}$$

$$= \frac{56\cdot742}{(m+0\cdot3204)^2} + \frac{12\cdot34}{(m+1\cdot17676)^2}\, g\,\text{cal.}$$

---

[1] Vergl. meine oben citirte Abhandlung: »Die Erstarrungswärme in Lösungen«. S. 4.

Wir gelangen dadurch zu der folgenden Tabelle:

$m = n - M$	$\theta = 100 + \Delta + \tau$	$C_m = C_{n-M}$	$\int_{100}^{\theta} (C_{n-M} - \mathfrak{C}) dt$	$G(n-M, 100)$	λ_M
2·020	109·4° C.	0·7337	2·380	11·567	545·69
1·469	114·15	0·6782	2·797	19·493	553·20
1·102	120·05	0·6264	2·925	30·416	563·99
0·7347	134·18	0·545	2·205	54·357	588·65

Polarisation und Widerstand einer galvanischen Zelle

von

Franz Streintz.

(Mit 5 Textfiguren.)

Für einen geschlossenen Stromkreis, der nebst einer galvanischen Kette noch ein Voltameter enthält, wurde die Beziehung aufgestellt:

$$\pi = a + \rho i.$$

In dieser Gleichung sind zwei Unbekannte π und ρ enthalten, deren getrennte Bestimmung nicht durchführbar ist. Aus diesem Grunde sah sich eine Reihe von Physikern veranlasst, die Messungen der im Voltameter aufgetretenen Polarisation erst vorzunehmen, sobald der ursprüngliche Stromkreis geöffnet war. Durch dieses Verfahren wurde die Elimination von ρ erzielt. Allerdings konnte dagegen eingewendet werden, dass ein richtiges Bild der Voltameterzelle im Zustande der Ladung nicht gewonnen wurde. Allein die im unverändert belassenen Stromkreise nach den Methoden von Ohm und Fuchs angestellten Versuche haben gleichfalls nicht die Lösung des Problems erreicht: im Gegentheil, sie haben zwar ein reiches Zahlenmaterial geliefert, das jedoch nur allzu sichtbar den Stempel der jeweiligen Versuchsanordnung an sich trägt. Es ist daher nicht erstaunlich, wenn das Gebiet der galvanischen Polarisation trotz seiner umfangreichen Literatur zu den sterilsten der Physik gehört.

Im Folgenden soll der Versuch gemacht werden, zu zeigen, dass auch jede beliebige neue Methode zu keiner einwandfreien

Bestimmung der Polarisationsgrössen während der Dauer der Elektrolyse führen kann. Es ist dazu nothwendig, den Beweis zu erbringen, dass nicht nur die elektromotorische Kraft π, sondern auch der »Widerstand« ρ Functionen der Stromstärke oder präciser ausgedrückt der an der Elektrode herrschenden Stromdichte sind. An Stelle der eingangs aufgestellten Beziehung, in der ρ als constant anzusehen ist, soll der Ohm'sche Begriff Widerstand seinen Sinn behalten, erhält man eine völlig unbestimmte Function

$$\pi = \varphi(i),$$

zu deren Ermittlung es aber nicht nur an Methoden, sondern an dem Fundamente physikalischer Vorstellungen überhaupt gebricht. Daraus folgt, dass auch eine befriedigende Theorie der galvanischen Polarisation nicht aufgestellt werden kann.

Zunächst werde ich eine Methode beschreiben, der eine gewisse Überlegenheit vor jenen von Ohm und Fuchs dadurch zukommt, dass sie eine Bestimmung des jeweiligen Werthes von ρ zu gestatten scheint. Im weiteren Verlauf soll die Methode sorgfältig auf die Grenzen ihrer Anwendbarkeit untersucht werden. Bei dieser Gelegenheit werden einige Erscheinungen besprochen werden, die bei Bestimmung von Leitfähigkeit und Dielektricitätsconstante der Elektrolyte nicht ohne Interesse sein dürften. Eine Discussion der geförderten Resultate soll dann den erwähnten Beweis liefern.

Die Methode.

Bezeichnet P die elektromotorische Kraft einer Zelle

$$P = \mathrm{Zn} \,|\, \mathrm{ZnSO_4 aq} + \mathrm{H_2SO_4 aq} \,|\, M,$$

worin M ein beliebiges der Polarisirung zu unterwerfendes Metall bedeutet, so erhält man, wenn man das Element in einen Stromkreis bringt, der noch eine zweite elektromotorische Kraft Δ enthält, an M anodische oder kathodische Polarisation je nach dem Sinne, in dem das durch die algebraische Summe $(P+\Delta)$ gegebene Potential die Elektricität treibt. Stellen p_0 und p_H die Grössen der erzeugten Polarisation dar, so ergibt sich

für den Fall, dass Δ und P gleichgerichtet sind, kathodische Polarisation. Sind Δ und P entgegengesetzt, dann erhält man gleichfalls kathodische Polarisation, so lange $P > \Delta$. Beide Fälle liefern zur Bestimmung von p_H die Beziehungen (Fig. 1):

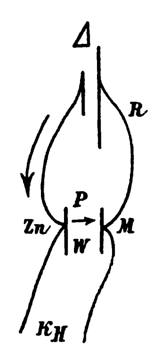


Fig. 1.

$$(P \pm \Delta) - p_H = I(w + R)$$
$$P - p_H = Iw + K_H.$$

Den Gleichungen liegt die Voraussetzung zu Grunde, dass die Zinkplatte in ihrer Salzlösung unpolarisirbar ist. In denselben stellen I die Stromstärke, R den Drahtwiderstand, w den Widerstand der Zelle und K die an ihr vorhandene Polspannung dar. Die Stromquelle, die Δ erzeugt, wird als widerstandslos betrachtet.

Wenn $P < \Delta$, dann erfährt das Metall anodische Polarisation und man erhält:

$$(\Delta - P) - p_0 = I(w + R)$$
$$P + p_0 = K_0 - Iw.$$

Ist man im Stande, die drei Grössen Stromstärke, Widerstand und Polspannung gleichzeitig zu ermitteln, dann erhält man im Ausdrucke $P \pm p$, die Giltigkeit der Gleichungen vorausgesetzt, ein Mass für die Polarisation.

K ist an einem Quadrantenelektrometer zu beobachten, I kann direct gemessen oder aus den Grössen K, Δ und R gerechnet werden, w endlich lässt sich durch Inductionsstösse, die durch die polarisirte Zelle geleitet werden, ermitteln.[1]

Die gesammte Versuchsanordnung ist eine ziemlich complicirte, kann aber mit Hilfe beistehender schematischer Figur (Fig. 2) rasch überblickt werden.

Das Potential Δ wird den Punkten A und C eines Messdrahtes entnommen und zur Polarisirung der Zelle P verwendet; in T werden Inductionsstösse erzeugt und durch die Rolle g eines Differentialgalvanometers D, durch einen Wider-

[1] Zur Bestimmung des Widerstandes eines Secundärelementes wurde die Methode bereits angewendet (F. Streintz, Wied. Ann., 49, S. 571, 1893).

stand ρ über P nach C und A geleitet. Die Rolle g' liegt in einem selbständigen Stromkreise, der die Galvanometernadel, sobald sie durch den in g circulirenden stationären Strom afficirt worden ist, in die Nulllage zurückführt. Eine Näpfchengruppe in S vermittelt die Verbindungen mit dem Elektrometer.

Der Rheochord AB war durch kurze und starke Drahtstücke mit einem oder zwei Secundärelementen E verbunden;

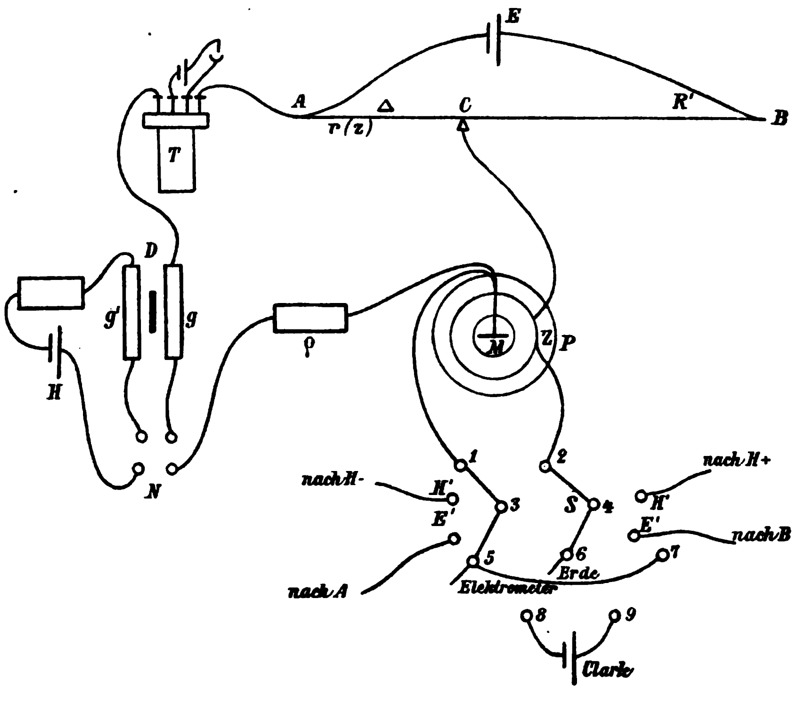


Fig. 2.

er bestand aus zwei parallelen meterlangen Constantandrähten AD und BD', die durch einen Kupferbügel DD' mit einander verbunden waren (Fig. 3); ihr Widerstand R' betrug $5 \cdot 134\ \Omega$. Das Stück AD war sorgfältig geaicht worden. Als Laufcontact C fungirte ein die Richtung AD senkrecht schneidender Platindraht, der von einem nicht zu leichten Messinghebel getragen wurde. Bei einer und derselben Stellung von C konnten verschiedene Potentiale Δ der elektromotorischen Kraft P superponirt werden, je nachdem A oder B mit dem positiven Pole

von E verbunden war und die Abzweigung nach dem Inductor T von A oder von B aus erfolgte. Zur raschen Ermittlung des jeweiligen Potentials

$$\Delta = E \frac{r}{R'}$$

diente eine Tabelle.

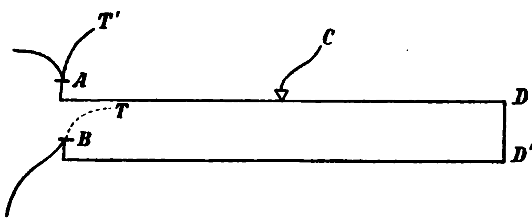


Fig. 3.

Der zwischen A und C während des Stromdurchganges vorhandene Widerstand ergibt sich zu

$$Z = r\left(1 - \frac{r}{R'}\right).$$

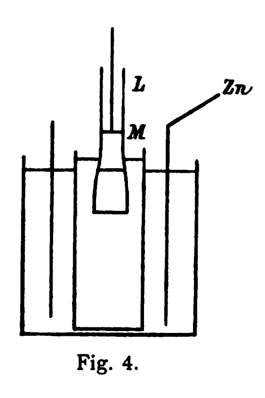


Fig. 4.

Diese Gleichung gilt wegen der Symmetrie der Versuchsanordnung sowohl für den stationären Strom I, als auch für den in T erzeugten Inductionsstoss. Die Werthe für Z konnten gleichfalls einer Tabelle entnommen werden.

Durch Fig. 4 wird die Zusammenstellung der Zelle P ersichtlich gemacht. In einem Becherglase befanden sich Zinkcylinder und Thonzelle eines grossen Bunsen-Elementes. Das Becherglas enthielt Zinkvitriollösung vom specifischen Gewichte 1·170, desgleichen die Thonzelle, in die während der Versuchsdauer mit seinem unteren erweiterten Ende ein Lampencylinder (L) tauchte. Dieser war daselbst mit Pergamentpapier luftdicht verschlossen und enthielt in seinem weiteren Theile gelatinöse Schwefelsäure, die durch Mischung von einem Theil Wasserglas in drei Theilen Schwefelsäure von den gleichen specifischen Gewichten hergestellt worden war. Über die gelatinöse

Schicht wurde sehr verdünnte Schwefelsäure (specifisches Gewicht 1·020 bis 1·026) gegossen und das zu untersuchende Metall in sie gesenkt. Die Elektrode M bestand aus Platin. Ein Streifen Blech von 0·1 *mm* Stärke wurde an einem starken Kupferdrahte angelöthet, über letzteren ein Glasrohr als Hülse geschoben, dieses an seinem unteren Ende gleichzeitig mit der Seite des Bleches, an der die Löthung vorgenommen worden war, sorgfältig mit Siegellack überzogen. Der Lampencylinder war durch einen Stopfen verschlossen, durch den der Kupferdraht hindurchging. Die Zelle stand vor Erschütterungen geschützt in einer mit Sägespänen gefüllten Kiste. Die Temperatur der Lösungen wich während der Versuchsdauer nur wenig von 15° ab.

Der Inductor T bestand aus zwei bifilar gewickelten Spulen einer Galvanometerrolle von ziemlich gleichem Widerstand. Die inducirende elektromotorische Kraft im primären Kreise wurde durch ein oder mehrere Hellesen-Obach-Trockenelemente hervorgerufen.

Das Differentialgalvanometer D enthielt eine Rolle g von stärkerem Draht mit geringerer Windungszahl und eine Rolle g' von schwächerem Draht mit grösserer Windungszahl. Die Widerstände derselben waren ermittelt worden. Zur Zurückführung der Nadel auf die Nullage wurden je nach Bedürfniss bis zu sieben Trockenelemente (H) mit einem Widerstandsetalon von 110.000 Ω in Stufen von 1 Ω aufwärts eingeschaltet. Die Ströme in g und g' konnten durch einen Doppelbügel, der die Verbindung der Näpfchen in N entsprechend herstellte, gleichzeitig geschlossen und geöffnet werden.

Das Verhältniss der Reductionsfactoren $\frac{g}{g'}$ wurde von Zeit zu Zeit bestimmt, dessgleichen der Reductionsfactor von g allein. Der Rheostatenwiderstand ρ enthielt 1000 Ω in Sätzen bis zu 0·1 Ω. Da auch der Widerstand der Zuleitungen gemessen war, so konnten alle auf die Stromstärke I und den Widerstand im äusseren Stromkreise R bezüglichen Elemente als gegeben angesehen werden.

Der innere Widerstand der Zelle w ergab sich aus der Schwächung, den der Inductionsstoss beim Passiren derselben

erfuhr. Nach jeder Versuchsreihe wurde die Zelle ausgeschaltet, die Stromkreise *AEB* und bei g' geöffnet, ferner der Laufcontact in *C* so lange verschoben, bis *r* dem früheren Werthe von *Z* gleichkam, und endlich *C* mit ρ verbunden. Dann wurde aus dem Etalon ρ so lange Widerstand zugesetzt, bis das Galvanometer durch den Stromstoss dieselbe Ablenkung erfuhr, wie bei eingeschalteter Zelle. Dieses Verfahren zog ich einer Berechnung von *w* aus mehreren Gleichungen mit verschiedenen Werthen von ρ desshalb vor, weil das Galvanometer aperiodische Schwingungen vollzog.

Die Näpfchen in *S*, in bekannter Weise aus Glasröhrchen und Siegellackstangen hergestellt und mit Quecksilber gefüllt, ermöglichten die Messungen der Polspannungen *K* durch Kupferbügel 1—3, 3—5, 2—4 und 4—6, wie in Fig. 2 angegeben. Die Näpfchen E'—E' standen mit den Punkten *A* und *B* in Verbindung, die Näpfchen H'—H' mit den beiden Polen von *H*. Durch entsprechende Schaltung war somit auch die Potentialdifferenz zwischen *A* und *B* und jene in *H* jederzeit der Prüfung zu unterwerfen. Die Näpfchen 8 und 9 endlich dienten durch ihre Verbindung mit einem Normal-Clark-Elemente zur Angabe der gefundenen Potentiale in Volts.

Das Elektrometer befand sich in Quadrantenschaltung. Die Nadel desselben erhielt von 144 Clark-Elementen Ladung. Die Ablenkung des Spiegels um einen Theilstrich einer in der Entfernung von 3 *m* vom Instrumente aufgestellten Scala entsprach etwas weniger als 0·01 Volt. Zehntel von Theilstrichen konnten mit ziemlicher Sicherheit geschätzt werden.

Zum Schlusse soll noch hervorgehoben werden, dass sämmtliche Drähte nicht nur auf das sorgfältigste von einander isolirt, sondern auch getrennt nach Art der Telegraphenleitungen geführt waren, wohl ein Grunderforderniss bei einer derartigen Anordnung.

Prüfung der Methode.

1. Verhalten von Zn in $ZnSO_4$. Die nächste Voraussetzung zur Anwendbarkeit der Methode besteht darin, dass der Zinkcylinder in seiner umgebenden Salzlösung sich in jenem Bereiche von Stromstärken, die zur Polarisirung der

Zelle aufgewendet wurden, vollkommen frei von Polarisation zeige; zu ihrer Prüfung wurde dem amalgamirten Zinkcylinder ein zweiter concentrischer aus gleichem Metalle in der Sulfatlösung gegenübergestellt, der an Stelle von *M* in Verbindung mit *A* (Fig. 2) trat. Aus den beobachteten Werthen *K*, *I* und *w* konnte die Gesammtpolarisation $p_0 + p_H$ gefunden werden. Es ergab sich:

Δ_{Volt}	K_{Volt}	$I_{Ampère}$	w_{Ohm}	Iw_{Volt}	$p_H + p_{0Volt}$
0	0	0	2·60	0	0
0·102	0·019	0·0062	2·61	0·016	+0·003
0·307	0·051	0·0187	2·64	0·049	+0·002
0·514	0·082	0·0304	2·64	0·080	+0·002
0·717	0·111	0·0424	2·61	0·111	0
0·919	0·147	0·0542	2·72	0·147	0
1·353	0·136	0·0508	2·77	0·141	—0·005
1·556	0·162	0·0586	2·84	0·166	—0·004
1·968	0·214	0·0767	2·84	0·219	—0·005

Die sechs ersten Versuche waren mit einem Widerstande von 13·1 bis 14·4 Ω (je nach der Stellung des Contactes in *C*) im äusseren Stromkreise, die drei letzteren mit einem solchen von 23·8 bis 22·7 Ω ausgeführt worden. Der Widerstand *w* ist bei Zunahme von *I* in langsamem Wachsthum begriffen; dass diese Zunahme durch Concentrationsänderungen in der Lösung der Wanderung der Ionen entsprechend, verursacht wurde, ist bei der geringen in Anwendung gekommenen Stromdichte nicht wahrscheinlich. Die für *K* und *Iw* gefundenen Werthe sind ziemlich gleich gross. Die vorhandenen Differenzen dürften auf Beobachtungsfehler zurückzuführen sein, die namentlich durch die mit etwas grösseren Schwierigkeiten verbundenen Bestimmungen von *w* hervorgerufen werden. Immerhin kann man den Satz aussprechen, dass das Verhalten von Zink in Zinksulfatlösung kein Hinderniss in der Anwendung der Methode bildet.

2. Der polarisirende Effect der Inductionsstösse. Ein durch die geschlossene Zelle *P* geleiteter Inductionsstoss wird im Allgemeinen eine Änderung in der Anordnung derselben hervorrufen. Ist der Stromstoss von derselben Richtung wie der stationäre Strom, dann tritt an der Elektrode *M* eine

Vermehrung, im entgegengesetzten Falle eine Verminderung der Gasabscheidung ein. Dadurch kann aber auch die Polarisation verändert werden, da an Stelle der Gleichung $\pi = \varphi(i)$ eine solche $\pi + \eta = \varphi(i + \zeta)$ tritt, in der ζ als »polarisirende Stromstärke«, η als Polarisation des Inductionsstosses zu bezeichnen ist. Der Einfluss von ζ wird innerhalb gewisser Grenzen von der Verhältnisszahl ζ / i abhängen. Dies lässt sich an einem bekannten Beispiele erläutern. Durch viele Untersuchungen bei offenem Stromkreise ist festgestellt worden, dass die Polarisation zunächst linear mit der polarisirenden Kraft ansteigt, um nach Erreichung eines Maximums keinen wesentlichen Änderungen mehr zu unterliegen. In Fig. 5 soll durch die Curve OB' diese Abhängigkeit charakterisirt werden. Für irgend einen Werth von i, bei dem das Maximum bereits

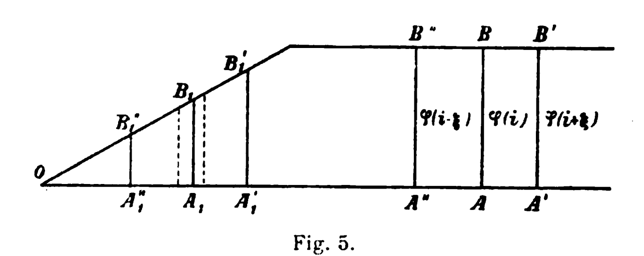


Fig. 5.

entsprechend überschritten ist, werde die Grösse der Polarisation durch die Ordinate AB dargestellt. Diese ist aber der Beobachtung nicht zugänglich, da der Stromstoss je nach seiner Richtung die Ordinaten $A'B'$ oder $A''B''$ liefert. Je nach der Intensität des Stosses werden sich die Abstände AA' und AA'' ändern. Erzeugt der Stoss dieselbe Ablenkung am Galvanometer, ob er nun anodischer oder kathodischer Natur ist, dann wird $A'B' = A''B''$, und man wird im Allgemeinen annehmen können, dass er den der Stromstärke i zukommenden Zustand der Zelle, ausgedrückt durch AB, wiedergibt. Anders verhält es sich jedoch in jenen Stadien der Polarisation, in denen das Maximum entweder noch nicht erreicht oder nicht genügend überschritten ist. Hier erhält man an Stelle des wahren Werthes A_1B_1 zwei von einander verschiedene Werthe $A_1'B_1'$ und $A_1''B_1''$. Man kann nun allerdings den Versuch machen, die elektro-

motorische Kraft der Induction immer mehr zu verkleinern, so dass die beiden Ordinaten einander sehr nahe gerückt werden und ihr arithmetisches Mittel dem Werthe $A_1 B_1$ nahekommt. Allein bei diesem Versuche stosst man auf eine andere Schwierigkeit, die nicht zu bewältigen ist.

Operirt man nämlich bei stromlosem oder nahezu stromlosem Zustande der Zelle, indem man der elektromotorischen Kraft P eine gleiche Δ entgegensetzt, so zeigt es sich, dass der Stromstoss, je nachdem eine kleinere oder grössere Elektrode M in der Zelle befindlich ist, mehr oder weniger verschluckt wird. Je schwächer die Intensität des Stosses, desto auffälliger macht sich die Erscheinung geltend. Berechnet man den Widerstand aus den Galvanometerausschlägen, so kann man an blanken Platinplatten tausende von Ohm für denselben erhalten. Es ist kein Grund erfindlich, warum eine Elektrode, an der jede Gasentwicklung ferne gehalten ist, der Stromleitung einen so ausserordentlichen Widerstand entgegensetzen soll, während die gasbedeckte normale Verhältnisse (10 bis 30 Ω Widerstand) aufweist. Die Ursache für diese merkwürdige Erscheinung wird vielmehr darin liegen, dass die durch den Stromstoss abgeschiedenen Ionen an der Elektrode einen Condensator herstellen, der die Elektricität staut. Nimmt die Intensität des Stosses zu, dann erfährt der Condensator an verschiedenen Stellen Durchbrüche, die eine scheinbare Abnahme des Widerstandes hervorrufen.

Wird anderseits die Oberfläche der Elektrode bedeutend vergrössert, das beste Mittel hiefür besteht im Platiniren derselben, dann kommt es nur zu einer unvollkommenen Ausbildung des Condensators und die Durchlässe für die strömende Elektricität werden zahlreicher.

Diese schwierigen Verhältnisse sollen nun an einigen speciellen Fällen discutirt werden. Vorerst sei bemerkt, dass der Inductionsstoss keinerlei Einfluss auf die Polspannung ausübte. Das mit den Polen der Zelle P dauernd verbundene Elektrometer erfuhr in seiner Ruhelage nicht die geringste Änderung, wenn der Taster in T niedergedrückt oder losgelassen wurde. Die Polarisation η ist also schon abgelaufen, bevor die Nadel des Elektrometers dem Impulse Folge leisten

konnte. Demnach sind es nur die Anomalien bei der Widerstandsbestimmung, die auf die Wirkung von η Schlüsse gestatten.

Die scheinbare Abhängigkeit des Widerstandes der Zelle w von der Richtung des Inductionsstosses ist aus folgender Zusammenstellung zu ersehen.

M bestand aus einer blanken Elektrode von $2·7 \times 1·4\,cm^2$; das Potential P der Zelle, dessen Elektrode bereits wiederholten kathodischen Polarisationen ausgesetzt war, betrug, nachdem die Zelle längere Zeit zusammengestellt war, 1·324 V. Die elektromotorische Kraft Δ war 1·565 V. und von gleicher Richtung wie P, so dass sich die gesammte polarisirende Kraft auf 2·90 V. belief, die an M kathodische Polarisation hervorrief. Durch Einschaltung von Widerstand ρ wurde die Stromstärke I auf 0·0244 A. gebracht. Der Widerstand jeder Rolle in T betrug 1·1 Ω. Die Polspannung K_H war zu —0·218 V. ermittelt worden. Nun wurden abwechselnd kathodische und anodische Stromstösse durch die Zelle geleitet.

Inducirende elektromotorische Kraft	Scheinbarer Widerstand w für kathodische Stösse	Scheinbarer Widerstand w für anodische Stösse
4·466 V.	24·7 Ω	33·9 Ω
5·950	23·1	35·9
7·439	22·4	45·8
8·936	22·7	49·3
7·439	22·4	51·0
5·950	22·4	47·1
4·466	21·0	39·2

Bildet man aus den zu einander gehörigen Werthen die Mittel, so erhält man:

Induc. elektromotorische Kraft	4·466	5·950	7·439	8·936 V.
w_a	36·5	41·5	48·4	49·3 Ω
w_K	22·8	22·7	22·4	22·7

Die durch Fig. 5 illustrirte Anschauung findet ihre Bestätigung. Die »Widerstände« w_K unterscheiden sich nur wenig von einander und scheinen somit dem Widerstande der Zelle im Zustande AB gleichzukommen. Anders verhält es sich mit den »Widerständen« w_a, die mit der Zunahme der Induction wachsen.

Wird an M an Stelle kathodischer Polarisation anodische erzeugt, dann unterscheiden sich die Werthe w_a wenig von einander und scheinen den wahren Widerstand der Zelle zu repräsentiren, während die Ausdrücke für w_K mit steigender Induction zunehmen.

Um diese Störungen möglichst hintanzuhalten, musste die Intensität des Inductionsstosses verringert werden. Die Galvanometerrollen in T, sowie in g und g' wurden durch neue ersetzt von grösserer Windungszahl, so dass die von einem einzigen Trockenelemente erzeugten Inductionsstösse zur sicheren Bestimmung von w ausreichten. Durch diese Änderung in der Anordnung wurde auch thatsächlich erzielt, dass sich an blanken Elektroden die Ausschläge am Galvanometer unabhängig von der Richtung des Stromstosses fanden, sobald die Stromstärke I einen Werth erreicht hatte, der auf den Eintritt von Gasentwicklung an M schliessen liess. An platinirten Elektroden verursachten Stromstösse verschiedener Richtung auch unter dieser Grenze gleiche Ausschläge. Über diese Fälle wird im nächsten Abschnitte berichtet werden.

Es erübrigt nun noch zu zeigen, wie sich die Bestimmungen des »Widerstandes« w im stromlosen Zustande der Zelle gestalten. Zu diesem Behufe wurde dem Potential P ein gleiches, aber entgegengesetztes $\Delta = 1{\cdot}425$ V. superponirt. Die Polspannung K ergab sich dann gleichfalls zu $1{\cdot}425$ V. Nun wurden in der früher angegebenen Weise Inductionsströme von verschiedener Intensität durch P geleitet. Die Resultate waren an der blanken Elektrode die folgenden:

Inducirende elektromotorische Kraft:	2·982	4·466	5·950	7·439	8·936 V.
w:	300	230	165	127	102 Ω

Dabei betrug der gesammte Widerstand an Drähten 4·8 Ω.

Erzeugte ein einziges Element von 1·492 V. den Inductionsstoss, so fand sich, nachdem die Empfindlichkeit des Galvanometers entsprechend erhöht war, bei einem Widerstande von 120 Ω im äusseren Stromkreise:

$$w = 2500\ \Omega.$$

Bemerkenswerth ist, dass in diesem Zustande der Zelle nicht die Spur eines stationären Stromes im Galvanometer nachzuweisen war, obwohl dasselbe so empfindlich war, dass 100 Theilstrichen Ablenkung 20 Mikroampère entsprechen.

Wird die Differenz zwischen P und Δ allmälig vergrössert, dann sinkt dieser »Widerstand«. Zunächst halten sich Δ und K die Wage; sobald aber K merklich grösser (bei kathodischer Polarisirung) oder kleiner (bei anodischer Polarisirung) geworden ist wie Δ, tritt eine rasche Zunahme von I ein, und die Werthe von w sinken auf ein Minimum.

Als Beleg hiefür möge folgende Versuchsreihe dienen: Der elektromotorischen Kraft $P = 1·485$ V. wurden abnehmende Werthe von Δ opponirt, so dass also wachsende kathodische Polarisation entstand. Die Inductionsstösse, verursacht durch die inducirende elektromotorische Kraft von 4·47 V., hatten gleiche Richtung; man erhielt für w:

$\Delta_{V.} =$	−1·485,	1·474,	1·423,	1·371,	1·318,	1·266,	1·217,	1·168,	1·060, 0·75
$w_{\Omega} =$	216	203	176	158	124	102	96	74	57 31

Ich glaube von einer Mittheilung weiterer Resultate Abstand nehmen zu können. Der Beweis, dass die anomalen Widerstände durch Entstehung einer condensatorischen Schicht an der Elektrode erzeugt werden, dürfte zur Genüge erbracht sein. Eine geringe Anzahl von Ionen ist der Ausbildung des Condensators am günstigsten; für w ergaben sich die grössten Werthe. Reichlicher abgeschiedene Ionen, gleichgiltig, ob dieselben durch stationäre oder inducirte Ströme erzeugt werden, verursachen Undichtigkeiten im Condensator und damit eine entsprechende Abnahme von w.

Nicht ohne Werth dürften die gemachten Erfahrungen bei Anwendung der wichtigen, von F. Kohlrausch angegebenen und weiter entwickelten Methode zur Bestimmung des Wider-

standes von Elektrolyten mit Hilfe von Wechselströmen sein. Selbstverständlich sollen sich diese Bemerkungen nur auf jene Leiter beziehen, bei denen durch die Elektrolyse gasförmige Ionen an den Elektroden ausgeschieden werden, also zunächst auf Säuren und Basen. Wenn ein einziger Inductionsstoss während der sehr kurzen Zeit, als er das Voltameter passirt, im Stande ist, eine Veränderung in dessen Zustande hervorzurufen, die sich nur während dieser Zeit zur Geltung bringt, dann kann ein dem ersten Stoss rasch folgender zweiter von entgegengesetzter Richtung die Wirkung des ersten nicht aufheben, weil sie gar nicht mehr vorhanden ist. Er wird vielmehr eine der ersten ähnliche zweite Veränderung erzeugen, die ebenso rasch verschwindet wie die erste. Durch den Stromwechsel wird also die Brauchbarkeit der Methode nicht garantirt. Es scheint vielmehr das bei dieser Methode benützte hohe Potential der Induction (tausende von Volt) die Ursache zu sein, dass Complicationen, wie sie bei Anwendung von Inductionsströmen entstehen, deren Potential nur wenige Volt betrug, vermieden werden. Ausserdem hat sich ein neues Motiv für die von Kohlrausch gestellte Forderung ergeben, bei derartigen Messungen platinirte Elektroden anzuwenden.

Nach Versuchen von F. Kohlrausch[1] mit Wechselströmen, die ein Sinusinductor lieferte, lässt sich die durch Inductionsströme hervorgerufene Polarisation durch die Formel $\eta = \frac{C}{q} \int i dt$ ausdrücken; q bedeutet in derselben die Oberfläche der Elektroden, $\int i dt$ die durch die Zelle geleitete Elektricitätsmenge. Nach den mitgetheilten Versuchen lässt es sich nicht entscheiden, ob diese Formel bei Anwendung eines einzelnen Stromstosses Anspruch auf Giltigkeit besitzt. Da aber, wie gezeigt, die Polarisation in so ausserordentlich rascher Weise auftritt und wieder verschwindet, so erscheint es wahrscheinlicher, dass der maximale Werth, den i im Integrale besitzt, die Höhe der Polarisation bestimmt, ähnlich wie bei Inductionsströmen auch nicht das an einem Elektrometer

[1] F. Kohlrausch, Pogg. Ann. 148, S. 143, 1873 und Pogg. Ann., Jubelb., S. 290, 1874.

gefundene mittlere Potential, sondern sein Maximalwerth für die Länge des Öffnungsfunkens massgebend ist. Möglicherweise ist auch die Geschwindigkeit, mit der der Stoss verläuft, von Einfluss. So wurde z. B. für drahtförmige Elektroden gefunden, dass der scheinbare Widerstand der Zelle ein wesentlich veränderter war, wenn an Stelle eines Schliessungsstromes ein gleichgerichteter Öffnungsstrom, der dieselbe Menge mit sich führte, durch die Zelle floss.

Die Bestimmung der Dielektricitätsconstanten von Elektrolyten, zu denen ja auch das reinste Wasser zu zählen ist, scheint nach dieser Darstellung unüberwindlichen Schwierigkeiten zu begegnen, da sich kein Anhaltspunkt dafür ergibt, die auftretende Polarisation entweder durch Rechnung zu eliminiren oder aus dem Fehlen gewisser Nebenerscheinungen (Telephongeräusche), die in manchen Fällen die Polarisation begleiten, auch auf das Fehlen von Polarisation einen sicheren Schluss zu ziehen.

Resultate.

Die im vorigen Abschnitte erörterten, durch den polarisirenden Effect der Induction entstandenen Störungen veranlassen mich, nur jene Resultate mitzutheilen, die davon unberührt blieben. Dazu gehören jene Messungen, bei denen die Grösse des Widerstandes sich unabhängig von der Richtung des Stromstosses zeigte; ferner sind nur jene scheinbaren Widerstände der Zelle anzuführen, die innerhalb gewisser Grenzen der Wahrscheinlichkeit liegen.

Der gestellten Forderung genügen die Ergebnisse der Versuchsreihe I, die an einer blanken als Kathode fungirenden Elektrode ($2\cdot 7 \times 1\cdot 4\ cm^2$) erhalten wurden. Der äussere Widerstand R betrug 115·2—116·5 Ω je nach der Stellung des Contactes in C, die Empfindlichkeit der Rolle besass den bereits früher angegebenen Werth (100 Theilstriche Galvanometerausschlag entsprachen 20 Mikroampère), der Widerstand jeder Lage der Inductionsrollen in T belief sich auf 46·7 Ω. Wurde der primäre Stromkreis, der eine als widerstandslos anzusehende elektromotorische Kraft von 1·49 Volt enthielt, geschlossen oder geöffnet, so erfuhr das Galvanometer einen Ausschlag

von 100 Strichen, wenn der Gesammtwiderstand in dem Kreise mit g 130 Ω ausmachte.

P hatte, nachdem die Zelle längere Zeit aufgestellt war, einen Werth von 1·583 V. angenommen, der in der letzten halben Stunde vor Stromschluss nur mehr geringfügigen Änderungen — wenige Tausendstelvolt — unterlag:

Versuchsreihe I.

Blanke Elektrode ($2 \cdot 7 \times 1 \cdot 4$ cm^2)		$P = 1 \cdot 583$ V.	$\delta_{H_2SO_4 aq} = 1 \cdot 027$		Kathodische Polarisation
Δ	K_H	I	w	Iw	$P - p_H$
−1·632	1·632	0	—	0	1·632
1·590	1·590	0	—		1·590
1·444	1·444	0·000003	—		1·444
1·343	1·343	13	—		1·343
1·240	1·246	25	—		1·246
1·147	1·140	32	—		1·140
1·043	1·039	36	—		1·039
1·022	1·028	36	—		1·028
0·918	0·925	36	—		0·925
0·819	0·825	40	—		0·825
0·746	0·757	70	—		0·757
0·716	0·741	183	31·5	0·006	0·747
0·695	0·730	276	27·1	0·007	0·737
0·665	0·718	452	25·0	0·011	0·729
0·615*	0·703	798	21·5	0·017	0·720
0·564	0·694	1130	24·2	0·027	0·721
0·513	0·685	1500	24·0	0·036	0·721
0·462	0 677	1850	24·7	0·046	0·723
0·411	0·658	2150	25·1	0·054	0·712
0·358	0·651	2500	25·9	0·065	0·716
0·306	0·642	2860	26·0	0·074	0·716
0·254	0·629	3220	26·1	0·084	0·713
0·202	0·611	3550	27·0	0 096	0·707
0·152	0·602	3870	28·3	0·110	0·712
0·102	0·596	4350	28·6	0·124	0·720
—0·051	0·583	4640	27·9	0·129	0·712
0	0·572	4970	29·0	0·144	0·719

Δ	K_H	I	w	Iw	$P-p_H$
+0·051	0·559	0·005290	28·8	0·152	0·711
0·102	0·548	5660	28·4	0·161	0·709
0·202	0·531	6270	28·2	0·177	0·708
0·306	0·507	7040	28·3	0·199	0·706
0·411	0·488	7700	28·1	0·216	0·704
0·513	0·473	8400	28·0	0·235	0·708
0·615	0·453	9100	27·1	0·257	0·710
0·716	0·430	9800	29·4	0·288	0·718

Aus der Reihe wird Folgendes ersichtlich: Die kathodische Polarisation hält zunächst mit der Grösse der polarisirenden Kraft vollkommen gleichen Schritt; da die Summe der im Stromkreise vorhandenen elektromotorischen Kraft somit gleich Null ist, tritt auch nahezu kein Strom auf. Erst bei $\Delta = 0·746$ entsteht eine bemerkenswerthere Differenz $K_H - \Delta = 0·011$ V., die nun bei weiterer Verringerung der oppositionell zu P stehenden elektromotorischen Kraft rasch ansteigt; in entsprechender Weise vergrössert sich auch der Werth von I.

Bei dem Werthe von Δ, der mit einem Sternchen (*) versehen ist, wurden zuerst Gasbläschen an der Elektrode M sichtbar; der diesem Zustande der Zelle entsprechende Werth von w erreicht ein Minimum von 21·5 Ω. War die Zelle längere Zeit geschlossen, so konnte schon bei einem Werthe von $\Delta = 0·700$, somit bei einer polarisirenden Kraft von 0·88 V. das Auftreten mikroskopischer Gasbläschen festgestellt werden.

Ist der Eintritt gut sichtbarer Wasserstoffentwicklung einmal erfolgt, dann entspricht der Abnahme von K_H eine gleiche Zunahme von Iw; die Polarisation hat somit ein Maximum erreicht, das bei Zunahme der Stromstärke im Verhältnisse 1:12 nur geringen Schwankungen unterworfen ist. Als mittlerer Werth für $P-p_H$ ergibt sich innerhalb dieser Grenzen 0·714 V., woraus sich p_H im Mittel zu 0·87 V. berechnet. Im offenen Stromkreise wurde nach der Stimmgabelmethode 0·89 bis 0·93 V. gefunden,[1] eine Übereinstimmung, die auf diesem Gebiete immer noch als befriedigende zu erklären ist.

[1] F. Streintz, Wied. Ann., 33, S. 473, 1888.

Diese Resultate geben somit der Hoffnung Raum, dass die eingangs der Mittheilung ausgesprochene Vermuthung, das Potential sei eine unbestimmbare Function der Stromstärke, nicht zutreffend sei.

Dieses Bild ändert sich, wenn man platinirte Elektroden in Verwendung zieht. Es wird dies aus der Versuchsreihe II ersichtlich, die unter denselben Umständen wie I entstanden ist und daher auch damit verglichen werden kann.

Versuchsreihe II.

Platinirte Elektrode ($2\cdot7\times1\cdot4\ cm^2$) $P = 1\cdot590$ V. $\delta_{H_2SO_4 aq} = 1\cdot027$ *A)* Kathodische Polarisation

Δ	K_H	I	w	Iw	$P-p_H$
—1·590	1·590	0	[102]	—	1·590
1·545	1·542		[90·3]	—	1·542
1·444	1·444		[68·3]	—	1·444
1·393	1·397		[63·3]	—	1·397
1·240	1·246		[52·0]	—	1·246
1·048	1·046		[32·9]	—	1·046
0·941	0·942		27·6	—	0·942
0·840	0·837		25·0	—	0·837
0·733	0·739		23·5	—	0·739
0·683*	0·708	0·000358	23·5	0·008	0·716
0·631	0·695	1000	22·1	0·022	0·717
0·526	0·674	1330	22·8	0·030	0·704
0·428	0·655	2060	22·1	0·046	0·699
0·314	0·635	2790	22·9	0·064	0·699
0·207	0·616	3540	21·3	0·075	0·691
0·105	0·598	4280	20·4	0·087	0·685
0	0·576	5050	20·3	0·103	0·679
+0·052	0·562	5370	18·7	0·101	0·663
0·207	0·535	6580	18·4	0·121	0·656

B) Anodische Polarisation

Δ	K_0	I	w	Iw	$P+p_0$
—1·618	1·623	0	33·3	—	1·623
1·669	1·676		31·8	—	1·676
1·776	1·772		35·1	—	1·772

Δ	K_0	I	w	Iw	$P+p_0$
—1·881	1·875		34·7	—	1·875
1·982	1·981		34·5	—	1·981
2·113	2·083	0·000040	35·0	—	2·083
2·219	2·181	90	35·0	0·003	2·178
2·347	2·259	342	35·0	0·012	2·247
2·435*	2·306	774	35·0	0·027	2·279
2·524	2·352	1290	34·3	0·044	2·308
2·629	2·403	1880	34·3	0·065	2·338
2·734	2·442	2445	33·3	0·081	2·361
2·885	2·475	2880	33·3	0·096	2·379
2·937	2·500	3700	33·6	0·124	2·376
3·144	2·552	4900	33·6	0·165	2·387
3·351	2·572	6260	33·6	0·210	2·362
3·565	2·645	7530	33·5	0·252	2·393
3·740	2·695	8950	34·7	0·311	2·384

Ein Vergleich zwischen den Zahlen der Versuchsreihe I und jenen von II *A* (kathodische Polarisation) ergibt zunächst, dass die Werthe für die Polspannung unabhängig sind von der Ausdehnung der angewendeten Elektrode. Anders verhält sich der Widerstand; er erreicht bei Eintritt von Gasentwicklung, dieselbe beginnt bei $\Delta = -0{\cdot}683$ und ist mit * bezeichnet, kein Minimum, sondern nimmt mit zunehmender Stromstärke ziemlich stetig ab. Der Abnahme von K_H entspricht somit eine geringere Zunahme von Iw, wesshalb auch die Polarisation p_H kein Maximum erreicht, sondern mit steigendem I fortwährend zunimmt. Dass sich Elektroden je nach ihrer Oberfläche in dieser Hinsicht so wesentlich unterscheiden, ist schon ein höchst merkwürdiges Ergebniss.

Für platinirte Elektroden wurden im vorigen Abschnitte keine Angaben über die scheinbare Grösse des Widerstandes im stromlosen Zustande des Kreises gemacht; es wurde dies nachgeholt und der jeweilige Werth von w in die Tabelle in Klammern eingetragen. Für die anodische Polarisation (II *B*) ergeben sich für w keine anomalen Werthe; vermuthlich rührt dies von der bereits vorangegangenen kathodischen Beladung der Elektrode her.

Das Galvanometer zeigt sich bei Anwendung von platinirten Elektroden viel unruhiger als bei blanken. Die geringsten Differenzen zwischen Δ und K_H, beziehungsweise K_0 zeigen unmittelbar nach dem Schliessen des Stromes bereits bedeutende kathodische, beziehungsweise anodische Ströme, die erst nach Verlauf von längerer Zeit (10—20 Minuten) abfliessen, wodurch Beobachtungen mittelst Inductionsstössen ermöglicht werden. Durch die bedeutende Vergrösserung der Elektrodenfläche wird eben zur Herstellung eines Gleichgewichtes viel mehr Zeit in Anspruch genommen. Möglicherweise bietet diese Erscheinung die Aussicht, die so gänzlich unbekannte Oberfläche einer platinirten Elektrode schätzend zu bestimmen. In der Periode der Gasentwicklung verhält sich das Galvanometer hingegen wieder ruhig. Bei einem Potential $\Delta = -0\ 683$ fand, wie schon erwähnt, sichtbare Gasentwicklung statt. Der diesem Zustande entsprechende Werth von p_H berechnet sich zu 0·87 V., befindet sich somit in guter Übereinstimmung mit dem für eine blanke Elektrode gefundenen 0·88 V.

Die anodische Polarisation (Versuchsreihe II *B*) steigt zunächst auch gleichmässig mit der polarisirenden Kraft an. Die Differenzen zwischen Δ und K_0 sind jedoch lange vor dem erfolgten Eintritte sichtbarer Gasentwicklung, der in der Tabelle mit * bezeichnet ist, schon erheblich. Obwohl die Schwefelsäure in der Zelle vor jeder Versuchsreihe ausgekocht wurde, so ist das Vorhandensein von absorbirter Luft in der Flüssigkeit doch nicht ausgeschlossen. Die elektrolytische Convection des O an die Anode wird die Ursache der bemerkenswerthen Differenz $\Delta - K_0$ sein.

Bei einer polarisirenden Kraft $P - 2\cdot435 = 0\cdot845$ V. treten die ersten O-Bläschen auf; die Zelle zeigt eine Polarisation $2\cdot279 - P = 0\cdot689$ V.

Geht man von der Voraussetzung aus, dass in einer Zelle mit zwei polarisirbaren Elektroden dieselben keine Störung auf einander ausüben, dann würde zur sichtbaren Wasserzersetzung an Platinelektroden von grosser Oberfläche eine elektromotorische Kraft von $2\cdot435 - 0\cdot683 = 1\cdot752$ V. hinreichen, die eine Gesammtpolarisation $p = p_0 + p_H$ von 1·563 V. hervorrufen würde.

Nach dem Eintritt der Gasentwicklung nimmt die anodische Polarisation noch weiter zu; doch scheint sie im Gegensatze zur kathodischen einem Maximum zuzustreben.

Nun möge noch die Aufmerksamkeit auf die für den Widerstand *w* gefundenen Zahlen gelenkt werden. Dieser Widerstand schwankt bei O-Polarisation zwischen 33·3 und 35 Ω, bei H-Polarisation dagegen nimmt er von 23·5 auf 18·4 Ω ab!

Dass in der Versuchsanordnung während der Beobachtungen keine Veränderung vor sich ging, bewies ein Zurückgreifen auf die kathodische Polarisation nach Beendigung der Versuche in II *B*. Es ergab sich nämlich:

Δ	K_H	I	w	Iw	$P-p_H$
0	0·574	0·0005070	19·8	0·100	0·674

Einen einleuchtenden Grund für die Widerstandsänderung zu finden, halte ich für gänzlich ausgeschlossen. Es erübrigt mithin nur, den Begriff des Ohm'schen Widerstandes für eine Zelle, die Polarisation annimmt, fallen zu lassen.

Zwei Versuchsreihen, bei denen die polarisirende Kraft constant gehalten und nur die Stromintensität durch Rheostatenwiderstände Veränderungen unterzogen wurde, sollen noch angeführt werden. Die Elektrode *M* tauchte dabei etwas tiefer in das Gefäss *L*, so dass die Widerstände *w* geringer ausfielen.

Versuchsreihe III.

Platinirte Elektrode wie in II. $\Delta = +0·516$ V. Kathodische Polarisation

K_H	I	w	Iw	$P-p_H$
0·639	0·003320	10·0	0·033	0·672
0·616	4020	8·5 (?)	0·034	0·650
0·571	6790	11·3	0·078	0 649
0·555	7640	9·6	0·073	0·628
0·529	9190	6·5	0·060	0·589

Versuchsreihe IV.

Platinirte Elektrode wie in II.		$\Delta = -3 \cdot 757$ V.		Anodische Polarisation
K_0	I	w	Iw	$P+p_0$
2·422	0·002940	26·5	0·078	2·344
2·443	4000	26·1	0·104	2·339
2·478	4860	26·1	0·127	2·351
2·540	7260	27·1	0·197	2·343
2·569	9190	27·2	0·250	2·319
2·614	9590	26·6	0·255	2·359

Die Veränderung des »Widerstandes«, wenn man von kathodischer zu anodischer Polarisation übergeht, tritt hier noch greller hervor.

Eine auffallende und räthselhafte Erscheinung besteht darin, dass nur die »kathodischen Widerstände« bedeutende Abhängigkeit von der Stromstärke zeigen, während die »anodischen« sich kaum damit ändern. Ausser dieser Thatsache wird übrigens noch manche andere in der vorliegenden Mittheilung erwähnte einer Erklärung bedürfen.

So viel steht jedoch fest: die Bestimmung der galvanischen Polarisation im ursprünglichen Stromkreise ist ein Ding der Unmöglichkeit.

SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

CIV. BAND. VIII. HEFT.

ABTHEILUNG II. a.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE, PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.



XIX. SITZUNG VOM 10. OCTOBER 1895.

Der Vorsitzende, Herr Vicepräsident Prof. E. Suess, begrüsst die Classe bei Wiederaufnahme der Sitzungen nach den akademischen Ferien und heisst das neueingetretene Mitglied Herrn Prof. C. Grobben herzlich willkommen. Zugleich begrüsst derselbe Herrn Dr. Melchior Treub, Director des botanischen Gartens in Buitenzorg (Java), welcher die Sitzung als Gast mit seiner Anwesenheit beehrt.

Hierauf gedenkt der Vorsitzende der Verluste, welche die kaiserl. Akademie und speciell diese Classe seit der letzten Sitzung durch den Tod einiger hochverdienter Mitglieder erlitten hat, und zwar des ausländischen Ehrenmitgliedes Louis Pasteur in Paris (gestorben am 28. September l. J.); des inländischen correspondirenden Mitgliedes Prof. Moriz Willkomm in Prag (gestorben am 26. August l. J.) und des ausländischen correspondirenden Mitgliedes Prof. Sven Ludwig Lovén in Stockholm.

Die anwesenden Mitglieder geben ihrem Beileide an diesen Verlusten durch Erheben von den Sitzen Ausdruck.

Ferner theilt der Vorsitzende mit, dass die wissenschaftliche Expedition S. M. Schiff »Pola« in das Rothe Meer am 7. d. M. den Hafen von Pola verlassen hat und dass dieselbe vor ihrer Abfahrt auf telegraphischem Wege von der kaiserl. Akademie zu reichen Erfolgen beglückwünscht wurde.

Für die diesjährigen Wahlen sprechen ihren Dank aus: Herr Prof. C. Grobben in Wien für seine Wahl zum wirklichen Mitgliede, Herr Prof. W. Wirtinger in Innsbruck für seine

Wahl zum inländischen correspondirenden Mitgliede, und die Herren Professoren M. Berthelot in Paris und W. Engelmann in Utrecht für ihre Wahl zu ausländischen correspondirenden Mitgliedern dieser Classe.

Herr Prof. Dr. Ign. Klemenčič in Graz dankt für die ihm zur Fortsetzung seiner Untersuchungen über den Energieverbrauch bei der Magnetisirung durch oscillatorische Entladungen gewährte nochmalige Subvention.

Der Secretär legt ein im Auftrage Sr. k. u. k. Hoheit des durchlauchtigsten Herrn Erzherzogs Ludwig Salvator, Ehrenmitgliedes der kaiserl. Akademie, von der Buchdruckerei H. Mercy in Prag übersendetes Exemplar des Werkes: »Columbretes« vor.

Im Laufe der akademischen Ferien sind folgende Publicationen der Classe erschienen:

Sitzungsberichte, Bd. 103 (1895), Abtheilung I, Heft III—IV (März—April); Abtheilung II. a, Heft III—IV (März und April) und V—VI (Mai—Juni); Abtheilung II. b., Heft V—VII (Mai—Juli); Abtheilung III, Heft I—V (Jänner—Mai).

Monatshefte für Chemie, Bd. 16 (1895), Heft VI (Juni), VII (Juli) und VIII (August).

Se. Excellenz der k. k. Minister für Cultus und Unterricht, Herr Dr. Paul Freiherr v. Gautsch, setzt die kaiserl. Akademie der Wissenschaften von der am 2. October l. J. erfolgten Übernahme der Geschäfte dieses Ministeriums in Kenntniss.

Das w. M. Herr k. u. k. Hofrath Director F. Steindachner übersendet eine Abhandlung, betitelt: »Beiträge zur Kenntniss der Süsswasserfische der Balkan-Halbinsel«.

Ferner übersendet Herr Hofrath Steindachner eine Abhandlung des Herrn Friedrich Siebenrock, Custos-Adjuncten am k. k. naturhistorischen Hofmuseum in Wien, betitelt: »Das Skelet der *Agamidae*«.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. Ad. Lieben übersendet eine Arbeit aus dem chemischen Laboratorium der k. k. Universität

in Czernowitz von Herrn Georg Gregor: »Über die Einwirkung von Jodäthyl auf β-resorcylsaures Kalium«.

Das c. M. Herr k. u. k. Oberst des Armeestandes Albert v. Obermayer übersendet eine Abhandlung: »Über die Wirkung des Windes auf schwach gewölbte Flächen«.

Das c. M. Herr Prof. Guido Goldschmiedt übersendet vier Arbeiten aus dem chemischen Laboratorium der k. k. deutschen Universität in Prag:

1. »Über die Hydrazone des Fluorenons und seiner Substitutionsproducte«, von Guido Goldschmiedt und Franz Schranzhofer.
2. »Über eine neue, aus dem Isobutylidenhydrazin gewonnene Base«, vom a. o. Prof. Carl Brunner.
3. »Über Papaveraldoxim«, von Dr. Robert Hirsch.
4. »Chemische Untersuchung der Samen von *Nephelium lappaceum* und des darin enthaltenen Fettes«, von Max Baczewski.

Herr H. Zukal in Wien übersendet die II. Abhandlung seiner Arbeit: »Morphologische und biologische Untersuchungen über die Flechten«.

Der Secretär legt folgende eingesendete Abhandlungen vor:

1. »Geologische Untersuchungen im östlichen Balkan und abschliessender Bericht über seine geologischen Arbeiten im Balkan«, von Prof. Dr. Franz Toula an der k. k. technischen Hochschule in Wien.
2. »Zum Problem der Wärmetheorie«, von P. C. Puschl, Stiftscapitular in Seitenstetten.
3. »Über die analytische Form der concreten statistischen Massenerscheinungen«, von Dr. Ernst Blaschke, Privatdocent an der k. k. Universität in Wien.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. Ad. Lieben überreicht eine Arbeit aus dem Laboratorium des Herrn Prof. Przibram in Czernowitz: »Zur Bildung des Pinakolins aus Calciumisobutyrat«, von Carl Glücksmann.

Herr Dr. Friedrich Czapek, Privatdocent an der k. k. Universität in Wien, überreicht eine im pflanzenphysiologischen Institute der Wiener Universität ausgeführte Arbeit: »Über die Richtungsursachen der Seitenwurzeln und einiger anderer plagiotroper Pflanzentheile«.

Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:

Erzherzog Ludwig Salvator: »Columbretes«. Prag, 1895; 4°.

Tillo, A. v., Expedition der kaiserl. russischen Geographischen Gesellschaft. Beobachtungen der russischen Polarstation an der Lenamündung. I. Theil. Astronomische und magnetische Beobachtungen 1882—1884, bearbeitet von V. Fuss, F. Müller und N. Jürgens. Anhang: 1. Drei Porträts; 2. Beschreibung der Lena-Expedition von A. Bunge; 3. Zwei Karten; 4. Bilder und 5. Ein Plan. Petersburg, 1895, Folio.

Die Laplace'sche und die Salmon'sche Schattentheorie und das Saturnring-Schattenproblem

von

Dr. **Hugo Buchholz.**

(Vorgelegt in der Sitzung am 4. Juli 1895.)

Das Problem, die Gleichung für die Schattenfigur eines beliebigen dunkeln Körpers, der von einem hellen beleuchtet wird, aufzufinden, ist bereits zu Ende des vorigen Jahrhunderts von Laplace bei Betrachtung der Jupitertrabanten-Verfinsterungen eingehend behandelt worden. Auf Grund der bei dieser Gelegenheit von Laplace vollständig entwickelten Schattenmethode[1] wird es aber nur in seltenen Fällen, durch besondere analytische Kunstgriffe, möglich, specielle Aufgaben zu lösen. Und obendrein können diese Aufgaben, sobald sie nicht mehr einfacher Natur sind, mittelst der Laplace'schen Theorie auch nicht mehr strenge, sondern nur noch unter festgesetzten, bei naturwissenschaftlichen Problemen der Wirklichkeit aber nicht immer entsprechenden Voraussetzungen ausgeführt werden. Es rührt dies daher, dass die Laplace'sche Methode im Allgemeinen die Auflösung einer Gleichung höheren Grades erfordert, und dass man bei ihr auf häufig nicht zu überwindende Eliminationsschwierigkeiten stösst, wofern man nämlich die betreffenden Eliminationen ohne Vernachlässigungen ausführen will.

Für den Astronomen hat der Fall ein besonderes Interesse, dass der leuchtende Körper die Sonne ist, die Laplace in seiner Theorie als Kugel voraussetzt, was bei ihrer minimalen

[1] Cf. Laplace, Mécanique céleste, tome IV. cap. 8.

Ellipticität keinen wesentlichen Fehler zur Folge hat. Unter dieser Voraussetzung hat der grosse französische Theoretiker in dem genannten Capitel der Mécanique céleste die Lösung zweier specieller Aufgaben bereits durchgeführt. Diejenige der Ersteren: die Schattengleichung eines kugelförmigen Planeten — und als solche sind unsere acht grossen Planeten mit Ausnahme von Jupiter und Saturn zu betrachten —, der von einer kugelförmigen Sonne beleuchtet wird, zu finden, ergibt sich nach seiner Methode unmittelbar und strenge. Hingegen gelingt die Aufstellung der Schattengleichung des Jupiter-Ellipsoides nur noch durch jene für Laplace typischen Kunstgriffe und wurde zudem nur durch ganz specielle Voraussetzungen und Vernachlässigungen ermöglicht, die aber für das System: »Sonne—Jupiter« astronomisch genügend streng sind, wie man sich aus der betreffenden Partie der Mécanique céleste überzeugt.

Ganz neue Kunstgriffe hingegen erforderte schon die Behandlung des zweiten Sonderfalles im Planetensystem, die Aufstellung der Schattengleichung des Saturn-Ellipsoides, weil bei diesem Planeten der Äquator eine Neigung von circa 28° gegen die Ekliptik aufweist, während beim Jupiter von Laplace diese Winkelgrösse Null gesetzt werden konnte. Die Folge davon ist die, dass beim Saturn der Elevationswinkel der Sonne über der Äquatorebene oder Ringebene (die so gut wie zusammenfallen) bedeutende Werthe anzunehmen vermag, z. B. —11°10'1 für 1889 Nov. 1·0. Desshalb konnte man das Saturnellipsoid-Schattenproblem auch nicht unter der speciellen Voraussetzung behandeln, dass die Sonne in die Äquatorebene des Planeten fällt. Diese Voraussetzung macht nämlich Laplace bei Ableitung der Gleichung der Schattenfigur des Jupiter-Ellipsoides astronomisch genügend strenge und erleichtert sich dadurch den Gang der Rechnung. Und obendrein muss man beim Saturn in Folge seiner starken Äquatorneigung von einer ganz anderen Form der Oberflächengleichung ausgehen, als sie Laplace dem Jupiter-Ellipsoid zu Grunde legen konnte, indem man der genannten Neigung in der Saturnoberflächengleichung Rechnung trägt. Das verursacht aber, wie man sich überzeugt, einen völlig anderen Verlauf der Rechnung,

bei der man dann von den Laplace'schen Kunstgriffen in keiner Weise mehr Gebrauch machen kann. Vielmehr entsteht analytisch ein ganz neues Problem. Dieses zweite Problem ist von Prof. Seeliger gelöst worden in der dieser Frage gewidmeten Abhandlung: »Über den Schatten eines Planeten«.[1] Auf den Gang dieser Lösung gehen wir hier indess gleichfalls nicht ein, sondern verweisen auf die betreffende Abhandlung.

Gemeinsam beiden Lösungen ist das eine: wiewohl sie ziemlich bedeutende Schwierigkeiten durch analytische Kunstgriffe überwinden, so sind sie doch nur »astronomisch« genügend genau, hingegen keine mathematisch strengen und allgemeinen Lösungen, was jedoch, wie wir sehen werden, durch die Laplace'sche Methode als solche bedingt ist und an den beiden Lösungen selbst nicht liegt. Man wird überhaupt soweit gehen müssen, zu sagen, dass es, in Folge der eintretenden Eliminationsschwierigkeiten, praktisch kaum durchführbar ist, eine allgemeine und strenge Lösung dieser zwei Probleme nach der Laplace'schen Schattentheorie wirklich aufzufinden.

Bei Anlass schliesslich des von mir behandelten Phänomens der »Iapetosverfinsterung vom Jahre 1889 durch Saturn und sein Ringsystem«[2] machte sich das Bedürfniss geltend, die Gleichung der Schattenfigur des Saturnringes — des letzten Sonderfalles im Planetensystem — zu kennen. Glücklicherweise gestatteten auch hier die speciellen, für das System »Sonne—Saturn« geltenden Verhältnisse die Lösung des Saturnring-Schattenproblems nach der Laplace'schen Methode unter Anwendung von Kunstgriffen astronomisch genügend strenge zu geben. Das war aber in gewissem Sinne eben wieder nur ein glücklicher, durch die beim System »Sonne—Saturn« geltenden Verhältnisse bedingter Zufall. Für die allgemeine und strenge Lösung versagt indess auch hier die Laplace'sche Methode, wie wir an diesem Beispiel ausführlich nachweisen wollen, während die beiden anderen erwähnten Probleme zu noch grösseren Complicationen führen als das letztgenannte.

---

[1] Cf. Seeliger, Aus den Sitzungsberichten der mathem.-physik. Classe der k. bayer. Akad. der Wissensch., 1894, Bd. XXIV, Heft IV.

[2] Cf. Astr. Nachr., Bd. 137, Nr. 3280.

Schon bei diesen astronomischen Näherungsuntersuchungen — wenn ich mich so ausdrücken darf — über die Schattengleichung des Saturnringes lag nun aber der Gedanke nahe, die Anwendbarkeit eines vom Laplace'schen total verschiedenen Lösungsweges zur Behandlung von Schattenaufgaben zu prüfen, der im Princip zwar noch complicirter und weitläufiger ist als jener, der aber, wie sich bald ergab, doch wenigstens das für sich hat, dass er stets zu einem positiven Resultate führen muss in jedem beliebigen Falle. Doch erwies sich damals für die Prüfung der Barnard'schen Beobachtungen — die sich auf die genannte Iapetusverfinsterung beziehen — die Behandlung des Saturnring-Schattenproblems auf diesem viel verwickelteren strengen Wege schliesslich nicht als nöthig. In der folgenden Abhandlung aber soll dieser Gedanke wieder aufgenommen, und vom Beispiele des Schattenproblems eines von der kugelförmigen Sonne beleuchteten Kreises — als welchen man, wie in der letztcitirten Abhandlung gezeigt, den Ring des Saturn betrachten durfte — ausgehend, nachgewiesen werden, dass die Laplace'sche Methode bei allgemeiner und strenger Behandlung dieser Aufgabe wirklich versagt; um sodann die schon angedeutete, von dem genialen englischen Geometer George Salmon stammende, in der modernen Geometrie basirende Methode[1] zur Lösung von Schattenproblemen zunächst in einem anderen Zusammenhang noch einmal ausführlich abzuleiten — die Salmon'sche Ableitung ist sehr kurz und bei Behandlung anderer geometrischer Fragen gegeben — und hierauf zur strengen Lösung des Saturnringschattenproblems wirklich zu verwenden. Dabei sei jedoch gleich an dieser Stelle bemerkt, dass die thatsächliche Aufstellung dieser strengen Lösung eines bestimmten Schattenproblems — der erste, so viel mir bekannt, wirklich durchgeführte Versuch — lediglich seines theoretischen Interesses halber im Folgenden ausgeführt wird, weil er einen Einblick in die eigenthümlich complicirte Natur der strengen Lösung als solcher gestattet,

[1] Cf. Salmon, Elemente der analytischen Geometrie des Raumes und der Theorie der Flächen zweiten Grades. Theil I, S. 87 und 88; ferner Theil II, Zusätze VI, §§. 12 und 15 (deutsch von Fiedler; Zusätze VI, §§. 12 und 15 bloss in Fiedler's Übersetzung, nicht im Original).

während auf die praktische Verwerthbarkeit des aufgefundenen Resultates im astronomisch-rechnerischen Sinne — eine Anforderung, welcher die in meiner früheren Abhandlung abgeleitete Saturnring-Schattengleichung genügte — hier gar kein Werth gelegt wird, ja die sogar, wie wir sehen werden, durch die Natur der strengen Lösung überhaupt ausgeschlossen ist. Wohl aber dürfte man nach den folgenden Ausführungen im Stande sein, von vornherein ganz allgemein zu entscheiden, ob es noch einen praktischen Werth und eine Aussicht auf Erfolg hat, sich auf die Behandlung eines Schattenproblems, sei dasselbe nun durch die reine Mathematik oder durch die theoretische Physik gegeben, einzulassen oder nicht, und wie man dann ersterenfalls zu verfahren hat, Vorschriften, die am Schluss der Abhandlung zusammengestellt werden sollen.

Die Laplace'sche Theorie, deren Leistungsfähigkeit zunächst geprüft werden soll, referiren wir hier natürlich nicht, sondern verweisen auf die citirte Partie der Mécanique céleste. Vielmehr wenden wir diese Methode, mittelst deren also unter den beim System »Sonne—Saturn« bestehenden speciellen Verhältnissen die Saturnring-Schattengleichung sich wirklich ableiten liess — es ergab sich die merkwürdige Form:

$$\left(x-\frac{A}{C}z\right)^2+y^2-r^2\left(\frac{C-z}{C}\right)^2=$$
$$=\pm 2\lambda z\sqrt{\left(\frac{A}{C}\right)^2\cdot\left[r^2\left(\frac{C-z}{C}\right)^2-y^2\right]+r^2\left(\frac{C-z}{C}\right)^2},$$

wobei das positive Zeichen dem Kern-, das negative dem Halbschatten entspricht — des theoretischen Interesses halber auf die Gleichung eines Kreises nun noch einmal allgemein und strenge an, wodurch der analytische Verlauf der Rechnung, der bei der Laplace'schen Methode allein entscheidet, sich von jenem früheren total verschieden gestaltet.

Zunächst definiren wir das Problem analytisch, damit die Laplace'sche Methode überhaupt darauf anwendbar wird. Denn Laplace hat das allgemeine Schattenproblem nur für den Fall zweier Oberflächen, nicht aber für den einer Oberfläche und einer Linie behandelt, für welchen die

Grundgleichungen in etwas anderer Form erscheinen und etwas anders abgeleitet werden müssen. Es geht ja Laplace bei seiner allgemeinen Untersuchung aus von der Tangentialebenengleichung:

$$\mathfrak{x}' = a\mathfrak{y}' + b\mathfrak{z}' + c. \tag{1}$$

Damit nun diese die Kreislinie berühre, müssen offenbar zwei Gleichungen vorliegen:

$$\mu_1(\mathfrak{x}', \mathfrak{y}', \mathfrak{z}') = 0 \tag{2}$$

$$\mu_2(\mathfrak{x}', \mathfrak{y}', \mathfrak{z}') = 0, \tag{3}$$

indem der Kreis aus dem Schnitt der zwei Flächen, welche letztere Gleichungen repräsentiren, entstanden gedacht werden kann. Differentiiren wir jetzt im Sinne der Laplace'schen Methode diese drei Relationen (1), (2), (3), so erhält man folgendes System:

$$\begin{aligned} d\mathfrak{x}' &= a\,d\mathfrak{y}' + b\,d\mathfrak{z}' \\ 0 &= \frac{\partial\mu_1}{\partial\mathfrak{x}'}\,d\mathfrak{x}' + \frac{\partial\mu_1}{\partial\mathfrak{y}'}\,d\mathfrak{y}' + \frac{\partial\mu_1}{\partial\mathfrak{z}'}\,d\mathfrak{z}' \\ 0 &= \frac{\partial\mu_2}{\partial\mathfrak{x}'}\,d\mathfrak{x}' + \frac{\partial\mu_2}{\partial\mathfrak{y}'}\,d\mathfrak{y}' + \frac{\partial\mu_2}{\partial\mathfrak{z}'}\,d\mathfrak{z}' \end{aligned}$$

Durch Elimination von $d\mathfrak{x}'$, $d\mathfrak{y}'$, $d\mathfrak{z}'$ aus letzteren drei Gleichungen ergibt sich dann die folgende Determinante:

$$\begin{vmatrix} -1 & a & b \\ \dfrac{\partial\mu_1}{\partial\mathfrak{x}'} & \dfrac{\partial\mu_1}{\partial\mathfrak{y}'} & \dfrac{\partial\mu_1}{\partial\mathfrak{z}'} \\ \dfrac{\partial\mu_2}{\partial\mathfrak{x}'} & \dfrac{\partial\mu_2}{\partial\mathfrak{y}'} & \dfrac{\partial\mu_2}{\partial\mathfrak{z}'} \end{vmatrix} = 0, \tag{4}$$

die in Gleichungsform geschrieben so lautet:

$$\left.\begin{aligned} &-1\left(\frac{\partial\mu_1}{\partial\mathfrak{y}'}\cdot\frac{\partial\mu_2}{\partial\mathfrak{z}'} - \frac{\partial\mu_1}{\partial\mathfrak{z}'}\cdot\frac{\partial\mu_2}{\partial\mathfrak{y}'}\right) + \\ &+a\left(\frac{\partial\mu_1}{\partial\mathfrak{z}'}\cdot\frac{\partial\mu_2}{\partial\mathfrak{x}'} - \frac{\partial\mu_1}{\partial\mathfrak{x}'}\cdot\frac{\partial\mu_2}{\partial\mathfrak{z}'}\right) + \\ &+b\left(\frac{\partial\mu_1}{\partial\mathfrak{x}'}\cdot\frac{\partial\mu_2}{\partial\mathfrak{y}'} - \frac{\partial\mu_1}{\partial\mathfrak{y}'}\cdot\frac{\partial\mu_2}{\partial\mathfrak{x}'}\right) \end{aligned}\right\} = 0. \tag{5}$$

Aus den vier Gleichungen (1), (2), (3), (5) hätte man jetzt $\mathfrak{x}', \mathfrak{y}', \mathfrak{z}'$ zu eliminiren, um die Laplace'sche Methode allgemein anwenden zu können. Was man durch diese Elimination erhielte, wäre die Bedingung, der die a, b, c genügen müssen, damit die durch Gleichung (1) repräsentirte Ebene den Kreis berühre.

Um diese Rechnung ausführen zu können, fassen wir unseren bestimmten Fall ins Auge. Da wir denselben aber allgemein behandeln wollen, dürfen wir jetzt nicht mehr von der speciellen Form der Kreisgleichung:

$$\mathfrak{x}'^2 + \mathfrak{y}'^2 = r'^2$$

ausgehen, weil diese nur eine ganz specielle Lage des Kreises zur leuchtenden Kugel charakterisirt, die nämlich, wo die Verbindungslinie d des Kugelcentrums mit demjenigen des Kreises senkrecht auf der Ebene des letzteren steht, und wobei die vom Kreiscentrum als Ursprung ausgehende $\mathfrak{x}'$-Axe mit dieser Linie d zusammenfällt. Die Gleichung der Kugel würde dann:

$$(\mathfrak{x} - d)^2 + \mathfrak{y}^2 + \mathfrak{z}^2 = r^2$$

und diejenige der Ebene:

$$\mathfrak{x}' = 0.$$

Ginge ferner die Ebene des Kreises zufällig durch den Kugelmittelpunkt, so hätte man an Stelle der einen Gleichung:

$$\mathfrak{x}'^2 + \mathfrak{y}'^2 = r'^2$$

auszugehen von den zwei folgenden:

$$(\mathfrak{x}' - d)^2 + \mathfrak{y}'^2 = r'^2$$
$$\mathfrak{x}' - d = a\mathfrak{y}' + c - d.$$

Wir wollen jedoch das Beleuchtungsproblem wie gesagt hier allgemein charakterisiren und haben daher von der folgenden Form der Kreisgleichung auszugehen:

$$(\mathfrak{x}' - A)^2 + (\mathfrak{y}' - B)^2 = r'^2. \tag{6}$$

Der Oberflächengleichung der Kugel indess können wir die etwas speciellere Form zu Grunde legen:

$$\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2+(\mathfrak{z}-\mathfrak{k})^2 = r^2, \tag{7}$$

indem wir von ihrem Mittelpunkt ein Loth auf die Ebene des Kreises fällen und den Fusspunkt dieses Lothes als Ursprung zu Grunde legen, was die folgende Rechnung etwas vereinfacht, ohne ihrer Allgemeinheit Eintrag zu thun.

Verstehen wir jetzt unter der Gleichung:

$$\mu_2(\mathfrak{x}', \mathfrak{y}', \mathfrak{z}') = 0$$

die Ebene des Kreises, und diese fällt mit der Coordinatenebene $\mathfrak{z}' = 0$ zusammen, so geht die Gleichung (5) über in:

$$-1\,\frac{\partial\mu_1}{\partial\mathfrak{y}'} - a\,\frac{\partial\mu_1}{\partial\mathfrak{x}'} = 0. \tag{8}$$

Die Relation

$$\mu_1(\mathfrak{x}', \mathfrak{y}') = 0$$

repräsentirt die allgemeine Gleichung (6) unseres Kreises. Als dritte Bedingung tritt im Sinne der Laplace'schen Theorie noch hinzu:

$$\mathfrak{x}' = a\mathfrak{y}'+c. \tag{9}$$

Mithin haben wir das Problem jetzt vollständig analytisch präcisirt. Man hat zunächst die beiden Gleichungen:

$$\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2+(\mathfrak{z}-\mathfrak{k})^2 = r^2 \tag{10}$$

$$\mathfrak{x} = a\mathfrak{y}+b\mathfrak{z}+c. \tag{11}$$

Aus ihnen folgt die eine nöthige Relation der Laplace'schen Theorie in a, b, c. Die zweite, hier nur in a und c, ergibt sich aus den drei anderen Gleichungen:

$$\mu_1 = (\mathfrak{x}'-A)^2+(\mathfrak{y}'-B)^2-r'^2 = 0 \tag{6}$$

$$\frac{\partial\mu_1}{\partial\mathfrak{y}'} + a\,\frac{\partial\mu_1}{\partial\mathfrak{x}'} = 0 \tag{8}$$

$$\mathfrak{x}' = a\mathfrak{y}'+c, \tag{12}$$

indem man aus diesen drei Relationen $\mathfrak{x}'$ und $\mathfrak{y}'$ eliminirt. Aus den sich in dieser Weise ergebenden zwei Gleichungen folgen dann b und c als Functionen von a und somit auch:

$$\frac{db}{da} \quad \text{und} \quad \frac{dc}{da}.$$

Hierauf wäre a selbst nach Laplace aus der Relation:

$$0 = y + z\frac{db}{da} + \frac{dc}{da} \tag{13}$$

zu finden und durch Einsetzen der sich so für a, b, c ergebenden Werthe, die ausgedrückt erscheinen als Functionen sämmtlicher Constanten des Problems, in die allgemeine Gleichung:

$$x = ay + bz + c \tag{14}$$

erhielte man nach Laplace die gesuchte Gleichung der Schattenfläche eines von einer hellen Kugel beleuchteten dunkeln Kreises.

Nach dem Gesagten scheint es, als müsse die angedeutete Rechnung in einfachster Weise zum Ziele führen. Nur zu bald werden wir uns aber vom Gegentheil überzeugt sehen, was eben in der dies Beispiel ebensogut wie die meisten anderen betreffenden Unmöglichkeit begründet liegt, gewisse Eliminationen auszuführen.

Aus Gleichung (10) folgt nach der allgemeinen Theorie:

$$\mathfrak{y} + a\mathfrak{x} = 0$$

$$\mathfrak{z} - \mathfrak{f} + b\mathfrak{x} = 0,$$

woraus

$$\mathfrak{y}^2 = a^2\mathfrak{x}^2$$

$$(\mathfrak{z} - \mathfrak{f})^2 = b^2\mathfrak{x}^2.$$

Ferner

$$a\mathfrak{y} = -a^2\mathfrak{x}$$

$$b\mathfrak{z} = b\mathfrak{f} - b^2\mathfrak{x}.$$

Die Gleichung (10) wird daher:

$$\mathfrak{x}^2 . [1 + a^2 + b^2] = r^2. \tag{15}$$

Die Relation (11) geht über in:

$$\mathfrak{x}^2.[1+a^2+b^2]^2 = (c+b\mathfrak{f})^2. \tag{16}$$

Also liefern (15) und (16) zusammen:

$$(c+b\mathfrak{f})^2 = r^2(1+a^2+b^2),$$

d. i. die erste gesuchte Relation in a, b, c. Die zweite, in a und c, ergibt sich aus den Gleichungen: (6), (8), (12). Durch Differentation folgt aus denselben:

$$(\mathfrak{y}'-B)^2 = a^2(\mathfrak{x}'-A)^2$$
$$a\mathfrak{y}' = aB.$$

Demnach wird Gleichung (6):

$$(\mathfrak{x}'-A)^2.[1+a^2] = r'^2. \tag{17}$$

Gleichung (12) geht über in:

$$(\mathfrak{x}'-A)^2.[1+a^2]^2 = (c+aB-A). \tag{18}$$

Mithin die genannte Bedingung:

$$(c+aB-A)^2 = r'^2(1+a^2).$$

Aus den so gewonnenen zwei Gleichungen:

$$(c+b\mathfrak{f})^2 = r^2(1+a^2+b^2)$$
$$(c+aB-A)^2 = r'^2(1+a^2)$$

bestimmen wir zunächst b und c als Functionen von a. Für c folgt sofort:

$$c = r'\sqrt{1+a^2}-aB+A. \tag{19}$$

Der Coëfficient b hingegen ergibt sich aus der quadratischen Gleichung:

$$b^2 - \frac{2c\mathfrak{f}}{r^2-\mathfrak{f}^2}\cdot b - \frac{c^2-r^2(1+a^2)}{r^2-\mathfrak{f}^2} = 0.$$

Substituiren wir für c gleich seinen Werth, so erhält b die folgende Form:

$$b = \frac{(r'\sqrt{1+a^2}-aB+A)\mathfrak{f}}{r^2-\mathfrak{f}^2} \pm$$

$$\pm\sqrt{\frac{(r'\sqrt{1+a^2}-aB+A)^2.\mathfrak{f}^2}{(r^2-\mathfrak{f}^2)^2}+\frac{(r'\sqrt{1+a^2}-aB+A)^2-r^2(1+a^2)}{r^2-\mathfrak{f}^2}} \quad (20)$$

und von dieser Form geht man bei der folgenden Differentation, wie leicht ersichtlich, besser aus, als z. B. von der Form eines Productes, als welches man b auch schreiben könnte.

Nun sind also, entsprechend der Laplace'schen Theorie, die Differentialquotienten von b und c nach a zu bilden. Für c folgt wieder sofort:

$$\frac{dc}{da} = \frac{r'a}{\sqrt{1+a^2}} - B. \quad (21)$$

Der Differentialquotient von b hingegen ergibt sich erst nach längerer Rechnung. Wenn man zur Abkürzung für die bei dieser Rechnung auftretenden Constanten die folgenden Werthe einführt:

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= +r^2[(r'^2-r^2)+(\mathfrak{f}^2+B^2)]\\
\lambda_2 &= -r^2AB\\
\lambda_3 &= -2r^2r'B\\
\lambda_4 &= +2r^2r'A\\
\lambda_5 &= -2r^2r'
\end{aligned}$$

ferner:

$$\begin{aligned}
\nu_1 &= -r^2r'B\\
\nu_2 &= +r^2r'A\\
\nu_3 &= +r^2(r'^2-r^2)+\mathfrak{f}^2(r^2+B^2)\\
\nu_4 &= -2r^2AB\\
\nu_5 &= +\mathfrak{f}^2(2r'^2-r^2)-r^2(r'^2-r^2)
\end{aligned}$$

nimmt dieser Differentialquotient die folgende Form an:

$$\frac{db}{da} = \frac{\mathfrak{f}}{r^2-\mathfrak{f}^2}\left[\frac{ar'}{\sqrt{1+a^2}}-B\right]+$$

$$+\frac{\lambda_1 a\sqrt{1+a^2}+\lambda_2\sqrt{1+a^2}+\lambda_3 a^2+\lambda_4 a+\lambda_5}{(r^2-\mathfrak{f}^2)\sqrt{1+a^2}\sqrt{\nu_1 a\sqrt{1+a^2}+\nu_2\sqrt{1+a^2}+\nu_3 a^2+\nu_4 a+\nu_5}} \quad (22)$$

Soweit ist bei den gemachten allgemeinen Annahmen der analytische Verlauf der Rechnung durch die Laplace'sche Methode unabänderlich festgelegt, und man kann hier durch keinerlei Kunstgriffe auf eine einfachere Gleichungsform als die folgende kommen. Die nach Laplace's directer Vorschrift bezüglich a aufzulösende Gleichung (14) der allgemeinen Theorie wird nämlich im jetzigen speciellen Falle:

$$0 = y + z\left[\frac{ar'}{1+a^2} - B\right]\frac{\mathfrak{f}}{r^2-\mathfrak{f}^2} +$$
$$+ z\,\frac{\lambda_1 a\sqrt{1+a^2}+\lambda_2\sqrt{1+a^2}+\lambda_3 a^2+\lambda_4 a+\lambda_5}{(r^2-\mathfrak{f}^2)\sqrt{1+a^2}\sqrt{\nu_1 a\sqrt{1+a^2}+\nu_2\sqrt{1+a^2}+\nu_3 a^2+\nu_4 a+\nu_5}} +$$
$$+ \frac{r'a}{\sqrt{1+a^2}} - B \tag{23}$$

d. i. eine Relation in x, y, z, a und den Constanten des Problems $r, r', A, B, \mathfrak{f}$.

Eine Auflösung dieser Gleichung nach a überhaupt, geschweige denn eine lineare, wie sie Laplace allgemein fordert, um den so gefundenen a-Werth dann in Gleichung (14) einsetzen zu können, ist nun aber eben praktisch gar nicht ausführbar, wie man sich überzeugt. Die Elimination hingegen von a aus den beiden Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
x &= ay + \frac{(r'\sqrt{1+a^2}-aB+A)\,.\,\mathfrak{f}}{r^2-\mathfrak{f}^2}\cdot z \pm \\
&\pm\sqrt{\frac{(r'\sqrt{1+a^2}-aB+A)^2.\,\mathfrak{f}^2}{(r^2-\mathfrak{f}^2)^2}+\frac{(r'\sqrt{1+a^2}-aB+a)^2-r^2\sqrt{1+a^2}}{r^2-\mathfrak{f}^2}+} \\
&\qquad\qquad\overline{+r'\sqrt{1+a^2}-aB+A} \\
0 &= y + z\left[\frac{ar'}{1+a^2} - B\right]\frac{\mathfrak{f}}{r^2-\mathfrak{f}^2} + \\
&+ z\,\frac{\lambda_1 a\sqrt{1+a^2}+\lambda_2\sqrt{1+a^2}+\lambda_3 a^2+\lambda_4 a+\lambda_5}{(r^2-\mathfrak{f}^2)\sqrt{1+a^2}\sqrt{\nu_1 a\sqrt{1+a^2}+\nu_2\sqrt{1+a^2}+\nu_3 a^2+\nu_4 a+\nu_5}} + \\
&+ \frac{r'a}{\sqrt{1+a^2}} - B
\end{aligned}\right\}\tag{24}$$

die zusammen, wie man sagen könnte, die Schattenfläche, gegeben durch den Parameter a, repräsentiren, führt, wenn sie principiell betrachtet natürlich auch immer möglich ist, praktisch doch zu so enormen Weitläufigkeiten, dass man von diesem zweiten, fast ebenso aussichtslosen Weg gleichfalls absehen muss. Auch nicht wesentlich verringert wären diese Complicationen worden, wenn man die ursprüngliche Gleichung (6) wie folgt angesetzt hätte:

$$(\mathfrak{x}'-A)^2+\mathfrak{y}'^2 = r'^2,$$

indem man das Coordinatensystem noch um die $\mathfrak{z}'$-Axe so gedreht hätte, dass die $\mathfrak{x}'$-Axe durch den Mittelpunkt des Kreises ginge, was auch noch, unbeschadet der Allgemeinheit der Aufgabe, möglich gewesen wäre. Denn auch, wenn B in Gleichung (23) und im System (24) Null wird, ist die Auflösung, respective bei (24) die Elimination, doch nicht wesentlich leichter.

Die Laplace'sche Methode versagt also, wie dies eine Beispiel zeigt — und auf die Betrachtung weiterer Beispiele gehen wir hier nicht ein — bei der strengen Behandlungsweise schon verhältnissmässig einfacher Probleme in gewissem Sinne buchstäblich. Ein umso unleugbareres Interesse würde, angesichts dieses negativen Resultates, ein Weg besitzen, mittelst dessen man factisch im Stande wäre, diese nach der Laplace'schen Methode nicht zu findende strenge Gleichung der Schattenfigur des von einer Kugel beleuchteten Kreises — und ebenso in anderen Fällen die Gleichungen beliebiger anderer Schattenfiguren — aufzufinden, d. h. in Form einer einzigen Gleichung thatsächlich hinzuschreiben. Wie schon angedeutet, existirt aber in der That ein solcher Weg. Derselbe wurde in unserem Jahrhundert von dem Engländer George Salmon gefunden, ohne dass jedoch von ihm seine praktische Verwerthbarkeit geprüft worden wäre, und wir wollen unser eben behandeltes Problem an der Hand dieser allgemeinen Theorie, die wir noch einmal im Zusammenhang unseres Beispieles neu ableiten wollen, jetzt vollständig lösen.

Bekanntlich ist die Gleichung:

$$ux+vy+wz+1 = 0 \qquad (25)$$

diejenige einer Ebene, welche nicht durch den Ursprung geht, da in ihm u, v, w unendlich werden. Und da die drei Grössen u, v, w diese Ebene bestimmen, so bezeichnet man sie als Coordinaten derselben, als »Ebenencoordinaten« im Gegensatz zu »Punktcoordinaten«. Offenbar gibt nun eine Gleichung in u, v, w:

$$F(u, v, w) = 0 \tag{26}$$

eine zwiefach unendliche Mannigfaltigkeit von Ebenen an, indem man ja v und w z. B. beliebig annehmen und u daraus bestimmen kann. Allgemein ist jetzt die Bedingung aufstellbar, dass eine solche Ebene eine Fläche berührt, z. B. Tangentialebene an eine Kugel ist. Die Gesammtheit aller Ebenen, welche diese Kugel berühren, ist dann in der Gleichung der Kugel in Ebenencoordinaten enthalten.

Ferner kann man aber auch die weitere Bedingung aufstellen:

$$G(u, v, w) = 0, \tag{27}$$

die besagt, dass unsere Ebene eine andere Fläche, etwa zunächst auch wieder eine Kugel, berührt. Die Relationen (26) und (27) zusammengenommen geben dann alle Ebenen, welche die beiden Kugeln gleichzeitig berühren, und dieselben bilden wieder eine einfach unendliche Mannigfaltigkeit, weil man w etwa beliebig annehmen und dann u und v aus (26) und (27) bestimmen kann. Das dualistische Gegenstück hiezu ist, dass die Gleichungen zweier Flächen in Punktcoordinaten gegeben sind:

$$\Phi(x, y, z) = 0 \tag{28}$$

$$\Gamma(x, y, z) = 0, \tag{29}$$

welche zusammen die Schnittcurve der zwei Flächen im Raume, d. h. eine einfach unendliche Mannigfaltigkeit von Punkten definiren, die diese Curve bilden, und dieselbe entspricht im ersten Problem jener einfach unendlichen Mannigfaltigkeit von Ebenen, welche die beiden Flächen gleichzeitig berühren.

Es kann aber auch zweitens die Relation:

$$G(u, v, w) = 0 \tag{27}$$

die Gleichung einer Curve darstellen, indem sie die Bedingung dafür ist, dass die Ebene:

$$ux + vy + wz + 1 = 0$$

diese Curve berührt. Die Gleichung (27) repräsentirt dann eine zweifach unendliche Ebenenschaar. In diesem Falle umfassen die Gleichungen (26) und (27) zusammen die Gesammtheit aller der Ebenen, welche die Fläche und die Curve — in unserem zu lösenden Schattenproblem die Kugel und den Kreis — gleichzeitig berühren. Das dualistische Gegenstück zu diesem zweiten, für uns wesentlichen Fall, dass:

$$G(u, v, w) = 0$$

eine Curve, die wir dann als Kreis betrachten werden, darstellt, ist, dass die Relation:

$$\Gamma(x, y, z) = 0 \tag{29}$$

eine abwickelbare Fläche definirt, bei der bekanntlich jede Tangentialebene längs einer ganzen Geraden berührt; speciell würde eine Kegelfläche zweiter Ordnung dem Fall entsprechen, dass die Relation:

$$G(u, v, w) = 0$$

einen Kegelschnitt darstellt. Ein solcher wird also, ähnlich wie eine Kegelfläche in xyz, so analog in u, v, w durch eine quadratische Gleichung dargestellt. Bekanntlich ist nun

$$\begin{aligned} A_{11}u^2 + 2A_{12}uv + 2A_{13}uw + 2A_{14}u + A_{22}v_2 + \\ + 2A_{23}vw + 2A_{24}v + A_{33}w^2 + 2A_{34}w + A_{44} = 0 \end{aligned}$$

die allgemeine Gleichung zweiten Grades in u, v, w. Dieselbe entspricht also der Gleichung einer Fläche zweiter Ordnung, und das durch sie dargestellte Gebilde heisst eine Fläche zweiter Classe. Die Bedingung dafür, dass speciell letztere Gleichung in u, v, w einen Kegelschnitt repräsentire, ist das Verschwinden der folgenden, aus ihren Coëfficienten gebildeten Determinante:

$$\begin{vmatrix} A_{11} A_{12} A_{13} A_{14} \\ A_{21} A_{22} A_{23} A_{24} \\ A_{31} A_{32} A_{33} A_{34} \\ A_{41} A_{42} A_{43} A_{44} \end{vmatrix} = 0,$$

wobei allgemein:

$$A_{i\varkappa} = A_{i\varkappa}$$

ist. Dem entspricht dualistisch, dass die Gleichung

$$A_{11}x^2 + 2A_{12}xy + 2A_{13}xz + 2A_{14}x + A_{22}y^2 + \\ + 2A_{23}yz + 2A_{24}y + A_{33}z^2 + 2A_{34}z + A_{44} = 0$$

eine Curve zweiter Ordnung repräsentirt, speciell eine Kegelfläche, wenn die genannte Determinante verschwindet.

In unserem Schattenproblem, wo

$$F(u, v, w) = 0$$

die Gleichung einer Kugel in Ebenencoordinaten,

$$G(u, v, w) = 0$$

diejenige eines Kreises in denselben Coordinaten bedeutet, müsste also letztere Determinante Null sein, damit

$$G(u, v, w) = 0$$

einen Kegelschnitt darstellt. Wir haben somit die Gleichung einer Kugelfläche mit derjenigen eines Kreises, beide in u, v, w gleichzeitig zusammenbestehen zu lassen, oder dualistisch: wir haben die Gleichung einer allgemeinen Fläche zweiter Ordnung und speciell die Gleichung einer Kegelfläche zweiter Ordnung zusammenbestehen zu lassen, um den Schnitt, d. h. die Durchdringungscurve des Kegels mit der allgemeinen Fläche zweiter Ordnung zu bekommen. Das Zusammenbestehen der beiden Relationen:

$$F(u, v, w) = 0$$
$$G(u, v, w) = 0$$

gibt somit die Schattenfläche.

Allein wir wollen diese Gleichung nicht in u, v, w, d. h. nicht in Ebenencoordinaten, sondern vielmehr in Punktcoordinaten x, y, z haben. Das entspricht dualistisch dem Fall, dass wir die Gleichung der Durchdringungscurve nicht in x, y, z, sondern in u, v, w haben wollen. Mit anderen Worten: wir haben die Gleichung einer allgemeinen Fläche zweiter Ordnung und einer Kegelfläche zweiter Ordnung, die sich durchdringen. Durch die Gleichungen:

$$\Phi(x, y, z) = 0$$
$$\Gamma(x, y, z) = 0$$

ist dann diejenige der Durchdringungscurve gegeben. Allein wir wollen diese Gleichung nicht in x, y, z, sondern in u, v, w haben, d. h. wir wollen die Bedingung dafür aufstellen, dass eine Ebene diese Durchdringungscurve berührt.

In unserem Schattenproblem müssen wir dazu die Bedingung so formuliren, dass ein Punkt x, y, z angehört der Schattenfläche, was dualistisch dem Fall entspricht, dass eine Ebene u, v, w die Durchdringungscurve berührt. Hat man also die zwei Gleichungen:

$$F(u, v, w) = 0$$
$$G(u, v, w) = 0,$$

so muss, falls ein Punkt auf den durch diese beiden Gleichungen repräsentirten Flächen zugleich liegen soll, die Gleichung:

$$ux + vy + wz + 1 = 0$$

bestehen. Das Zusammenbestehen der drei Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} F(u, v, w) &= 0 \\ G(u, v, w) &= 0 \\ ux + vy + wz + 1 &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad \text{(I)}$$

bedeutet mithin, dass der Punkt x, y, z auf einer Ebene liegt, welche die beiden Flächen F und G gleichzeitig berührt.

Nehmen wir nun eine andere Ebene an, welche die beiden gegebenen Flächen F und G auch berührt, so ist dieselbe gleichfalls eine Tangentialebene an die Schattenfläche und

beide Tangentialebenen schneiden sich offenbar in einer Kante. Denkt man sich nun die erste Tangentialebene festgehalten und die zweite so bewegt, dass sie nach und nach zur Deckung mit der ersteren gelangt, so bewegt sich die Schnittkante auf der festen Tangentialebene entlang, der Schattenfläche entgegen und fällt beim Grenzübergang in dieselbe hinein. Sie bildet dann also die Berührungslinie, längs welcher die Tangentialebene die Schattenfläche berührt. Auf dieser Linie nun muss der Punkt xyz liegen, wenn er der Schattenfläche angehören soll. Bedeuten:

$$u,\ v,\ w$$

die Coordinaten der ersten,

$$u+du,\ v+dv,\ w+dw$$

diejenigen der zweiten Tangentialebene, so müssen also auch die folgenden drei Gleichungen bestehen, wenn der Punkt x, y, z der Schattenfläche angehören soll:

$$\left.\begin{aligned} F(u+du,\ v+dv,\ w+dw) &= 0 \\ G(u+du,\ v+dv,\ w+dw) &= 0 \\ (u+du)x+(v+dv)y+(w+dw)z+1 &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad \text{(II)}$$

Das gemeinsame Bestehen der beiden Gleichungssysteme (I) und (II) zusammen ist demnach erforderlich, wenn der Punkt x, y, z der Schattenfläche angehören soll. Aus ihnen wären jetzt:

$$u,\ v,\ w,\ du,\ dv,\ dw$$

zu eliminiren. Da man indess durch Subtraction:

$$F(u+du,\ v+dv,\ w+dw)-F(u, v, w) = 0$$

oder

$$dF(u, v, w) = 0$$

erhält, so kann man das System II auch ersetzen durch das folgende:

$$\left.\begin{array}{r} \frac{\partial F}{\partial u}du + \frac{\partial F}{dv}\partial v + \frac{\partial F}{\partial w}dw = 0 \\ \frac{\partial G}{\partial u}du + \frac{\partial G}{\partial v}dv + \frac{\partial G}{\partial w}dw = 0 \\ xdu + ydv + zdw = 0 \end{array}\right\} \quad \text{(III)}$$

so dass also auch die beiden Systeme (I) und (III) zusammengenommen unsere sechs Bedingungen umfassen, aus denen

$$u,\ v,\ w,\ du,\ dv,\ dw$$

zu eliminiren sind. Dabei kann man, um das zu bemerken, in (III) du, dv, dw alle in demselben Verhältniss vergrössern oder verkleinern, ohne dass dadurch etwas geändert würde. Da also in (III) bloss die Verhältnisse von du, dv, dw in Betracht kommen, so kommt es überhaupt nur auf diese an. Durch Elimination von du, dv, dw aus (III) folgt:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v} & \frac{\partial F}{\partial w} \\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v} & \frac{\partial G}{\partial w} \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0$$

oder

$$x\left(\frac{\partial F}{\partial v}\cdot\frac{\partial G}{\partial w} - \frac{\partial F}{\partial w}\cdot\frac{\partial G}{\partial v}\right) + y\left(\frac{\partial F}{\partial w}\cdot\frac{\partial G}{\partial u} - \frac{\partial F}{\partial u}\cdot\frac{\partial G}{\partial w}\right) + $$
$$+ z\left(\frac{\partial F}{\partial u}\cdot\frac{\partial G}{\partial v} - \frac{\partial F}{\partial v}\cdot\frac{\partial G}{\partial u}\right) = 0.$$

Man hat somit folgendes Hauptsystem:

$$\left.\begin{array}{r} x\left(\frac{\partial F}{\partial v}\cdot\frac{\partial G}{\partial w} - \frac{\partial F}{\partial w}\cdot\frac{\partial G}{\partial v}\right) + \\ + y\left(\frac{\partial F}{\partial w}\cdot\frac{\partial G}{\partial u} - \frac{\partial F}{\partial u}\cdot\frac{\partial G}{\partial w}\right) + \\ + z\left(\frac{\partial F}{\partial u}\cdot\frac{\partial G}{\partial v} - \frac{\partial F}{\partial v}\cdot\frac{\partial G}{\partial u}\right) = 0 \\ F(u, v, w) = 0 \\ G(u, v, w) = 0 \\ ux + vy + wz + 1 = 0 \end{array}\right\} \quad \text{(IV)}$$

Aus diesen vier Grundgleichungen dieser allgemeinen Theorie hätte man u, v, w zu eliminiren, um die Schattengleichung einer beliebigen Figur G, die durch eine andere Figur F beleuchtet wird, zu erhalten. Ehe wir uns aber mit dieser Elimination beschäftigen, wollen wir unser nach der Laplace'schen Methode behandeltes Beispiel der Saturnring-Schattengleichung gleich analytisch neu präcisiren, um seine Behandlung in Ebenencoordinaten nach Salmon's Theorie zu ermöglichen.

In unserem Schattenbeispiel sind ja

$$F(u, v, w) = 0$$
$$G(u, v, w) = 0$$

die Gleichungen einer Kugel und eines Kreises, also vom zweiten Grad, und wir wollen dieselben, um der rechnerischen Behandlung des Folgenden willen in Form von ganzen rationalen Functionen zweiten Grades schreiben. Dann sind die partiellen Differentialquotienten offenbar Functionen ersten Grades und folglich die erste Gleichung unseres Hauptsystems (IV) vom zweiten Grad. Wir haben dann also drei Gleichungen zweiten Grades und eine Gleichung ersten Grades in u, v, w. Aus den drei ersten folgen u, v, w als bekannte Functionen und durch Einsetzen derselben in die vierte ergibt sich die gesuchte Schattengleichung. Die Elimination wird später ausgeführt werden.

Zunächst sind im Sinne der allgemeinen Theorie für $F = 0$ und $G = 0$ in (IV) die Gleichungen von Kugel und Kreis in Ebenencoordinaten einzuführen. Bedeuten r, s, t die Coordinaten des Mittelpunktes der Kugel, R ihren Radius, so lautet die erstere Gleichung bekanntlich:

$$\frac{ru + sv + tw + 1}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}} = R.$$

Das Coordinatensystem ist nun aber völlig willkürlich. Wir können daher, ohne die Allgemeinheit der Aufgabe zu beschränken, über seine Lage die Annahme machen, dass die xz-Ebene durch den Mittelpunkt der Kugel geht. In diesem Fall wird die Kugelgleichung etwas einfacher:

$$\frac{ru+tw+1}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}}=R$$

oder als ganze rationale Function geschrieben:

$$(ru+tw+1)^2-R^2(u^2+v^2+w^2)=0.$$

Die Gleichung des Kreises leiten wir für unseren Fall gleichfalls unter solchen Annahmen über die Lage des Coordinatensystems ab, welche die spätere rechnerische Behandlung der Kreisgleichung in unserem Problem überhaupt erst ermöglichen. Wir nehmen nämlich an, dass die Ebene des Kreises die xy-Ebene sei und dass der Coordinatenursprung mit dem Mittelpunkt des Kreises zusammenfalle. Ohne diese scheinbar unbedeutenden Annahmen würde, wie noch ersichtlich werden wird, die spätere Rechnung im wörtlichen Sinne um viele tausendmal umfangreicher werden. Die Gleichung der Kreisebene E lautet jetzt:

$$z=0.$$

Denken wir uns ferner die Gleichung des Kreises, die als Gleichung zweiten Grades in x und y die allgemeine Form hat:

$$\varphi(x,y)=0,$$

so können wir diese Relation offenbar auch als die Gleichung eines Kreiscylinders betrachten, dessen Axe senkrecht zur xy-Ebene steht und als dessen Schnitt mit der Kreisebene $z=0$ dann unser Kreis erscheint.

Nun haben wir die Bedingung dafür aufzustellen, dass die Ebene:

$$ux+vy+wz+1=0$$

den Kreis berühre. An Stelle der zwei Gleichungen der allgemeinen Theorie:

$$\Phi(x,y,z)=0$$
$$\Gamma(x,y,z)=0$$

treten jetzt offenbar diejenigen des Cylinders und der Kreisebene, und unser früher allgemein charakterisirtes Problem specialisirt sich jetzt dahin, dass die Gleichung der Durch-

dringungscurve von zwei Flächen, der Kreisebene und des Cylinders in Ebenencoordinaten zu suchen ist.

Das dualistische Gegenstück hiezu haben wir früher gleichfalls schon allgemein behandelt. Für den jetzigen Fall können wir das Resultat direct hinschreiben, wenn wir nur im Gleichungssystem (IV) bezüglich x mit u, y mit v und z mit w vertauschen und für $F=0$ und $G=0$ die Gleichungen der Ebene E und des Cylinders φ setzen. So erhalten wir folgendes allgemeine Gleichungssystem:

$$
\begin{aligned}
u\left(\frac{\partial E}{\partial y}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial z}-\frac{\partial E}{\partial z}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)&+\\
+v\left(\frac{\partial E}{\partial z}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial x}-\frac{\partial E}{\partial x}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)&+\\
+w\left(\frac{\partial E}{\partial x}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial y}-\frac{\partial E}{\partial y}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)&=0\\
E=z&=0\\
\varphi(x,y)&=0\\
ux+vy+wz+1&=0
\end{aligned}
$$

oder, da φ jetzt z nicht enthält:

$$v\frac{\partial \varphi}{\partial x}-u\frac{\partial \varphi}{\partial y}=0. \tag{30}$$

$$z=0 \tag{31}$$

$$\varphi(x,y)=0 \tag{32}$$

$$ux+vy+wz+1=0 \tag{33}$$

Um x, y, z aus letzterem Gleichungssystem zu eliminiren, machen wir dasselbe homogen. Wir setzen dazu:

$$x=\frac{x_1}{x_4}$$

$$y=\frac{x_2}{x_4}$$

Dann wird die Gleichung (32) des Kreises homogen vom zweiten Grad in x_1, x_2, x_4. Die Kreisebenengleichung (31) wird

$x_3 = 0$ $\left(\text{indem } z = \frac{x_3}{x_4}\right)$. Die Gleichung (33) wird homogen vom ersten Grad in x_1, x_2, x_3, x_4. Sei nun die aus Gleichung (32) dadurch entspringende Relation:

$$l(x_1, x_2, x_4) = 0,$$

so lautet die aus (30) hervorgehende Gleichung in Determinantenform:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial l}{\partial x_1} & \frac{\partial l}{\partial x_2} & 0 \\ u & v & w \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{34}$$

Hiebei haben wir x_1, x_2 und x_3 als variabel, x_4 als constant betrachtet. Wir können die Veränderung von x, y, z aber auch dadurch bewirken, dass wir x_2, x_3, x_4 sich ändern lassen, dagegen x_1 constant setzen. Dann erhält man folgende Determinantengleichung:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial l}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial l}{\partial x_4} \\ v & w & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0. \tag{35}$$

Diese zwei Determinantengleichungen sind vom ersten Grad in x_1, x_2, x_4. Aus ihnen können wir also die Verhältnisse von x_1, x_2, x_4 bestimmen und darauf für diese wieder ihre ursprünglichen Werthe:

$$\frac{x_1}{x_4} = x$$

$$\frac{x_2}{x_4} = y$$

einführen. Durch Einsetzen schliesslich der so für x und y gefundenen Werthe in die Relation (33) erhält man eine Gleichung zweiten Grades in u, v, w, die gesuchte Gleichung unseres Kreises in Ebenencoordinaten.

Um diesen allgemeinen Gedankengang rechnerisch durchzuführen, schreiben wir die beiden Determinantengleichungen (34) und (35) wie folgt:

$$v \cdot \frac{\partial l}{\partial x_1} - u \frac{\partial l}{\partial x_2} = 0 \tag{36}$$

$$v \cdot \frac{\partial l}{\partial x_4} - \frac{\partial l}{\partial x_2} = 0, \tag{37}$$

welche zwei Gleichungen vom ersten Grad sind, da dies der Grad der drei in ihnen auftretenden Differentialquotienten ist.

Für die allgemeine Gleichung:

$$\varphi(x, y) = 0,$$

welche ebenso die eines Kreises wie die eines Cylinders repräsentirte, setzen wir jetzt, indem der Ursprung ja im Kreiscentrum liegt:

$$\varphi = x^2 + y^2 - r^2 = 0. \tag{38}$$

Die Gleichung:

$$l(x_1, x_2, x_4) = 0$$

wird dann:

$$x_1^2 + x_2^2 - r^2 x_4^2 = 0.$$

Und da:

$$\frac{\partial l}{\partial x_1} = 2x_1$$

$$\frac{\partial l}{\partial x_2} = 2x_2,$$

so gehen die Gleichungen (36) und (37) über in:

$$v x_1 - u x_2 = 0$$

$$r^2 v x_4 + x_2 = 0.$$

Mit x_4 dividirt, für $\frac{x_1}{x_4}$ und $\frac{x_2}{x_4}$ wieder x und y eingeführt und ausmultiplicirt, folgt:

$$vx - uy = 0$$

$$vr^2 + y = 0$$

woraus:

$$x = -r^2 u$$

$$y = -r^2 v.$$

Durch Einsetzen dieser Werthe in (33) folgt als Gleichung unseres Kreises in Ebenencoordinaten in der speciellen Form, wie wir sie im Folgenden brauchen:

$$r^2 u^2 + r^2 v^2 = 1. \tag{39}$$

Mit der allgemeinen höchst verwickelten Form der Kreisgleichung in Ebenencoordinaten hingegen hätte man später, wie ersichtlich werden wird, die rechnerische Behandlung des Problems nicht durchführen können.

Nach dieser speciellen Zwischenbetrachtung wenden wir uns wieder dem allgemeinen Problem zu. Um die Schattengleichung eines von einer Kugel beleuchteten Kreises jetzt wirklich zu bekommen, haben wir im Hauptgleichungssystem (IV) nur an Stelle der zwei allgemeinen Relationen:

$$F(u, v, w) = 0$$
$$G(u, v, w) = 0$$

die abgeleiteten Gleichungen von Kugel und Kreis einzuführen. Mithin besteht unser Schattenproblem nunmehr in der Elimination von u, v, w aus nachfolgendem System:

$$\left.\begin{aligned}
x\left(\frac{\partial F}{\partial v}\cdot\frac{\partial G}{\partial w}-\frac{\partial F}{\partial w}\cdot\frac{\partial G}{\partial v}\right)&+\\
+y\left(\frac{\partial F}{\partial w}\cdot\frac{\partial G}{\partial u}-\frac{\partial F}{\partial u}\cdot\frac{\partial G}{\partial w}\right)&+\\
+z\left(\frac{\partial F}{\partial u}\cdot\frac{\partial G}{\partial v}-\frac{\partial F}{\partial v}\cdot\frac{\partial G}{\partial u}\right)&=0 \quad (42)\\
(ru+tw+1)^2-R^2(u^2+v^2+w^2)&=0 \quad (43)\\
r^2u^2+r^2v^2&=1 \quad (44)\\
ux+vy+wz+1&=0 \quad (45)
\end{aligned}\right\} \quad (V)$$

Um diese Elimination durchzuführen, schlagen wir folgenden Weg ein, im Sinne des Bisherigen das Problem wieder erst allgemein analytisch behandelnd und erst hierauf rechnerisch, für die in Betracht kommenden speciellen Werthe.

Die allgemeine Form der Kreisgleichung:

$$G(u, v, w) = 0$$

multipliciren wir mit einem unbestimmten Factor λ und addiren den so auf der linken Seite erhaltenen Werth zur linken Seite der Kugelgleichung:

$$F(u, v, w) = 0.$$

Die dadurch entstehende Relation:

$$F(u, v, w) + \lambda . G(u, v, w) = 0 \tag{46}$$

repräsentirt dann die Gleichung einer Fläche, welche einbeschrieben ist unserer Schattenfläche, weil jede Ebene, welche die Kugel und den Kreis gleichzeitig berührt, auch diese Fläche (46) berührt. Unsere Aufgabe ist jetzt, diese Fläche (46) durch eine Gleichung in Punktcoordinaten x, y, z darzustellen, die vom zweiten Grad in x, y, z sein muss. Diese Gleichung wird aber bezüglich λ vom dritten Grad, woraus zu ersehen ist, dass im Allgemeinen einem beliebigen Raumpunkt $x_0 y_0 z_0$ drei Wurzeln λ entsprechen. Eine jede dieser drei Wurzeln liefert eine von unseren Flächen (46), wenn wir sie in diese Gleichung eingesetzt denken. Es gehen somit von den Flächen, welche durch Gleichung (46) repräsentirt sind, durch jeden Punkt des Raumes im Allgemeinen drei hindurch. Gehört nun aber unser Punkt speciell der Schattenfläche an, so fallen zwei der Wurzeln zusammen, es wird:

$$\lambda_2 = \lambda_3.$$

Die Gleichung der Schattenfläche wird mithin gefunden, indem man die Bedingung dafür aufstellt, dass unsere cubische Gleichung in λ eine Doppelwurzel hat.

Um zunächst die Fläche (46) in Punktcoordinaten darzustellen, ist folgendes Princip anzuwenden. Es sei:

$$a_{11}u^2 + a_{22}v^2 + a_{33}w^2 + a_{44} + 2a_{14}u + 2a_{24}v + \\ + 2a_{34}w + 2a_{23}vw + 2a_{31}wu + 2a_{12}uv = 0. \tag{47}$$

die Gleichung einer Fläche zweiter Classe in Ebenencoordinaten. Dann findet man die Gleichung dieser Fläche in Punktcoordinaten in folgender Weise. Man stellt die Determinante auf:

$$\begin{vmatrix} a_{11}a_{12}a_{13}a_{14} \\ a_{21}a_{22}a_{23}a_{24} \\ a_{31}a_{32}a_{33}a_{34} \\ a_{41}a_{42}a_{43}a_{44} \end{vmatrix}$$

wobei allgemein:

$$a_{i\varkappa} = a_{\varkappa i}$$

ist, und bildet die zu den einzelnen Elementen gehörenden Unterdeterminanten. Sei $A_{i\varkappa}$ diejenige Unterdeterminante, welche zum Element $a_{i\varkappa}$ gehört, so lautet allgemein die Gleichung der Fläche (46) in Punktcoordinaten:

$$A_{11}x^2+A_{22}y^2+A_{33}z^2+A_{44}+2A_{14}x+2A_{24}y+$$
$$+2A_{34}z+2A_{32}yz+2A_{31}zx+2A_{12}xy = 0, \quad (48)$$

und es ist das eine Fläche zweiter Ordnung. Die a enthalten nun λ in erster Potenz. Und folglich enthalten die A, als Unterdeterminanten der a, λ in dritter Potenz. Ordnen wir nun letztere Gleichung nach Potenzen von λ, so folgt eine cubische Gleichung in λ, die äquivalent ist der Gleichung 46) in Punktcoordinaten. Wir wollen diese cubische Gleichung in der folgenden allgemeinen Form ansetzen:

$$Q_0\lambda^3+Q_1\lambda^2+Q_2\lambda+Q_3 = 0 \quad (49)$$

und haben dann also die Bedingung dafür aufzustellen, dass diese Gleichung dritten Grades eine Doppelwurzel hat. Dazu muss der Differentialquotient der linken Seite, genommen nach λ, zugleich verschwinden für die Doppelwurzel. Derselbe ist aber:

$$3Q_0\lambda^2+2Q_1\lambda+Q_2 = 0. \quad (50)$$

Diese beiden Gleichungen (49) und (50) muss die Doppelwurzel erfüllen.

An Stelle der ursprünglichen cubischen Gleichung (49) können wir aber mit Vortheil eine quadratische setzen, die wir erhalten, wenn wir die cubische Gleichung (49) mit 3 und die Gleichung (50) mit λ multipliciren und dann die linken Seiten von einander subtrahiren, wodurch das Glied in λ^3 fortfällt. Es folgt so die Gleichung:

$$Q_1\lambda^2+2Q_2\lambda+3Q_3 = 0. \quad (51)$$

Das allgemeine Schattenproblem läuft mithin darauf hinaus, die Resultante der zwei Gleichungen:

$$3Q_0\lambda^2+2Q_1\lambda+Q_2=0 \qquad (50)$$

$$Q_1\lambda^2+2Q_2\lambda+3Q_3=0 \qquad (51)$$

aufzustellen. Dass aber diese zwei Gleichungen eine Wurzel gemein haben, können wir dadurch bewirken, dass wir sie als lineare Gleichungen in den Unbekannten λ^2 und λ auffassen, sie für diese Unbekannten auflösen und zum Schluss den für λ gefundenen Werth, zum Quadrat erhoben, gleichsetzen dem für λ^2 gefundenen Werth. Durch Multiplication bezüglich mit Q_2 und Q_1 folgt zunächst aus (50) und (51):

$$\begin{array}{r} 3Q_0Q_2\lambda^2+2Q_1Q_2\lambda+Q_2^2=0 \\ -Q_1^2\lambda^2-2Q_1Q_2\lambda-3Q_1Q_3=0 \\ \hline \lambda^2(3Q_0Q_2-Q_1^2)+Q_2^2-3Q_1Q_3=0, \end{array}$$

woraus:

$$\lambda^2=\frac{3Q_1Q_3-Q_2^2}{3Q_0Q_2-Q_1^2}.$$

Multiplicirt man aber (50) und (51) bezüglich mit Q_1 und $3Q_0$ und addirt, so ergibt sich:

$$\begin{array}{r} 3Q_0Q_1\lambda^2-2Q_1^2\lambda+Q_1Q_2=0 \\ -3Q_0Q_1\lambda^2-6Q_0Q_2\lambda-9Q_0Q_3=0 \\ \hline \lambda(2Q_1^2-6Q_0Q_2)+Q_1Q_2-9Q_0Q_3=0 \end{array}$$

$$\lambda^2=\frac{(9Q_0Q_3-Q_1Q_2)^2}{(2Q_1^2-6Q_0Q_2)^2}.$$

Setzen wir jetzt die zwei für λ^2 gefundenen Werthe einander gleich, so erhalten wir als endgiltiges Resultat unserer allgemeinen Untersuchungen die Relation:

$$\frac{3Q_1Q_3-Q_2^2}{3Q_0Q_2-Q_1^2}=\frac{(9Q_0Q_3-Q_1Q_2)^2}{(2Q_1^2-6Q_0Q_2)^2},$$

d. h. die Gleichung:

$$(9Q_0Q_3-Q_1Q_2)^2+4(Q_1^2-3Q_0Q_2)(3Q_1Q_3-Q_2^2)=0, \qquad (52)$$

d. i. die gesuchte strenge Gleichung der Schattenfläche. Und da dieselbe eine Gleichung vierten Grades in den Q, diese selbst aber x, y, z im zweiten Grad enthalten, so ist die strenge Schattengleichung eine Gleichung achten Grades.

Um jetzt die allgemeine Form (52) der Schattengleichung zur Behandlung unserer speciellen Schattenaufgabe rechnerisch verwerthen zu können, muss man noch einmal die Bedeutung der vier Coëfficienten Q ins Auge fassen und ihre Form allgemein aufstellen. Dies ist aber in folgender Weise möglich. Es standen ja mit unseren früheren Untersuchungen gewisse Determinanten in innigster Beziehung. Wie man leicht sieht, haben nun die Coëfficienten der allgemeinen Gleichung (48) die folgenden Formen, die man sofort sämmtlich der allgemeinen viergliedrigen Determinante von S. 889 entnehmen kann:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} a_{22}a_{23}a_{24} \\ a_{32}a_{33}a_{34} \\ a_{42}a_{43}a_{44} \end{vmatrix} \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} a_{11}a_{13}a_{14} \\ a_{31}a_{33}a_{34} \\ a_{41}a_{43}a_{44} \end{vmatrix}$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} a_{11}a_{12}a_{14} \\ a_{21}a_{22}a_{24} \\ a_{41}a_{42}a_{44} \end{vmatrix} \qquad A_{44} = \begin{vmatrix} a_{11}a_{12}a_{13} \\ a_{21}a_{22}a_{23} \\ a_{31}a_{32}a_{33} \end{vmatrix}$$

$$A_{14} = - \begin{vmatrix} a_{21}a_{22}a_{23} \\ a_{31}a_{32}a_{33} \\ a_{41}a_{42}a_{43} \end{vmatrix} \qquad A_{24} = \begin{vmatrix} a_{11}a_{12}a_{13} \\ a_{31}a_{32}a_{33} \\ a_{41}a_{42}a_{43} \end{vmatrix}$$

$$A_{34} = - \begin{vmatrix} a_{11}a_{12}a_{13} \\ a_{21}a_{22}a_{23} \\ a_{41}a_{42}a_{43} \end{vmatrix} \qquad A_{23} = - \begin{vmatrix} a_{11}a_{12}a_{14} \\ a_{31}a_{32}a_{34} \\ a_{41}a_{42}a_{44} \end{vmatrix}$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} a_{12}a_{13}a_{14} \\ a_{22}a_{23}a_{24} \\ a_{42}a_{43}a_{44} \end{vmatrix} \qquad A_{12} = - \begin{vmatrix} a_{21}a_{23}a_{24} \\ a_{31}a_{33}a_{34} \\ a_{41}a_{43}a_{44} \end{vmatrix}$$

Diese Coëfficienten lassen sich aber auch noch anders schreiben. Setzen wir nämlich allgemein:

$$a_{i\varkappa} = b_{i\varkappa} + \lambda \, . \, c_{i\varkappa},$$

so wird, indem wir hier z. B. bloss die eine der 10 Determinanten, A_{44} hinschreiben:

$$\left.\begin{array}{l}
\begin{vmatrix} b_{11} b_{12} b_{13} \\ b_{21} b_{22} b_{23} \\ b_{31} b_{32} b_{33} \end{vmatrix} + \\
+\left\{\begin{vmatrix} c_{11} b_{12} b_{13} \\ c_{21} b_{22} b_{23} \\ c_{31} b_{32} b_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} c_{12} b_{13} \\ b_{21} c_{22} b_{23} \\ b_{31} c_{32} b_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} b_{12} c_{13} \\ b_{21} b_{22} c_{23} \\ b_{31} b_{32} c_{33} \end{vmatrix}\right\} . \lambda \\
+\left\{\begin{vmatrix} b_{11} c_{12} c_{13} \\ b_{21} c_{22} c_{23} \\ b_{31} c_{32} c_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_{11} b_{12} c_{13} \\ c_{21} b_{22} c_{23} \\ c_{31} b_{32} c_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_{11} c_{12} b_{13} \\ c_{21} c_{22} b_{23} \\ c_{31} c_{32} b_{33} \end{vmatrix}\right\} . \lambda^2 \\
\left\{\begin{vmatrix} c_{11} c_{12} c_{13} \\ c_{21} c_{22} c_{23} \\ c_{31} c_{32} c_{33} \end{vmatrix}\right\} . \lambda^3
\end{array}\right\} = A_{44} \qquad (53)$$

oder kürzer:

$$A_{44} = B_{44} + \lambda C_{44} + \lambda^2 D_{44} + \lambda^3 E_{44},$$

wobei dann also B, C, D, E Determinanten bezüglich Determinantensummen von obiger Form repräsentiren. Man hat somit für die Coëfficienten der allgemeinen Gleichung (48) folgendes Schema:

$$\left.\begin{array}{l}
A_{11} = B_{11} + \lambda . C_{11} + \lambda^2 D_{11} + \lambda^3 E_{11} \\
A_{22} = B_{22} + \lambda . C_{22} + \lambda^2 D_{22} + \lambda^3 E_{22} \\
A_{33} = B_{33} + \lambda . C_{33} + \lambda^2 D_{33} + \lambda^3 E_{33} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array}\right\} \qquad (54)$$

u. s. f.

Auf diese Weise hat man aber die allgemeine Form unserer Q bereits gefunden. Denn da dieselben nichts Anderes als die Coëfficienten jener Gleichung dritten Grades in λ waren, diese selbst aber erhalten wird, indem man sich die A sämmtlich nach dem Schema (54) berechnet, ihre Werthe in Gleichung (48) eingesetzt denkt und die so erhaltene Gleichung nach λ ordnet, wodurch sich eben Gleichung (49) ergibt, so haben die Q die folgende allgemeine analytische Form:

$$\left.\begin{aligned}
Q_0 &= E_{11}x^2+E_{22}y^2+E_{33}z^2+E_{44}+2E_{14}x+2E_{24}y+\\
&\qquad +2E_{34}z+2E_{23}yz+2E_{31}zx+2E_{12}xy\\
Q_1 &= D_{11}x^2+D_{22}y^2+D_{33}z^2+D_{44}+2D_{14}x+2D_{24}y+\\
&\qquad +2D_{34}z+2D_{23}yz+2D_{31}zx+2D_{12}xy\\
Q_2 &= C_{11}x^2+C_{22}y^2+C_{33}z^2+C_{44}+2C_{14}x+2C_{24}y+\\
&\qquad +2C_{34}z+2C_{23}yz+2C_{31}zx+2C_{12}xy\\
Q_3 &= B_{11}x^2+B_{22}y^2+B_{33}z+B_{44}+2B_{14}x+2B_{24}y+\\
&\qquad +2B_{34}z+2B_{23}yz+2B_{31}zx+2B_{12}xy
\end{aligned}\right\} \quad (55) \; .$$

In der That sind also die Q ganze Functionen zweiten Grades in x, y, z. Durch Einsetzen derselben in Gleichung (52) folgt mithin wirklich eine Gleichung achten Grades in xyz.

Ehe wir nun die allgemeine Form (52) der Schattengleichung unter Berücksichtigung der Systeme (53) und (55) zur strengen Lösung des Kreisschattenproblems verwenden, wollen wir zuvor noch eine Bemerkung machen, die über die rechnerischen Complicationen, zu denen diese Theorie wohl in den meisten Fällen führt — die aber, im Gegensatz zur Laplace'schen in ganz bestimmt vorgeschriebener, wenn auch mehr oder minder umständlicher Weise doch stets überwunden werden können — einiges Licht verbreitet. Es sind ja die Q allgemeine Functionen zweiten Grades, von denen eine jede zehn Glieder umfasst. Bildet man also, wie Gleichung (52) das vorschreibt, die Producte je zweier Q, so erhält man im Allgemeinen eine Gleichung von folgender Gliederanzahl, indem wir zur Abkürzung Glieder mit »G« bezeichnen:

$$(100G-100G^{\mathrm{I}})^2-(100G^{\mathrm{II}}-100^{\mathrm{III}})(100G^{\mathrm{IV}}-100G^{\mathrm{V}}) =$$
$$= 60.100 \text{ Glieder,}^1$$

wobei freilich vorausgesetzt, dass sich gar keine Glieder in den drei Klammern letzterer Gleichung vereinigen, indem nie gemeinsame Potenzen von x, y, z oder gleichen Combinationen dieser Grössen auftreten. Das ist nun zwar sicher nicht der Fall — wie wir auch an unserem speciellen Beispiel sehen werden — indem sich eine Anzahl von Gliedern jedenfalls immer vereinigen lassen wird. Aber man bemerkt doch schon,

---

[1] Indem, da es sich um algebraische Summen handelt, hier $100^2 = 1+2+3+\ldots+98+99+100 = 5050$ bedeutet.

dass auf diesem Wege, bei jeder speciellen Aufgabe, wenn man keine Vereinfachungen einzuführen im Stande ist, die Berechnung einer geradezu ungeheueren Zahl von Gliedern nothwendig wird, deren gemeinsames Anordnen nach den verschiedenen auftretenden Potenzen, wie: x^8, x^5, y^6, z^3, x^4y^3, z^3y^2, xyz^3 etc., d. h. nach einer sehr grossen Anzahl von Combinationen zu lauter verschiedenen Classen eine beinahe unausführbare Arbeit werden würde. Dies ist offenbar die bei dieser Theorie sich vor Allem einstellende grosse Schwierigkeit, die, ganz wie bei der Laplace'schen, schliesslich rechnerischer Natur ist. Allein diese Schwierigkeit ist eben dadurch ganz ausserordentlich zu vermindern, dass man durch Annahmen über die Lage des an sich willkürlichen Coordinatensystems, wie wir es früher gethan, den Gleichungen der allgemeinen Theorie:

$$F(u, v, w) = 0$$
$$G(u, v, w) = 0$$

im speciellen Falle eine möglichst einfache und praktisch verwerthbare Form zu geben sucht, wodurch eine ganze Anzahl von Gliedern in den allgemeinen Functionen zweiten Grades, durch welche die Q dargestellt werden, zum Verschwinden gebracht wird, indem eine mehr oder minder grosse Zahl der Determinantencoëfficienten Null wird. Dieses Herabdrücken der Gliederanzahl der Q ist aber in der genannten Weise immer zu ermöglichen. Inwieweit, ist eine andere Frage, welche durch die mehr oder minder grosse Complicirtheit der zwei Figuren bedingt wird, deren Gleichungen durch $F = 0$ und $G = 0$ gegeben sind.

Nach diesen Ausführungen können wir unser specielles Problem nun wirklich strenge lösen, ohne weitere principielle Schwierigkeiten, während die rechnerische Ausführung, deren Ergebnisse in den verschiedenen Partien wir hier bloss mittheilen werden, immerhin noch sehr verwickelt bleibt. Was wir dabei überhaupt auf diesem Wege gewinnen, ist aber keineswegs bloss das Resultat als solches, welches die Laplace'sche Methode uns nicht lieferte, sondern das Werthvolle ist sozusagen vor Allem der Einblick in die complicirte und eigenthümliche Natur solcher strenger Lösungen überhaupt.

Wir ordnen jetzt im Sinne der allgemeinen Theorie die Kugel und Kreisgleichung in Ebenencoordinaten nach u, v, w. Man erhält dann:

$$(r^2-R^2)u^2-R^2v^2+(t^2-R^2)w^2+2rtuw+2ru+2tw+1=0 \quad (56)$$

$$r^2u^2+r^2v^2-1=0. \quad (57)$$

Weiter stellen wir die allgemeine Gleichung (46) für unseren jetzigen Fall auf, indem wir Gleichung (57) mit λ multipliciren und sie hierauf zu Gleichung (56) addiren. Gleich nach u, v, w geordnet folgt:

$$[r^2(1+\lambda)-R^2]u^2+[r^2\lambda-R^2]v^2+(t^2-R^2)w^2+$$
$$+2rtuw+2ru+2tw-\lambda+1=0.$$

Mithin haben jetzt die Coëfficienten a der allgemeinen Gleichung (47) die folgende Form:

$$\left.\begin{aligned}
a_{11} &= (r^2-R^2)+r^2\lambda \\
a_{22} &= -R^2+r^2\lambda \\
a_{33} &= (t^2-R^2)+0.\lambda \\
a_{44} &= 1-1.\lambda \\
a_{14} &= r+0.\lambda \\
a_{24} &= 0+0.\lambda \\
a_{34} &= t+0.\lambda \\
a_{23} &= 0+0.\lambda \\
a_{31} &= rt+0.\lambda \\
a_{12} &= 0+0.\lambda
\end{aligned}\right\} \quad (58)$$

Das sind zehn Glieder, und vier Elemente, zu je zweien combinirt, ergeben in der That so viele. Festzuhalten ist für die folgende Rechnung noch, dass die sechs übrigen a, die ausser diesen zehn eben angeführten in der allgemeinen Determinante:

$$\begin{vmatrix}
a_{11}a_{12}a_{13}a_{14} \\
a_{21}a_{22}a_{23}a_{24} \\
a_{31}a_{32}a_{33}a_{34} \\
a_{41}a_{12}a_{43}a_{44}
\end{vmatrix}$$

auftreten, also:

$$a_{13},\ a_{21},\ a_{32},\ a_{41},\ a_{42},\ a_{43}$$

jetzt nicht etwa Null gesetzt werden dürfen, wie man vielleicht meinen könnte, wodurch indess ein ganz anderes Resultat erzielt werden würde. Vielmehr ist, entsprechend der allgemeinen Form der früheren Theorie:

$$a_{i\varkappa} = a_{i\varkappa}$$

auch jetzt:

$$\left.\begin{aligned} a_{13} &= a_{31} = rt+0.\lambda \\ a_{21} &= a_{12} = 0+0.\lambda \\ a_{32} &= a_{23} = 0+0.\lambda \\ a_{41} &= a_{14} = r+0.\lambda \\ a_{42} &= a_{24} = 0+0.\lambda \\ a_{43} &= a_{34} = t+0.\lambda \end{aligned}\right\} \tag{59}$$

Unter Zugrundelegung dieser zwei Werthetabellen (58) und (59) nun hat man die vier Gleichungen des Systems (55) auszurechnen. Dabei erfordert offenbar die Berechnung des durch die erste Gleichung in (55) gegebenen Coëfficienten Q_0 die Ausrechnung von zehn Determinanten, diejenige von Q_1 die Ausrechnung von dreissig Determinanten, die von Q_2 ebenfalls die Berechnung von dreissig Determinanten und schliesslich die von Q_3 fordert wieder die Ausrechnung von zehn Determinanten, so dass im Ganzen achtzig dreigliedrige Determinanten gemäss Schema (58) und (59) erst aufzustellen und dann auszurechnen sind, was sehr rasch bewerkstelligt werden kann, indem man in bekannter Weise die beiden ersten Verticalreihen rechts hinter die Determinante schreibt und multiplicirt. Bei dieser Ausrechnung zeigt sich nun aber, dass in Folge unserer früher gemachten vereinfachenden Annahmen über die Lage des Coordinatensystems nicht weniger als zweiundfünfzig von den achtzig stets zu lösenden Determinanten verschwinden, was die folgende Rechnung eben so ausserordentlich vereinfacht, ja in gewissem Sinne, wie zur Genüge ersichtlich werden wird, überhaupt erst durchführbar macht. Die Rechnung ergibt nämlich für diese achtzig Determinanten die folgenden Werthe:

I. Ad Q_0:

$$E_{11} = E_{22} = E_{44} = E_{14} = E_{24} = E_{34} = E_{23} = E_{31} = E_{12} = 0$$
$$E_{33} = -r^4.$$

II. Ad Q_1:

$$D_{11} = \begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} 0 \\ -r^2(t^2-R^2) \\ 0 \end{array}\right. \\ \hline +r^2(R^2-t^2) \end{array} \qquad D_{22} = \begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} 0 \\ -r^2(t^2-R^2) \\ 0 \end{array}\right. \\ \hline +r^2(R^2-t^2) \end{array}$$

$$D_{33} = \begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} -r^2(r^2-R^2) \\ +r^2R^2 \\ r^4 \end{array}\right. \\ \hline +2r^2R^2 \end{array}$$

$$D_{44} = \begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ +r^4(t^2-R^2) \end{array}\right. \\ \hline +r^4(t^2-R^2) \end{array} \qquad D_{14} = \begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right. \\ \hline 0 \end{array} \qquad D_{24} = \begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right. \\ \hline 0 \end{array}$$

$$D_{34} = \begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ -tr^4 \end{array}\right. \\ \hline -tr^4 \end{array} \qquad D_{23} = \begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right. \\ \hline 0 \end{array} \qquad D_{31} = \begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} 0 \\ tr^3 \\ 0 \end{array}\right. \\ \hline +tr^3 \end{array} \qquad D_{12} = \begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right. \\ \hline 0 \end{array}$$

III. Ad Q_2:

$$C_{11} = \begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} -r^2R^2 \\ 0 \\ R^2(t^2-R^2) \end{array}\right. \\ \hline +R^2(t^2-r^2-R^2) \end{array} \qquad C_{22} = \begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} -r^2R^2 \\ 0 \\ R^2(t^2+r^2-R^2) \end{array}\right. \\ \hline +R^2(t^2-R^2) \end{array}$$

$$C_{33} = \begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} -r^2R^2 \\ -r^2R^2 \\ R^2(r^2-R^2) \end{array}\right. \\ \hline -R^2(r^2+R^2) \end{array}$$

$$C_{44} = \begin{cases} -r^2R^2(t^2-R^2) \\ -r^2R^2(t^2+r^2-R^2) \\ 0 \end{cases} \qquad C_{14} = \begin{cases} 0 \\ +r^3R^2 \\ 0 \end{cases} \qquad C_{24} = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ 0 \end{cases}$$

$$\overline{-r^2R^2(2t^2+r^2+2R^2)} \qquad \overline{+r^3R^2} \qquad \overline{0}$$

$$C_{34} = \begin{cases} tr^2R^2 \\ tr^2R^2 \\ 0 \end{cases} \qquad C_{23} = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ 0 \end{cases} \qquad C_{31} = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ -trR^2 \end{cases} \qquad C_{12} = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ 0 \end{cases}$$

$$\overline{+2tr^2R^2} \qquad \overline{0} \qquad \overline{-trR^2} \qquad \overline{0}$$

IV. Ad $\underset{\sim}{Q}_3$:

$$B_{11} = B_{22} = B_{33} = R^4;\ B_{44} = R^4(r^2+t^2-R^2);$$
$$B_{14} = -rR^4;\ B_{34} = -tR^4;\ B_{24} = B_{23} = B_{31} = B_{12} = 0.$$

Auf Grund dieser Determinantenwerthe aber nehmen die $\underset{\sim}{Q}$ die Form an:

$$\left.\begin{aligned}
\underset{\sim}{Q}_0 &= -r^4z^2 = 1 \text{ Glied} \\
\underset{\sim}{Q}_1 &= r^2(R^2-t^2)x^2+r^2(R^2-t^2)y^2+2R^2r^2z^2- \\
&\quad -r^4(R^2-t^2)-2r^4tz+2r^3txz = 6 \text{ Glieder} \\
\underset{\sim}{Q}_2 &= R^2(t^2-r^2-R^2)x^2-R^2(R^2-t^2)y^2-R^2(R^2+r^2)z^2- \\
&\quad -R^2r^2(2t^2+r^2+2R^2)+2R^2r^3x+ \\
&\quad +4R^2r^2tz-2R^2rtxz = 7 \text{ Glieder} \\
\underset{\sim}{Q}_3 &= R^4x^2+R^4y^2+R^4z^2+R^4(r^2+t^2-R^2)- \\
&\quad -2R^4rx-2R^4tz = 6 \text{ Glieder}
\end{aligned}\right\} \quad (60)$$

Die Gesammtsumme aller Glieder der vier Q = Coëfficienten beträgt also statt vierzig jetzt nur noch zwanzig Glieder, was eben die folgende Rechnung so bedeutend vereinfacht. Allgemein wird dadurch nämlich die Gesammtzahl der Glieder, aus denen sich die strenge Schattengleichung zusammensetzt, in unserem jetzigen Falle reducirt auf:

$$(6G-42G^{\text{I}})^2-(21G^{\text{II}}-7G^{\text{III}})(36G^{\text{IV}}-28G^{\text{V}})$$

oder, da sich hier in der früher erwähnten Weise eine Reihe von Gliedern innerhalb der einzelnen Klammern vereinigen, noch einfacher:

$$(6G-22G^{\text{I}})^2-(19G^{\text{II}}-7G^{\text{III}})(22G^{\text{IV}}-22G^{\text{V}}) = 1550 \text{ Glieder.}$$

Diese 1550 Glieder aber muss man wirklich ausrechnen und dann zusammenziehen, indem man nach gemeinsamen Potenzen ordnet, was zwar eine ermüdende mechanische Arbeit ist, die man indess kaum noch mehr wird vereinfachen können. Zunächst ergibt die Rechnung die folgenden Werthe für die in der Schattengleichung (52) auftretenden zweigliedrigen Q-Producte, indem wir sie gleich nach fallenden Potenzen und der Übersichtlichkeit halber mit den folgenden Abkürzungen schreiben:

$$9Q_0Q_3 = \alpha_1 z^4 + \alpha_1 x^2 z^2 + \alpha_1 y^2 + \beta_1 z^3 + \gamma_1 x z^2 + \\ + \delta_1 z^2 = 6 \text{ Glieder.} \quad (61)$$

wobei gesetzt ist:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 &= -9R^4r^4 \\ \beta_1 &= +18R^4r^4t \\ \gamma_1 &= +18R^4r^5 \\ \delta_1 &= -9R^4r^4(r^2+t^2-R^2) \end{aligned}\right\} \quad (62)$$

Ferner ist:

$$\left.\begin{aligned} Q_1Q_2 = {} & \alpha_2 x^4 + \beta_2 y^4 + \gamma_2 z^4 + \delta_2 x^3 z + \varepsilon_2 x z^3 + \zeta_2 x^2 y^2 + \eta_2 x^2 z^2 \\ & + \vartheta^2 y^2 z^2 + i_2 x y^2 z + \varkappa_2 x^3 + \lambda_2 z^3 + \mu_2 x^2 z + \nu_2 x z^2 + \\ & + \xi_2 y^2 z + \varkappa_2 x y^2 + o_2 x^2 + \pi_2 y^2 + \rho_2 z^2 + \sigma^2 x z + \\ & + \tau_2 x + \chi_2 z + \psi_2 = 22 \text{ Glieder} \end{aligned}\right\} \quad (63)$$

Dabei bedeutet:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_2 &= +R^2r^2(R^2-t^2)(t^2-r^2-R^2) \\ \beta_2 &= -R^2r^2(R^2-t^2)^2 \\ \gamma_2 &= -2R^4r^2(R^2+r^2) \\ \delta_2 &= +2R^2r^3t(2t^2-2R^2-r^2) \\ \varepsilon_2 &= -2R^2r^3t(3R^2+r^2) \\ \zeta_2 &= +r^2R^2(R^2-t^2)(t^2-r^2-R^2-1) \\ \eta^2 &= +3R^2r^2(R^2t^2-R^2r^2-R^4-r^2t^2) \\ \vartheta_2 &= -R^2r^2(R^2-t^2)(3R^2+r^2) \\ \iota_2 &= -4R^2r^3t(R^2-t^2) \\ \varkappa_2 &= +2R^2r^5(R^2-t^2) \end{aligned}\right| \quad (64)$$

$$\left.\begin{aligned}
\lambda_2 &= +2R^2r^4t(5R^2+r^2)\\
\mu_2 &= +6R^2r^4t(R^2-t^2+r^2)\\
\nu_2 &= +4R^2r^5(R^2+3t^2)\\
\xi_2 &= +6R^2r^4t(R^2-t^2)\\
o_2 &= +r^4R^2(R^2-t^2)(3t^2+R^2)\\
\pi_2 &= -r^4R^2(R^2-t^2)(t^2+3R^2+r^2)\\
\rho_2 &= +R^2r^4(3R^2t^2-3R^4-R^2r^2-9r^2t^2)\\
\sigma_2 &= +2R^2r^5t(3R^2+t^2-r^2)\\
\tau_2 &= -2R^2R^7(R^2-t^2)\\
\chi_2 &= +2R^2r^6t(4t^2+r^2)\\
\psi_2 &= +R^2r^6(R^2-t^2)(2t^2+r^2+2R^2)
\end{aligned}\right\} \tag{64}$$

Weiter wird:

$$\left.\begin{aligned}
4Q_1^2 = {} & \alpha_3x^4+\alpha_3y^4+\beta_3z^4+2\alpha_3x^2y^2+\gamma_3x^2z^2+\\
& +\delta_3y^2z^2+\varepsilon_3x^3z+\zeta_3xz^3+\varepsilon_3xy^2z+\eta_3z^3+\\
& +\vartheta_3x^2z+\iota_3xz^2+\vartheta_3y^2z+\varkappa_3x^2+\varkappa_3y^2+\\
& +\lambda_3z^2+\mu_3xz+\nu_3z+\xi_3 = 19 \text{ Glieder}
\end{aligned}\right\} \tag{65}$$

Dabei ist:

$$\left.\begin{aligned}
\alpha_3 &= +4r^4(R^2-t^2)^2\\
\beta_3 &= +16R^4r^4\\
2\alpha_3 &= +8r^4(R^2-t^2)^2\\
\gamma_3 &= +16r^4(R^4+r^2t^2-R^2t^2)\\
\delta_3 &= +16r^4R^2(R^2-t^2)\\
\varepsilon_3 &= +16r^5t(R^2-t^2)\\
\zeta_3 &= +32R^2r^5t\\
\eta_3 &= -32R^2r^6t\\
\vartheta_3 &= -16R^6t(R^2-t^2)\\
\iota_3 &= -32r^7t^2\\
\varkappa_3 &= -8r^6(R^2-t^2)^2\\
\lambda_3 &= +16r^6(R^4+r^2t^2-R^2t^2)\\
\mu_3 &= -16r^7t(R^2-t^2)\\
\nu_3 &= +16r^8t(R^2-t^2)\\
\xi_3 &= +4r^8(R^2-t^2)^2
\end{aligned}\right\} \tag{66}$$

Ferner:

$$12 Q_0 Q_2 = \alpha_4 z^4 + \beta_4 x^2 z^2 + \gamma_4 y^2 z^2 + \delta_4 x z^3 + \\ + \varepsilon_4 z^3 + \zeta_4 x z^2 + \eta_4 z^2 = 7 \text{ Glieder} \qquad (67)$$

Hiebei bedeutet:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_4 &= +12 R^2 r^4 (R^2 + r^2) \\ \beta_4 &= -12 R^2 r^4 (t^2 - r^2 - R^2) \\ \gamma_4 &= +12 R^2 r^4 (R^2 - t^2) \\ \delta_4 &= +24 R^2 r^5 t \\ \varepsilon_4 &= -48 R^2 r^6 t \\ \zeta_4 &= -24 R^2 r^7 \\ \eta_4 &= +12 R^2 r^6 (2t^2 + r^2 + 2R^2) \end{aligned}\right\} \qquad (68)$$

Ferner wird:

$$3 Q_1 Q_3 = \alpha_5 x^4 + \alpha_5 y^4 + \beta_5 z^4 + \gamma_5 x^2 y^2 + \delta_5 x^2 z^2 + \delta_5 y^2 z^2 + \\ + \varepsilon_5 x y^2 z + \varepsilon_5 x^3 z + \varepsilon_5 x z^3 + \zeta_5 x^3 + \eta_5 z^3 + \vartheta_5 x^2 z + \\ + \iota_5 x z^2 + \varkappa_5 y^2 z + \zeta_5 x y^2 + \lambda_5 x^2 + \lambda_5 y^2 + \mu_5 z^2 + \\ + \nu_5 x z + \xi_5 x + o_5 z + \pi_5 = 22 \text{ Glieder} \qquad (69)$$

wobei:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_5 &= +3 R^4 r^2 (R^2 - t^2) \\ \beta_5 &= +2 R^4 r^2 (8 R^2 - 3 r^2 t) \\ \gamma_5 &= +6 R^4 r^2 (R^2 - t^2) \\ \delta_5 &= +3 R^4 r^2 (3 R^2 - t^2) \\ \varepsilon_5 &= +6 R^4 r^3 t \\ \zeta_5 &= -6 R^4 r^3 (R^2 - t^2) \\ \eta_5 &= -12 R^6 r^2 t \\ \vartheta_5 &= +16 R^4 r^2 t (t^2 - R^2 - 3 r^2) \\ \iota_5 &= +12 R^4 r^3 (t^2 + R^2) \\ \varkappa_5 &= +6 R^4 r^2 t (t^2 - R^2 - r^3) \\ \lambda_5 &= -3 R^4 r^2 (R^2 - t^2)^2 \\ \mu_5 &= +3 R^4 r^2 (R^2 r^2 + 2 R^2 t^2 + 5 r^2 t^2 - 2 R^4) \\ \nu_5 &= +6 R^4 r^3 t (3 r^2 + t^2 - R^2) \\ \xi_5 &= +6 R^4 r^5 (R^2 - t^2) \\ o_5 &= +6 R^4 r^4 t (2 R^2 - 2 t^2 - r^2) \\ \pi_5 &= -3 R^4 r^4 (R^2 - t^2)(r^2 + t^2 - R^2) \end{aligned}\right\} \qquad (70)$$

Schliesslich ist:

$$\left.\begin{aligned} Q_2^2 = {} & \alpha_6 x^4 + \beta_6 y^4 + \gamma_6 z^4 + \delta_6 x^2 y^2 + \varepsilon_6 x^2 z^2 + \zeta_6 y^2 z^2 + \\ & + \eta_6 x^3 z + \vartheta_6 x z^3 + \iota_6 x y^2 z + \varkappa_6 x^3 + \lambda_6 z^3 + \mu_6 x^2 z + \\ & + \nu_6 x z^2 + \xi_6 x y^2 + o_6 y^2 z + \pi_6 x^2 + \rho_6 y^2 + \sigma_6 z^2 + \tau_6 x z + \\ & + \chi_6 x + \psi_6 z + \omega_6 = 22 \text{ Glieder} \end{aligned}\right\} \quad (71)$$

wobei

$$\left.\begin{aligned} \alpha_6 &= +R^4(t^2-r^2-R^2)^2 \\ \beta_6 &= +R^4(R^2-t^2)^2 \\ \gamma_6 &= +R^4(R^2+r^2)^2 \\ \delta_6 &= -2R^4(t^2-r^2-R^2)(R^2-t^2) \\ \varepsilon_6 &= +2R^4(2r^2t^2-[t^2-R^2-r^2][R^2+r^2]) \\ \zeta_6 &= +2R^4(R^2-t^2)(R^2+r^2) \\ \eta_6 &= +4R^4rt(t-R^2-r^2) \\ \vartheta_6 &= +4R^4rt(R^2+r^2) \\ \iota_6 &= +4R^4rt(R^2-t^2) \\ \varkappa_6 &= +4R^4r^3(t-r^2-R^2) \\ \lambda_6 &= -8R^4r^2t(R^2+r^2) \\ \mu_6 &= +8R^4r^2t(t^2-R^2-2r^2) \\ \nu_6 &= -4R^4r^3(R^2+r^2+4t^2) \\ \xi_6 &= -4R^4r^3(R^2-t^2) \\ o_6 &= -8R^4r^2t(R^2-t^2) \\ \pi_6 &= -2R^4r^2[(2t^2+2R^2+r^2)(t^2-r^2-R^2)+2r^4] \\ \rho_6 &= +2R^4r^2(R^2-t^2)(2t^2+r^2+2R^2) \\ \sigma_6 &= +2R^4r^2[(R^2+r^2)(2t^2+2R^2+r^2)+8r^2t^2] \\ \tau_6 &= +4R^4r^3t(2t^2+5r^2+2R^2) \\ \chi_6 &= -4R^4r^5(2t^2+r^2-2R^2) \\ \psi_6 &= -8R^4r^4t(2t^2+r^2-2R^2) \\ \omega_6 &= +R^4r^4(2t^2+r^2+2R^2)^2 \end{aligned}\right\} \quad (72)$$

Setzt man nun die Gleichung (52) in der vorgeschriebenen Weise aus den sechs algebraischen Summen (61), (63), (65), (67), (69), (71) zusammen, wodurch man eine Productensumme von 1550 Gliedern erhält — von denen im vollen Einklang

mit der allgemeinen Theorie wirklich kein einziges in der Exponentialquersumme den achten Grad überschreitet — und ordnet diese Glieder, indem man die gleichen zusammenzieht, nach gemeinsamen Potenzen von x, y, z, xy, xz, yz, xyz, bei der achten Potenz beginnend bis herab zur nullten, so reduciren sich die 1550 Glieder auf gerade 96, und die Schattengleichung des von der kugelförmigen Sonne beleuchteten Saturnringes nimmt, wenn man den Ring als Kreis betrachtet, die folgende völlig strenge und allgemein giltige, freilich sehr complicirte Form an:

$$\left.\begin{aligned}
&[A_8x^8+B_8y^8+C_8z^8+D_8x^6y^2+E_8x^2y^6+F_8x^4y^4+G_8x^7z+\\
&+H_8xz^7+I_8x^6z^2+K_8x^2z^6+L_8x^5z^3+M_8x^3z^5+N_8x^4z^4+\\
&+O_8y^6z^2+P_8y^2z^6+Q_8y^4z^4+R_8x^5y^2z+S_8xy^2z^5+\\
&+T_8x^4y^2z^2+U_8x^2y^2z^4+V_8x^3y^4z+W_8xy^4z^3+\\
&+X_8x^3y^2z^3+Y_8x^2y^4z^2+Z_8xy^6z]^8_{(25)}+[A_7x^7+B_7y^7+\\
&+C_7x^5y^2+D_7x^3y^4+E_7xy^6+F_7x^6z+G_7xz^6+H_7x^5z^2+\\
&+I_7x^2z^5+K_7x^4z^3+L_7x^3z^4+M_7y^6z+N_7y^4z^3+\\
&+O_7y^2z^5+P_7x^4y^2z+Q_7xy^2z^4+R_7x^3y^2z^2+S_7x^2y^2z^3+\\
&+T_7x^2y^4z+U_7xy^4z^2]^7_{(20)}+[A_6x^6+B_6y^6+C_6z^6+\\
&+D_6x^4y^2+E_6x^2y^4+F_6x^5z+G_6xz^5+H_6x^4z^2+I_6x^2z^4+\\
&+K_6x^3z^3+L_6y^4z^2+M_6y^2z^4+N_6x^3y^2z+O_6x^2y^2z^2+\\
&+P_6xy^2z^3+Q_6xy^4z]^6_{(16)}+[A_5x^5+B_5z^5+C_5x^3y^2+\\
&+D_5xy^4+E_5x^4z+F_5xz^4+G_5x^3z^2+H_5x^2z^3+I_5y^4z+\\
&+K_5y^2z^3+L_5x^2y^2z+M_5xy^2z^2]^5_{(12)}+[A_4x^4+B_4y^4+\\
&+C_4z^4+D_4x^2y^2+E_4x^3z+F_4xz^3+G_4x^2z^2+H_4y^2z^2+\\
&+I_4xy^2z]^4_{(9)}+[A_3x^3+B_3z^3+C_3x^2y+D_3xy^2+E_3x^2z+\\
&+F_3xz^2+G_3y^2z]^3_{(7)}+[A_2x^2+B_2y^2+C_2z^2+D_2xz]^2_{(4)}+\\
&+[A_1x+B_1z]^1_{(2)}+[A_0]^0_{(1)}=0
\end{aligned}\right\} \quad (73)$$

wobei zur Übersichtlichkeit die Glieder gleichen Grades in Klammern gesetzt und Indices beigefügt sind, von denen der obere den Grad, der untere die Gliederzahl der betreffenden Klammer sogleich erkennen lässt. Dabei setzen sich die 96 Coëfficienten $A_8 \ldots A_0$ aus den $\alpha_1 \ldots \omega_5$ der Systeme (62), (64), (66), (68), (70), (72) zusammen. Diese ganzen 96 Coëfficienten-

summen von A_8 bis A_0, von denen einzelne aus über dreissig Gliedern bestehen, z. B. K_6 aus 37, Q_7 aus 33 u. s. f. und deren vollständiges Aufzählen viele Seiten in Anspruch nehmen würde, wollen wir hier indess nicht anführen. Denn das Resultat, welches wir in erster Linie anstrebten, der genaue Einblick in die complicirte Natur der strengen Lösung wird durch Gleichung (73) vollständig gegeben. Zugleich lässt diese Gleichung erkennen, dass sie rechnerisch keinesfalls verwerthbar ist, ein Grund mehr dafür, wie überflüssig es wäre, die Unmenge von Coëfficienten hier alle wirklich aufzuzählen. Nur um einen Begriff davon zu geben, in wie mannigfacher Weise sich dieselben aus den α_1 bis ω_6 zusammensetzen, wollen wir jedesmal den ersten von jeder Klammer anführen, zumal diese ersten Coëfficienten zufällig nur eine kleinere Gliederzahl aufweisen und also nicht überflüssig viel Platz beanspruchen. Die Rechnung ergibt die folgenden Werthe:

$$\left.\begin{aligned}
A_8 &= \alpha_2^2 - \alpha_3\alpha_5 + \alpha_3\alpha_6 \\
A_7 &= 2\alpha_2\varkappa_2 - \alpha_3\zeta_5 + \alpha_3\varkappa_6 \\
A_6 &= \varkappa_2^2 + 2\alpha_2 o_2 - \alpha_3\lambda_5 - \xi_3\alpha_5 + \alpha_3\pi_6 + \xi_3\alpha_6 + o_3\gamma_6 \\
A_5 &= 2\alpha_2\tau_2 + 2\varkappa_2 o_2 - \alpha_3\zeta_5 - \xi_3\zeta_5 + \alpha_3\chi_5 + \xi_3\varkappa_6 \\
A_4 &= o_2^2 + 2\alpha_2\psi_2 + 2\varkappa_2\tau_2 - \alpha_3\pi_5 - \xi_3\lambda_5 - \sigma_3\alpha_5 + \alpha_3\omega_6 + \\
&\qquad + \xi_3\pi_6 + \sigma_3\alpha_6 \\
A_3 &= 2\varkappa_2\psi_2 + 2 o_2\tau_2 - \xi_3\zeta_5 - \sigma_3\zeta_5 + \xi_3\chi_6 + \sigma_3\varkappa_6 \\
A_2 &= \tau_2^2 + 2 o_2\psi_2 - \xi_3\pi_5 - \sigma_3\lambda_5 + \xi_3\omega_6 + \sigma_3\pi_6 \\
A_1 &= 2\tau_2\psi_2 - \sigma_3\zeta_5 + \sigma_3\chi_6 \\
A_0 &= \psi_2^2 - \sigma_3\pi_5 + \sigma_3\omega_6
\end{aligned}\right\} \quad (74)$$

Ziehen wir nun das Resumé unserer Untersuchungen über die Laplace'sche und die Salmon'sche Schattentheorie, so wird man zunächst keiner den directen Vorzug vor der anderen einräumen dürfen. Die Laplace'sche Methode zeichnet sich aus durch die verhältnissmässige Einfachheit und vor Allem durch die praktische Verwerthbarkeit ihrer Resultate im astronomisch-rechnerischen Sinne, Resultate, die sie freilich, wie wir gesehen, nicht allgemein in jedem beliebigen Falle zu liefern vermag und die obendrein nicht mathematisch strenge

sind. Doch wird sie immerhin im Grossen und Ganzen dem Astronomen genügen. Denn die drei für diesen wichtigsten Fälle — vom höchst einfachen Kugelschattenproblem abgesehen — sind durch sie gelöst. Zunächst hat, wie schon erwähnt, Laplace im achten Capitel des vierten Bandes der Mécanique céleste für das Jupiterellipsoid die Schattengleichung abgeleitet, die astronomisch, wie man sich überzeugt, genügend strenge ist, und die wir, ihrer interessanten Form halber, hier anführen wollen:

I. Kernschatten:

$$\frac{R^2(1-\lambda)^2}{D^2}\left(\frac{D}{1-\lambda}-x\right)^2 = y^2+z^2+\frac{2\lambda}{1-\lambda}\rho z^2\left(\frac{R}{\sqrt{y^2+z^2}}-1\right).$$

II. Halbschatten:

$$\frac{R^2(1+\lambda^2)}{D^2}\left(x-\frac{D}{1+\lambda}\right)^2 = y^2+z^2+\frac{2\lambda}{1+\lambda}\rho z^2\left(\frac{R}{\sqrt{y^2+z^2}}+1\right),$$

wobei gesetzt ist:

$$\lambda = \frac{(1+\rho)R'}{R}.$$

Dann hat Prof. Seeliger das Saturnellipsoid-Schattenproblem vollständig nach der Laplace'schen Methode gelöst. Die Gleichung, die er in der zu Anfang citirten Abhandlung gefunden, ist besonders einfach; sie hat die folgende Form:

$$\Delta\rho = \pm\frac{R}{D}\,\xi\,\frac{\rho_0}{R'}\sqrt{\frac{D^2}{R'^2}\cdot\frac{R'^2-\varepsilon A^2 y^2}{(D^2-A^2\varepsilon)}}.$$

Die übrigen Planeten sind Kugeln; für sie ist das Problem also eo ipso gelöst. Für den Saturnring, den letzten Sonderfall im Planetensystem ist die Form der näherungsweisen Lösung nach der Laplace'schen Methode gleichfalls verhältnissmässig einfach und im Anfang dieser Abhandlung auf S. 867 bereits citirt. Zur Lösung weiterer Probleme ist die Laplace'sche Schattentheorie, soviel mir bekannt, bisher noch nicht verwendet worden.

Bei der Wiederkehr des wichtigen Phänomens der nächsten Iapetusverfinsterung durch Saturn und sein Ringsystem,

die im Jahre 1905 stattfinden wird, hat man natürlich, um das hier gleich hervorzuheben, bei der Rechnung auszugehen von der genannten astronomischen Näherungs-Schattengleichung des Saturnringes und nicht von der in dieser zweiten Abhandlung gegebenen strengen Saturnring-Schattengleichung (73), die astronomisch-rechnerisch nicht verwerthbar ist, die indess nicht nur selbst, sondern auch in ihrer ganzen Entstehungsweise ein unleugbares theoretisches Interesse besitzen dürfte, da sie einen allgemeinen Einblick in die eigenthümliche und complicirte Natur strenger Lösungen von Schattenproblemen gibt.

Damit ist die Salmon'sche Methode zugleich schon charakterisirt. Ihre Resultate sind zu verwickelt, um im Allgemeinen praktisch verwerthbar zu sein. Allein daraus einen Vorwurf gegen sie ableiten zu wollen, würde verfehlt sein, da die grosse Complicirtheit, wie wir gesehen, in der Natur der strengen Lösung als solcher begründet liegt. Auf der anderen Seite muss man es aber als einen entschiedenen Vorzug der Salmon'schen Methode anerkennen, dass sie die Lösung, falls man sich nur der Mühe der Ausrechnung unterzieht, die freilich bisweilen eine ausserordentlich grosse werden kann, doch wenigstens immer in ganz bestimmter Weise wirklich zu liefern vermag. Der Weg, den man dazu nach den hier gegebenen Entwicklungen einzuschlagen hat, ist nunmehr, wenn wir das Resumé ziehen, ziemlich einfach, und aus ihm wird schon sehr rasch, gleich zu Anfang ersichtlich werden, ob die Rechnung bei der strengen Behandlung eines Schattenproblems grössere Dimensionen annehmen wird oder nicht.

Man hat offenbar nur die Gleichungen der zwei Figuren des leuchtenden und des dunkeln Körpers:

$$F(u, v, w) = 0$$
$$G(u, v, w) = 0$$

in Ebenencoordinaten darzustellen, bildet dann sofort die Relation (46):

$$F + \lambda . G = 0$$

und stellt hierauf direct die Tabellen der a Nr. 58 und Nr. 59 auf. Jetzt ersieht man schon durch diese Tabellen vollständig,

ob von den achtzig allgemein und stets zu lösenden Determinanten des Problems viele Null werden. Ist das der Fall, so verfolgt man die Aufgabe weiter. Man bildet die Q, und trifft es sich nun zufällig so glücklich, dass die Gliederzahl der einzelnen Q nicht gross wird, etwa die ganzen Zahlen 2 oder 3 nicht überschreitet, so hat man gewonnenes Spiel und die strenge Form der Schattengleichung wird verhältnissmässig einfach und eventuell sogar praktisch verwerthbar werden. Ist das aber nicht der Fall, d. h. werden wenig Glieder in den genannten Tabellen Null, verschwinden also auch nur sehr wenig Determinanten des ganzen grossen Complexes, so werden die Q vielgliedrige Summen darstellen, und man wird dann sehr viele Tausende von Gliedern, wie früher gezeigt, bei der Multiplication der Q aufstellen und ordnen müssen, wobei die letztere Arbeit natürlich die weit complicirtere ist, wie man sich durch Nachrechnung des von uns behandelten Saturnringschattenbeispiels überzeugt. In diesem Falle, d. h. wenn Vereinfachungen wie in unserem behandelten Falle oder besser noch grössere durch die Natur der Aufgabe unmöglich gemacht sind, wird es sich im Allgemeinen überhaupt gar nicht mehr der Mühe verlohnen, die strenge Schattengleichung aufzusuchen. Immerhin aber sind in der Physik und Mathematik noch Fälle denkbar, wo man die Anwendung des Salmon'schen Verfahrens in der hier angedeuteten Weise eventuell würde versuchen können. Mit der Laplace'schen Theorie in ungünstigen Fällen Näherungslösungen aufzufinden zu versuchen, bleibt ja dabei immer noch überlassen. Dass dieselben indess nicht leicht zu finden sind, davon überzeugt man sich am besten durch Nachrechnung der Ableitung der nach der Laplace'schen Methode gewonnenen citirten astronomischen Näherungs-Schattengleichungen. Zum Schluss wollen wir auch noch darauf hinweisen, dass die Salmon'sche Methode die allgemeine Behandlung eines Schattenproblems in der hier angedeuteten Weise nur solange gestattet, als die Gleichungen der beiden zu behandelnden Figuren den zweiten Grad nicht übersteigen.

Mit diesen Bemerkungen soll jedoch natürlich nicht gesagt werden, dass es unmöglich sei, vielleicht doch noch einen

praktischeren Weg als den Laplace'schen und den von George Salmon stammenden zur Lösung von Schattenaufgaben zu finden, und die eben gegebenen allgemeinen Vorschriften sollen also keineswegs Grenzen ziehen, die als solche nur eine Begrenzung wissenschaftlichen Forschens bedeuten würden. Aber der Versuch, das Bereich der Schattenaufgaben noch von einem dritten, ganz neuen und anderen Gesichtspunkte aus, als den beiden hier charakterisirten zu betrachten, dürfte, zum mindesten gesagt, ein nicht allzuviel Aussicht auf Erfolg versprechendes Unternehmen sein.

Jena, im Mai 1895.

Über die ultravioletten Funkenspectra der Elemente

(I. Mittheilung)

(enthaltend die Spectra von Ag, Cu, Mn, Wo, Mo, Pt, Pd, Ir, Rh)

von

Prof. **Franz Exner**, c. M. k. Akad., und **E. Haschek**.

(Vorgelegt in der Sitzung am 11. Juli 1895.)

Gelegentlich einer Untersuchung über die Spectra der Meteoreisen und Meteorsteine behufs Constatirung der in denselben vorkommenden Elemente stiessen wir auf eine eigenthümliche Schwierigkeit, die uns zu einer umfangreichen Vorarbeit veranlasste, deren erstes Resultat in der vorliegenden Mittheilung enthalten ist. Es sind nämlich derzeit viel zu wenige Spectra gemessen, und von diesen wenigen auch noch die meisten zu ungenau, als dass sich auf Grund des vorhandenen Beobachtungsmateriales eine Identificirung unbekannter Linien mit einiger Sicherheit ausführen liesse. Es kommt dies zum Theil daher, dass viele Messungen, wie z. B. diejenigen von Thalèn, sich in Folge subjectiver Beobachtung nur auf den sichtbaren Theil des Spectrums beziehen, während man heutigen Tags doch in erster Linie auf photographischem Wege zu arbeiten sich veranlasst fühlen wird; es ist dies umso bedauerlicher, als gerade Thalèn's Messungen, was die Anzahl der untersuchten Elemente betrifft, zu den umfangreichsten und auch sonst zu den genauesten gehören. Ein weiterer erschwerender Umstand ist der, dass sehr viele Elemente im Funken und im Bogen — vom Flammenspectrum ganz abgesehen — vollkommen verschiedene Spectra liefern; ist man nun, wie dies bei uns in Folge der Kostbarkeit des Meteoritenmateriales der Fall ist, darauf angewiesen, den Funken zu

benützen, so können die Bogenspectra nicht zum Vergleich herangezogen werden, wenigstens nicht mit Sicherheit. Nun sind aber gerade in den letzten Jahren die vorzüglichsten Messungen der Elemente mit Hilfe des Bogens ausgeführt worden, so von Kayser und Runge,[1] und in allerletzter Zeit auch von Rowland[2] und werden wohl auch nach dieser Methode fortgesetzt werden; es schien uns daher am zweckmässigsten, alle jene Elemente, deren Funkenspectren im photographischen Theile gar nicht oder nur unzulänglich bestimmt sind — und das sind leider die allermeisten — einer Messung zu unterziehen. Es ist uns eine angenehme Pflicht, hier dankend zu erwähnen, dass uns die Anschaffung des hiezu erforderlichen, zum Theil sehr kostbaren Materiales durch die Unterstützung der kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien ermöglicht ward.

Es hat die Benützung des Funkens gegenüber der des Bogens auch noch den Vortheil, dass man von der Kohle und allen ihren variablen Beimischungen frei ist und im Spectrum ausser den Linien der Luft keine dem untersuchten Materiale nicht selbst angehörigen Linien erhält; freilich wird dieser Vortheil nur zu oft ein illusorischer dadurch, dass die Substanzen selbst nicht die genügende Reinheit haben, aber man ist wenigstens von den so lästigen, im Bogen sehr intensiv auftretenden Kohlenbanden befreit.

Es waren bei diesen Messungen zwei Momente zu berücksichtigen: Erstens eine Methode zu finden, welche ein möglichst rasches Arbeiten und Ausmessen der Spectra gestattet und zweitens die Erreichung einer gewissen Genauigkeit. Was letzteren Punkt anlangt, so kommen wir bei weitem nicht den grundlegenden Messungen von Kayser und Runge, sowie von Rowland nahe,[3] wohl aber glauben wir eine grössere Genauigkeit erzielt zu haben, als alle übrigen Beobachter der ultravioletten Spectra. Wir halten für die sichere Bestimmung einer unbekannten Linie eine Fehlergrenze in der Wellenlänge

---

[1] Kayser und Runge, Abh. der Berl. Akad. (1888 ff.).

[2] Rowland und Tatnall, Astrophys. Journ. I, (1895).

[3] Zur Ausführung derartiger Präcisionsmessungen reichen leider die baulichen Einrichtungen der hiesigen physikalischen Institute in keiner Weise hin.

von 1—2 Zehntel Angström'scher Einheiten (A. E.) für hinreichend, und diese Grenze haben wir, wie aus dem Folgenden hervorgehen wird, bei unseren Messungen eingehalten.

In Bezug auf den ersten Punkt sei erwähnt, dass wir ein rasches Arbeiten einerseits dadurch erzielten, dass wir den Ruhmkorff-Funken durch den ungleich stärkeren eines Transformators ersetzten, wodurch die Expositionszeit sehr wesentlich herabgedrückt wird und zweitens namentlich durch Anwendung eines objectiven Verfahrens der Ausmessung der Spectra; wir wollen zunächst kurz diese Abänderung der bisherigen Methode besprechen.

Zur Herstellung des Funkens bedienten wir uns, wie erwähnt, eines Transformators, der zwar etwas anders construirt war, aber im Wesentlichen ganz so wirkte, wie der von Ducretet jetzt allgemein zur Erzeugung der bekannten Tesla'sche Erscheinungen gelieferte; er wurde mit dem Wechselstrom der »Internationalen Elektricitäts-Gesellschaft« für gewöhnlich in der Stärke von 4—10 Ampère und mit 100 Volt Spannung beschickt.

Wir erreichten so im secundären Stromkreise eine Spannung von circa 10000 Volt. Um einen möglichst lichtstarken Funken zu erhalten, wurden parallel zur Funkenstrecke 5 Condensatoren eingeschaltet, deren jeder 5 Paar Glasplatten von 30×50 *cm* Fläche und beiläufig 2 *mm* Dicke enthielt; die zwischengelegten Stanniolblätter hatten 25×40 *cm* Fläche. Nach Bedarf konnten die Condensatoren einzeln oder in beliebiger Zahl nebeneinandergeschaltet werden. Die Helligkeit der so erzeugten Spectra ist bei circa 3—4 *mm* Funkenlänge so gross, dass beispielsweise das Eisenspectrum, das unter sonst gleichen Umständen mit Ruhmkorff-Funken erzeugt, eine Belichtungszeit von 40 Minuten erforderte, schon in 3—4 Minuten ein vollkommen ausexponirtes Negativ lieferte. Die Expositionszeit ist natürlich auch von der Natur des Metalles abhängig; das Kupfer z. B. und ebenso die Metalle der Platingruppe erforderten 15 Minuten. Als Elektroden[1] wurden Metallstücke

[1] Die Metalle der Pt-Gruppe wurden von Heräus in Hanau, Wo und Mo von Schuchardt, Mn von Merck bezogen, das Ag wurde auf die gewöhnliche Weise aus AgCl und das Cu elektrolytisch dargestellt.

von beiläufig 8 – 10 *mm* Länge und 2—3 *mm* Dicke verwendet. Dünnere Drähte, namentlich Platin, verflüchtigen sich zu rasch bei der hohen Temperatur des anscheinend continuirlich übergehenden, stark prasselnden Funkens.

Zur Beleuchtung des Spalts wurde eine Quarzlinse von 5 *cm* Brennweite verwendet, in deren Focus sich der Funke befand. Der Spalt stand circa 25 *cm* von der Linse entfernt: ausser der grösseren Helligkeit erreicht man durch Anwendung der Linse auch eine grössere Länge (3 *cm*) der Linien, was die Ausmessung wesentlich erleichtert. Der Spalt war in Stanniol auf einer Quarzplatte geschnitten und hatte eine Breite von 0·012 *mm*.[1] Das verwendete Gitter war ein Concavgitter nach Rowland[2] von 3 *m* Brennweite, hatte 500 Linien per Millimeter und 25000 auf der getheilten Fläche. Die Anordnung von Spalt, Gitter und Camera war die bekannte Rowland'sche Dreiecksaufstellung. Die grobe Einstellung geschah mittelst der Lupe, die feine natürliche photographisch; die Linienschärfe ist vollkommen gleichmässig bis zum Rande der Platten, die wir, bezogen von Schleussner in Frankfurt, im Format von 4×21 *cm* verwendeten. Entwickelt wurde mit Hydrochinon, fixirt im sauern Fixirbade.

Als Vergleichsspectrum wählten wir das Eisenspectrum und verwendeten zur Erzeugung desselben sogenannten Clavierdraht, der mehrfach zusammengewunden wurde zu Elektroden von circa 3 *mm* Dicke. Mit Hülfe einer dreitheiligen Blende vor dem Spalt wurde das Spectrum des Eisens zu beiden Seiten des zu untersuchenden Spectrums aufgenommen. Dass Flackern des Funkens weder eine Unschärfe noch eine Verschiebung der Linien hervorruft, bewiesen eigens zu diesem Zwecke vorgenommene Aufnahmen. Sämmtliche Aufnahmen geschahen im ersten Spectrum.

Zur Ausmessung wurden die Platten mit einem Landschaftsaplanaten von circa 24 *cm* Äquivalentbrennweite projicirt. Die Schärfe und Vergrösserung war im ganzen Gesichtsfeld eine

---

[1] Die Herstellung eines Spalts von überall gleichmässiger Breite hat bei einiger Ruhe der Messerführung keinerlei Schwierigkeiten.

[2] Bezogen von Wanschaff in Berlin.

vollkommen gleichmässige, letztere eine 32fache und so gewählt, dass 0·5 *cm* des Schirms einer Angströmschen Einheit entsprachen. Auf dem Schirm befanden sich drei übereinanderliegende, in halbe Centimeter getheilte Scalen, auf welche das Spectrum so gebracht wurde, dass je ein Streifen von 500 Angström'schen Einheiten auf eine der drei Scalen fiel und dieselben Linien des Eisenspectrums oben und unten auf den gleichen Scalentheil zu stehen kamen. Als Standardlinien, auf deren als richtig angenommene Wellenlängen wir alle zu messenden bezogen, wählten wir gewöhnlich Rowlandsche Normallinien[1] oder, wo solche fehlten, sicher erkennbare Linien des Eisenspectrums von Kayser und Runge.[2] Die Auswerthung der unbekannten Wellenlängen ist bei dieser Methode eine sehr einfache und rasche, wobei man noch den Vortheil hat, ein grosses Gebiet des Spectrums mit einem Blick übersehen zu können.

Dass der Transformatorfunke wirklich ein Funkenspectrum liefert und nicht etwa ein Bogenspectrum, wie man bei dem anscheinend continuirlichen Übergange desselben erwarten könnte, ergab sich aus dem Vergleich mehrerer Spectra, deren Verhalten im Bogen und Funken ein wesentlich verschiedenes ist, wie z. B. beim Cadmium, dessen beide Spectren von Kayser und Runge[3] resp. Eder und Valenta[4] genau bestimmt sind. Das Spectrum im Transformatorfunken zeigte sich mit dem von Eder und Valenta im Ruhmkorfffunken gemessenen übereinstimmend.

Um einen Anhaltspunkt über die Genauigkeit unserer Messungen zu gewinnen, haben wir die Wellenlängen der Luftlinien, soweit sie bei den verschiedenen Metallen gemeinsam herauskommen — beim Silber sind sie gänzlich ausgeblieben — in eine kleine Tabelle zusammengestellt, aus der man die vorkommenden Abweichungen sowohl, als den wahrscheinlichen Fehler der einzelnen Messung ersehen kann.

---

[1] Rowland, Phil. Mag. July (1893)

[2] Kayser und Runge, Berl. Akad. (1888)

[3] Kayser und Runge, Berl. Akad. (1891)

[4] Eder und Valenta, Wiener Akad. Denkschr. (1894)

Neovius..	4447·3	4119·4	4070·1	3995·2	3919·2	3749·7	? [1]
Cu	4447·4	4119·6	4070·1	3995·1	3919·1	3749·7	3437 3
Mn	4447·0	—	4070·1	3995·3	—	—	—
Wo.	4447·0	4119·2	4070·0	3995·1	3919·2	3749·5	3437·3
Mo.	4447·1	4119·7	4069·5	3994·9	3919·1	3749·6	3437·2
Pd	—	4119·3	4069·7	3995 3	3919·3	3749·8	3437·1
Pt	—	—	4070·0	3995·2	3919·2	—	3437·4
Ir	—	4119·5	4069·9	3995·0	3919·2	3749·7	3437·2
Rh	4447·4	4119·6	4070·1	3995·2	3919·2	3749·7	3437·2
Mittel	4447·18	4119·45	4069·89	3995 14	3919·18	3749·67	3437·24
Wahrscheinlicher Fehler der einzelnen Messung...	±0·14	±0 13	±0·15	±0·09	±0·04	±0·06	±0·07

Es ist dabei zu bemerken, dass die Luftlinien zum Theil sehr unscharf sind, insbesondere soweit sie noch im sichtbaren Theil des Spectrums liegen. Die Tabelle enthält am Kopf einer jeden Anfangscolumne die von Neovius[2] sehr genau gemessene Wellenlänge jeder Linie und darunter unsere Bestimmungen derselben Linie aus den verschiedenen Metallspectren. Wie man sieht, sind bei den unscharfen Linien die Abweichungen ziemlich beträchtlich, während sie bei den schärferen nicht über 0·2 A. E. hinausgehen und der wahrscheinliche Fehler der einzelnen Bestimmung weit unter 0·1 bleibt.

Für stärkere Metallinien können die folgenden zwei, die sich in fast allen von uns bisher gemessenen Spectren finden, als Beispiele der erreichten Genauigkeit dienen:

[1] Von Neovius nicht mehr beobachtet; nach Hartley und Adeney (Phil. Trans. (1884) 3437·0. Doch scheint diese Zahl nicht verlässlich.

[2] Neovius Watts, Index of Spectra App. E. (1894).

Cu............	—	3933·7
Ag............	3968·7	3933·7
Mn	—	3933·9
Wo.......... .	3968·7	3933·8
Mo	3968·4	3933·7
Pd............	3968·6	3933·8
Pt	—	3933·8
Ir.............	3968·6	3933·8
Rh............	3968·6	3933·7
Mittel	3968·60	3933·77
W. F. einer Messung........	±0·07	±0·05

Die beiden Linien finden sich auch im Eisenspectrum von Kayser und Runge und haben dort die Wellenlängen 3968·55 resp. 3933·75. Wir haben schliesslich noch aus unseren Messungen des Manganspectrums jene Linien herausgegriffen, welche Rowland im Sonnenspectrum als dem Mangan angehörig bezeichnet und seiner Reihe von Standardlinien eingeordnet hat. Es ergibt sich dabei zwischen unseren Zahlen und denen Rowlands die folgende Vergleichung:

λ (E. und H.)	λ (Rowland)	Differenz
4499·0	4499·07	+0·07
4103·1	4103·10	0·00
4083·5	4083·76	+0·21
4055·5	4055·70	+0·20
4048·8	4048·89	+0·09
4035·9	4035·88	−0·02
4034·8	4034·64	−0·16
4030·7	4030·92	+0·22
3987·2	3987·21	+0·01
3823·5	3823·65	+0·15
3737·0	3736·97	−0·03
3044·7	3044·68	−0·02
2801·0	2801 18	+0·18
2795·1	2794·91	−0·19
2593·8	2593·81	+0·01
2576·3	2576·20	−0·10

Das Mittel der Differenzen beträgt 0·104 A. E.; dabei muss bemerkt werden, dass jede der vorstehenden Linien von uns nur einmal gemessen wurde, was gleicherweise auch von den Linien der beiden vorstehenden Tabellen gilt und für die Beurtheilung der Genauigkeit einer Messung von Wichtigkeit ist.

Wir wenden uns nun zur Mittheilung der eigentlichen Tabellen, zu deren Erklärung wir noch Folgendes beifügen wollen. Die Wellenlängen sind sämmtlich in Angström'schen Einheiten (A.E.) gegeben und mit Hilfe des Eisenspectrums auf Rowland'sche Normalien bezogen, deren Wellenlängen wir unserer Fehlergrenze entsprechend auf Zehntel A.E. abgeändert haben. Die Linien sind fast ausnahmslos nur einmal gemessen; nur in seltenen, zweifelhaften Fällen wurden Controlmessungen vorgenommen. Die Luftlinien, welche im Transformatorfunken meist kräftig auftreten (wenn der primäre Strom nicht zu stark ist, in welchem Falle nur die Hauptlinien und auch diese nur schwach herauskommen), haben wir zwar immer mitgemessen, doch in den folgenden Tabellen sämmtlich weggelassen. Zur Identificirung derselben bedienten wir uns bis λ 3700 der Angaben von Neovius,[1] von da weiter ins Ultraviolette der allerdings nicht sehr verlässlichen Tabelle von Hartley und Adeney.[2] Doch treten in diesem Theile des Spectrums vereinzelte und schwache Luftlinien auf. Wir haben es aber für angezeigt gehalten, solche Linien, welche augenscheinlich Verunreinigungen der verwendeten Substanzen angehören, in den Tabellen zu belassen und durch Beifügung des betreffenden Symbols kenntlich zu machen.

Erklärung der Zeichen: Die Intensitäten (*i*) der Linien sind schätzungsweise mit 1—6 bezeichnet, wobei die grösste Intensität = 1 gesetzt ist; + bedeutet, dass die Linien verwaschen, br., dass sie breit, d., dass sie doppelt, aber als solche nicht mehr messbar ist, o., dass sie mit einer Linie unseres Eisen-Vergleichsspectrums coincidirt; A. E. bedeutet Angström'sche Einheiten und ein chemisches Symbol in einer Klammer ( ), dass die Linie über eine Linie des eingeklammerten Metalles fällt.

---

[1] Neovius, a. a. O.

[2] Hartley und Adeney, a. a. O.

I. Ag. Silber.

Das ultraviolette Spectrum des Silbers wurde bisher im Bogen von Kayser und Runge[1] und im Funken von Hartley und Adeney[2] beobachtet. Letztere Messungen, die sehr ungenau sind, umfassen die Wellenlängen λ 3540—2112. Das Silber zeigt im Funken ein wesentlich anderes Spectrum als im Bogen; im Allgemeinen sind die Linien sehr unscharf, einzelne besonders starke erscheinen umgekehrt. Die Aufnahmen geschahen mit einer Expositionszeit von 15 Minuten und einer primären Stromstärke von circa 10 Ampère.

λ	i	λ	i	λ	i
4476·4	5+ o. Fe	3505·7	6+2 AE br.	3247·3	6+ Cu
4311·4	5+	02·2	6+	44·5	5+
4209·4	4+10 AE br.	3499·9	6	40·7	6+
4085·5	6	75·9	6+	33·0	6+
57·7	5+[3]	69·7	6+	29·5	6+
3984·9	6+	05·5	6+3 AE br.	23·4	6+
81·7	6+	3398·0	6+	16·5	6+
72·7	6+	90·0	6+	10·0	6+
68·7	6+ o. Wo	83·3	1 umgekehrt	07·5	6+
33·7	6+ o. Wo	67 5	6+	00·5	6+
18·7	6+	52·3	6+	3191·5	6+
12·9	6+	39·5	6+	87·5	6+
06·2	6+	33·5	6+	84·7	6
3839·7	6+ o.	12·6	6+	83·9	6
10·7	6+ br.	01·8	6+	81·3	6
3683·5	6+	3299·5	6+	80·5	6
74·7	6+ br.	92·5	6+	79·0	6+
54·2	6+5 AE	89·2	6+	73·5	6+
40·2	6	80·6	1 umgekehrt	53·0	6+
16·2	6	74 2	6+ Cu	3013·0	6+
3557·7	6	69·8	6+	2938·3	5
42·7	5	52·5	6+	34·0	4
13·2	6+	49·5	6+	29·4	5

[1] Kayser und Runge, Wied. Ann. 46 (1892).

[2] Hartley und Adeney, Phil. Trans. 175 (1884).

[3] Kante, abschattirt nach violett.

λ	i	λ	i	λ	i
2928·7	6	2499·8	6	2362·0	5 o. Fe
19·7	5	86·8	6	58·3	4
01·9	5	85·9	6	57·7	4
2896·2	5	80·4	5	43·6	6
73·6	5	77·3	5	41·8	6
24·1	6+	73·8	4	38·9	6
15·5	5	71 5	6	31·1	4
2799·5	4	70·6	6	24·8	4+
86·6	6	69·5	6	20·1	4
67·4	3 o.	68·5	6	16·9	4
56·4	5	67·1	6	13·8	6
53·7	6	65·6	6	12·1	6
21·7	6	62·1	5	09·4	6+
11·9	2	59·1	5	2295·8	6+
08·5	6	53·0	4	90·8	6
06·4	6	47·6	3	86·3	6
04·6	6	44·0	5	82·2	6+
2688·1	6+	37·8	2	79·8	5 o
81 2	4	32·6	6	77·3	6
60·4	3	29·3	4	75 3	6
59·3	6	24·3	6	53·5	5+
56·6	6+	22·5	6	48·8	5+
29·4	6 o.	19·8	4	46·3	5+
25·6	6 o. Fe	13·0	3	41·5	6
16·9	6	11·0	5	40·1	6
14·6	5	10·0	6	38·3	6+
06·1	5	07·5	6	29·4	5+
2598·6	6+	04·8	5 o. Fe	26·1	6
95·6	6	02·5	5	19·6	6
80·6	4	2395·5	5 o. Fe	08·5	6
67·1	6	92·8	6	05·8	6
64·4	6	90·4	5	02·0	6
62·8	6	86·8	6	2196·6	6
53·6	6	86·3	6	70·6	6
35·4	5	83·0	6	66·3	6
06·6	4	74·8	5+3AE br.	61·8	6
05·6	6	73·8	6	45·5	6+
04·2	5	65·6	6	20·3	6
01·4	6	63·8	5 o.	13·5	6+

II. Cu. Kupfer.

Das Bogenspectrum des Kupfers wurde von Kayser und Runge,[1] sowie von Liveing und Dewar[2] beobachtet, das Funkenspectrum von Hartley und Adeney[3] zwischen λ 3600 und 2100 und von Trowbridge und Sabine[4] zwischen λ 2370 und 2067. Auch beim Kupfer zeigen sich zwischen Bogen- und Funkenspectrum wesentliche Unterschiede. Die Linien sind meist sehr unscharf. Die Expositionszeit war 15 Minuten bei 10—12 Ampère.

λ	i	λ	i	λ	i
4652·4	4	4275·4	2	3771·8	6+
50·4	6	59·6	6+	41·3	6+
42·7	6+	49·3	6	12·8	6+
4592·1	6+	07·1	6+3AE br.	00·6	6+
90·2	6+	4190·1	5	3686·8	6
88·2	5+	85·7	6	84·8	6
56·8	6	82·9	5+3AE br.	76·8	6+
53·5	6+	03·5	6	71·8	6+
52 5	6+	4072·4	5	59·8	6+
40·4	5+	63·1	4	56·1	6+
31·5	6+	43·8	6	45·6	6+
10·2	6	22·9	5	41·8	6+ Wo?
08·4	6+	3973·3	6	36·1	6+
4494·6	6+ br.	39·8	6+3AE	27·6	6+
85·7	6+	33·7	6+ Wo	24·6	6+
80 9	6	3882·3	6	21·3	6+
60·6	6+	64·3	6+	13 9	6 Wo
58·2	6+	60·6	6	10·8	6+
34·5	6+	56·3	6+ br.	02·0	5
26·0	6+	50 3	6+	3599·1	5
20·8	6+	42·8	6+ br.	33·8	6
4384·6	6+	39·0	6+ br.	30·5	6
78·5	5	10·3	6+	27·4	6
45·6	6	09·0	6+	24·2	6

[1] Kayser und Runge, Wied. Ann. 46 (1892).
[2] Liveing und Dewar, Phil. Trans. 174 (1883).
[3] Hartley und Adeney, Phil. Trans. 175 (1883).
[4] Trowbridge und Sabine, Phil. Mag. (5), 26.

λ	i	λ	i	λ	i
3519·9	6	3063·6	6+	2511·6	6+
12·0	6	36·3	6	09·1	6+
3483·7	6	2961·5	5	06·8	2
75·8	6+	2884·6	6+	2496·6	6
71·8	6+ br.	83·3	6+	92·4	6
65·8	6+ br.	78·3	5+	90·1	4
54·5	6	38·1	5	87·0	6
50·3	6	24·8	5	86·3	5
22·3	6+	2770·3	4	82·7	6
15·8	6+	67·0	6	78·8	6
13·3	6+	45·7	6+	73·9	5
04·6	6+	22·2	6	69·0	5
02·0	6+ Wo	19·3	5	66·4	6
3381·5	6+	14·1	5	59·6	6+
65·6	6	03·9	5	53·4	6+
54·3	6+	01·7	5	47·6	6+
49·2	6	2690·1	5	44·9	5
37·9	6	66 9	6 o. Fe	41·9	6
35·3	6	44·3	6	36·4	6+
19 8	6	18·7	6	30·8	6+
17·2	6	09·7	6	24·9	5
08·0	3	00·7	4	22·5	6
3292·8	6	2599·2	6	12·6	6
90·7	4	91·0	6	05·9	6
82·9	5	73·9	6	03·9	3
80·0	6	72·4	6	00·5	3
74·2	1	69·7	6	2388·3	6
47·8	1	66·9	6+	87·3	6+
43·3	6	54·7	6+	76·8	5
35·7	6	53·4	6+	70·4	1
31·2	6	45·4	1	65·7	6
3194·4	6	39·1	6	64·3	6
46·9	6	35·7	6	57·2	5
42·5	6+	29·8	5	55·5	6
40 3	6+	27·2	6	49·3	6
28·6	6+	25·7	6	46·4	6
26·3	5	23·6	6	36·6	6
08·8	5	22·8	6	09·9	6+
05·1	6 o.	19·1	6+	03 6	6
00·3	6+ o. Fe	17·0	6+	00·1	6+

λ	i	λ	i	λ	i
2294·6	3	2231·3	6	2179·8	5
91·4	6	30·3	6	76·5	6
87·1	6	29·3	6	61·8	6+
78·7	6	25·3	6	52·0	6+
76·5	4	18·5	5+	49·3	6+
65·6	6	15·5	6+	36·3	6+
64·0	5+	10·4	5+	34·8	6
55·3	6	00·3	6+	26·3	6
49·5	6+	2196·0	6+	23·1	6
47·3	4+	92·5	6+	17·8	6
43·0	4+	89·8	6	12·3	6

III. Mn. Mangan.

Vom Bogenspectrum des Mangan sind im ultravioletten Theil nur 100 A. E. zwischen λ 4000 und 3900 von Lockyer[1] gemessen. Über das Funkenspectrum liegen bisher keine Beobachtungen vor. Der Funke zwischen Manganelektroden ist sehr hell, die Expositionszeit betrug 8 Minuten bei einer Stromstärke von circa 7 Ampère. Die Linien sind durchwegs scharf und zeigen auffallende Gruppen im ganzen Spectrum.

λ	i	λ	i	λ	i
4626·9	5	4472·8	4	4455·3	2+
05·5	5	70·1	4	52·9	4
4503·9	6	66·0	6	51·5	2
02·3	4	64·8	2	36·3	3
4499·0	4	62·0	2	19·7	6
91·8	6	61·3	3	16·3	6+
90·1	4	58·1	2	14·8	2
79·3	6+	57·5	3	11·7	6

[1] Lockyer, Phil. Trans. 163 (1873). Die Messungen Lockyer's sind für unsere Zwecke leider nicht zu gebrauchen; denn erstlich beträgt der von ihm gemessene Theil im Ultraviolett immer nur 100 A.E., was selbstverständlich viel zu wenig ist, und zweitens leiden die Messungen an zu geringer Genauigkeit.

λ	i	λ	i	λ	i
4407·7	6	4147·3	6	4042·8	5
04·5	5	45 6	6	41·3	1
4383·4	5	42·7	6	35·9	2
82·6	6	40·5	5	34·8	2
81·4	6	39·7	6	33·6	2
79·1	6	36·3	6	30·7	1
74 8	6	34·5	5	26·6	4
43·9	5	30·6	5	18·4	2
26·6	5	27·7	6	05·5	6
25·7	5 Fe	23·0	6+	02·0	6
20·9	6	19·0	5	3997·0	5+
12·5	5	13 5	6+	87·2	3
07·9	5 Fe	10·7	5	85·4	5
00·2	6	07·8	6	77·3	6
4292·4	6	05·0	5+	76·2	6
87·7	6	03·1	5+	70·5	5+
84·0	5	4095·1	6	53 1	5
82·6	6	92·4	6	43·0	6
81·0	3	89·8	5	37·0	6
78·8	6	83·5	2	33·9	6 Wo
71·5	5	83 0	2	30·6	6
65·8	3	80·7	6	29·5	6
61·3	6	79·3	1	28·0	6
59·6	6	75 7	5+	26·7	4
57·6	4	70·7	5+	24 5	6
52·9	6	68·0	6	23·2	5+
51·6	6	66·2	6	22·3	6
39·5	3	64·9	5	19·5	6
35·0	1 o.	63·5	3 o. Fe	18·7	5
20·5	6	61·6	5	11·5	6+
11·5	5	59·0	2	00·0	5 o Fe
06·3	6	58 3	5	3898·6	6
01·6	5	56·9	5	89·9	6
4189·8	5	55·5	2	89·2	6
85·3	6+	52·4	5	86·6	5 o. Fe
76 3	5	51·7	5	83·6	5
56·8	6	50·1	5	83·2	6
55·3	6	48·8	2	79·0	6+
52·8	6+	45·6	5	72·4	6+
48·6	5	45·2	4 o. Fe?	65·9	6

λ	i	λ	i	λ	i
3860·2	5 o. Fe	3731·8	5	3460·2	1
56·8	5 o. Fe	28·8	6	51·2	6
54·0	6	22·5	6	41·8	1
50·3	6	19·9	4 Fe?	39·0	6
44·2	3	18·8	4	38·2	6
41·2	3 o. Fe	15·1	6	19·7	6
39·7	4	05·9	4	00·1	6
34·1	1 o. (Fe)	3696·4	6	3363·2	5
29·6	5	93·6	4	58·6	6
27·7	6	84·8	5+	49·4	6
25·8	6	82·0	6	37·5	5
24·9	6	80·0	6	36·6	4
23·5	1	77·0	6	31·0	3+ o.
20·4	5 o. Fe	60·3	5	24·1	6
16·8	6	47·8	5 o. Fe	20·7	6
15·9	6	31·4	5 o. Fe	17·9	6+
09·4	3	29·7	5	14·9	6+
08·1	6	27·2	6	07·9	6
06·4	2	23·8	4	05·0	6
01·6	6	19·1	3	03 7	6
00·2	6	10·4	3	3298·3	6
3799·1	6	08·7	3	97·0	6
94·8	6	07·7	3	95·9	6
89·8	4	3595·2	4	70·9	6+
85·5	6	86·7	3	68·9	6
78·2	5	81·3	5 Fe	67 9	6
73·5	6	78·0	2	64·8	5
71·2	6	69·8	1	60 2	5
67·2	5+ o. Fe	67·0	6	58·6	5
63·5	4 o. Fe?	65·7	6 Fe?	56·1	4
58·0	5 o. Fe?	63·3	6	53·0	4
56·4	6	48·0	1	51·2	6
50·3	5	32·0	1	48·6	4
49·2	4 o. L, Fe	25·0	6	43·9	4
48·0	5 o. Fe?	3497·6	2	40·4	5
45·4	5 o. Fe	97·0	4	36·8	3
43·3	5 o. Fe	96·0	2	31·4	6
37·0	4 o. Fe?	88·8	1	30·7	4
34·7	4 o. Fe	82·9	1	28·0	3
33·0	6	73·9	1	25·9	6 Fe

λ	i	λ	i	λ	i
3224·9	6	3059·1	5 o. Fe	2953·0	6
16·9	6+	54·4	5	51·4	5
12·9	5	51·6	5	49·3	1 o.
04·9	6	50·7	4	46·9	6
3187·1	6	49·0	5	44·1	5
83·6	6	47·1	5	43·4	5
78·7	6	46·7	5	43·1	6
72·9	6	45·8	5	41·9	6
70·4	6+ d.	44·7	5	39·3	2 o.
67·9	6+	43 2	5	37·8	6
61·1	6	40·8	6	36·9	6 Fe
49·7	6	39·8	5	33·2	2 o.
48·1	6	38·3	4	30·7	5
42·3	6	35·5	4	27·6	5
39·8	5	35·0	5	25·9	6
34·9	6+	33·7	6	22·9	5
32·7	6+	31·0	3	14·9	6
28·6	6+	29·2	5	13·3	6
25·1	6	22·9	6	07·4	6
23·1	5	19·9	4	05·6	6
20·4	6+	16·4	6+	05·0	6
18·6	6+	14·9	6+	03·1	6
15·4	6+	11·4	6+	00·3	3
09 9	5+ 2 AE br.	07·6	6+	2898·8	3
07·6	6+	02·4	6+	97·1	5
06·4	6+	2994·6	6+ o. Fe.	95·1	6
04·2	6+	84·9	6	94·0	6
01·9	6+ d.	83·7	6	92·6	4
3096·6	6+ br.	79·1	6	91·4	5
93·1	6	77·9	6	89·8	3
87·1	6+	76·7	4	86·8	3
84·7	6	72·8	6	85·4	6
82·6	6	67·0	6 Fe	84·0	5
81·4	6	66·0	6	81·3	6
79·6	6	61·7	6 d.	79·7	3
73·1	5	60·3	6 d.	77·1	6
70·9	6	59·1	6	75·2	6+
70·4	6	58·2	6	73·0	3
66·1	6	56·2	6	70·2	3
62·4	6	55·3	6	64·9	6

λ	i	λ	i	λ	i
2863 6	6+ Fe	2769·6	5	2694·3	5
62·8	6+	68·4	5	93·3	5
58·3	6+	67·8	5 Fe	92·1	5
56·2	6	65·5	5	91·0	5
55·1	6	63·5	6	89·9	6
51·2	6	62·1	5	88·4	4
46·1	5	60·9	5 br.	87·6	5
40·4	6 o. Fe	58·0	5	85·9	5
30·8	3	55·7	5 o. Fe	84·6	5
28·6	6	54·0	6	81·3	5
27·0	6	53·3	6	80·7	3 d.
24·6	4	50·0	5 Fe	79·1	5+
22·0	6+	49·2	5	77·3	5+ br.
17·9	6	47·0	6 Fe	74·7	3
17·5	6	46·6	6 Fe	73 4	6
15·4	5	43·0	5 o. Fe	72·6	4
13·9	4	40·7	5	69·3	6
12·6	3	39·5	5 o. Fe	67·8	6
11·5	6	37·5	6	66·9	3 o. (Fe)
10·3	6	37·0	6 Fe?	64·0	6
09·1	5	31·6	6	62·6	6
07·7	6	28·5	4	60·5	6
06·8	6 Fe	27·3	4	59·2	5
05·3	3	25·8	5	55·8	3
03 3	5	24·3	4	53·6	6
01·0	4	21·8	4	52·5	5
2798·3	4	19·3	2	50·9	5
96·3	5	17·4	6	49·0	6
95·1	3	16·7	5	47·9	6
91·1	6	13·8	6+	43·7	6
89·9	5	11·5	3	42·8	6
86·3	6	10·1	3	42·0	6
85·1	6	08·3	4	39·8	3
84·2	6	07·5	5	38·1	3
82·1	5	05·7	4	35·6	5
78·9	5	03·8	5	32·3	3
77·8	5	01·3	2 d.	28·3	5 o. Fe
76·6	6	2698·9	5	25·6	3 o. (Fe)
75·8	4 br.	96·0	6	22·9	6
71·8	6+	95·3	4	21·3	6

λ	i	λ	i	λ	i
2620·1	6	2548·8	4	2473·1	5
19·1	5	45·3	6	71·1	6
18·2	3	43·6	4	68·1	5
14·0	6 o. Fe	43·0	4	66·6	4
12·9	6 o. Fe?	41 2	5	59·0	5 o. Fe
12·0	6 Fe?	39·1	6 Fe?	53 0	1
10·3	4	38·0	4	46·6	5
06·8	5	35·8	5	44·5	6
05·8	4	34·3	5	41·3	6
03·9	5	33·6	6	40·3	6 Fe?
02·9	5	33·0	6	37·7	1
01·7	6	32·0	6	35 0	6
2598·8	3	30·8	6	33 5	6
97·0	6	28·1	6	27 8	2
95·8	5	25 6	6	24·2	6+ o. Fe
94 6	5	23·2	5	22·8	6+ o.
93·8	3 o.	20·6	5	20·5	6+
91·5	6	18·3	6 Fe	19 7	6+
90·1	5	16·9	4	17·9	6 o.
89·0	5	14·5	5 o.	16·5	5+ d.
87·5	6	12·0	6 o.	13·3	6+ o. Fe
85·9	5 o. Fe	10·8	5	10·5	5 o. Fe
84·5	5	09·8	6	09·0	6
82·9	5	07·8	4	06·7	6 o. Fe
78·8	3+	03·8	6 o. Fe	04·9	5 o. Fe
76·3	1	02·6	6	03·5	6
72·9	6	2499·1	4	02·0	6+
72·1	6	98·0	5 o Fe?	00·3	6 o.
71·0	5 o.	96 9	5 o.	2399·3	5 o. Fe
68·8	5	93·5	6 o. Fe	95·8	4 o. Fe
65·4	5	91·0	6 o. Fe	91·5	6+
63·8	4 o. (Fe)	88·5	6	89·7	6
62·6	5 o. Fe	87·2	6	89·0	6
59·5	5	86·4	5	87·2	5
58·6	4	85·3	6	85·5	6
57·5	5	83·5	6+ Fe	84·3	6
56·6	4	79·6	6	83·2	6
54·4	6	78·7	5 o. C	82·3	4 o. Fe
53·3	5 Fe?	75·1	6	81·0	6
51·9	5	73·9	6	79·5	6 Fe?

λ	i	λ	i	λ	i
2377·0	6+	2349·4	6	2320·6	5
73·5	4	48·4	5 o. Fe	16·3	6+
70·5	6+	44·5	5 o. Fe	05·4	6
68·7	6+	43·7	5 o. Fe?	2299 4	6+
67·1	6	41·1	6+	97·1	6+ C
65·0	6 o. Fe	38·1	6 o. Fe	70·1	6
61·9	6	35·1	6	32·3	6
60·3	5 o. Fe	33·1	6 o. Fe	30·3	6
59·5	6 o. Fe?	28·9	6	27·8	6
58·6	6	27·6	6		
55·0	6+ Fe?	26·3	6		

IV. Wo. Wolfram.

Im Bogenspectrum sind die Wellenlängen von λ 4000—3900 von Lockyer[1] gemessen, das Funkenspectrum fehlt vollständig. Der Funke zwischen Wolframelektroden ist sehr hell, die Expositionszeit betrug 5 Minuten bei 6—8 Ampère. Das Spectrum ist auffallend linienreich und übertrifft in dieser Hinsicht das Eisenspectrum. Die Linien sind scharf, hervortretend in demselben sind besonders zwei starke bei λ 3933·8 und λ 3968·6; die erstere findet sich in allen, die letztere in fast allen von uns gemessenen Substanzen. Beide stimmen mit zwei starken Calciumlinien nach Kayser und Runge[2] überein. Trotzdem glauben wir nicht, dass unsere Linien dem Ca angehören: Denn erstens sind sie die weitaus stärksten in unserem Wo-Spectrum und zweitens fehlen in diesem alle anderen starken Ca-Linien, 11 an der Zahl. Wir haben diese Linien deshalb in unserem Spectrum auch als Wo-Linien bezeichnet. Im Lockyer'schen Bogenspectrum fehlt die Linie λ 3968·6 gänzlich, so dass auch hier das Bogenspectrum vom Funkenspectrum abzuweichen scheint, dagegen kommt die Linie λ 3933·8 auch bei Lockyer in den meisten untersuchten Substanzen vor.

---

[1] Lockyer, Phil. Trans. 173 (1881).

[2] Kayser und Runge, Wied. Ann. 43 (1891)

λ	i	λ	i	λ	i
4844·7	6	4325·7	6	4211·0	6
4658·3	6	23·4	5	10·0	6
4554·5	4	19·7	3	06·6	4
46·5	6	17·0	3	03·8	5
44·0	6	08·0	3 (Fe)	4199·2	6+-
15·5	6	06·9	3	96·7	6+-
12·5	6	03·4	4	92·4	6
11·0	6	02·1	2	89·3	3
4494·7	6	4298·4	6	85·0	4
84·5	6	94·4	2 o. Fe	83·2	6
78·0	6	89·7	6	82·6	6
55·6	6	86·0	5	80·2	5+ } Band
52·5	6	85·3	6	75·2	5+ }
33·5	5+ o. Fe	82·4	5 o. Fe	75·1	4
12·4	6 Mo	76·9	4 Mo	70·7	4 o. Fe
08·5	4	75·3	3	70·4	4
04·8	6	74·4	3	68·3	4
04·1	6	70·7	6	65·2	6
00·1	6	69·3	2	59·7	6
4396·1	5+-	66·4	6	54·2	5
94·1	4	65·1	6	53·4	4
90·1	5	63·1	3	49·4	6
85·1	4	62·4	6	47·7	6
83·6	4	60·0	4	45·7	5
78·5	3	59·0	4	45·1	5
72·7	5	56·8	6	43·1	6
69·0	6+	53·8	3	42·8	6
66·1	3	50·8	6	37·3	3 o. Fe
64·9	4	43·9	3	30·4	5+
61·7	4	43·0	6	26·8	4
57·0	5+	41·1	3	25·2	6
55·0	5	36·8	4+-	18·1	4
54·2	5	33·9	5	15·4	6
43·0	5	31·3	6+-	14·0	6
42·7	5	27·8	6+	10·6	5
36·9	4	26·2	3	09·6	5
35·4	4	24·5	5	02·7	3
32·0	4	21·6	5	4098·9	6
30·9	4	18·8	5	88·6	4+-
27·3	4	15·0	3	85·2	4

λ	i	λ	i	λ	i
4082·9	5	3964·2	6	3869·1	6
81·2	4	61·2	3+ Mo	68·0	3
78·9	6	55·4	3	65·9	5
77·6	5	53·1	5	64·3	5 Mo
74·4	2	52·6	5	61·2	6
64·8	4	51·1	5	60·0	4
64·0	6	50·3	5	56·7	4
60·5	5+	47·9	5	55·7	4
56·7	6	45·0	5	51·5	3
55·4	6	44·0	5	47·4	4
54·1	6	36·8	4	46·1	4
47·0	6	35·0	4	42·2	5
45·8	3	33·8	1	38·4	4
44·3	5	30·3	6	37·2	6
41·5	1+ (L)	28·0	6	35·0	4
37·8	6	26·0	6	32·7	6
37·0	6	24·4	6	30·8	6
34·7	5+	22·5	6	29·3	6
28·9	5	15·3	5	27·7	6 o. Fe
25·3	4+	13·2	6	25·9	5 o. Fe
21·8	5	11·7	4	24·3	5 o. Fe
19·1	4	07·0	5	23·1	6
16·5	4	05·6	5	20·3	5 o. Fe
15·1	3	00·7	5	17·4	4
08·7	2	3899·7	6	12·2	6
04·8	6+	97·8	5	10·6	4
01·7	4	96·9	4	09·3	5
3992·8	6	93·9	6	07·3	6
91·3	6	92·7	6	06·5	6
90·5	6	92·1	6	03·8	5+
87·3	6	90·6	6	02·6	5
85·5	6	89·3	6	3798·6	5 Mo
84·4	6	88·0	6	96·9	5
83·1	3	86·3	6	94·7	6
80·5	4	82·1	6	93·8	6
79·3	4	81·2	3	93·0	6
73·1	3+	77·2	4	91·8	6
70·7	4	75·6	6	90·1	5
68·7	1 o.	74·1	6	88·0	6
65·1	3	72·6	4	86·8	6

λ	i	λ	i	λ	i
3785·8	6	3677·4	6	3587·4	6
82·9	6	76·7	6	84·3	6
81·0	3	75·5	6	83·7	6
78·8	5	74·5	6	83·0	6
74·1	4	72·6	5	82·2	6
68·6	4	69·9	6	81·2	5
63·5	6	66·9	6	76·5	6
60·1	4	66·1	6	75 0	6
59·1	6	64·4	6	72·5	2
58·0	4 o.	63·0	6	70·7	5
53·5	5	60·5	6	68·5	6
50·8	6	59·0	6	63·8	6
45·7	4 o. Fe	57·6	2	62·8	6
41·9	4	54·5	6	61·8	6
36·4	2	53·5	6	59·8	6
35·1	6	52·0	6	58·1	6
30·6	6	51·0	6	55·3	4
24·6	6	47·7	6	51·3	6
22·3	6	46·5	3	49·2	3
21·1	6 o.	45·5	3	45·3	5
20·0	5	41·4	2	38·8	6
19·6	5 o.	38·7	6	37·7	6
16·1	3	31.8	5	36·5	5
12·8	5	28·5	5	34·8	6
12·3	5	27·2	6	29·7	4
08·6	4	22·3	6	27·2	4
08·0	4 o.	18·5	6	26·0	6
03·6	6	17·4	3	23·4	6
02·2	6 Mo	13·8	2	22·2	6
00·4	6	11·9	4	16·5	6
3697·9	6	10·0	5	14·5	6
94·5	4	08·4	6	12·0	6+
91·8	4	07·0	6	08·9	3
89·5	5	06·1	5	03·9	4
87·9	4	02·7	6	00·7	6
85·0	6	00·8	6	3498·6	6
83·4	5	3598·5	6	95·3	4
81·9	5 o.	97·4	6	93·4	6
79·6	6	96·3	6	92·1	5
78·2	6	92·5	2	90·9	3+ o. Fe

λ	i	λ	i	λ	i
3486·2	4	3375·1	6	3286·3	6
83·9	6	73.9	6	84·0	6
81·9	5	72·2	5	82·7	6+
75·3	3 o. Fe	69·9	5	79·0	6+
71·3	6+	63·8	5	78·2	6+
69·3	6+	61·2	3	74·9	6+
63·2	3	60·5	5	73·4	6
61·9	6	58·6	3	70·2	6
57·4	6	54·4	6	68·8	4
54·7	5	52·8	5	67·6	5
52·2	4	50 7	6	62·4	3
49·6	4	48·9	4+	59·6	6
48·1	6	45·9	4	58·0	6
42·6	5	45·1	5	56·2	6
40·6	3 o. Fe	43·4	2	55·3	4
34·8	6	42·6	3	52·3	6
33·4	5	38·9	5+	51·2	5
30·6	5	37·7	6	49·9	6
29·6	5	34·8	6	46·4	6
27·4	4	33·4	6	43·1	3
24·4	4	26·4	4	37·7	6
22·5	6	22·4	6	36·8	5
21·2	4	21·2	6 Mo	33·0	6
20·0	6	18·9	6+	32·4	6
16·5	3	17·6	6+	30·5	6
13·4	6	14·4	6	29·2	6
13·0	5	13·4	6	26·4	5
10·4	5	12·4	6	25·5	6
07·6	5	11 6	5	24·6	6
06·8	5	10·5	6	22·4	6
02·1	2	08·5	4	21·9	6
3399·1	3	06·2	4+ o. Fe	20·8	6
98·5	5	04·6	4	18·3	6
94.4	6	01·2	5	17·2	6
88·7	6	3299.9	6	15·9	5
86·4	6	98·5	5	15·1	3
85·8	6	97·7	6	09·5	6
82·8	5+	93·2	6	08·0	6
79·1	4	91·9	6	07·0	6
76·2	2	86·7	4	06 0	5

λ	i	λ	i	λ	i
3204·0	6	3090·0	6	3003·2	6
03·0	4	87·0	5+	02·0	6
01·1	6	83·0	6	00·0	5
3198·0	6	81·5	6	2999·2	6
97·1	6	80·8	6	98·3	6
94·1	6+	80·0	6	97·4	6
90·8	6+	78·3	6	94·3	5 o. Fe
88·8	5	77·0	3 o.	91·8	6
88·2	6	73·0	6	90·4	6
86·7	6+ o.	72·2	6	88·2	6
83·0	6+	71·0	5	87·0	6
81·5	6+	68·8	5+	85·7	5
79·0	3	67·1	4 o. Fe	81·9	6
77·5	6°	66·7	5	79·2	6
66·7	6	63·5	6+	77·0	5
65·5	5	58·0	6+	76·0	5
56·5	6+	52·9	5	73·0	6
54·0	6	50·8	3	67·5	6
53·0	6	49·1	3	66·0	6
49·7	4	48·0	6	64·1	6
48·8	5+	46·5	6	60·7	5
44·8	6	46·1	6	57·0	6
43·7	6	43·5	6+	54·4	6+
42·0	4	41·3	6	51·9	4
40·8	4	38·9	6	50·2	6
39·2	4	36·1	6	46·5	5+
35·2	4	33·1	5	44·0	6
25·0	6	31·5	6	42·0	6
23·5	5	28·2	6	39·9	6
19·2	6	26·1	6	39·3	6
18·7	6	23·9	3	36·2	4
17·2	6	22·1	6	34·7	4
15·7	6	21·5	5	31·3	5
10·4	5	20·1	6	29·8	6
02·4	6	18·1	6	27·3	6
01·9	6	16·9	6	26·4	6
00·4	6	16·2	6	25·4	5
3098·0	5	14·0	6+	24·7	5
95·1	5	10·3	5	22·9	5
92·7	6	07·0	6	18·1	5

λ	i	λ	i	λ	i
2916·2	6	2826·1	6	2746·7	5 o. Fe
13·7	6	22·2	5	45·1	6
12·0	6	21·7	6	42·8	5 o. Fe
11·2	6	19·8	6	40·7	5
10·0	6	17·7	6	39·2	5 o.
08·0	6+	16·0	6 Mo	37·3	6+ o. Fe
03·7	5	14·5	6	34·6	6
03·1	5	12·9	6	33·4	6
00·7	6	11·8	6	32·0	6
2895·5	5	08·4	5+	29 5	5
90·3	6	05·7	4	27·4	6
89·1	5	03·0	5	26·4	6
86·3	6	00·8	6	24·1	5
83·8	6	2799·8	6	22·8	5
81·1	5	98·9	4	21·7	6
78·8	6	95·4	6	20·4	6
77·7	5	92·4	6	19·2	6
75·1	6+	91·5	6	17·8	5
73·0	6+	90·1	5	16·0	5
68 4	5	89 0	6	15·1	5
67·7	5+	85·5	5 o.?	13·7	6
66·0	5+	82·0	5	11·8	6
64·2	5+	80·0	5	10·6	6
60·7	5	78·5	5+	09·7	6
59·1	6	76·2	5	07·8	6
57·1	6	73·9	5	07·5	6
55·2	6	70·9	6	04·2	4
53·1	6	68·0	5	02·8	4
51·8	5 o. Fe	66·9	6	01·2	6
47·8	6	66·2	6	2698·6	4
46·9	6	64·0	4	95·5	5
43·0	6	61·6	5	93·2	6
42·2	6	60·7	6	91·5	6
39·6	6	58·5	6	89·2	6
34·0	5	57·1	6	87·9	5
33·4	5	55·7	6	84·4	5
31·0	5	54·7	5 o.	81·7	6
29·5	4	53·3	6 o.	79·7	5
28·2	6	52·2	6	77·8	6
27·1	6	49·2	6+ o.	75·7	6

λ	i	λ	i	λ	i
2673·7	5	2599·7	5 o. Fe	2526·5	6
71·7	6	98·7	5 o. Fe	24·4	6
70·4	6	96·9	6	22·1	5
69·2	6	95·8	6	19·2	6
66·4	5	94·6	6	18·4	6
64·3	4	91·5	6	17·5	6
62·1	6	89·2	5	16·5	6
58·0	4	85·9	5 o. Fe	15·5	6
56·7	6	84·7	6	14·7	6
55·6	6	82·8	6 o. Fe	13·5	6
53·6	5	81·2	5	10·7	4
52·7	6	79·5	3	07·9	6 C?
51·9	6	76·7	4	07·3	6
47·7	5	72·5	4	06·2	5
45·2	6	71 7	4	02·4	6
43·2	5	69·2	5	01·2	6
41·1	6	67·8	6	2499·8	5
37·6	6	63·2	4	97·7	6
36·9	6	59·7	6	96·8	6
35·6	6	58·2	6	95·8	6
34·7	6	55·2	4	93·2	5
32·7	6	53·5	6	91·1	5
31·2	6	52·5	6	89·2	4
30·4	6	51·5	6	86·7	6
28·9	6	50·4	6	85·8	6
25·5	6	46·7	5	84·5	5
24·6	6	45·1	6	82·6	6
24·0	6	43·5	6	81·8	6
23·1	6	42 7	6	80·4	6
20 6	5	41·5	6	78·0	4
19·2	6	40·2	6	75·8	5
17·7	6	39·6	6	74·4	6
15·6	5	36·9	6	73·2	6
12·2	5+	35·9	6	72·0	6
09·2	6	34·9	5	70·9	6
07·9	6	34·5	6	70·1	6
06·4	4+	33·0	6	68·1	6
02·9	4	31·2	5	66·7	6
01·7	6	29·1	6	61·7	6
00·7	6	27·6	6	60·2	6

λ	i	λ	i	λ	i
2459·0	6	2382·1	5+ Fe	2321·0	6
57·4	6	78 2	6	18·5	6
56·0	5	77·1	6	14·9	5
51·4	6	75·7	6	12·8	6
48·0	5	75·0	6	10·7	6
46·0	5	74·3	6	09·7	6
41·2	6	72·5	6	07·6	6
40·3	6	71·9	6	05·8	6
38·1	6	70·6	5	02·7	6
37·1	6	69·8	5	02·1	6
34·9	4 o.	68·7	6	00·5	6
34·0	5	68·2	6	2297·2	6+ C
32·7	6	65·7	6	95·7	6
31·3	6	63·8	5	94·3	6
29·4	5	62·0	6	93·2	6
27·2	5	61 0	6	91·2	6
23·7	5	58·7	5	90·4	6
22·0	5	57·1	6	89·1	6
20·3	5	53·0	5+	88·3	6
19·1	5	50·2	6	83·6	6
17·2	6	49 1	6	82·1	6
16·5	6	47·9	6	80·4	6
11·3	5	46·5	6	78 7	6
10·3	6	45·5	6	77 9	6
09·1	6	43·3	5	75·5	6
08·1	6	41·2	5	72·7	6+
05·2	5+	39·7	6	70·2	6
03·1	6	39·1	6	66·2	6
01·8	6	37·7	6	64·1	6
00·4	6	36 5	6	63·3	6
2399·2	6 o. Fe	36·2	6	62·0	6
97·9	6	33·6	6	59·7	6
97·1	5	32·0	6	57·7	6
95·5	6 o. Fe	30·6	6	56·7	6
94·1	6	29·5	6	55·8	6
92·7	5	28·2	6	54·9	6
90·2	5+	26·0	5	49·7	6
88·4	6	24·7	6	48·7	6
87·3	6	24·0	6	46·5	6
84·9	5	22·9	5	45·1	6

λ	i	λ	i	λ	i
2241·0	6	2219·4	6	2186·7	6
39·6	6	18·0	6	85 5	6
37·1	6	16 2	6	82·2	6
35·4	6+	08·7	6	66·2	6
31·2	6	06·7	6	63·7	6
29·6	6	04·4	6	60 7	6
26·7	6	2198·7	6	53·7	6
25·9	6	93·2	6	52·5	6
21·2	6	89·7	6	46·2	6

V. Mo. Molybdän.

Bisherige Messungen im Ultraviolett liegen nur von Lockyer[1] vor im Ausmasse von λ 4000—3900 im Bogenspectrum; das Funkenspectrum fehlt vollständig. Der Funke ist hell; es genügt eine Expositionszeit von 5 Minuten bei 6—8 Ampère. Das Spectrum ist noch linienreicher als das des Wolfram und lichtstark.

λ	i	λ	i	λ	i
5060·0	6+	4878·0	6+	4805·5	6+
00·5	6+ 2 AE br.	67·8	4	02·8	6+ o.
4979·0	6+	60·0	6+	4798·0	6+
64·0	6+	58 1	6+	96·3	6
57·5	6+ o. Fe	53·5	5+	93·2	6
50·5	6+	44·8	6+	92·6	6
41·4	6+	43·7	6+	88·0	6+
33·0	6+	39·2	6+	86·5	6+
26 2	6	33·7	6	85·0	6
09·0	6+	32·5	6+	82·8	6
07·0	6+	30·4	4	76·0	6
03·5	6+	19·0	4	75·4	6
4886·5	6+	10·9	5	73·3	6
84·5	6+	07·8	6+	70·5	6+

[1] Lockyer, Phil. Trans. 173 (1881).

λ	i	λ	i	λ	i
4769·3	6	4662·7	5	4566·1	6
63·3	6	56·3	6	65·2	6
61·8	6	53·0	6+ 2 AE br.	60·4	6
59·9	3	50·8	6	58·3	6
54·0	6+	47·8	6	53·5	3
50·2	5	37·8	5	49·7	6 o.
44·3	6	35·8	6	48·1	6+ o.
42·3	4	35·0	6	43·8	6
40·0	6+	33·2	6	41·8	6
35·2	6+	27·5	6	41·3	6
33·0	6	26·2	5	38·8	6
31·3	4	24·2	6	37·2	4
30·4	6	23·3	6	36·1	5
29·0	6	22·7	6	34·8	4
28·1	6	21·3	6	31·3	6
25·0	6	21·0	6+ o.	29 6	6
23·0	6	17·8	6	28·8	6 o. Fe
18·8	6	16·6	6	26·7	6
17·8	5	14·7	6	25·8	6
16·8	6	13·1	5+	24·5	5
14·3	6	04·3	6	23·9	6
12·7	6	03·8	6	22·5	6
08·2	6	4599·3	6	21·5	6
07·2	4	98·1	6	19·8	6
06·1	5	95·3	5	18·9	6
00·3	6	92·3	6	17·4	5
4698·7	6+ o. 1·5 AE	88·3	6	16·6	6
	br.	87·0	6	15·3	6
96·0	6+	86·3	6	14·6	6
93·9	6	82·7	6	12·5	5
90·6	6	81·1	6	11·4	6
90·1	6	80·1	6	06·9	6
88·2	5	79 0	6	06·3	5
87·3	6	78·2	6	05·5	6
85·8	6	76·6	5	03·8	6
83·6	6	75·8	6	01·5	6
80·6	6+ 2 AE br.	74·8	6	00·7	6
73·7	6	70·5	6	4499·8	6
71·8	5	69·5	6	98·5	6
67·3	6+ o.	68·1	6	93·8	5+

λ	i	λ	i	λ	i
4491·7	4	4407·8	5	4330·1	6
90·6	6	04·8	5+ o. Fe	28·3	6
89·4	6	03·3	4+	26·8	6
87·3	6	4398·8	6	26·1	3
85·3	5	97·5	5	22 4	6
84·4	6	97·1	5	18·4	6
81·7	6	94·6	5	17·6	6
79·1	6	92·5	6	15·7	6 o.
76·1	6	91·8	5	12·2	5
74·9	5	90·0	6	11·4	5
73·8	5	88·5	6	08·3	6
72·3	5+	87·8	6	05·1	6
68·5	5	86·1	6	04·4	6
67·8	6	85·1	6	02·4	6
65·2	6	83·8	6 o. Fe	01·9	6 Wo
64·2	6	81·8	4	4296·4	6
62·1	6	80·6	6	94·9	5
60·8	6	79·5	6	94·2	5 Wo
58·8	6	77·8	3	93·6	5
57·5	4	77·1	5	92·4	5
56·8	6	75·3	5	91·9	6
55·5	6	72·5	6	90·4	6
54·3	6	70·8	6	89·7	6
52·3	4	69·4	5	88·9	4
50·1	5	63·8	2	87·4	6
49·3	6	62·3	5+	84·9	6
44·6	6	60·1	6	80·4	5+
43·5	6 o. Fe	58·3	3	79·0	2
42·6	5 o. Fe	56·5	6	77·1	2
41·8	6	55·6	6	74·8	6
40·3	6	53·7	6	73·4	6
37·2	5	50·8	5	72·4	6
35·1	4	45·1	6	71·2	6
33·5	4	41·8	6	69·4	5 Wo
30·8	6 o. Fe	41·2	6	68·2	6
28·5	6	40·3	6	66·4	6
27·1	5	39·1	6	60·5	6 o. Fe
24·1	5	36·8	6 Wo?	56·9	6
15·3	5 o. L, Fe	35·3	5 Wo?	54·9	6
12·3	2	33·0	6	51·9	5

λ	i	λ	i	λ	i
4250·6	3 o. Fe	4135·4	6	4013·2	5
46·4	5	31·9	5 o. Fe	10·3	6
44·9	4	28 4	6	09 4	6
43·2	5	25·7	6	08·7	5 Wo
40·9	6	24·4	6	05·2	6 o. Fe
40·4	6	23·7	6	02·9	6
37·4	6+	22·4	4	00·5	6
27·1	5	19·7	2	00·0	6
25·4	6	15·9	6	3998·6	6
22 9	6	14·9	6	90·9	5
19·4	6	11·9	6	86·2	4
16·9	6	10·9	6	82·1	6+
14 4	6	07·5	4 o.	80·4	6
11·4	6	02·1	5	79·4	6
09·5	4	00·2	6	77·9	6
07·4	6	4098·4	5+	76·4	6
05·9	6	96·7	5	74·8	6
4198·9	6	94·9	6	73·8	4
94·5	5	92·9	6	73·4	4
92·3	5	90·9	6	68·4	2 Wo
91·1	6	84·4	4	64·4	6
88·3	4	81·3	3	62 9	5
80·9	6	74 5	5 Wo	61·4	1
78·2	6	71·9	5	52·9	5
77·3	6	66·4	6	51·2	6
71·4	5+	63·6	6 o. Fe	48·7	6
62·6	5	62·0	4	47·1	6
61·1	5	59·6	6	45·1	6
57·3	5	57·6	5	44·1	5
55·3	5	56·0	5	42·9	4
53·1	6	51·4	6	41·4	2
51·9	6	47·1	6	35·0	5
50·6	6	45·8	6 o. Fe	33·7	2 o. Wo
48·7	5	37·9	6	30·9	6
46·7	5	35·4	5+	29·7	6
43·4	2 o. Fe	33·9	6	27·1	6
41·3	6	29·9	6	25·9	4
39·6	6	24 2	6	23·9	6
38·4	6	23·8	6	21·6	6
36·6	6	20·9	6	17·9	6

λ	i	λ	i	λ	i
3915·3	4	3826·8	5	3742·0	3
13·7	6	23·2	6	39·0	6
09·9	6+	21·1	6	37·9	6
08·6	5	20·4	6+	37·0	6
06·6	6	15·4	6	36·3	5
04·9	5+	14·0	6	34·8	6
02·9	2 o.	12·2	4	34·0	6
3898·2	6	07·6	6	32·8	5
96·9	6	06·6	5	30·5	6
92·2	6	06·1	6	28·5	6
90·7	6	04·6	6	26·4	6
88·4	6+	03·5	6	25·5	6
86·7	5	01·8	5	19·8	2 o. (Fe)?
82·6	4+	3798·3	1	16·9	4
78·9	6	95·7	6	15·8	4
74·6	6	94·8	6	13·8	5
73·4	6	93·8	6	08·3	6+
71·9	4	92·5	6	03·8	5
69·2	5	91·8	6	02·3	1
66·9	6	86·6	4	3699·8	5
65·7	6	83·3	4	98·5	6
64·2	1	82·0	3	96·9	6
61·5	5 o.	79·8	5	96·0	6
60·2	6	77·8	6	94·8	4
57·4	5	72·9	6	93·8	5
53·6	6	72·0	6	92·6	1
52·2	6	70·5	5	90·5	5
50·9	6	68·8	6	88·3	1
50·1	6	67·7	5	84·1	4
48·5	5	65·5	6	83·1	6
47·4	5	63·5	6	81·6	6
46·3	6	62·1	5	80·5	5
44·2	6	58·3	5	77·7	6
42·8	6	56·8	6	76·0	6
40·6	6	55·1	3	75·3	6
37·4	6	53·5	5	72·7	5
35·4	4	51·1	5	70·5	4
33·7	3	48·2	5	69·3	6 o.
32·5	4	46·5	5	66·7	6
28·9	5	44·3	5	64·7	5

λ	i	λ	i	λ	i
3663·0	6	3595·8	6	3517·5	6
61·8	6	92·3	6 Wo	15·6	6
60·8	6	91·6	6	14·9	6
59·0	4	89·4	5	10·8	6
58·3	4	86·8	6	08·1	5
57·5	5 Wo	85·7	4	06·6	6
55·6	6	82·5	6	05·2	6
54·6	6	81·9	6	04 3	6
53·5	6	80·3	6	01·9	4
52·3	3	79·0	6	3499·8	5
51·0	3	75·5	6	99·0	5
48·6	6	73·8	6	93·1	6+
47·6	6 o.	72·3	6 Wo	91·5	6+
43·3	5	70·3	6	87·9	5
42·0	6	66·0	6	85·6	5
40·5	6	63·0	6	84·4	5
39·3	6	61·1	6	83·8	6
37·5	5	59·6	6	82·5	6+
36·1	5	57·9	6	79·5	6+
35·0	1	56·8	5	74·8	6+
31·3	6 o.	56·3	5	73·0	6+
29·0	6	53·8	6	70·8	6+
28·3	6	52·7	6	69·1	5
27·1	5	50·8	6	67·8	6
26·0	6	47·8	4	66·8	6
25·3	5	45·9	4	65·8	6
24·2	5	43·3	6	63·0	5
23·6	4	42·1	4	62·0	6
20·0	6	40·3	6	60·6	6
18·2	6	37·1	4	60·1	6
17·3	6	34·7	5	58·9	6
14·0	4 Wo	32·8	5	56·3	5
11·8	5	31·3	6	52·8	5
08·1	6	27·8	5	51·8	6
06·6	4	25·8	6	50·6	6
02·8	6	24·5	3	48·9	6
00·3	6	22·0	6	48·4	6
3598·8	6	21·3	5	47·1	5
97·7	6	20·1	6	46·1	4
96·4	4	18·1	6	45·5	5

λ	i	λ	i	λ	i
3443·3	6	3360·3	5	3282·8	5
42·6	6	58·3	5	81·7	6
41·1	6+	57·1	6	81·0	6
39·0	6	55·1	6	78·9	4
35·0	4	53·8	6	76·2	4
33·1	6+	52·9	6	74·6	6
32·2	5	50·3	6	73·7	6
28·9	6	49·1	5	72·4	6
28·0	6	47·5	4	71·6	4
27·0	6 o. Fe	46·6	4	68·9	6
24·8	6	44·8	6	67·7	5
24·1	6	42·8	6	66·9	5
22·8	4 o. Fe	40·5	6	64·5	6
19·8	6+	35·3	6	62·2	5
18·8	6+	32·7	5	58·7	5
16·1	6	30·8	5	57·4	6
14·5	6	29·3	4 o.	56·2	6
10·6	6	27·5	6	55·2	5
07·3	5 o. Fe	25·3	6	54·7	5
05·8	5	24·0	6	53·6	4
02·8	2	22·3	6	52·2	6
3395·3	6	21·1	2	50·7	5
93·1	6	17·1	6	48·2	6
91·9	4	13·8	4	45·9	6
89·8	6	12·9	4	43·2	6
87·8	6	07·2	5 o.	41·8	6
86·0	6	05·4	6	40·6	4
84·7	5	04·4	6	38·4	6
84·0	5	03·5	6	38·0	6
82·6	6	02·6	6	37·1	6
80·0	3	00·4	6	35·0	5
76·8	6	3299·3	6	33·0	6
74·8	6	98·4	6	30·8	6
73·1	6	97·5	5	29·6	4
71·8	5	96·2	4	28·4	6
70·7	6	92·6	2 o. (Fe)	26·6	6
67·8	4	90·8	4	24·5	6
63·8	6	88·9	6	22·9	6
63·0	5	87·4	5	21·8	6
61·3	6	84·6	5	19·4	6

λ	i	λ	i	λ	i
3218·3	6	3158·4	6	3080·2	6
16·0	5	57·0	5	77·9	3
14·3	5	55·7	4	75·6	6
13·2	5	52·9	4	74·6	6
12·0	5	51·5	5	73·3	6
11·0	5	48·2	6	71·2	6
10·7	5	45·9	6	70·7	6
09·8	5	44·7	6	69·2	6
09·0	5	43·2	5	67·7	6
07·2	6	41·6	4	64·9	6+
05·9	6	38·9	4	62·1	6
04·9	5	36·6	4	60·9	5
01·6	5	32·6	4	58·0	5
00·3	5 o.	30·2	5	54·9	6
3199·4	6	27·9	6	53·6	5
98·5	5	26·4	6+	52·4	6
95·9	5	24·1	6	50·4	6
94·1	5	23·6	6	49·0	5
93·4	6	21·9	3	48·2	5
92·1	5	19·6	6	45·9	6
89·4	6	17·5	6	43·5	6
87·6	5	16·1	5	41·4	6
86·4	6	15·1	6	39·2	6
85·5	5	13·7	6	35·0	5
83·3	4	11·9	5	33·4	5
81·3	6	10·9	5	31·5	5
79·4	6	09·2	6	28·0	6
78·0	6	07·4	6+	25·9	5 o.
76·4	4	03·7	6	23·4	4
74·9	4	01·3	5	21·9	6
72·8	4	3099·4	6	18·7	5
72·1	4	98·4	6	14·3	5
70·1	4	97·8	6	12·2	6
67·8	6 o.	94·7	6	11·2	6
67·1	6	93·1	5	08·2	4
63·9	6	92·1	4	04·7	5
62·4	6	87·8	3	02·2	6
61·4	6	85·9	6	00·6	6
60·2	6	82·5	5	2998·0	6
59·2	5	82·0	6	93·2	5

λ	i	λ	i	λ	i
2990·1	6	2924·5	6	2842·4	4
88·2	6	23·6	5	39·2	6
87·4	6	20·2	6	36·7	6
86·4	6	18·7	5	35·4	6
85·2	6	17·0	6	34·7	6
83·9	5	13·8	5	31·7	5
80·2	6	11·7	5	29·2	6
78·9	6	09·2	5	27·7	5
78·2	6	07·1	6	26·7	6
77·2	6	05·7	6	23·1	6
75·6	5	02·9	5	21·9	5
72·9	5	01·8	6	19·9	6
72·4	5	00·7	5	17·7	6
69·7	6	2898·5	6	16·2	2
69·0	6	97 6	6	12·7	6
67·2	5	96·5	6	10·7	6+ 2 AE br.
66·4	5	94·7	5	07·7	4
63·8	5	92·8	6	02·5	6
62·4	6	90·8	5	01 2	6
61·7	6	88·2	6	00·4	6
60·4	6	87·0	6	2799·0	6
57·1	5	85·8	6	98·2	6
55·9	5	82·2	5+	96·8	6
54·2	6 o.	79·2	5	95·6	6
46·9	5	77·7	6	94·2	6 o.
46·4	5	75·0	5	92·6	6
44·8	5	73·1	5	91·7	6
43·7	6	71·6	4	90·5	6
41·5	5	69·6	6	85·0	3
40·2	6	68·3	5	82·0	6
38·6	5	66·8	5	81·2	6
36·8	6 o. Fe	65·9	6	80 0	3
35 7	6	63 7	4	77·9	6
34·2	5	59·0	6	76·7	6
32·5	6	56·0	5	75·5	3
30·6	3	53·5	3	74·5	5
27·7	6	50·7	6	71·9	6
26·9	6	48·5	3	70·7	6
26·2	6	45·7	6	69 7	5
25·5	6	44·7	6	67·7	6

λ	i	λ	i	λ	i
2766·3	6	2701·5	5	2616·7	6
65·2	6	2699·5	6	15·2	6
63·5	4	96·9	5	13·8	6
62·6	6	95·2	5	13·2	6
61·6	6	93·9	5	11·9	6
60·5	6	87·9	4	11·2	6
58·7	5	85·7	6	09·2	5
57·3	6	84·2	5	06·5	6
56·0	4	83·2	5	05·5	6
54·0	6	81·4	6	02·7	5
52·4	6	80·0	6	00·2	6
50·0	5	76·7	5	2599·4	6
48·8	6	73·1	3	97·2	5
46·4	5	71·9	6	95·4	6
45·2	6	67·2	6 +	93·7	5
44·2	6	64·2	6 +	92·1	6
42·9	5	60·6	4	90·2	6
41·5	5	58·1	6	89·1	6
38·7	6	57·0	6	87·5	5
37·9	6	55·9	6	86·1	5 o. Fe
37·0	6	55·2	6	84·2	6
35·4	6	53·4	5	79·2	5
32·9	3	51·9	6	76·9	6
30·0	5	50·0	6	74·7	6
28·3	6	48·0	6	72·5	6
26·9	6	46·5	4	71·3	5
24·2	6	44·2	4	68·2	6
22·5	6	42·5	6	66·3	6
19·0	6	41·0	4	64·6	6
17·2	4	39·9	6	62·3	6
16·2	6	38·8	4	60·0	6
15·7	6	36·7	5	59·2	5
13·5	6	35·7	6	56·8	6
12·5	6	33·5	5	55·5	6
11·3	6	30·9	5	52·8	6 +
10·2	6	27·5	6	51·2	6
06·2	6	25·9	5 +	49·3	6
05·0	6	23·4	6	47·5	5
03·9	6	21·7	6	44·5	6
02·7	6	19·4	6	43·8	6

λ	i	λ	i	λ	i
2542·9	5	2470·3	6	2402·8	6
40·3	6	69·3	5	2399·5	6 o. Fe
39·7	6	68·1	5	98·1	6
38 6	5	61·8	6	97·3	6
37·8	6	60·0	6	95·8	6
35·7	6	58·8	6	91·0	5
34·6	6	58·1	5	89·3	5
33·8	6	57·0	6	88·0	6
32·5	6	55·8	6	87·1	5
30·3	6	53·5	6	86·2	6
29·0	6	52·3	6	84·8	6
27·3	5	51·5	6	84·1	6
24·8	5	48·6	6	82·5	6
23·0	6	47·5	6	81·3	5
20·7	6	44·8	6	80·3	6
18·8	5	43·5	6	77·5	5
16·3	6	40·6	6	73·3	5
15·3	6	39·6	6	71·4	6
14·3	6	38·8	6	70·4	5
13·3	6	38·1	5	69·2	6
11·8	6+ C	36·3	6	68·3	6
09·3	6	34·4	6	67·5	5
08 3	6 C?	29·6	6	65·3	6
06·3	4 o.	29·1	6	62·6	6
03 8	5	27·6	6	60·0	5
01·8	6	26·1	6	57·8	6
00·6	6	24·1	5 o. Fe	55·6	6
2498·1	4 o.	22 4	5	54·1	6
96·2	6	21·3	6	50·1	5
93·1	6+	20·3	6	49·0	6
91·6	6	19·2	6	48·0	6
90·1	5	18·1	6	44·8	6
87·8	5	14·8	6	43 6	6
86·5	6	13·2	5	41·8	5
84·7	5	11·3	6	40·6	6
82·5	6	10·3	5	39·4	6
81·3	5	09·0	6	37·6	6
78·8	6 C	07·2	6	36·8	6
77·6	6	04·8	6 o. Fe	35·1	6
74·3	5	03·7	5	32·8	6

λ	i	λ	i	λ	i
2332·3	6	2303·1	6	2251·5	6
31·2	5	2298·5	6	50·3	6
30·1	6	97·0	6 C	49·6	6
28·3	6	95·1	5	47·8	6
26·8	6	90·3	6	42·3	6
25·8	5	89·5	6	41·5	6
25·1	6	85·3	6	39·6	6
24·1	6	81·3	6	36·3	6+
20·3	6	75·8	4+	31·3	6+
19·1	6	73·6	6	27·1	6
16·6	6	69·8	6	23·3	6
14·3	6+	68·8	6	21·3	6
10·0	6	64·8	6+	18·3	6
08·3	6	57 5	5+	14·5	6
07·0	6	53·4	6	10·7	6
04·5	6	52·6	6		

VI. Pt. Platin.

Lockyer[1] hat im Bogen das Intervall λ 4000—3900 gemessen, das ultraviolette Funkenspectrum ist bisher unbekannt. Der Funke ist verhältnissmässig lichtschwach Es war eine Expositionszeit von 15 Minuten bei 4 Ampère erforderlich. Die Linien sind wie auch bei den übrigen Metallen der Pt-Gruppe sehr scharf, doch nicht besonders zahlreich und ohne hervorragende Hauptlinien. Dass die Metalle der Pt-Gruppe sich gegenseitig als Verunreinigungen enthalten, wird man nicht auffallend finden; bemerkenswerth ist, dass die starke Linie λ 3042·8 sowohl im Platin als Iridium mit gleicher Intensität erscheint; sie gehört vermuthlich einem bisher noch nicht gemessenen Metall an. Das gleiche gilt von der schwachen und verwaschenen Linie λ = 2396·7 in Pt und Rh.

[1] Lockyer, Phil. Trans. 173 (1881).

λ	i	λ	i	λ	i
4577·0	6+2 AE	4092·5	6	3639·2	5
60·0	6+2 AE br.	66·2	6	35·0	6 Pd
48·2	6+	61·9	6	28·4	4
21·2	6	55·0	6 o.	27·8	6
14·3	6+	46·8	5	25·4	6
4498·9	3	07·5	6+	10·9	6
95·0	6+	3970·1	5	09·7	6 Pd
73·7	6+	66·3	4	05·4	6+
58·7	6+	48·4	6	02·4	6+
57·0	6	33.8	4 o. Wo	3597·4	6+
52·2	6+	25·7	6	94·4	6+
37·5	6	23·2	4 o.	89·2	6
11·5	6+	11·1	6+	87·7	6
4392·0	5	04·4	6+	77·6	5
72·0	6	01·0	5	73·9	6+ Ir
64·5	6	3868·5	6+	72·3	6
58·5	6+	19·0	5	68·9	6+
51·3	5+	15·5	6	65·4	6+
34·8	6+	08·4	6	59·9	6+
27·2	4	07·2	6	51·6	5
09·5	6+	06·2	6 Rh	48·9	6
02·5	6+ Wo	01·3	6	36·1	5
4291·0	6+	3768·7	6	28·7	6
88·3	5+	66·7	6	28·1	6
75·2	6	55·0	6+ Rh?	26·9	6
74·0	6	50·0	4+	14·9	6
71·2	6+	27·7	5+ L	13·7	6 Ir
63·8	6+	12·0	6+	05·7	6
26·9	6	06·8	5	02·6	6+
23·8	6	00·3	6	3491·1	6+
05·8	5+	3692·7	6 Ir, Rh	85·5	3
01·5	6	87·9	5 o.	83·7	6
4192·5	5	83·2	6	80·4	6+
85·7	5+	74·5	6	78·1	6
67·5	6	72·4	6	77·2	6
66·2	6	64·5	6	71·4	6+
64·7	4	63·5	6	64·4	6+
63·5	5+	59·6	6	60·9	6+
48·5	6	58·3	6	54·2	6
33·7	5+	43·3	3+	48·1	6

λ	i	λ	i	λ	i
3435·2	6	3191·7	6+	2865·3	6+
32·1	6	88·7	6+	60·8	6+
28·2	6	79·6	6+	53·3	6+
27·2	6	59·6	5	49·8	6+
20·9	6+ Pd	57 1	5	34·8	6
17·4	6+	45·5	6	30·5	4
08·6	3	44·6	6	24·6	6
04·9	6 o. Fe	39·8	5	22·5	6+
3397·2	6	35·9	6+	18·6	6+
84·2	6	33·9	6+	14·3	6
44·2	6+	27·5	6+	13·5	6
40·4	6+	17·4	6+	09·3	6+
38·4	6+	3084·3	6+	03·5	6
24·2	6	79·8	6+	00·1	6+
15·4	6	72·3	6	2798·1	6+
12·9	6+	65·0	2	94·5	3
08·4	6+	60·0	6	89 0	6
02·4	3	42·8	4 Ir?	75·1	5
3290·7	5	36·7	5	73·6	6
83·9	6+	18·0	6	72·0	5
82·4	6	02·3	6	63·5	6
74·6	3	01·3	5	55·2	6
68·9	5	2998·1	3	54·1	6
62·1	6+	60·8	6+	47·9	6
60·2	6	58·8	6+	37·8	6
56·4	5	42·8	6+	34·2	3
52·4	6	30·1	4	30·3	6
50·9	6	21·5	6	26·8	6
48·0	3	19·5	6	19·4	5 o. Fe
44·2	6	13·6	6	18·0	6
40·9	6	12·4	6	13·5	6+
40·1	6	06·1	6	06·3	4
34·1	6	2899·8	6	02·8	4
30·8	6	98·0	6	2698·8	6
24·6	6+	94·0	5	79·6	6
21·4	6+	90·5	6	77·6	5
13·1	6+	88·5	6	75·3	6+
04·7	4	77·6	6	60·0	3
01·3	5	76·1	6+	51·3	5
3198·2	6+	67·0	6+	47·3	5

λ	i	λ	i	λ	i
2639·8	6	2450·4	5	2315·4	6+
28·4	5	42·5	5	12·9	6+
25·6	5	39·9	6	11·1	5
16·7	5	36·7	6	08·1	6+
03 2	6	34·5	6	2295·9	6+
2599·4	6	29·4	6+	94·4	6
96·1	6+	28·2	6+	92·4	6+
72·6	5	24·9	5	88·4	4+
52·2	6	20·9	6	81·4	6+
49·4	6+	18·1	6	76·4	6+
39·1	6+	10·4	6+	74·6	6+
36·4	6+	05·7	6+	68·9	6+
29·4	6+	03·1	6+	66·7	6+
24·4	6+	2396·7	5+	63·4	6+
15·4	6+	86·6	6+	56·4	6+
13·8	5	84·4	6+	51·4	6+
08·5	6	81·9	6+	47·4	6+
05·9	6+	77·0	5	45·6	6+
2498·4	5+	69·9	6	42·7	6+
95·7	6+	68·4	6	35·4	6+
89·9	6+	57·2	6+	29·4	6+
88·8	6 Pd?	48·6	6+	18·4	6+
87·1	5	43·4	6+	10·4	6+
83·4	6	39·9	6+	2192·4	6+
81·9	6	35·2	6+	90·4	6+
70·9	6+	26·4	6+	44·4	6+
67·4	5	20·1	6+		

VII. Pd. Palladium.

Im Bogenspectrum gemessen von Lockyer[1] die Wellenlängen λ 4000—3900, das Funkenspectrum fehlt. Die Expositionszeit betrug 15 Minuten bei 4 Ampère. Die Linien sind wenig zahlreich, nicht stark, aber scharf.

[1] Lockyer, Phil. Trans. 173 (1881).

λ	i	λ	i	λ	i
4604·4	6+	3839·3	6+ 2 AE br.	3346·4	6+
03·7	6+	32·6	3	27·1	6
4593·3	6+ br.	02·8	6	10·4	6+
64·6	6+ o.	3799·5	3 Rh?	06·9	6+
52·1	6+ 5 AE br.	39·0	5	01·9	3
31·1	6+	35·5	6 Rh	3287·0	6
19·1	6+ 5 AE br.	32·4	6+ o.	72·3	6
4489·3	6+	19·2	4	67·1	5
73·4	3	12·7	6+	58·7	4
43·1	6+	3690·3	2	51·4	4
33·1	6+ 5 AE br.	34·8	1 3 AE br.	42·8	2
06·8	6+	09·8	1 3 AE br.	10·3	6
4396·1	6+	3595·7	6	3178·7	6
88·6	6	84·1	6+	70·2	6
4283·1	6+ 3 AE br.	80·9	6+	61·9	6
75.1	6+ 5 AE br.	77·9	6+	55·6	6
68·1	6+ C 2 AE br.	71·1	3	42·8	6
26·9	6	66·9	6	32·4	6+
15·9	6	33·0	1 3 AE br.	14·1	4
14·6	5	21·4	6 o. Fe	09·1	6
13·0	1	17·0	1	05·4	6+
4183·4	6	08·0	6	3065·3	5 Pt?
70·0	5	3489·7	3	59·4	5
66·4	6	81·1	2	55·4	6+
57·1	6	68·5	6	52·2	6
23·6	6+	60·4	2	50·2	6
03·2	6+	51·2	3	41·8	6
4088·8	6	41·3	2	32·2	5
87·2	4	33·3	2	27·9	6
3973·5	5	21·2	2	19·4	6
68·6	5 Wo	04·4	1 br.	18·5	6
58·8	2	3396·7	6+ Rh	09·8	6+
40·3	6+ 4 AE br.	91·6	6+	02·6	6
33·8	3 o. Wo	82·6	6+	2999·4	5
09·3	6	80·5	6+	80·7	4
3894·3	2	77·0	6+	56·5	6
82·6	6+	76·0	6+	54·5	6
56·8	6+ Rh, 2 AE br.	72·8	3	35·0	6+
		55·9	6+	27·2	6+
43·3	6+	53·6	6+	25·4	6+

λ	i	λ	i	λ	i
2922·5	6	2677·9	6	2509·4	6
2893·0	6	77·2	6	06·2	2
78·0	5+	61·2	5	2499·2	2
71·3	5+	58·7	3	96·7	5
59·2	6	57·8	5	89·5	4
57·7	6+	51·3	6	88·7	2
54·5	2	49·6	5	86·4	3
52·2	6	42·3	6	81·9	6+
51·0	6	40·3	6	79·2	6+ C
46·8	6+	37·2	5	77·2	6
41·1	6	36·0	3	76·6	6
40·0	6	30·5	5	72·6	5
37·8	6+ C	28·3	4	71·3	5
23·2	6+	25·0	6+ Rh	70·0	5
21·9	6+	20·8	6+	69·0	5
14·0	6	19·2	6+	64·2	6
07·7	5+	13·7	4 o.	62·7	6+
02·6	6	10·1	6	59·9	6+
00·7	6+ Ir	02·9	4	57·4	2
2788·0	5	2596·1	4	54·9	5
81·7	6	94·5	6	53·7	6
79·8	6	93·3	4	52·5	6
76·9	5	87·5	6	51·3	6
63·2	5	84·1	4	50·2	6
51·3	6+	77 2	5	48·2	3
42·7	5	76·7	5	46·4	2 d?
36·3	6	69·7	4	44·4	6
31·9	5	61·0	6	38·2	6
28·0	5	52 0	2	36·7	5
15·0	5	51·0	3	35·4	4
14·5	5	44·8	5	33·2	4
09·2	6+	42·0	6	30·7	4
03·5	6	39·4	5	27·0	4 Rh
2698·8	5	38·0	6	24·5	5
96·5	6	37·0	6	22·7	6
94·0	6	34·5	3	19·0	4
88·6	5	25·4	6+	16·7	6
87·8	5	22·9	6+	15·7	5 Rh
85·0	6	21·9	6+	14·7	4
79·7	6	14·5	4	13·5	6

λ		λ	i	λ	i
2412·0	6	2359·5	6	2296·5	4
10·4	6	57·7	5	83·6	6+
08·7	5	55·9	6	82·2	6
06·9	4	54·9	6	80·9	6
02·4	3+	51·7	3	76·1	6
2399·0	6 Ir	47·4	6	74·5	6
96·7	6 Rh	46·5	6 Rh	73·4	6
91·0	6+	45·0	6	70·2	6+
88·4	4 o.	40·1	6	64·5	6
85·4	6	37·7	5	62·4	5
83·7	6	36·5	4	60·4	6+
82·7	4	31·5	5	53·0	6
79·7	6	22·5	6	52·4	6
78·0	5	22·1	6	31·5	6
72·2	4	19·7	6	29·1	6
70·7	6	16·0	6	17·7	6+
68·2	4 Ir	08·7	6	13·9	6+
65·0	6	07·5	6	11·9	6+
63·7	6	02·2	5	02·0	6+
62·4	4	2299·5	6	2198·2	6+

VIII. Ir. Iridium.

Lockyer[1] hat im Bogen die Wellenlängen λ 4000—3900 gemessen, das Funkenspectrum fehlt gänzlich. Die Expositionszeit war 15 Minuten bei 4—5 Ampère. Das Spectrum ist linienreich und zeichnet sich durch viele scharfe Doppellinien aus.

λ	i	λ	i	λ	i
4616·8	6	4495·7	5+	4450·4	6
4570·5	6+	91·7	5+	11·5	6
68·4	6	78·7	5	04·0	5
48·7	5	58·4	6	4399·7	3
45·8	5	52·7	6+	92·8	6

[1] Lockyer, Phil. Trans. 173 (1881).

λ	i	λ	i	λ	i
4390·4	6+	4156·1	6	3933·8	3 Wo
85·5	6+	39·3	6	28·8	6
81·2	6+	38·3	6	16·8	6
77·2	6	17·5	6	15·4	3
74·9	6	16·0	5	07·6	6+
72·0	6+	13·8	6	04·1	6+
69·2	6+	10·3	6+	02·8	3
62·2	6	08·3	6+	3895·7	4
58·2	6+	00·3	6+	89·6	6
52·7	6	4092·8	5	82·5	6+
42·2	6+	90·3	6+ br.	73 3	6 d.
25·8	6 o. Fe L	62·1	6	69·7	6
24·7	6	59·2	6	65·6	6 o. Fe
13·2	6	56·7	6	62·0	6
11·5	5	53·8	6+	56·6	4+ Rh?
10·7	5	40·3	5 o.	50·8	6+
07·9	6 o. Fe	33·8	4	48·5	6+ d.
06·0	6	21·6	6	45·1	6
01·6	5	20·0	3	42·8	6+
4286·2	6+ d.	16·8	6+	39·2	5+
84·4	6+	14·3	6+	37·9	6
76·7	6+ 4 AE br.	09·8	6 o. Fe	34·1	6 Rh
68·1	4	05·3	6+ o. Fe	31·6	6
65·3	6	01·8	6+	30·5	5
61·0	6+	3999·0	6+	28·8	6 Rh
59·0	6	92·1	4	27·1	6
26·9	6	86·5	6	26·0	6
21·0	6	77·8	6	24·6	6 o. Fe
18·1	6	76·5	3	23·5	6
10.7	6+ breit	73·3	5	22·2	6 Rh
06·7	6+ 2 AE br.	69·3	6	20·5	6+ Fe
02·5	6+ Fe?	68·6	5 Wo	17·2	5
4199·9	6+	66·2	6	15·7	6
97·6	6	62·8	6	10·5	6
83·6	6+	58·9	6 Pd	06·6	6+ Rh?
82·8	6+	52·1	6	02 7	6
82·0	6+	48·3	6	01·5	6+
72·8	5	46·4	6	00·1	3
66·3	5	44·5	6	3793·9	5
65·6	6	35·0	4	84·7	6

λ	i	λ	i	λ	i
3777·1	6	3640·9	6	14·9	6
75·5	6+	36·4	5	13·7	3
71·8	6	35·7	6	11·9	6
70·9	6	29·9	6	10·7	6
68·8	6	28·7	4	07·5	6 Rh
65·2	6 Rh	26·4	5+ d.	02·6	6 Rh
62·1	6	23·8	6	3499·0	6
54·8	6	18·9	6+ Fe	88·7	6
53·6	6	17·2	4	85·5	6 Pt?
50·6	5	12·5	6 Rh	84·6	6
47·5	4	09·9	4 Pd?	84·3	6
43·0	6	07·1	6	82·5	6
38·7	5	05·9	3	81·5	6
34·9	4 o. Fe	01·5	6	77·7	6
32·7	6	3598·7	5	76·5	6
31·6	4	97·2	6 Rh	48·9	5
27·7	5+ o. Fe	96·4	6	46·4	6
25·5	5	94·4	4	35·2	5
22·7	5 o. Fe	84·6	6	33·4	6 Pd
14·5	6	83·3	6 Rh	29·7	6
12·6	5	81·1	6 Fe	28·3	6
08·3	6+	76·9	6+	25·1	6
07·1	6	74·9	6+	20·8	6
05·6	6 o. Fe?	73·7	3	16·0	6
01·0	6	70·0	6+ o. Fe	15·4	6+
3698·1	6	67·9	6	12·6	6
96 3	6+	66 0	6	09·2	6+
92·5	4 Rh?	65·0	6	02·2	6 Wo
89·4	5	62·7	6	3397·1	6
87·1	6	61·5	6	95·4	6
84·4	5	59·0	4	93·6	6
76·5	6+	57·2	5	92·9	6
75·0	4	52·2	6+	88·1	6
67·8	6	35·9	6	86·2	6+
64·7	4	32·4	6	81·4	6
61·7	4	27·9	6 Rh	72·9	6
57·9	6 Wo?	26·8	6	71·8	6
53·2	3	23·2	6	71·2	6
47·9	6 o. Fe	22·0	4	68·8	4
45·4	6+	15·9	5	64·6	6+

λ	i	λ	i	λ	i
3359·9	6+	3241·7	5	3128·2	6
55·3	6	40·4	6	22·4	6
50·2	6	37·4	6+	21·9	5
48·1	6	32·0	4	20·9	5
44·7	6+	30·9	6	19·8	6
40·4	6	29·4	5	18·9	5
39·6	6	29·0	6	17·4	5
38·7	6	26·4	6	14·6	6
38·3	6	22·4	5	14·2	6
34·4	5	20·9	3	11·9	6+
27·9	6	19·6	5	10·2	6+
23·9	6	18·6	6	00·4	3 o. Fe
22·9	3	13·6	6	3097·7	6+
16·7	6	13·2	6	94·1	6+
12·3	6	12·1	5	90·1	6
10·7	5	08·1	6	87·9	5
03·7	6	05·1	6	86·4	6
02·0	6	02·7	6	83·0	4
00·7	6	01·8	6	79·7	6
3297·4	6+	01·0	6	77·7	6
94·9	6	3199·0	5	76·6	6
94·3	6	81·4	6	75·4	6
90·4	6+	80·4	6	69·9	6
87·7	6	79·2	6+	68·9	4
87·2	6	77·6	6	64·7	6 Pt?
83·7	6	72·9	6	64·3	6
80·6	6	71·9	6	61·2	6 d.
77·4	6	70·2	6	57·3	6
74·2	6	68·9	5	55·4	6+
71·8	6	68·4	5	53·7	6+
71·4	6	63·9	6	52·1	6
66·5	5	59·2	6	50·4	6
62·1	5	54·7	6	49·4	6
56·9	6+	50·7	6	47·1	5
54·6	5	45·0	6	45·7	6
53·6	5	41·0	6	42·8	3 Pt?
49·7	6	40·4	6	40·6	6
46·9	6	37·8	5	39·3	6
45·4	6+	33·4	3	37·7	6
42·6	6+ Pd	29·1	6	33·7	6

λ	i	λ	i	λ	i
3032·8	6	2939·2	6	2840·1	6
29·3	6	38·6	6	39·1	5
26·4	6	36·6	6	37·4	6 C
26·0	6	34·6	5	36·3	6+ C
24·6	6	29·6	5	33·2	2
22·5	6+	24·8	4	30·3	6+
21·1	6	21·3	5	24·4	5
20·1	6	19·3	6	23·3	6
19·5	6	18·7	6	22·3	6
17·4	6	16·4	6	20·1	6+ d.
15·6	6	13·9	6	16·1	6+
12·4	6	10·1	6 Rh	12·0	5
11·7	6	09·6	6	08·3	6+
09·9	6	07·3	6	04·4	6
08·8	6	04·9	6	00·6	4
08·5	6	01·9	6	2797·6	5+
05·1	6	00·4	6	93·6	5
03·7	6	2899·6	6	91·4	6+
02·0	5	97·1	5	89·1	6
2997·6	5	95·7	6	87·4	6
96·1	6	92·3	6	85·9	6
93·2	6+	89·4	6+	85·2	6
90·7	6	86·9	6	81·3	6+
85·9	6	82·6	6	76·6	6+ br.
80·8	6 Pd	81·1	6	74·8	3
79·4	6 d.	79·3	6	72·5	6
76·4	6	77·7	6	67·6	6
74·9	6	77·1	6	66·3	6
71·4	4	75·7	5	63·3	5
68·7	6+	71·9	6	62·9	6
65·2	6+	69·6	6	59·4	6
64·1	6	67·8	6	58·4	6
63·1	6	63·6	6+ Fe	55·8	6
60·1	6	56·1	6+	53·8	5
54·8	4	54·1	6+ Pd?	52·8	5
51·1	5	50·8	6	50·6	6
49·8	6	49·6	5	49·3	6
46·9	6	48·4	6	47·3	6 C
43·0	5	44·6	6+	43·9	6
40·4	6	42·1	6+	43·3	5

λ	i	λ	i	λ	i
2740·3	5	2636·4	6	2544·0	4
37·6	6+ Rh?	35·4	6	42·1	6
33·6	6	34·4	6	39·6	6
32·5	4	33·1	6	37·6	6
31·1	6	28·3	6 Rh	36·4	6
29·6	6	27·1	6	34·4	6 Pd
27·6	5	25·6	6	33·2	6
26·6	6	23·3	6	30·4	5
14·1	4	20·6	6	29·4	6
12·8	6	20·1	6	28·4	5
11·6	6	17·8	6	25·9	5
08·7	5	17·3	6	25·1	6
05·3	4	11·4	5	23·9	6
04·3	6	08·6	6	19·3	6
2696·9	6	07·6	6	18·6	6
96·3	6	06·7	5	18·1	5
94·3	5	04 5	6	12·5	2
92·4	6	02·2	6	10·9	6 Rh
91·5	6	00·9	6	09·7	6
90·7	5	2599·4	5	04·4	6
84·0	5	96·0	4	03·0	5
79·1	6+ Fe	92·3	6	01·6	6
77·9	6	91·3	6	2498·1	5
76·9	6	89·6	6	93·2	6
73·8	6	86·2	2	91·9	6
71·9	6	80·9	6	90·9	6 Rh
69·6	6 d.	79·6	3	89·4	6
64·8	4	77·4	5	88·4	4
62·7	6	72·9	5	84·3	6
62·2	6	70·9	6	83·0	6
59·6	6+	70·1	6	81·2	5
57·6	6	64·4	6	80·1	6
53·8	6+	63·1	5	75·1	6
51·8	6	62·1	5	72·6	5
51·4	6	58·7	5	71·6	6
49·7	6	57·4	6	71·1	5
46·3	6+	54 4	5	69·5	5
44·3	6+	51·4	6+	67·3	6
39·8	4	47·2	6+	65·0	6
39·4	6	45·9	6	64·3	5

λ	i	λ	i	λ	i
2461·0	6 Rh	2384·8	3	2301·5	6
58·8	6 Rh	81·8	3	00·8	6
57·0	5+ d. Pd	78·0	5	00·5	6
55·5	5+	77·2	6	2298·0	6
52·2	6	75·3	6 d.	97·0	6 C
50·8	6	73·8	6	90·7	5
49·4	5+	72·8	5	81·5	6
47·5	6	68·0	2	80·8	6
45·2	6	66·8	6 Rh	77·3	6
43·0	5	63·0	6	76·3	6
40·0	6	61·7	6	72·5	6+
36·2	6	60·6	6	68·7	6
34·9	6+ 3-fach?	59·2	6	65·0	5
31·8	6 Rh	58·5	6	62·2	6
29·5	6	57·8	5	60·5	6
27·5	6	57·3	6	59·1	6
26·2	6	55·7	6	58·1	6
25·8	6	55·1	5	57·1	5
24·8	6	53·1	5	55·3	6
23·5	6	50·5	5	53·1	6
22·5	6	43·3	5	47·7	6
21·5	6	41·6	5	46·7	5
20·8	6	40·0	5	45·5	5
18·0	5	39·2	6	42·5	4
16·0	5 Rh?	35·0	5 Rh	40·2	6
12·8	5 d.	30·5	6	38·1	6
10·1	5	29·3	5	37·9	6
08·3	6	27·9	6 Rh	34·0	6
07·1	6	27·2	5	33·2	6
04·2	5	26·0	6	32·0	6
02·8	6	24·8	5	24·7	6+
01·2	6	23·7	5	20·8	6
2398·8	3	22·3	6	08·5	6
97·2	6	21·5	6	04·8	5
96·1	6	17·4	5	2197·2	6
94·1	6	14·9	4	96·1	6
93·1	6	14·1	6	90·0	6
92·1	6 Rh	12·5	6	78·5	6
91·2	5	10·4	6	69·0	6
90·5	5	06·7	6	52·3	6
86·7	5	04·0	6		

IX. Rh. Rhodium.

Von Rhodium liegen bisher keinerlei Messungen vor. Die Expositionszeit betrug wieder 15 Minuten bei 4—5 Ampère. Die Linien sind sehr scharf, doch weder besonders stark, noch zahlreich.

λ	i	λ	i	λ	i
4380·1	6+	3818·4	4	3626·8	4
76·6	6	16·7	5	20·7	6
74·9	2	15·2	5	15·2	6
20·0	6+	12·7	6	12·7	4
17·3	6+	06·8	5 o.	06·1	6
4288·9	4	06·1	4	3597·4	4
11·3	2	3799·5	3 Pd?	96·4	4
4196·7	5	93·4	4	83·3	4
54·6	6	88·6	5	70·2	5 o. Fe
35·4	3	78·3	6	64·4	6
29·1	3	70·1	5	59·9	6+
21·9	4	65·2	4	49·6	5
4083·0	4	60·4	6+	44·2	5
23·3	6+	54·4	4	42·1	6
3984·7	6	48·5	5 o.	38·3	5
75·6	6	44·3	6	37·3	6
73·5	6+	37·5	5	28·1	3
68·6	5 o. Wo	35·5	4	13·7	6+ Ir
59·1	3	13·1	5	12·7	6+
42·8	4	02·1	4	07·4	4
36·1	5	3699·7	5	02·7	4
34·4	5	95·7	5	3498·9	5
33·7	4 o. Wo	92·5	3 Ir?	79·0	5
22·2	6	90·9	5	77·9	5
13·7	6+	81·3	5	74·7	4
3882·4	6+	75·2	6 Ir?	70·5	4
77·6	6	66·4	5	61·9	4
70·4	5	62·1	6	57·7	6+
56·7	2	58·1	3	55·0	6+
38·9	6+ br.	55·2	6	40·4	5
34·1	3	52·9	6+ br.	34·7	2
28·7	3	49·8	6	24·2	6+
22·4	3	35·9	6+	21·0	6+ Pd

λ	i	λ	i	λ	i
3412·2	5	2910·1	3	2657·1	6
07·7	6+	2880·6	6+	54·6	6
3399·7	6	78·4	6+	51·8	5
96·7	3	74·1	6+	42·8	6
76·7	6+ br.	67·4	6	41·5	6
72 0	5	62·9	6	39·0	4
68·2	6	45·5	5	35·1	5+
60·6	6	26·5	6	30·3	6
60·0	6	19·1	4	28 1	4 o.
23·0	4 Ir?	07·6	6+	25 3	4 o.
07·2	6	03·6	6+	09·1	5
00·5	6	02·1	6+	06·8	6
3296·5	6	2797·1	6+	04 1	6
94·0	6	95·6	6+	03·1	6
89·0	6	92·6	6	2596·8	5
83·5	5	90·7	6	93·3	6
80·4	5	81·6	5	91·9	6
71·5	6	78·1	5	87·1	6
67·5	6	75·6	6	86 1	6 Ir
63·0	6	66·4	6	82·3	6
47·2	6	64·6	6	81·4	5
33·2	6 o.	61·1	6	68·8	5
31·3	6+	57·6	6+	66·9	6
20·5	6	39·8	4	64·8	6
07·2	6+	37·2	4	61·7	6
3191·0	6+	28·9	6	59·8	6
87·8	6+	17·4	6	57·1	5 d.
59·2	5	15·2	3	55·2	6
41·0	6+ br.	05·5	3	50·6	6
3097·0	6+	00·6	6+	49·6	6
93·3	6+	2690·9	6	45·3	5
49·0	6	89·4	6	43·9	6 Ir?
47·2	6	83·8	5+	41·8	6+ d.
19·9	6	81·4	6	37·6	6+
09·3	6+	78·8	6	34 8	6
2988·9	6+	76·3	6	31·5	5
86·1	6+	74·3	5	27·3	6
63·4	5	69·1	6+	23·6	6
26·4	6	63·6	5	20·6	3
23·8	6+	59·1	5	17·7	5

λ	i	λ	i	λ	i
2515·5	6	2438·8	5	2359·3	5
10·7	3	36 7	6	57·6	6
05·1	4	31·8	3	56·3	6
03·8	5	29·8	5	52·8	6+ d.
02 6	6	27·1	3	50·4	6
01·5	6	24·3	6	49·7	6
2498·5	6+	23·3	6	47·7	6
96·0	6	21·9	6	46·6	4
94·3	6	21·0	3	38·6	6
91·8	4	20·2	5	34·8	3
90·8	3	17·5	6	33·3	6
88·5	6 Pd	15·8	3	27·6	4
86·0	6	14·6	6	26·5	6
82·8	5	11·9	6	24·6	6 Ir?
81·0	6	10·7	6	23·0	6
80·5	6	08·6	5	21·9	6
77·6	6	05·2	6	15 1	6 Ir?
75·6	4	03·5	6	12·8	6
71·7	5	2396·6	4	11·6	6
70·6	6	92·3	4	06·1	6
67·1	6	90·7	6	03·6	6
66·1	6	87·7	6+	2298·5	6
63·4	5	86 0	6	94·3	4
61·1	3	85·5	6	90·1	4
59·0	3	83·6	6+	84·1	6
56·0	3	77·8	5	77·0	5
48·3	5 Pd?	74·6	6	63·3	5
46·8	6	71·1	6+	61·6	6
44·8	6	69·3	6	45·8	6+ Ir?
44·0	4	66·8	4	42·8	6+ Ir
39·8	6	64·6	5+		

Über die Wirkung des Windes auf schwach gewölbte Flächen

von

A. v. Obermayer,
c. M. k. Akad.

(Mit 8 Textfiguren.)

In jüngster Zeit ist dem Segelfluge der Vögel besondere Aufmerksamkeit zugewendet und das Interesse daran noch durch den Umstand erhöht worden, dass es Herrn O. Lilienthal in Berlin nach langjährigen, mühevollen, mit seltener Ausdauer geführten Versuchen gelungen ist, einen Flugapparat zu construiren, mittelst dessen es möglich ist, sich über einen Hang herablaufend in die Luft zu erheben und unter Benützung des Windes eine grössere Strecke nach Art der Segelvögel schwebend zurückzulegen.[1]

Zur Erklärung des Segelfluges werden die zwei folgenden, zuerst aus den Versuchen von Lilienthal, später aus solchen von G. Wellner in Brünn über den Luftwiderstand gewölbter Flächen gefolgerten Sätze benützt:

1. Besitzen solche Flächen, wenn sie unter geringer Neigung gegen die Luft bewegt werden, ein weitaus grösseres Tragvermögen als ebene Flächen.

2. Eine schwach gewölbte Fläche, horizontal gelagert und unter einem gewissen Winkel nach abwärts bewegt, vergrössert zufolge des Luftwiderstandes selbständig ihre horizontale Geschwindigkeit.[2]

---

[1] Zeitschrift für Luftschiffahrt und Physik der Atmosphäre, redigirt von Dr. V. Kremser in Berlin. XII. Jahrgang, S. 259—272.

[2] Der Vogelflug als Grundlage der Fliegekunst, von Otto Lilienthal in Berlin, 1889, S. 100.

Das letztere Resultat wird sowohl aus den nach verschiedenen Methoden angestellten Versuchen von Lilienthal, als auch aus den nach einer wesentlich verschiedenen Methode angestellten Versuchen von G. Wellner[1] gefolgert. Dieser letztere Experimentator fasst seine Versuchsergebnisse in folgende Sätze zusammen: »Die Hebekraftwirkung gut geformter, sanft nach oben parabolisch gewölbter Tragflächen ist sowohl bei ruhendem Zustande im Winde, als auch bei Vorwärtsbewegung derselben in ruhender Luft, selbst wenn sie unter sehr kleinen Elevationswinkeln eingestellt sind, eine sehr bedeutende, und die Richtung des geweckten Luftwiderstandes fällt noch um einige Grade vor die Senkrechte zur Flächensehne, kommt also im treibenden Sinne zu stehen.«

Dieses befremdliche Resultat, dass der Luftwiderstand unter Umständen eine treibende Wirkung geben soll, steht mit dem Gesetze von der Bewegung des Schwerpunktes im Widerspruche, ist in den Versuchen von Lilienthal dem Umstande zuzuschreiben, dass nicht mit freien Systemen experimentirt wurde, sondern mit solchen, welche sich um feste Axen drehen, und dürfte in den Versuchen von Wellner vielleicht durch andere Umstände bedingt sein, die sich nicht so ohne Weiteres ermessen lassen.

Ich habe nun Versuche ähnlich den Lilienthal'schen unternommen, bei welchen eine Fläche, die um eine ausserhalb liegende Axe beweglich ist, durch den Winddruck gegen die Windrichtung gedreht wird und versuche diese Erscheinung durch das Moment zu erklären, welche der Winddruck bezüglich der Drehaxe der Fläche gibt, wenn diese um weniger als den Krümmungshalbmesser von derselben absteht. Ich zeige auch weiter nach der Wellner'schen Methode, dass die von mir theoretisch ermittelte Lage der Resultirenden höchst

[1] Zeitschrift für Luftschiffahrt, XII. Jahrgang, 1893, Beilage, S. 1—48. Versuche über den Luftwiderstand gewölbter Flächen im Winde und auf Eisenbahnen, mit Rücksicht auf das Problem dynamischer Flugmaschinen. Sonderabdruck aus der Zeitschrift des öster. Ingenieur- und Architectenvereines, 1898. Nr. 25—28.

wahrscheinlich, und dass somit eine negative Tangentialcomponente des Luftdruckes nicht anzunehmen ist.

Der Einfachheit der Rechnung und der Erzeugung wegen habe ich statt der Flächen, wie sie Lilienthal und Wellner anwendeten, Cylinderflächensegmente benützt, deren Wölbungshöhe $^1/_{12}$ der Sehnenlänge beträgt. Ein solches Segment AOB (Fig. 1) hat eine Öffnung von $\varphi = 37°48'$. Die

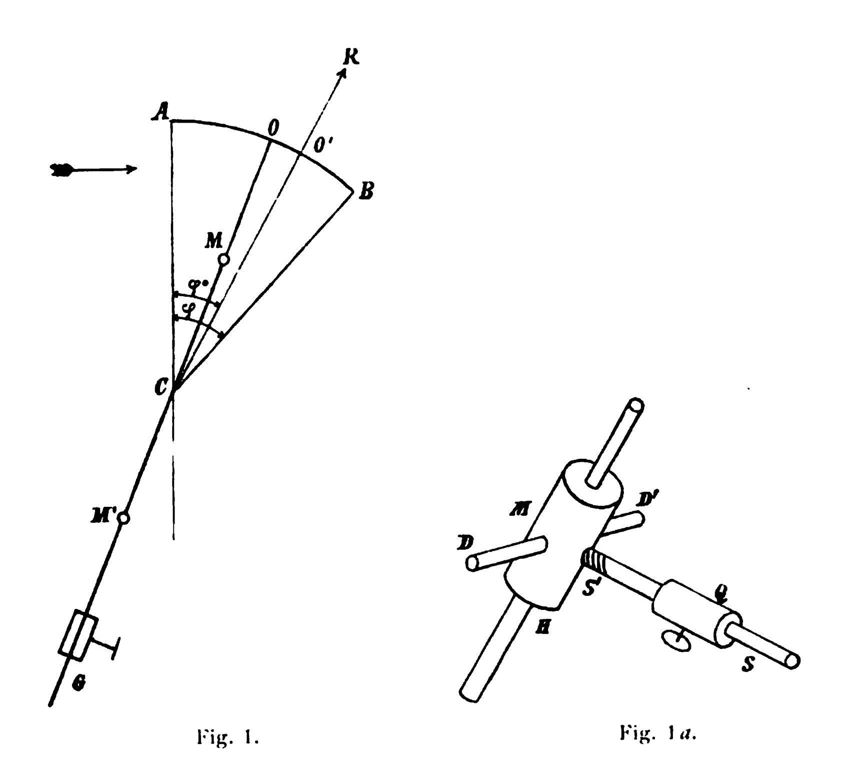


Fig. 1. Fig. 1 *a*.

Cylinderaxe gehe durch den Punkt C und stehe senkrecht auf der Ebene der Zeichnung.

Die Fläche wird an einem Stabe $OMCM'G$ befestigt, welcher durch die Cylinderaxe C und die Mitte der Fläche AOB geht und auf der Sehne AB senkrecht steht.

Auf dem Stabe lassen sich verschieben:

1. eine Hülse H (Fig. 1 *a*) mit einer zur Bohrung derselben senkrechten Axe DMD' und einem das klemmbare Gewicht Q

tragenden Stiele SS', der gleichzeitig zum Klemmen der Hülse dient;

2. ein Gegengewicht G.

Die Hülse H wird an einem Punkte M oder M' des Stabes geklemmt, die Axe in die Lager eines gabelförmigen Trägers so eingelegt, dass der Stiel frei schwingen kann. Die Gewichte G und Q erhalten eine solche Stellung, dass der Halbmesser CA der Cylinderfläche vertical ist.

Wird ein horizontaler Windstrom gegen die Fläche AOB gelenkt, so wird dieselbe gegen den Windstrom gedreht, wenn die Axe in M je nach der Grösse der Fläche circa $^1/_3$ OC bis $^2/_3$ OC von O absteht, vom Winde aber weggeblasen, wenn die Axe in M' unterhalb von C gelegen ist.

Ich habe mit zwei Flächen von verschiedener Grösse experimentirt. Die kleinere hatte einen Halbmesser von 30 *cm*, eine Wölbungshöhe von 1·6 *cm*, eine Breite von 18 *cm* und war im Bogen gemessen 20 *cm* lang; die grössere hatte einen Halbmesser von 60 *cm*, war 20 *cm* breit, 40 *cm* im Bogen gemessen lang und hatte eine Wölbungshöhe von 3·3 *cm*. Die Flächen waren aus gelben Pressspänen hergestellt und der mittleren Kreislinie nach an eine schwache Messingblechrippe genietet, welche die Krümmung bedingt und erhält. In den kleineren Dimensionen habe ich auch Zinkblechflächen angewendet.

Der Wind wurde durch einen Centrifugalventilator mit 45 *cm* Flügeldurchmesser, durch einen cylindrischen Röhrenansatz von 19 *cm* Durchmesser geliefert. Zum Antriebe des Ventilators diente eine elektrische Kraftübertragung, welche von den 2 Pferdekräften des Gasmotors nahe an $^2/_3$ Pferdekräfte an den Ventilator übertrug. Derselbe vollführte dabei circa 2400 bis 2800 Touren in der Minute.

Die Fläche war mit ihrem Träger auf einem Hebetische befestigt und wurde so hoch aufgestellt, dass die vordere Kante 3—4 *cm* unter dem oberen Rande der Ventilatoröffnung lag.

Am besten gelangen die Versuche mit der grösseren Fläche. Bei einem Abstande der Axe $OM = 20$ *cm* und einer Entfernung der Fläche von der Ventilatormündung von 35 *cm* wurde die Fläche unzweifelhaft gegen die Ventilatormündung bewegt und

zum Überschlagen gebracht, so dass die convexe Seite gegen den Wind gerichtet war. In dieser Stellung scheint der Winddruck auch eine Resultirende hervorzubringen, welche gegen den Wind dreht. Auch dann, wenn die Stange *OMM'* und damit die Fläche um 45° geneigt wurden, trieb der in die concave Seite der Fläche blasende Wind dieselbe bis zum Überschlagen gegen die Ventilatoröffnung.

Bei Entfernungen von $OM = 25$ *cm* und 30 *cm* ging die Drehung der Fläche gegen den Wind sehr ausgesprochen vor sich, auch dann noch, wenn die vordere Kante der Fläche 50—65 *cm* von der Ventilatoröffnung entfernt ist.

Bei $OM = 40$ *cm* war die zulässige Grenze des Abstandes *OM* erreicht. Hier schlug die Fläche mitunter schon im Sinne des Windes aus, insbesondere, wenn derselbe die Fläche zu federnder Schwingung veranlasst. Gleichwohl wurde die Fläche noch vielmals aus der in Fig. 1 angegebenen Anfangsstellung gegen die Ventilatoröffnung hinbewegt.

Bei grösserer Neigung des Stabes gegen den Ventilator schlug die Fläche stets im Sinne des Windes aus.

Mit den kleineren Flächen tritt bei einem Abstande $OM =$ $= 10—12$ *cm* eine ganz ausgesprochene Bewegung gegen die Ventilatoröffnung ein. Bei grösserem Abstande *OM*, d. i. über 13 *cm*, wird die Fläche bereits im Sinne des Windstromes gedreht.

Zur Erklärung dieser Erscheinung kann von der üblichen Voraussetzung ausgegangen werden, dass der Winddruck normal auf die Flächenelemente wirke. Es ergibt sich so eine Resultirende, welche durch die Axe *C* der Cylinderfläche *AB* hindurchgeht.

Je nachdem vorausgesetzt wird, dass der Luftwiderstand gegen ein geneigtes Flächenelement der ersten oder der zweiten Potenz des Sinus des Winkels zwischen Flächenelement und Richtung der Luftgeschwindigkeit proportional ist,[1] findet man für die Tangente des Neigungswinkels φ_0 der Luftwiderstandsresultirenden zur Verticalen:

---

[1] Die erste Potenz findet für den Widerstand geneigter Flächen im Wasser, Fink, »Civil-Ingenieur«, 1892, S. 635.

$$\operatorname{tg} \varphi_0' = \frac{\varphi - \frac{1}{2} \sin^2 \varphi}{\sin^2 \varphi}, \qquad \operatorname{tg} \varphi_0'' = \frac{2 - 3 \cos \varphi + \cos^3 \varphi}{\sin^3 \varphi}.$$

Für den Winkel $\varphi = 37°48'$ ergeben sich so $\varphi_0' = 25°3'$ und $\varphi_0'' = 28°6'$.

Die Luftwiderstandsresultirende R hätte hiernach die in Fig. 1 angedeutete Lage. Später anzuführende Versuche bestätigen dieses Rechnungsresultat, und zwar bezüglich φ_0'' zufällig auch ziffermässig genau.

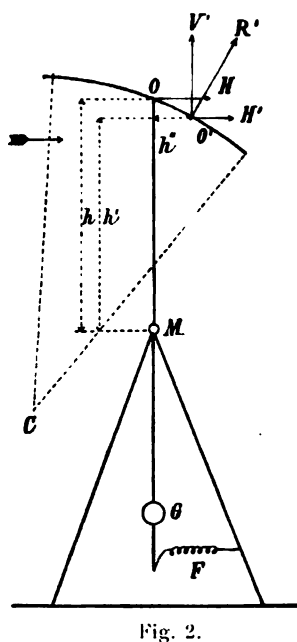


Fig. 2.

Wird diese Lage der Resultirenden vorausgesetzt, dann dreht dieselbe um einen Drehpunkt M oberhalb von C gegen den Windstrom zurück, sonst wie bei M' mit dem Windstrom. Der Stoss des Windes gegen die vordere Flächenkante und gegen den Stiel geben ein Moment, welches im Sinne des Windes dreht; es wird daher die Entfernung OM, für welche Drehung gegen den Wind eintritt, stets kleiner als OC bleiben, und zwar umso kleiner, je kleiner OC selbst gewählt wird.

Das Princip der Lilienthal'schen Versuche ist in den beiden Figuren 2 und 3 anschaulich gemacht. Die Flächen AB sind an den Enden abbalancirter Hebel OMG befestigt, und die Kräfte werden durch Dynamometer gemessen. Aus den Versuchen Fig. 2 werden von Lilienthal die Horizontalcomponente H, aus jenen Fig. 3 die Verticalcomponente V, unter der nicht zutreffenden Voraussetzung gerechnet, dass die Luftwiderstandsresultirende durch den Befestigungspunkt o der Fläche an der tragenden Stange hindurchgeht.

Wird, wie in vorhergehender Fig. 1 vorausgesetzt, die Resultirende R' in O' angreifend angenommen, dann gibt der Versuch Fig. 2 nicht die Componente H selber, sondern die

Differenz der Momente der beiden Componenten H' und V' der Luftwiderstandsresultirenden R' und der Versuch Fig. 3 die Summe dieser Momente um die Drehpunkte M.

Nach der Lilienthal'schen Berechnung wird daher H zu klein, V zu gross gefunden.

Wäre die Lage des Punktes o' bekannt und sind nach dem Lilienthal'schen Verfahren die Kräfte H und V gemessen,

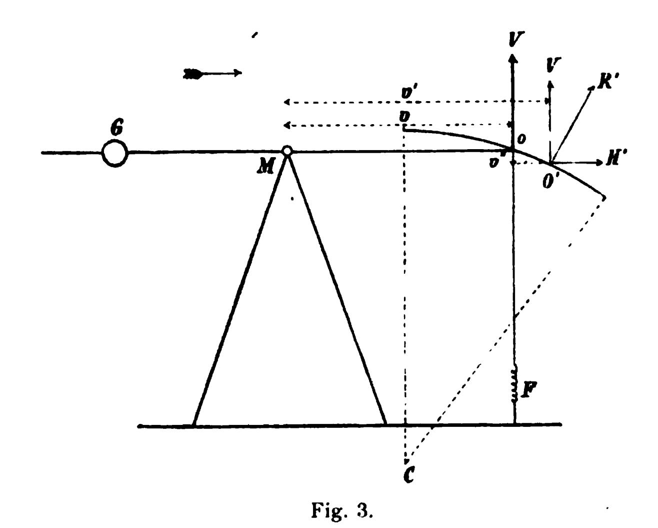


Fig. 3.

dann hätte man zur Berechnung von H' und V' die vier Gleichungen:

$$Hh = H'h' - V'h'' \qquad h' = h - v''$$
$$Vv = V'v' + H'v'' \qquad v' = v + h''$$

Ist die Lage von o' unbekannt, dann wäre der Abstand OM in beiden Apparaten zu ändern und zwei weitere Versuchsreihen durchzuführen, wodurch eine hinreichende Anzahl von Gleichungen zur Berechnung der vier Grössen H', V', h'' und v'' gewonnen werden. Allerdings sind derlei Versuche so schwierig, dass auf besonders genaue Resultate nicht zu hoffen ist und Fehler in bestimmtem Sinne nicht ausgeschlossen erscheinen.

Für Flächen von einer Wölbungshöhe gleich $^1/_{12}$ der Sehnenlänge, bei 18° Neigung der Sehne gegen den Horizont

gibt Lilienthal, was hier in grober Annäherung übertragen werden soll,[1] eine Resultirende $R = 138$ mit einer negativen Tangentialcomponente $T = 9$. Der Winkel der Resultirenden gegen die Normale im Punkte o ist um 3°44′ gegen den Wind hin gelegen. Die beiden Componenten, welche Lilienthal der Rechnung zu Grunde legt, sind $H = 34$ und $V = 134$.

Unter der sehr ungünstigen Annahme von $h = v = 30$, $h' = 28 \cdot 2$, $v' = 34 \cdot 5$, $h'' = 4 \cdot 5$, $v'' = 1 \cdot 80$, was etwa der in Fig. 1 vorausgesetzten Lage der Resultirenden R' bei einem Halbmesser der Fläche von 30 *cm* entspricht, wird nach den obigen Formeln erhalten:

$$H' = 54 \cdot 3 \qquad V' = 113 \cdot 9 \qquad \sphericalangle H'oR' = 64° 30',$$

während 63°12′ die Neigung der Normalen durch den Punkt o zum Horizont ist, also nur mehr eine Neigung der Resultirenden um 1°18′ gegen den Wind.

Wird aber vorausgesetzt, dass der Abstand $oM = h = 25$ *cm* beträgt und $h' = 23 \cdot 2$, $v' = 29 \cdot 5$, $h'' = 4 \cdot 5$, $v'' = 1 \cdot 8$ angenommen, dann sind

$$H' = 57 \cdot 97 \qquad V' = 110 \cdot 0 \qquad \sphericalangle H'oR' = 62° 13',$$

also bereits ein Winkel, der um 1° jenseits der Normalen liegt. Nach der Annahme von $oM = h = 20$ wird dieser Winkel sogar 58° 52′.

Nach diesen Darlegungen ist also nicht ausgeschlossen, dass eine andere Berechnung der Lilienthal'schen Versuche im Winde keine negative Tangentialcomponente ergeben haben dürfte.

Eine sehr einfache Bestimmung der Richtung der Luftwiderstandsresultirenden gestattet die Versuchsanordnung von G. Wellner. In derselben findet keine Drehung der Fläche, sondern eine Translation statt, und das Gleichgewicht wird nicht durch ein Kraftmoment, sondern durch die Kraft selber hergestellt.

Die Wellner'sche Versuchsanordnung besteht (Fig. 4) aus einem mit Gelenken versehenen Parallelogramme *ABDC*,

[1] Vogelflug, Tab. V, Fig. 2.

dessen obere Seite CD die Fläche MN trägt. Die Axen in A und B liegen in Lagern, die nach abwärts reichenden Stangen CAP und DBC tragen Gegengewichte P und Q, welche gestatten, den Apparat so abzubalanciren, dass er in jeder Lage im Gleichgewichte bleibt. Wird die Fläche dem Winde ausgesetzt, so neigen sich die Stangen CAP und DBQ so weit,

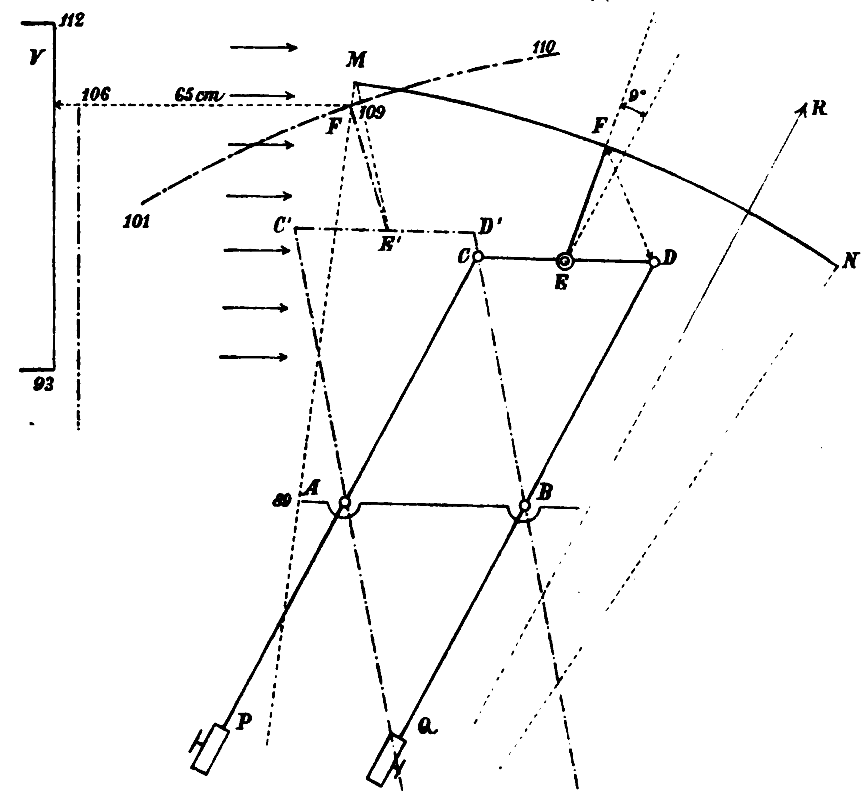


Fig. 4. $^1/_4$ nat. Gr.

bis dieselben mit der Luftwiderstandsresultirenden parallel sind, und dann tritt wieder Gleichgewicht ein.

Wellner hat mit diesem Apparate in sorgfältiger Ausführung experimentirt, unter Anderem denselben auch auf der Vorderseite fahrender Locomotive aufgestellt und die Fläche MN dabei unter verschiedenen Winkeln gegen den Horizont geneigt.

Für meine Versuche mit dem Windstrom des Ventilators wurde die Anordnung sehr einfach ausgeführt. Die Axen bei A und B waren wie in Fig. 1*a* an klemmbaren Hülsen befestigt und gestatteten so die Arme AC und BD beliebig zu verändern; sie ruhten in den Lagern eines gabelförmigen Trägers, der den Stielen AP und BQ freie Bewegung gestattet. Die Gegengewichte P und Q sind schwere, mit Schrauben zu klemmende Hülsen. Die Stange EF, welche die Fläche MN trägt, ist in der Mitte von CD mit einem mit Reibung beweglichen Gelenke befestigt und gestattet die Fläche MN unter verschiedenen Winkeln zu neigen. Die Stange ist senkrecht auf der Sehne MN und geht durch die Mitte der Fläche. Es wurden hier dieselben aus Pressspan gefertigten Flächen wie in den früher angeführten Versuchen benützt, und es gehen die Versuche auch hier mit der grösseren Fläche von 60 *cm* Halbmesser besser. Mit Hilfe der Reibung gelingt die Abbalancirung der Fläche durch die Gegengewichte P und Q sehr leicht.

War die Sehne MN horizontal gestellt, so wurde die Fläche vom Winde jedesmal so weit weggeblasen, als die sich neigenden Stangen es zuliessen, ebenso wenn die convexe Seite der Fläche gegen den Windstrom geneigt wurde; eine Einstellung in eine Gleichgewichtslage war nicht vorhanden.

Wurde die concave Seite der Fläche dem Winde zugewendet, dann war eine nach mehreren Schwingungen erfolgende, deutliche Einstellung in eine Gleichgewichtslage vorhanden, welche sich auch beliebig lang erhielt.

Zur Bestimmung der gegenseitigen Lage der Apparatbestandtheile wurden die Distanz FD und die Diagonale CB des Parallelogramms gemessen.

Im Apparate war $CD = AB = 9 \cdot 5$ *cm*, $EF = 7$ *cm* hergestellt worden. Dabei ist die Sehne der Fläche um nahe 18° gegen den Horizont geneigt. Für Abstände $AC = BD =$ $= 14 \cdot 5$ *cm*, unter Anwendung der grossen Fläche, bei $FD =$ $= 7 \cdot 0$ *cm*, war die Länge der Diagonalen bei der Einstellung im Winde 13 *cm*. Eine Construction des Apparates nach diesen Daten, wie in Fig. 4, liefert die Neigung der Mittellinie EF der Fläche und der Resultirenden, welche parallel zu AC und BD liegt. Durch Abmessen des Winkels mit einem Transporteur

wird dieser Winkel gleich 9° gefunden. Die Resultirende des Luftwiderstandes liegt also, wie ich eingangs mit Hilfe einer einfachen Rechnung ableitete, nicht in der mittleren Diametralebene der Fläche, sondern in einer um 9°, im Sinne der Windrichtung dagegen verschobenen Diametralebene. Zufällig ist bei der Voraussetzung, dass der Luftwiderstand eines geneigten Flächenelementes dem Quadrate der Sinus des Neigungswinkels der Flächenelemente zum Windstrome proportional sei, der Winkel von 28° 6′ als Neigung der Luftwiderstandsresultirenden gegen die Verticale gefunden worden, während die Neigung der mittleren Diametralebene 18° 54′ beträgt.

Es hat mich selbstverständlich interessirt, ob es in meiner Versuchsanordnung keine Stellung der Fläche gibt, bei welcher dieselbe gegen den Wind getrieben wird, da ja Wellner bei seinen Versuchen auf dem Locomotive eine Neigung der Stäbe gegen den Wind bis zu 3° beobachtet hat.

Bei voller Öffnung des Ventilatorrohres ist mir dies nicht gelungen, dagegen wohl, wenn die Öffnung des Ventilators bis auf 6 *cm* vom oberen Rande abgedeckt, die Fläche mit der convexen Seite gegen den Wind geneigt war. In Fig. 4 ist durch die Linien —·—·— die gegenseitige Anordnung der Apparate unter Benützung der grossen Fläche dargestellt. *V* ist dabei die Öffnung des Ventilators, und die beigeschriebenen Zahlen sind die Höhencoten der einzelnen Punkte der Apparate über dem Zimmerboden. Der Winkel zwischen *EF* und der Richtung der Stangen, d. i. der Richtung der Resultirenden ist dann auch nahe 9°. Es wird bei dieser Versuchsanordnung hauptsächlich der rückwärtige Theil der Fläche vom Winde getroffen. Unter diesen abnormen Verhältnissen konnte ich eine Bewegung der Fläche gegen Wind und eine dauernde Einstellung in eine Gleichgewichtslage erzielen. Auch mit der kleineren Fläche habe ich eine ähnliche, wenn auch weniger auffällige Einstellung gegen den Wind erhalten.

Wenn auch diese letzteren Versuche gegen jene Wellner's nichts beweisen, so zeigen dieselben doch, dass solche Erscheinungen wie die Einstellung gegen den Wind durch Nebenumstände bedingt sein können, die bei den complicirten Versuchsverhältnissen sich nicht immer voraussehen lassen.

Zum Schlusse füge ich noch einen Versuch an, welcher die Lilienthal'sche Erklärung des grösseren Tragvermögens gekrümmter Flächen gegenüber ebenen Flächen zu illustriren geeignet ist. Lilienthal[1] behauptet nämlich, dass durch die allmälige Ablenkung des Luftstromes, durch eine schwach gekrümmte Fläche ein weitaus grösserer Druck auf dieselbe entstehe, wie die auf Wirbelbewegungen veranlassende, ebene Fläche.

Mit Hilfe des Dvořak'schen Schlierenapparates ist es mir gelungen, die Bestätigung dieser Voraussetzungen zu erbringen. Ich habe diesen Apparat aus einer Dubosq'schen Biconvexlinse, von etwa 22 *cm* Brennweite und 12 *cm* Öffnung und

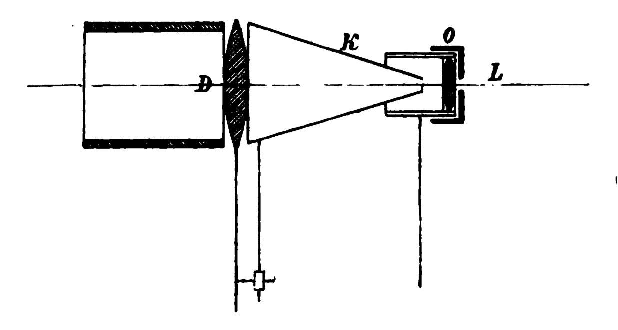


Fig. 5.

einem alten Fernrohrobjectiv, von etwa 20 *cm* Brennweite und 3·5 *cm* Öffnung zusammengestellt. Die Dubosq'sche Linse ist (Fig. 5) einerseits mit einer cylindrischen, anderseits mit einem conischen Rohre versehen worden, wovon sich letztere an einem eigenen Stiel verstellen lässt, und das Fernrohrobjectiv *O* ist in eine cylindrische Hülse aus Holz gefasst, worüber ein Diaphragma mit etwa 7 *mm* weiter Öffnung geschoben ist. Das vom Heliostaten gelieferte Sonnenlicht wird durch den Apparat zu einer grossen Lichtscheibe auf dem etwa 4 *m* entfernten Schirme ausgebreitet. Wird ungefähr 2 *m* von den Linsen eine Fläche so aufgestellt, dass ihr Schatten so schmal als möglich erscheint, und unterhalb ein Bunsenbrenner, womöglich ein mehrfacher, angebracht, so sieht man auf dem Schirme die

[1] Vogelflug, S. 80, Fig. 30.

Bewegung der erhitzten Luft deutlich abgebildet. An der schwach gekrümmten Fläche, so gestellt, dass deren untere Tangentialebene nahe vertical steht, ist deutlich die allmälige Ablenkung des gesammten, die Fläche treffenden Luftstromes zu beobachten, während bei einer ebenen Fläche, die ungefähr nach der Sehne der krummen Fläche geneigt ist, der Luftstrom sich nahe dem unteren Ende unter Bildung von Wirbeln theilt und der untere Theil um die untere Kante herumgeht.

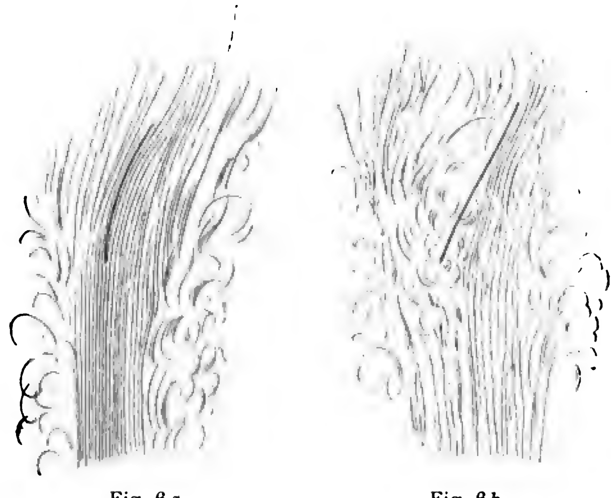


Fig. 6*a*. Fig. 6*b*.

Nach dem regelmässigen Verlaufe der Luftströmung an schwach gekrümmten Flächen erscheint die vortheilhaftere Anwendung derselben zur Arbeitsleistung und deren grösseres Tragvermögen gegenüber den, Wirbel bedingenden, ebenen Flächen vollkommen erklärbar.

Während nun das grössere Tragvermögen schwach gekrümmter Flächen im Winde thatsächlich experimentell vollkommen sichergestellt ist, weisen die vorangeführten Versuche darauf hin, dass zur Annahme einer negativen Tangentialcomponente des Luftwiderstandes, d. i. einer solchen, die gegen die Windrichtung gelegen ist, kaum ein Grund beigebracht werden kann, zumal diese Annahme mit den Gesetzen der Mechanik im Widerspruche steht.

XX. SITZUNG VOM 17. OCTOBER 1895.

Der Vorsitzende begrüsst das anwesende Mitglied Herrn Regierungsrath Prof. E. Mach, der nun durch seine Berufung nach Wien an den akademischen Sitzungen theilzunehmen in der Lage ist.

Das k. u. k. Reichs-Kriegs-Ministerium »Marine-Section« theilt ein Telegramm des Commandos S. M. Schiffes »Pola« mit, laut welchem letzteres mit der wissenschaftlichen Expedition ins Rothe Meer am 15. d. M. Vormittag wohlerhalten in Port Said eingelaufen ist.

Se. Excellenz der Herr Curator-Stellvertreter der kaiserl. Akademie übermittelt ein Exemplar der Regierungsvorlage des Staatsvoranschlages für das Jahr 1895, betreffend Capitel IX »Ministerium für Cultus und Unterricht«, ferner ein Exemplar des Allerhöchst sanctionirten Finanzgesetzes vom 27. Juli 1895.

Herr Dr. Alfred Nalepa, Professor am k. k. Elisabeth-Gymnasium im V. Bezirk in Wien, übersendet folgende vorläufige Mittheilung über »Neue Gallmilben« (12. Fortsetzung).

Das w. M. Herr Hofrath Prof. V. v. Ebner überreicht eine Abhandlung: »Über den Bau der Chorda dorsalis des *Amphioxus lanceolatus.*«

Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:

Engelhardt B. de, Observations astronomiques, faites dans son Observatoire à Dresde. IIIème Partie. Dresden, 1895; 8^0^.

Haeckel E., Systematische Phylogenie der Wirbelthiere *(Vertebrata)*. III. Theil des Entwurfes einer systematischen Phylogenie. Berlin, 1895, 8⁰.

Jahrbuch der organischen Chemie, herausgegeben von Gaetano Minunni (Palermo). Erster Jahrgang, 1893. Mit einem Vorwort von Ernst v. Meyer (Dresden). Leipzig, 1896; 8⁰.

Reber J., des Johann Amos Comenius Entwurf der nach dem göttlichen Lichte umgestalteten Naturkunde und dessen beide physikalischen Abhandlungen: »Untersuchungen über die Natur der Wärme und der Kälte« und »Descartes mit seiner Naturphilosophie von den Mechanikern gestürzt.« Giessen, 1895; 8⁰.

XXI. SITZUNG VOM 24. OCTOBER 1895.

In Verhinderung des Herrn Vicepräsidenten führt Herr Intendant Hofrath Ritter v. Hauer den Vorsitz.

Das k. u. k. Reichs-Kriegs-Ministerium »Marine-Section« theilt ein Telegramm des Commandos S. M. Schiffes »Pola« mit, laut welchem letzteres mit der wissenschaftlichen Expedition ins Rothe Meer am 18. d. M. Nachmittag wohlbehalten in Suez eingelaufen ist.

Für die diesjährigen Wahlen sprechen ihren Dank aus: Herr Prof. C. Weierstrass in Berlin für seine Wahl zum Ehrenmitgliede — und Herr Director H. Seeliger in München für seine Wahl zum correspondirenden Mitgliede dieser Classe im Auslande.

Das w. M. Herr Regierungsrath Prof. E. Mach legt eine Arbeit aus dem physikalischen Institute der k. k. deutschen Universität in Prag von Dr. Josef Ritter v. Geitler vor, betitelt: »Schwingungsvorgang in complicirten Erregern Hertz'scher Wellen«. (II. Mittheilung.)

Das w. M. Herr Hofrath Prof. V. v. Lang überreicht eine Mittheilung der Herren Regierungsrath Dr. J. M. Eder und E. Valenta in Wien: »Über das rothe Spectrum des Argons«.

Ferner legt Herr Hofrath v. Lang eine Arbeit vor, betitelt: »Interferenzversuch mit elektrischen Wellen«.

Herr Dr. J. Holetschek, Adjunct der k. k. Universitäts-Sternwarte in Wien, überreicht eine Abhandlung, betitelt: »Untersuchungen über die Grösse und Helligkeit der Kometen und ihrer Schweife. I. Die Kometen bis zum Jahre 1760«.

Das w. M. Herr Hofrath Director J. Hann überreicht eine Abhandlung von Eduard Mazelle, Adjunct am k. k. astronom.-meteorolog. Observatorium in Triest, betitelt: »Beitrag zur Bestimmung des täglichen Ganges der Veränderlichkeit der Lufttemperatur«.

Interferenzversuch mit elektrischen Wellen

von

Viktor v. Lang,
w. M. k. Akad.

(Mit 3 Textfiguren.)

I.

Das im Nachfolgenden beschriebene Experiment mit elektrischen Wellen entspricht einem in die Akustik von Quincke eingeführten Interferenzversuche. Die ursprüngliche Welle wird in zwei Theile getheilt, welche ungleich lange Wege zurückzulegen haben und die nach ihrer Wiedervereinigung interferiren. Ich wollte diesen Versuch zuerst mit Messingröhren von 30 *mm* lichter Weite ausführen, bekam aber hiebei keine Anzeichen von Interferenz. Der Versuch gelang erst, als ich Röhren von ungefähr dem doppelten Durchmesser benützte. Dieselben waren aus Papier geformt und natürlich mit Stanniol überzogen.

Die Erregung der Wellen, die ja von kurzer Länge sein mussten, geschah nach der von Righi[1] angegebenen Methode, die nur insofern einfacher sein konnte, als bei meinen Versuchen die erregenden Funken horizontal zu sein hatten. Der Nachweis der elektrischen Wellen geschah nämlich mit Hilfe der von Branly[2] gefundenen Thatsache, dass eine mit Metallfeilicht gefüllte Glasröhre ihren Widerstand entsprechend der elektrischen Bestrahlung ändert, durch eine leise Erschütterung aber ihren anfänglichen Widerstand wieder annimmt.

---

[1] Beiblätter, 1894, S. 134, 960.
[2] Ibid. 1891, S. 116, 229.

Der benützte Apparat Fig. 1 hatte also als Erreger einen kleinen parallelopipedischen Holztrog A, in dessen Längsseiten je eine kleine Messingkugel gesteckt war. Diese Kugeln bilden so im Inneren des Troges eine Funkenstrecke von nur 1 *mm* und darunter. Die Wände des Troges waren innen mit Tischlerleim angestrichen, um das Gefäss für Petroleum dicht zu machen. Ich habe nämlich nach einigen Versuchen mit dem von Righi angegebenen Gemische von Vaselin und Vaselinöl, welches beim Durchschlagen der Funken sehr stark schäumte,

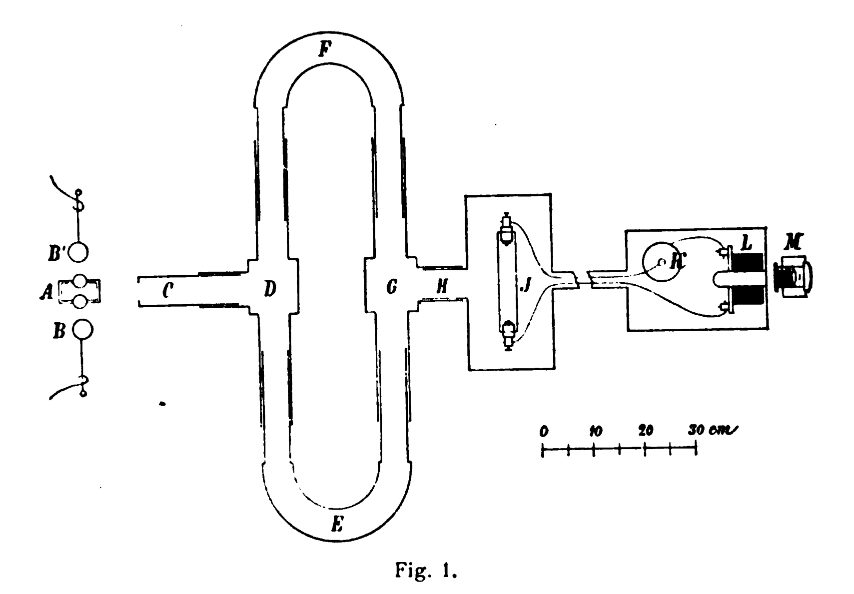


Fig. 1.

es vorgezogen, reines Petroleum zu nehmen. Die Kugeln beschlagen sich aus diesem Falle mit ausgeschiedener Kohle, was aber, wie schon Righi zeigte, den Effect des Erregers nicht stört.

Den beiden »Erregerkugeln« im Troge A stehen in der Luft die zwei Entladerkugeln B, B' in grösserer Distanz gegenüber. Diese Kugeln sind mit den Polen einer zwanzigplattigen Töpler'schen Influenzmaschine verbunden, und jede Entladung derselben gibt so zwei Funken in Luft und einen kürzeren Funken in Petroleum. Die Influenzmaschine wurde, hauptsächlich zur Erzielung eines gleichförmigen Ganges durch

einen Elektromotor in Bewegung gesetzt. Von dem Erreger gelangen die Wellen an den eigentlichen Interferenzapparat. Derselbe besteht aus zwei Pappwürfeln *D, G,* welche an drei verschiedenen Seiten Pappröhren mit einem inneren Durchmesser von 59 *mm* tragen. Vier dieser Röhren gestatten im Vereine mit zwei U-förmigen Röhren *E, F,* die beiden Würfel auf zwei Wegen zu verbinden. Da jede der beiden U-Röhren um 200 *mm* ausziehbar ist, so können beide Wege um je 400 *mm* verlängert werden.

Das dritte Ansatzrohr des Würfels *D* trägt noch ein ebenfalls ausziehbares Zuleitungsrohr *C*, das sonderbarer Weise an seiner vorderen, gegen den Trog *A* gerichteten Öffnung abgeblendet werden musste, sollte der Versuch möglichst deutlich sein. Zu diesem Zwecke konnten in die vordere Öffnung des Rohres *C* verschiedene Diaphragmen aus Metallblech eingesetzt werden, wodurch der Durchmesser der freien Öffnung meist bis auf 24 *mm* reducirt wurde.

Das dritte Ansatzrohr *H* des zweiten Würfels führt die wieder vereinigten Wellen zu der Vorrichtung *I*, die von ihnen bestrahlt werden soll. Dieselbe, von Lodge »Coherer« genannt, bestand aus einem 170 *mm* langen und 22 *mm* weiten Glasrohre, das mit eisernen Holzschrauben von 0·1 *g* Gewicht gefüllt war. Die Glasröhre ist durch zwei Korke geschlossen, an welchen die Klemmschrauben mit Mutter befestigt sind. Die Korke werden so weit in die Röhre gepresst, dass nur ein sehr schwacher Strom hindurchgeht.

Die Röhre *I* befindet sich in derselben Höhe wie die Erregerkugeln und die Axen der Röhren *C, E, F;* sie liegt in einem Holzkasten mit Falzdeckel, der wie alle vorhergehenden Theile des Apparates mit Stanniol überzogen ist. Es ist nöthig, dass sich der Kasten öffnen lässt, um nach jeder Bestrahlung der Röhre *I* durch leises Beklopfen derselben den ursprünglichen Widerstand herstellen zu können.

Von den Klemmschrauben des Coherer gehen zwei isolirte Leitungsdrähte durch Messingrohre, so dass ja die metallische Umschliessung nirgends unterbrochen ist, zu einem 2·5 *m* entfernten Metallkasten, in welchem sich ein Trockenelement *K* und die Multiplicatorrolle *L* befindet. Diese Rolle und eine

ausserhalb des Kastens in einem Kupfergehäuse M befindliche Magnetnadel, welche an der Hinterseite eines aufgehängten Spiegelchens befestigt ist, bilden ein Galvanometer mit objectiver Ablesung. Ausserdem ist eine Luftdämpfung vorhanden, da dem Spiegel von hinten durch Schrauben ein Kupferstück beliebig genähert werden kann. Die Multiplicatorrolle ist aus dünnem Draht gewickelt und hat 6000 Ω Widerstand.

In der Nähe der Nadel befindet sich noch ein Richtmagnet, durch welchen die Componente des Erdmagnetismus, welche in der Axe der Multiplicatorrolle wirkt, nahezu aufgehoben wird. Es ist am besten, die Stellung des vom Spiegel mittelst vorgesetzter Sammellinse entworfenen Bildes einer Flamme auf der Scala so zu wählen, dass bei offenem Stromkreise das Flammenbild auf das eine Ende der Scala, welche nur 700 *mm* lang ist, fällt, in unserem Falle also etwa auf den Theilstrich 75. Wird nun der Kreis, welcher Multiplicatorrolle, Trockenelement und die Glasröhre I enthält, geschlossen, so darf nur eine kleine Ablenkung etwa bis zum Theilstrich 70 eintreten, und es muss eben zu diesem Zwecke die durch die Korke bewirkte Pressung der Schrauben in der Röhre I passend regulirt werden.

Im Nachfolgenden wollen wir immer mit S den Stand des Flammenbildes auf der Scala bezeichnen und durch T den Betrag in Millimeter, um welchen die U-Röhre E aus den Ansatzröhren der Würfel D und G herausgezogen wurde. Auf dem einen Arm der Röhre E ist nämlich eine Millimetertheilung angebracht, an welcher T direct abgelesen werden kann. Es ist klar, dass der Grösse T eine Verlängerung des Weges E um $2T$ entspricht.

Um über die Bedeutung der nachfolgenden Zahlen zu orientiren, will ich gleich hier Versuche anführen, die zur Calibrirung des Galvanometers unternommen wurden, obwohl die Empfindlichkeit desselben in Folge geänderter Aufstellung nicht bei allen Versuchen gleich blieb. Für die meisten meiner Beobachtungen gelten aber die folgenden Zahlen, welche dadurch erhalten wurden, dass man an Stelle der Glasröhre I einen Widerstandskasten einschaltete. Es wurden so folgende zusammengehörige Zahlen für zugeschalteten Widerstand und Ablenkung der Magnetnadel erhalten.

s	Ω
75	∞
73	70000
70	40000
67	30000
64	21000
61	16000
58	12000
55	9000
52	7000
49	5500
46	4000
43	3200
40	2500
37	1900
34	1300
31	700
28	200

II.

Mit Hilfe des eben beschriebenen Apparates konnte leicht die Interferenz elektrischer Wellen nachgewiesen werden. Es gelang mir allerdings nie, die Wirkung der wieder vereinigten Wellen auf den Coherer gänzlich aufzuheben. Dies mag aber vielleicht nur in der unvollkommenen Ausführung des Apparates seinen Grund haben. Derselbe war ziemlich eilig zusammengestellt worden, und namentlich liess die Ausführung der Pappröhren vieles zu wünschen übrig. Möglicherweise hinderte aber auch das Vorhandensein von Obertönen in der erregten Welle die vollständige Vernichtung der letzteren.

Die abwechselnde Verstärkung und Schwächung, welche die beiden Wellenzüge auf einander ausüben, wenn man eine der U-Röhren immer mehr herauszieht, ist stets und manchmal sehr eclatant zu beobachten, wenn man sich die Mühe nimmt, für die Entfernung des Würfels D vom Erreger und vom Diaphragma, sowie für den Durchmesser des letzteren die

günstigsten Werthe aufzusuchen. Verkürzt man nämlich die angegebenen Entfernungen oder vergrössert man die Öffnung des Diaphragmas, so werden dadurch allerdings die durch Bestrahlung erhaltenen Ausschläge grösser, oft aber wird dadurch der Unterschied zwischen den Verstärkungen und den Schwächungen viel weniger merklich.

Ich gebe im Folgenden beispielsweise die Resultate von vier Beobachtungsreihen, wobei die Erregerkugeln *(A)* einen Durchmesser von 39·7 *mm* hatten und um beiläufig 1·1 *mm* von einander abstanden, während die Länge des Luftfunkens 8 *mm* betrug. Die Entfernung des Erregers von der Mitte des ersten Würfels *D* variirte bei den verschiedenen Versuchen zwischen 520 und 660 *mm*, die Entfernung des Erregers von dem Diaphragma aber zwischen 60 und 200 *mm*, der Durchmesser der Öffnung des Diaphragmas betrug 31 *mm*.

Noch ist zu bemerken, dass die Influenzmaschine für gewöhnlich durch einen dicken Draht kurz geschlossen war; dieser Draht wurde bei jedem Versuche auf die Dauer von etwa 5 Secunden entfernt; in dieser Zeit erreichte der Ausschlag sein Maximum.

Bei dem folgenden Versuche gibt *T*, wie schon erwähnt, die Stellung der Röhre *E* an, aber auch das Rohr *F* war um ungefähr 10 *mm* herausgezogen, in welcher Stellung dasselbe constant belassen wurde. Die Buchstaben S_1 und S_2 geben die Ablesungen am Galvanometer, und zwar vor und nach der Bestrahlung des Coherer.

T	S_1	S_2	S_1	S_2	S_1	S_2	S_1	S_2	Mittel
0	75	41	72	38	70	44	67	46·5	47·4
5	70	32·5	73	35	68	44	70	50	40·4
10	71	29	72	30·5	70	41	66	41	35·4
15	69	33	69	33	70	51	68	45	40·5
20	71	40	72	41	69	50	66	49	45·0
25	70	49	69	44	68	60	66	49	50·5
30	70	55	67	52	70	57·5	67	63	56·9
35	73	56	72	50	70	58	67	58	55·5

T	S_1	S_2	S_1	S_2	S_1	S_2	S_1	S_2	Mittel
40	71	57	74	47	69	59	67	56	54·8
45	65	35	71	39	69	50	65	51	44·8
50	69	30	68	30·5	71	47	66	42	37·4
55	65	30·5	71	33·5	70	45	65	42·5	37·9
60	69	29	71	39	69	45	65	42	38·8
65	67	31·5	68	39	70	53	67	48·5	43·0
70	68	39	65	40	69	55	67	50	46·0
75	64	41	68	44	71	59·5	66	52	49·1
80	65	37	68	41·7	69	54	67	58	47·9
85	66	36	69	39	70	53	68	54	45·5
90	68	35	70	39	67	49	67	47	42·5

Die letzte Reihe der vorstehenden Zahlen enthält die den vier Beobachtungsreihen von S_2 entsprechenden Mittelwerthe. Bei der weiteren Bearbeitung dieser Mittel sind die verschiedenen Werthe von S_1 nicht weiter berücksichtigt worden. Denn erstens weichen die aus diesen Grössen gebildeten Mittel nicht sehr von einander ab, und zweitens lehrten viele Beobachtungen, dass der ursprüngliche, durch S_1 gegebene Zustand

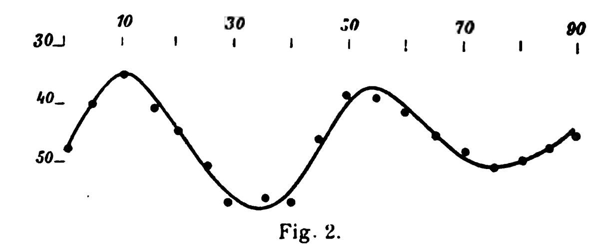


Fig. 2.

des Coherers auf den durch Bestrahlung erzielten Zustand S_2 wenig Einfluss hat, wenn nur nicht zu extreme Anfangsstellungen S_1 verglichen werden.

Trägt man nun die Zahlen für T und das Mittel von S_2, indem man sie etwa als Millimeter gelten lässt, auf Millimeterpapier auf, so kann man durch die so bestimmten Punkte eine Wellenlinie legen, welche in Fig. 2 etwas verkleinert dargestellt ist und die sich den Beobachtungen recht gut anschliesst. Die

Berge dieser Curve geben die Verstärkungen der beiden Wellenzüge durch die Röhren E und F, die Thäler der Curve entsprechen ihrer gegenseitigen Schwächungen und sind die eigentlichen Beweise einer stattgefundenen Interferenz. Da die Curve zwei Berge und zwei Thäler aufweist, so haben wir in den vorliegenden Versuchen zwei Verstärkungen und zwei Schwächungen, so dass der Weg E gegenüber dem Wege F von der Gleichheit bis zu drei halben Wellenlängen gewachsen ist.

In einzelnen Versuchen mit kleineren Erregerkugeln konnten sogar vier Verstärkungen mit den dazwischenliegenden Schwächungen nachgewiesen werden. Der Gangunterschied ist in diesem Falle bis zu drei Wellenlängen angewachsen.

Die abgebildete Curve ist so gezeichnet worden, dass ihre Maxima (mit Sternchen bezeichnet) und Minima bei den Zahlen

$$T = 11^*, \quad 33, \quad 55^*, \quad 77$$

liegen. Dies ist natürlich mehr oder weniger willkürlich, doch lassen die angeführten Beobachtungen kaum einen Zweifel darüber, dass die Maxima und Minima in gleichen Zwischenräumen aufeinanderfolgen. Den letzten Zahlen würde eine Wellenlänge von 88 *mm* entsprechen, da zu einer Verlängerung des Weges E um eine halbe Wellenlänge nur die Verschiebung derselben um ein Viertel Wellenlänge nöthig ist. Die Zahl $T = 11$ für das erste Maximum, welches bei Gleichheit beider Wege eintritt, stimmt recht gut mit der Thatsache, dass der Apparat ziemlich symmetrisch gebaut ist und die Röhre F um 10 *mm* herausgezogen war.

Die soeben gefundene Länge der angewandten elektrischen Wellen stimmt übrigens auch mit einer Reihe weiterer Versuche, die mit denselben Erregerkugeln angestellt wurden.

Ähnliche Versuche mit Erregerkugeln von 24·4 *mm* Durchmesser ergaben für die Wellenlänge 82 *mm*.

III.

Der Gedanke liegt nahe, bei den beschriebenen Versuchen die Röhre E theilweise durch Cylinder von Dielektricis auszufüllen und die hiedurch bewirkte Verschiebung der Ver-

stärkungen und Schwächungen zu messen. Man kann auf diese Weise den Brechungsquotienten des Dielektricums bestimmen. Ich habe solche Versuche mit Paraffin und Schwefel angestellt; hiebei wurden Erregerkugeln von 10·6 *mm* Durchmesser angewandt und vorerst die Länge der von ihnen ausgesandten Wellen möglichst genau bestimmt. Zu diesem Zwecke wurden eine grosse Anzahl von Beobachtungen ausgeführt, aber nur in der Nähe der Verstärkungen, da mir diese schärfer als die Schwächungen ausgeprägt erschienen. Die Kugeln waren hiebei von der Mitte des ersten Würfels D um 350 *mm*, von dem Diaphragma um 100 *mm* entfernt, letzteres hatte eine Öffnung von 24 *mm* Durchmesser. Als Entladerkugeln B, B' waren solche von 37 *mm* Durchmesser angewandt, der Funke in Luft hatte eine Länge von 7 *mm*, der in Petroleum nur von 0·5 *mm*. Das zweite U-Rohr F war wie früher um 10 *mm* herausgezogen.

Im Folgenden sind nur die Mittelwerthe für S_2 angegeben, die Zahl der einzelnen Beobachtungen ist mit N bezeichnet.

Zweites Maximum. S_1 zwischen 70 und 73.

T	N	S_2	Berechnet
40	6	55·4	55·4
45	7	52·1	52·0
50	7	50·5	50·6
55	7	51·3	51·2
60	6	53·9	53·9

Drittes Maximum. S_1 zwischen 70 und 72.

T	N	S_2	Berechnet
80	4	56·5	56·3
85	4	51·1	51·5
90	4	49·6	49·5
95	4	50·6	50·4
100	4	54·1	54·2

Viertes Maximum. S_1 zwischen 70 und 74.

T	N	S_2	Berechnet
120	10	59·7	59·7
125	10	57·4	57·2

T	N	S_2	Berechnet
130	10	55·4	56·1
135	10	57·3	56·6
140	10	58·3	58·5

Statt der graphischen Methode wurde bei vorstehenden Beobachtungen der Weg der Rechnung eingeschlagen, indem dieselben nach einer quadratischen Formel mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate berechnet wurden. Man erhält so:

$$2.\ \text{Max.}\quad S_2 = 55\cdot43 - 4\cdot44\left(\frac{T-40}{5}\right) + 1\cdot015\left(\frac{T-40}{5}\right)^2$$

$$3.\ \text{Max.}\quad S_2 = 56\cdot34 - 6\cdot33\left(\frac{T-80}{5}\right) + 1\cdot450\left(\frac{T-80}{5}\right)^2$$

$$4.\ \text{Max.}\quad S_2 = 59\cdot70 - 3\cdot29\left(\frac{T-120}{5}\right) + 0\cdot749\left(\frac{T-120}{5}\right)^2$$

Mit diesen Formeln sind die angegebenen Werthe von S_2 berechnet; wie man sieht, schliessen sich dieselben den Beobachtungen recht gut an. Für die Lage des Maximums erhält man aus den drei Formeln die Werthe

$$T = 50\cdot9,\quad 90\cdot9,\quad 131\cdot0$$

und aus den zwei ersten dieser Zahlen, welche wohl die genaueren sind, die Wellenlänge gleich 80 *mm*. Demzufolge muss das erste nicht beobachtete Maximum für $T = 50\cdot9 - 40 = 10\cdot9$ eintreten, in Übereinstimmung mit dem für andere Erregerkugeln gefundenen Werthe. Für dieses Maximum sind nämlich beide Wege E, F gleich lang, und die Verstärkung tritt für jede Wellenlänge ein. Vernachlässigen wir die Grösse von 0·1 *mm*, so sind für die kleinsten Erregerkugeln die Maxima und Minima bestimmt durch die Zahlen:

$$T = 11^*,\quad 31,\quad 51^*,\quad 71,\quad 91^*,\quad 111,\quad 131^*.$$

Ich will hier noch bemerken, dass die für meine Erregerkugeln gefundenen Werthe der Wellenlängen nur theilweise mit den von Righi gegebenen Werthen stimmen, der eine andere Art der Interferenz und statt des Coherers eigenthüm-

liche Resonatoren verwandte. Righi gibt nämlich für die von ihm benützten Erregerkugeln folgende definitive Zahlen:[1]

Durchmesser.....	8	37·5	80 *mm*
Wellenlänge	26	106	200

während meine Versuche:

Durchmesser...	10·6	24·4	39·7 *mm*
Wellenlänge ...	80	82	88

ergeben. Die zwei Beobachtungsreihen stimmen nur bei einem Durchmesser von beiläufig 29 *mm* überein, für welchen beide ungefähr 85 *mm* als Wellenlänge geben.

In einer früheren Arbeit gibt Righi allerdings für einen Durchmesser von 13·6 *mm* eine Wellenlänge von 75 *mm*, ein Resultat, das auch von Garbasso und Aschkinass[2] bei ihren Versuchen adoptirt wird.

Ich bemerke noch, dass ich mich davon überzeugte, dass die Werthe der Wellenlängen nicht wesentlich von dem Durchmesser der Entladerkugeln (B, B') beeinflusst werden, indem ich für verschiedene derartige Kugeln nahezu dieselben Werthe der Wellenlängen erhielt. Die beiden geradlinigen Zuleitungen zu diesen Kugeln, von welchen jede 95 *mm* lang ist, wurden allerdings nicht variirt.

IV.

Die untersuchten Paraffincylinder hatten einen Durchmesser von 56 *mm*, so dass sie den Querschnitt der geraden Stücke von den Röhren E und F ziemlich genau ausfüllten. Ihre Längen waren sehr verschieden. Mit einem Cylinder, welcher 166·8 *mm* lang war und sich in dem linken Schenkel des Rohres E befand, wurden beim Verschieben dieser Röhre direct folgende Zahlen gefunden. Die Stellung der einzelnen Apparattheile war hiebei genau die zuletzt angegebene.

---

[1] L'éclairage électrique, t. III, 1895, p. 360.

[2] Naturw. Rundschau, 1894, S. 429.

T	S_1	S_2	T	S_1	S_2
0	72	46·5	80	71	47·5
5	70	55·5	85	71	53
10	70	63·5	90	71	57
15	71	68	95	72	62
20	71	62·5	100	70	59
25	70	55	115	70	55
30	69	52	110	70	50
35	70	46	115	67	46
40	69·5	46	120	69	47
45	69	50	125	68·5	47·5
50	69	57	130	70	50
55	69	63·5			
60	70	61·5			
65	70	58			
70	70	53			
75	70	51·5			

Trägt man nun wieder die vorstehenden Zahlen als Abscissen und Ordinaten auf und legt durch die so bestimmten Punkte eine Wellenlinie, wie dies in Fig. 3 dargestellt ist, so

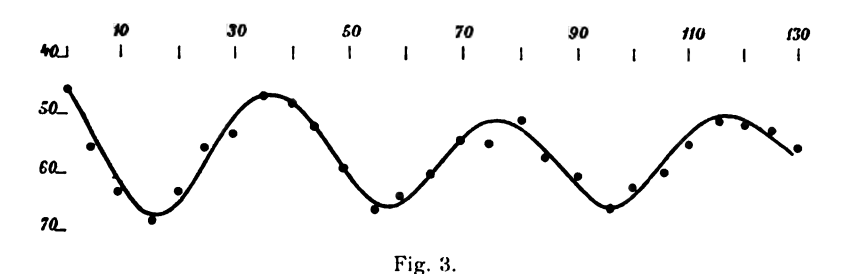


Fig. 3.

findet man für die Maxima und Minima dieser Curve, die sich den Beobachtungen ziemlich gut anschliesst, die Werthe

$$T = 16,\quad 20 + 18^*,\quad 40 + 17,\quad 60 + 18^*,\quad 80 + 17,\quad 100 + 16^*$$

oder nahezu

$$T = 17,\quad 37^*,\quad 57,\quad 67^*,\quad 97,\quad 117^*.$$

Dieselben folgen also, wie vorauszusehen, in dem gleichen Intervalle von 20, entsprechend der halben Wellenlänge von 40 *mm* auf einander. Vergleicht man diese Zahlen mit den für den Fall erhaltenen, wo in der Röhre E bloss Luft vorhanden war, so ergibt sich, dass man jetzt das Rohr E um beiläufig $31-17 = 14$ *mm* weniger herauszuziehen braucht, um abwechselnd Verstärkungen und Schwächungen zu erhalten. Dabei können aber die beiden Wege sich noch um eine ganze Anzahl von Wellenlängen unterscheiden. In der That entspricht das früher beim Stande 17 der Röhre E beobachtete Minimum dem zweiten Minimum der bloss mit Luft gefüllten Röhre E, welches beim Stande 71 derselben eintritt. Die Röhre E muss also um $71-17$, d. i. um 54 *mm* mehr herausgezogen werden, um den gleichen Wegunterschied zwischen E und F zu erhalten wie in dem Falle des Paraffincylinders.

Die Richtigkeit des Gesagten ergibt sich leicht aus Versuchen mit Paraffincylindern von anderen Längen und auch aus einer beiläufigen Kenntniss des Brechungsquotienten μ des Paraffins. Ist nämlich L die Länge des Cylinders und δ die Verschiebung der Röhre, die nöthig ist, um den gleichen Gangunterschied mit Luft allein zu erzielen, so hat man

$$L\mu - L = 2\delta,$$

denn die Ersetzung der Luftsäule L in einem Schenkel des Rohres E durch Paraffin wirkt ja so wie eine Verschiebung dieses Rohres um δ, d. h. wie eine Verlängerung des Weges um 2δ. Es ist also

$$\mu = 1 + \frac{2\delta}{L}$$

und im vorliegenden Falle

$$\mu = 1 + \frac{2 \times 54}{166 \cdot 8} = 1 \cdot 648.$$

Dieser Werth von μ ist von vornherein für Paraffin nicht unmöglich, stimmt aber nicht mit Righi's Angaben $\mu = 1 \cdot 43$, welch' letzterer Werth allerdings auch von anderen Forschern gefunden wurde. Um diese Differenz aufzuklären, habe ich eine grosse Anzahl von Paraffincylindern verschiedenster Länge

untersucht, meist aber nur noch grössere Werthe für μ erhalten. So gaben drei Cylinder, welche die Längen 28, 30 und 31·8 *mm* hatten, im Mittel die Lage des ersten Minimums bei Theilstrich 20, woraus $\delta = 11$ und $\mu = 1\cdot733$ folgt. Ein 211 *mm* langer Cylinder gab für das dem dritten Luftmaximum entsprechende Maximum den Stand 17. In diesem Falle ist also $\delta = 91-17 = 74$ und $\mu = 1\cdot701$.

Der vorhergehende Cylinder wurde mit dem ersten von 166·8 *mm* Länge gleichzeitig benützt, indem je einer der beiden Cylinder in einen der Schenkel der Röhre E gebracht wurde. Die ganze Paraffinlänge betrug so 377·8 *mm*, und die Lage eines Minimums, welches dem vierten Minimum für Luft entspricht, wurde für $T = 22\cdot5$ gefunden. Dies gibt $\delta = 191-22\cdot5 = 168\cdot5$ und $\mu = 1\cdot680$.

V.

Aus Schwefel wurden zwei Cylinder gegossen, die bei einem Durchmesser von 56 *mm*, beziehungsweise 30 und 70·5 *mm* lang waren. Die Versuche mit denselben boten keine weiteren Schwierigkeiten, nur scheinen die Unterschiede zwischen den Verstärkungen und den Schwächungen jetzt weniger markirt zu sein.

Der erste Cylinder ergab das erste Minimum bei dem Stand 10·5 der Röhre E, was einem Brechungsquotienten $\mu = 2\cdot367$ entspricht. Der zweite Cylinder zeigt ein Minimum für $T = 24$. Dasselbe entspricht dem zweiten Minimum für Luft bei $T = 71$. Es ist also $\delta = 47$ und $\mu = 2\cdot333$.

Auch diese Werthe für den Brechungsquotienten sind viel grösser als der von Righi angegebene Werth $\mu = 1\cdot87$.

Schwingungsvorgang in complicirten Erregern Hertz'scher Wellen

(II. Mittheilung)

von

Dr. **Josef Ritter v. Geitler.**

Aus dem physikalischen Institute der k. k. deutschen Universität in Prag.

(Mit 10 Textfiguren.)

Wie ich in einer früheren Arbeit über diesen Gegenstand [1] angedeutet habe, hatte sich die gleichzeitige Anwendung der beiden Methoden, welche über den Schwingungsvorgang in den dort beschriebenen Erregern Aufschluss geben sollten (Beobachtung der Wellenform und Resonatormethode), als undurchführbar erwiesen. Daher hatte ich mich mit der Resonatormethode allein begnügen müssen.

Die Erscheinung, welche mich dazu zwang, war die folgende: Als ich die Wellenlänge der einfachen Hertz'schen Erreger, aus welchen die complicirten Kreise gebildet werden sollten, mit Hilfe des Resonators bestimmen wollte, während gleichzeitig zur Ermittelung der Wellenform eine 170 *m* lange Lecher'sche Secundärleitung den Erregern angehängt war, da fand ich in mehreren Fällen, dass diese einfachen Erreger nicht eine, sondern gleichzeitig mehrere, nahe bei einander liegende Wellenlängen emittirten. Da dies eine deutliche Beeinflussung des primären durch den secundären Leiter — selbst bei grosser Länge des letzteren —

[1] Diese Sitzungsber., CIV, Abth. II. a., S. 171, 1895 oder Wied. Ann. 55, S. 513. 1895.

erkennen liess, so wurden die Versuche in der früher beschriebenen Weise fortgesetzt.

Die aufgefundene Thatsache schien mir jedoch genügend selbständiges Interesse zu haben, um näher untersucht zu werden. Die Ergebnisse dieser Untersuchung bilden den Gegenstand der vorliegenden Mittheilung.

1. Die beiden Versuchsanordnungen sind in den Fig. 1 *a*, 1 *b* und 2 *a*, 2 *b* schematisch dargestellt.

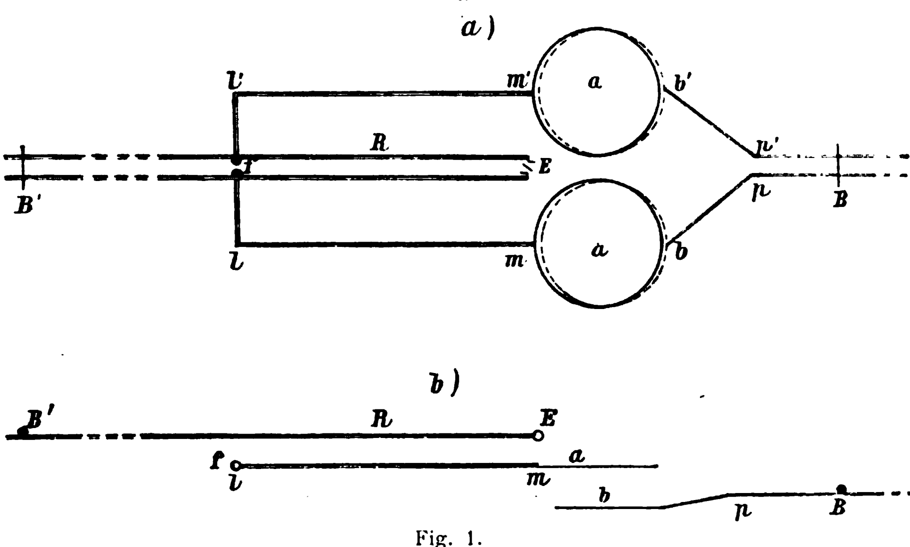


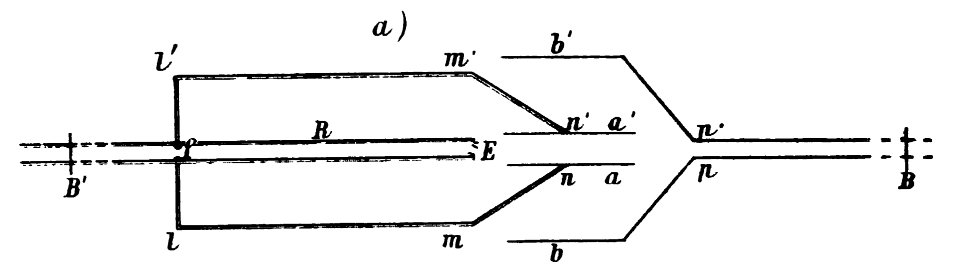
Fig. 1.

Die Aufstellung war kurz die folgende: Einem primären Hertz'schen Erreger *afa'*, welcher durch ein grosses Ruhmkorff'sches Inductorium gespeist wurde, war eine Lecher'sche Secundärleitung *bBb'* gegenübergestellt. Der Abstand zwischen den Platten *aa'* des primären und den Platten *bb'* des secundären Kreises konnte verändert werden. Desgleichen war die Länge der secundären Leitung durch Verschieben der Brücke *B* regulirbar. Die von dem primären Kreise ausgesendeten Schwingungen wurden mit Hilfe des Resonators *R* analysirt. Derselbe war bei *E* mit dem früher beschriebenen Elektrometer[1] versehen, dessen Ausschläge mit einem 1·5 *m* vom Spiegel entfernten Scalenfernrohre abgelesen wurden. Die Resonatorlänge wurde in der ebenfalls früher beschriebenen Weise durch Verschieben

[1] L. c.

der Brücke B' verändert. Sowohl die Länge des Resonators, als auch jene des secundären Kreises wurden an je einer neben denselben angebrachten Theilung abgenommen.

Es seien nun noch die wichtigsten Dimensionen der Aufstellung angegeben. Die Funkenstrecke f war, wie früher, durch zwei Messingkugeln von 2 *cm* Radius gebildet. Der primäre, 2 *mm* starke Draht war von weichem Kupfer, die kreisrunden



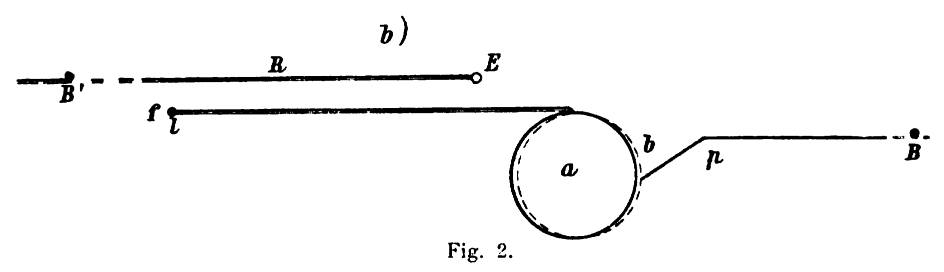


Fig. 2.

Zinkplatten $aa'bb'$ hatten einen Halbmesser von 20 *cm*. Es war die Länge $ll' = 0 \cdot 5\, m$; $lm = l'm' = 1\, m$; $mn = m'n' = 35\, cm$. Der Abstand δ zwischen a (a') und b (b') war variabel und wird später für die einzelnen Fälle angegeben werden. Die secundäre Leitung bestand aus 1 *mm* starkem, weichem Kupferdraht; die Distanz der secundären Drähte war überall, von pp' angefangen, möglichst genau gleich 3 *cm*.[1] Das Stück von p (p') zu den Platten b (b') war im Falle der Fig. 1 = 35 *cm*, im Falle der Fig. 2 = 40 *cm*. Der Resonator bestand aus 2 *mm* starkem Kupferdraht,[2] die Distanz der Drähte war 5 *cm*. Der Resonator war 10 *cm* über der Ebene des primären Kreises, parallel mit derselben angebracht; diese Entfernung war genügend, um eine

---

[1] Vergl. Wied. Ann. 49, S. 195, 1893.

[2] Vergl. V. Bjerknes, Wied. Ann. 55, S. 121—169, 1895.

Wechselwirkung zwischen Resonator und primärem Kreise unmerkbar zu machen.

2. Der Gang der Versuche war folgender: Zunächst wurde mit Hilfe des Resonators die Wellenlänge des primären Kreises bestimmt, ohne dass die secundäre Leitung angehängt war. (Hierbei ist zu bemerken, dass die Wellenlänge des primären Kreises im Falle der Fig. 1 für die verschiedenen Distanzen δ eine verschiedene war; die Platten bb' lagen nämlich auf einem Brette, dessen grössere oder geringere Entfernung von aa' die Capacität dieser Platten und somit die Wellenlänge des Erregers merklich beeinflusste). Sodann wurde die secundäre Leitung angehängt und die Brücke B bei pp' aufgelegt. Diese Lage der Brücke ist in den Tabellen und Figuren mit 0 bezeichnet. Nun wurden die Lagen der Brücke B' des Resonators gesucht, für welche Resonanz eintrat. Weiterhin wurde die Brücke B an den secundären Drähten verschoben und für jede neue Lage derselben die Untersuchung mit dem Resonator wiederholt.

3. Die Ergebnisse dieser Versuche sind in den folgenden Tabellen und Figuren zusammengestellt. Es bedeuten in den Tabellen:

L_s die Länge der secundären Leitung von pp' an gerechnet bis zur Brücke B in Metern;

L_r die doppelte Länge des Resonators vom Elektrometer bis zur Brücke B', für welche Resonanz eintrat; L_r ist gleich der halben Wellenlänge der entsprechenden Schwingung in Centimetern;[1]

$L_r^{(0)}$ bedeutet die halbe Wellenlänge des unbeeinflussten Erregers;

J den Ausschlag des Elektrometers in Scalentheilen für das entsprechende durch L_r angegebene Resonanzmaximum.

In den Figuren sind als Abscissen die L_s in Metern, als Ordinaten die entsprechenden halben Wellenlängen L_r in Centimetern aufgetragen. Tabelle I—IV und Fig. 3—6 beziehen sich auf die Aufstellung Fig. 1; Tabelle V und VI, sowie Fig. 7 *a* und 7 *b* auf die Anordnung Fig. 2.

---

[1] Über die Berechtigung dieser Annahme vergl. diese Sitzungsber., CIV, II. a., S. 174, 1895, oder Wied. Ann. 55, S. 517, 1895, sowie P. Drude, Wied. Ann. 53, S. 728, 729, 1894.

Tabelle I.

$\delta = 4 \cdot 5\, cm;\ L_r^{(0)} = 515\, cm.$

L_s	L_r	J	L_r	J	L_r	J	L_r	J
0·0	835	4·3	.	.	.	.	.	.
0·5	910	1·9	355	2·2	.	.	.	.
1·0	.	.	410	11	.	.	.	.
2·0	.	.	490	15	.	.	.	.
2·5	.	.	520	16	.	.	.	.
3·0	.	.	550	18	.	.	.	.
4·0	.	.	595	17·2	.	.	.	.
6·0	.	.	685	12·8	435	6·2	.	.
8·0	.	.	795	3·2	520	14	.	.
10·0	.	.	920	2·2	580	10·2	410	3·8
12·0	.	.	.	.	645	?	475	?
14·0	400	1·3	.	.	710	4	530	6
16·0	450	3·2	.	.	780	3·4	580	7·9
18·0	495	8·8	390	?	865	3·1	625	14·3
20·0	535	11	430	5	.	.	675	8

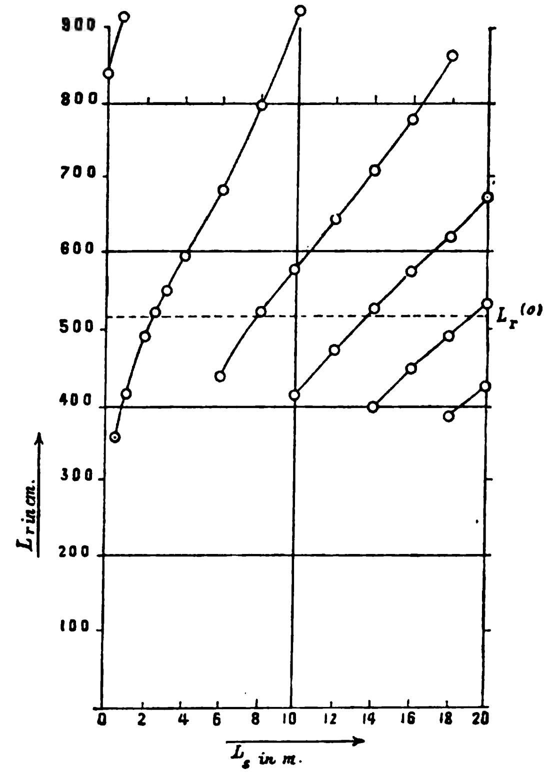


Fig. 3 (ad Tabelle I).

Tabelle II.

$\delta = 7\ cm$; $L_r^{(0)} = 500\ cm$.

L_s	L_r	J	L_r	J	L_r	J	L_r	J
0·0	700	7	.	.	.	.	.	.
0·5	765	2	365	2·8	.	.	.	.
1 0	780	?	425	6	.	.	.	.
1·5	.	.	470	7·5	.	.	.	.
2·0	.	.	500	8·5	.	.	.	.
2·5	.	.	515	10	.	.	.	.
3·0	.	.	535	10	.	.	.	.
3·5	.	.	550	12	.	.	.	
4·0	.	.	565	10	.	.	.	.
5·0	.	.	600	10·5	.	.	.	.
6·0	.	.	640	7	445	6	.	.
7·0	.	.	685	5·1	480	7·8	.	.
8·0	.	.	740	3	515	11·3	.	.
9·0	.	.	800	1·8	540	11·7	380	1·7
10·0	.	.	.	.	565	13·3	415	4 5
12 0	.	.	.	.	615	8·1	475	7·6
13·0	.	.	.	.	645	6	500	9
14·0	400	2·7	.	.	675	4·2	520	11·1
15·0	425	3·8	.	.	710	3	545	9
16·0	450	5	.	.	745	2·2	565	10
17·0	470	5·6	.	.	785	2	585	8
18·0	495	6·9	390	1·7	825	1·6	605	8 4
19·0	510	8·1	410	2·4	.	.	625	5·8
20·0	530	8·3	435	3·2	.	.	650	4·8
21·0	550	8	455	3·5	.	.	680	3
22·0	570	6	470	3 2	.	.	700	2·6
23·0	580	7 3	490	4 7	405	1·4	725	2·5
24·0	595	5·5	505	6	420	2 1	750	2
25 0	615	4	520	5	435	3	370	?
27·0	650	3·6	550	6·8	470	3·6	395	1·1
29·0	690	2·4	580	5·1	500	4·2	425	2
30·0	715	2 6	590	5·8	515	3·9	440	2·9

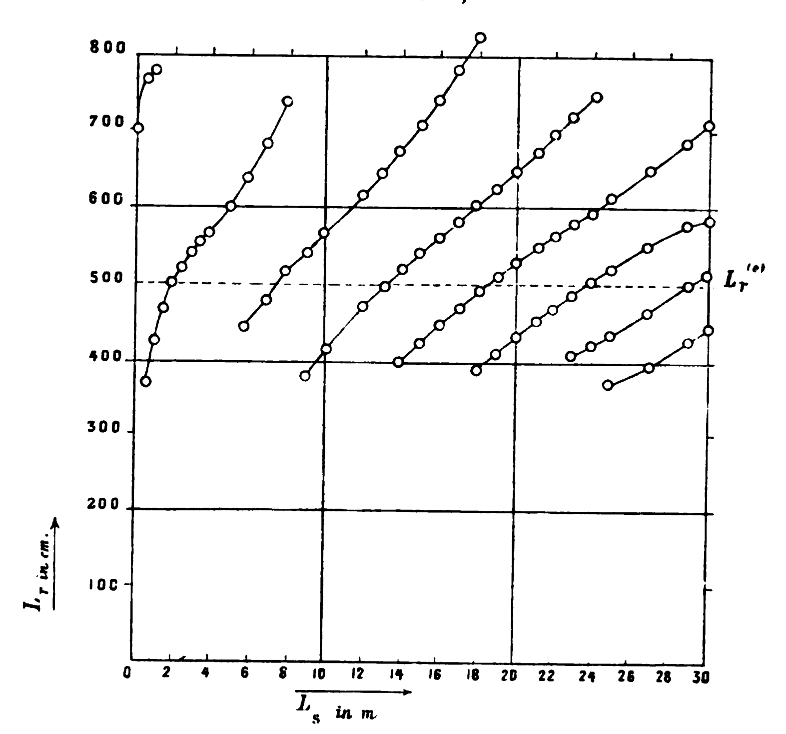


Fig. 4 (ad Tabelle II).

Tabelle III.

$\delta = 16\ cm$; $L_r^{(0)} = 495\ cm$.

L_s	L_r	J	L_r	J	L_r	J
0·0	545	32	.	.	.	.
1·0	.	.	445	22·2	.	.
2·0	.	.	490	17	.	.
2·5	.	.	500	19	.	.
3·0	.	.	505	20·3	.	.
4·0	.	.	515	20	.	.
6·0	.	.	560	6	450	5
8·0	.	.	.	.	500	15
10·0	425	2·8	.	.	520	15·4
12·0	480	8·4	.	.	560	7·2
14·0	505	14·1	405	1·3	630	2·6
16·0	525	11·9	455	4·1	.	.
18·0	560	6	490	11	.	.
20·0	610	3	510	13	440	2·7

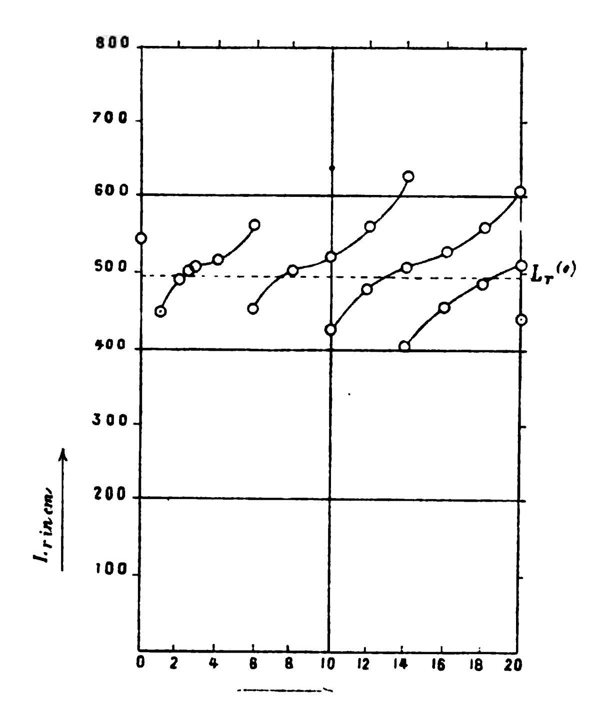


Fig. 5 (ad Tabelle III).

Tabelle IV.

$\delta = 25\,cm;\ L_r^{(0)} = 491\ cm.$

L_s	L_r	J	L_r	J	L_r	J
0·0	510	23·5	.	.	.	.
0·5	530	15·5	405	4·3	.	.
1·0	595	4·3	465	15·5	.	.
2·0	670	?	490	25·5	.	.
3·0			495	29·5	.	.
4·0	.	.	500	26·1	.	.
6·0	.	.	530	10·4	460	10·4
8·0	.	.	.	.	490	22·5
10·0		.	.	.	500	22·5
12·0	480	16·2	.	.	535	8·2
14·0	495	24·1	.	.	615	4·1
16·0	505	15·7	460	5·4	.	.
18·0	545	6·2	490	19·2	400	?
20·0	560	4·0	495	22·2	440	2·7

Tabelle V.

$\delta = 10\,cm;\ L_r^{(0)} = 965\,cm.$

L_s	L_r	J	L_r	J
0·0	?	?	?	?
1·0	?	?	?	?
2·5	810	7·0	1075	3·8
3·0	885	9·6	1080	6·6
3·5	930	8·6	.	.
4·0	955	10·6	.	.
5·0	985	12·6	.	.
6·0	995	10·8	.	.
8·0	1015	10·2	.	.
10·0	1025	3·1	.	.
11·0	1035	4·6	.	.
12·0	?	.	870	4·4
13·0	.	.	920	8·3
15·0	.	.	980	10·9
17·0	.	.	1005	?
19·0	.	.	1020	7·4
21·0	.	.	1035	3·5
22·0	905	3·4	1040	4·4
22·5	925	3·8	1050	1·8
23·0	940	4·0	.	.
25·0	985	9·3	.	.
29·0	1015	6·8	.	.

Tabelle VI.

$\delta = 30\,cm;\ L_r^{(0)} = 965\,cm.$

L_s	L_r	J	L_r	J
0·0	990	23·3	.	.
1·0	990	14·3	.	.
2 0	990	7·5	.	.
2·5	995	6·8	785	5·3
3·0	1030	0·3	885	7·3
4·0	.	.	965	41·5
5·0	.	.	980	35·2
6·0	.	.	980	24·3
8·0	.	.	985	23·5
10·0	.	.	990	19·5
12·0	.	.	990	?
13·0	925	13·7	995	6·7
14·0	970	27	1070	2
18·0	980	21·7	.	.
22·0	990	10·5	.	.
23·0	995	6·5	940	9·5
23·5	1035	4·5	955	16·5
24·0	.	.	965	24·5
27·0	.	.	980	28·5
30·0	.	.	985	25·4

4. Hieraus ergeben sich folgende Resultate:

Der Primärkreis eines Lecher'schen Systems emittirt im Allgemeinen für jede bestimmte Länge der secundären Leitung gleichzeitig mehrere, mit der Länge des secundären Kreises in bestimmter Weise

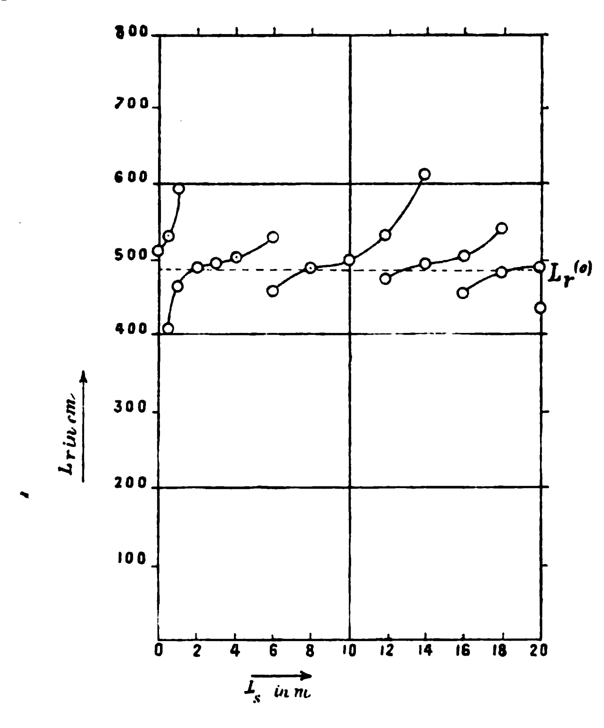


Fig. 6 (ad Tabelle IV).

veränderliche Schwingungen von verschiedener Periode und Intensität.

Die Perioden der ausgesendeten Wellen sind theils kleiner, theils gleich und theils grösser als diejenige der freien Eigenschwingung des unbelasteten Primärkreises.

Stellt man die Längen der emittirten simultanen Schwingungen, wie dies in den Fig. 3—7 geschehen ist, als Functionen der Länge der secundären Leitung dar, so ordnen sich dieselben in eine Curvenschar. Die Anzahl der nachweisbaren Simultanschwingungen scheint von der Stärke der gegenseitigen Beeinflussung der beiden Kreise abzuhängen, da sie umso grösser

wird, je mehr man den Abstand der secundären von den primären Platten verringert. Bezeichnet man die auf einer und derselben Curve der Schar liegenden Wellen als conjugirte, so

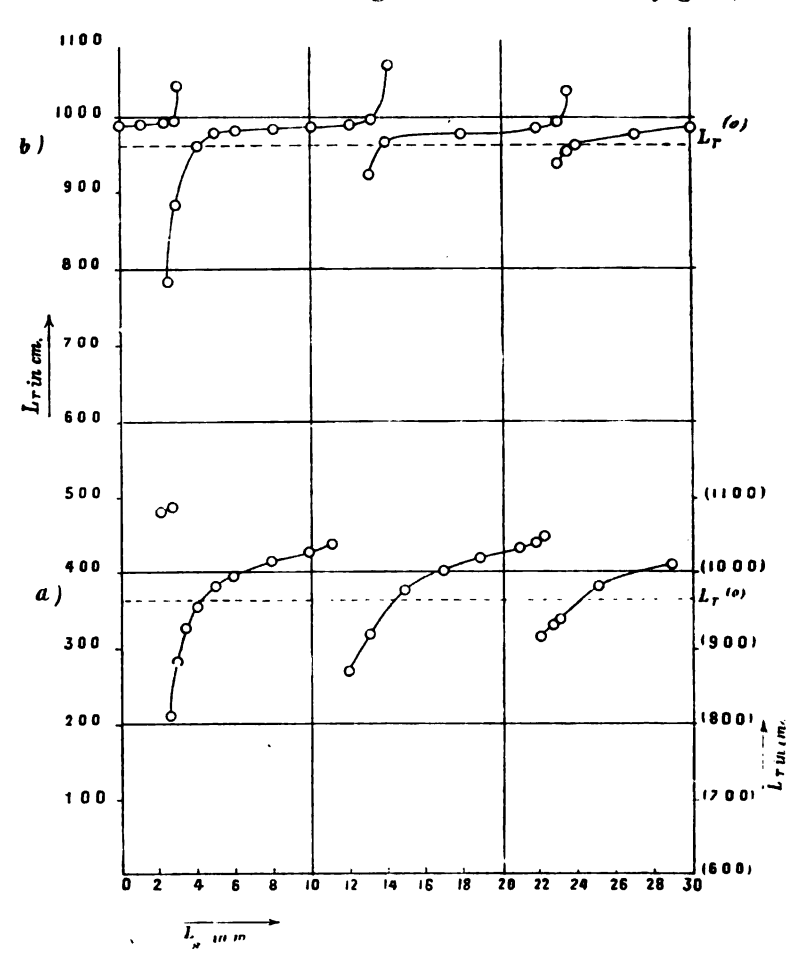


Fig. 7 (ad Tabellen V und VI).

kann man den Satz aussprechen, dass die Intensität der conjugirten Wellen auf jeder Curve ein Maximum besitzt.[1] Ein

[1] Die kleinen Unregelmässigkeiten, welche sich in dieser Beziehung in den Tabellen finden, z. B. das scheinbare Auftreten zweier solcher Maxima auf derselben Curve, haben ihren Grund wohl nur in der Unzuverlässigkeit der primären Funken. Die mitgetheilten Zahlen sind meist einer einmaligen Beobachtungsreihe entnommen.

Blick auf die Tabellen zeigt ferner, dass in den verschiedenen Systemen von Simultanschwingungen der grösseren Wellenlänge durchaus nicht auch gleichzeitig die grössere Intensität entspricht, auch nicht in den Fällen, in welchen nicht mehr als zwei Simultanschwingungen auftreten.

Es liegt sehr nahe, die Emission eines complicirten Erregers mit dem Spectrum eines leuchtenden Körpers zu vergleichen. Es ist dies auch schon von anderer Seite versucht worden. D. Mazzotto spricht auf Grund seiner Versuche die Vermuthung aus,[1] dass das Lecher'sche System gleichzeitig mehrere Schwingungen aussende und sagt, man könnte in diesem Falle die Schwingung des Systems vergleichen, mit derjenigen einer leuchtenden Substanz, welche geeignet ist, ein Linienspectrum (spettro a righe brillanti) zu geben. Meine Versuche scheinen mir die Berechtigung dieser Analogie in ihren groben Umrissen zu erweisen, wenn auch natürlich die feineren Züge nicht übereinstimmen; letzteres ist bei so verschiedenen Erscheinungen aber auch gar nicht zu erwarten. Ich möchte noch erwähnen, dass man mit Hilfe der in dieser Arbeit benützten complicirten Erreger Erscheinungen erhalten kann, welche sehr an die in den Spectralserien mancher Elemente auftretenden Doppellinien erinnern; besonders deutlich ist diese letztere Analogie in jenen Fällen, wo nur zwei Simultanschwingungen nachweisbar sind. In einem Falle der Vorversuche erhielt ich zwei Simultanschwingungen von den halben Wellenlängen: $\lambda_1 = 990\, cm$, $\lambda_2 = 1025\, cm$; bildet man das Verhältniss der Wellenlängen, so erhält man $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = 0\cdot965$. Bildet man das analoge Verhältniss z. B. für die beiden Wellenlängen des ersten Duplets der Hauptserie im Spectrum des Rubidium,[2] $\lambda'_1 = 7811$ (Å. E.), $\lambda'_2 = 7950$ (Å. E.), so findet man $\frac{\lambda'_1}{\lambda'_2} = 0\cdot982$. Diese Zahlen scheinen mir die gemachte Behauptung zu stützen. Wie die Versuche zeigen, besitzen die Ordinatendifferenzen

[1] D. Mazzotto, Atti della R. Accad. di Torino, Vol. XXIX, 19. Nov. 1893, Sep. Abz. p. 9; vergl. weiter unten.

[2] Kayser und Runge, Abhandl. der Berl. Akad. 1890, Separat-Abdruck S. 51.

zweier benachbarten Curven (siehe Fig.) für jedes Curvenpaar ein Minimum. Dieses Minimum nimmt, wie besonders aus jenen Versuchen hervorgeht, bei welchen nur zwei Simultanschwingungen vorhanden waren, bei zunehmender Länge der secundären Leitung beständig ab; daher wird auch das Verhältniss der Wellenlängen immer mehr gleich der Einheit. Es unterliegt somit keinem Zweifel, dass bei genügender Länge der secundären Leitung auch Doppellinien von dem Wellenlängenverhältnisse z. B. der *D* Linien hergestellt werden können.[1]

5. Ich darf es an dieser Stelle nicht unterlassen, auf die äusserst interessanten Versuche verschiedener Physiker[2] hinzuweisen, welche sich mit den »Knotensystemen« an der Lecher'schen Secundärleitung befassen. Ein Vergleich dieser Versuche mit meinen eigenen zeigt, dass der Gegenstand der Untersuchung in beiden Fällen ein ähnlicher ist, nämlich die Ermittlung des Schwingungsvorganges in einem Lecher'schen Systeme. Die Methoden sind jedoch ganz wesentlich verschiedene; es ist daher nur natürlich, dass gewisse Fragen, welche sich bei Anwendung der einen Methode nicht oder nur bis zu einem gewissen Grade der Wahrscheinlichkeit beantworten lassen, mit Hilfe der anderen vollständig gelöst werden können und umgekehrt. Um die Grenzen der Leistungsfähigkeit der beiden Methoden näher zu bezeichnen, möchte ich einen analogen Fall aus dem Gebiete der Akustik betrachten. Es möge sich darum handeln, die Schwingungen einer tönenden Saite experimentell zu untersuchen. Die Saite sei (Fig. 8) auf einem Monochord befestigt; *b* und *c* seien verschiebbare Keile, mit deren Hilfe je ein Punkt der Saite künstlich zu einem Knotenpunkte gemacht werden kann. Bei *a*

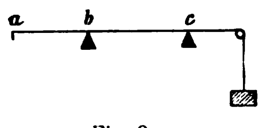


Fig. 8.

[1] Vergl. auch B. Galitzin Wied. Ann. 56, S. 78, 1895.

[2] E. Lecher, Diese Sitzungsber., 99, Abth. II. a. 1890, oder Wied. Ann. 41, S. 850, 1890. — E. Cohn und F. Heerwagen, Wied. Ann. 43, S. 343, 1891. — H. Ebert und E. Wiedemann, Wied. Ann. 48, S. 549, 1893; 49, S. 1, 1893. — E. Salvioni, Nuovo Cimento, Ser. III, Vol. XXXV, fasc. d'aprile 1894. — D. Mazzotto, Atti della R. Accad. delle Scienze di Torino. Vol. XXVIII, XXIX, 1893 und Vol. XXIX, 1894.

soll die Saite, und zwar immer in derselben Weise, zum Schwingen erregt werden. Es entstehen mehrere Fragen: 1. Wenn die Distanz *ab* unveränderlich bleibt: für welche Lagen von *c* wird das Saitenstück *bc* zum Tönen gebracht? 2. Wenn *c* fest bleibt und *b* verschoben wird: für welche Lagen von *b* werden die Stücke *ab* und *bc* gleichzeitig zum Tönen gebracht? — Führt man die zur Beantwortung dieser beiden Fragen nöthigen Versuche aus, so erhält man sämmtliche Schwingungen oder Obertöne, welche die Saite bei den verschiedensten Versuchsbedingungen geben kann. Fragt man aber: 3. Welches ist bei einer bestimmten Saitenlänge *ab* oder *ac* der thatsächliche Schwingungsvorgang, d. h. welches sind die in diesem ganz bestimmten Falle wirklich auftretenden Schwingungen und welches die Intensität jeder einzelnen von ihnen? — so versagen die beiden ersten Methoden der Untersuchung. Nach den mit denselben gewonnenen Erfahrungen kann man wohl sagen, es sei möglich, dass diese oder jene Schwingungen gleichzeitig auftreten, eine Gewissheit für diese Behauptung bieten die Versuche jedoch nicht; über das Intensitätsverhältniss der auftretenden Schwingungen aber gestatten dieselben überhaupt keine Aussage. Will man demnach die dritte Frage beantworten, so muss man eine andere Methode der Untersuchung wählen, durch welche an den Versuchsbedingungen der Saite selbst nichts geändert wird. Man wird die Schwingungen der Saite z. B. photographiren oder mit Hilfe von Resonatoren analysiren. Auf diese Weise wird man Frage 3 vollständig beantworten können. Die nach diesen drei Methoden erhaltenen Resultate werden miteinander in einem Widerspruch nicht stehen können.

Ganz ebenso wie in diesem akustischen Beispiele liegt die Sache im vorliegenden Falle der Schwingungen in einem Lecher'schen Drahtsystem. Die entsprechenden Fragen 1 und 2 sind durch die citirten Untersuchungen der oben genannten Forscher beantwortet. Eine Methode zur Lösung der dritten Frage glaube ich in der vorliegenden Arbeit angegeben zu haben. Dieselbe Methode scheint auch geeignet, um über eine Reihe anderer Fragen, welche sich bei veränderten Versuchsbedingungen aufdrängen, bequemen Aufschluss zu geben.

6. Zur Theorie. Im Anschlusse an die vorliegende Arbeit und an meine frühere Mittheilung sollen noch kurz die Resultate angeführt werden, zu welchen die unter den Kirchhoff'schen Annahmen angestellte Berechnung des Schwingungsvorganges in einem System von n einfachen Hertz'schen Erregern, welche einander beliebig beeinflussen, führt. Da der Gang der leicht auszuführenden Rechnung ein ganz ähnlicher ist, wie in dem von Herrn Prof. Jaumann behandelten Falle, welchen ich früher mitgetheilt habe,[1] so soll derselbe hier nicht im Einzelnen wieder dargestellt werden.

Gegeben seien n einfache Hertz'sche Erreger (Fig. 9), bestehend aus je zwei, als punktförmig gedachte Conductoren

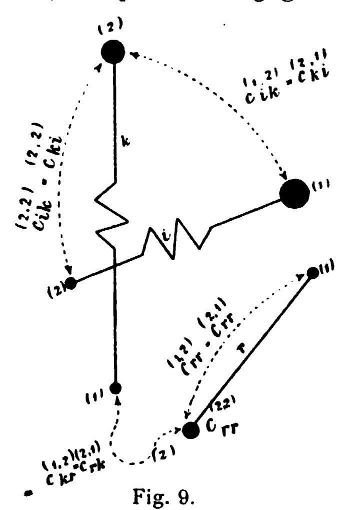


Fig. 9.

[(1) und (2)], von den Capacitäten $c_{ii}^{(1\cdot 1)}$ und $c_{ii}^{(2\cdot 2)}$ $[i = 1, 2, \ldots n]$, welche durch einen capacitätsfreien, widerstandslosen Draht vom Selbstinductionscoëfficienten L_{ii} $(i = 1, 2, \ldots n)$ verbunden sind. Die Coëfficienten der gegenseitigen Induction der Drähte i und k sollen mit $L_{ik} = L_{ki}$ bezeichnet werden. Die elektrostatischen Inductionscoëfficienten der $2n$ Conductoren werden dargestellt durch die Grössen $c_{ik}^{(1\cdot 1)}$, $c_{ik}^{(1\cdot 2)}$, $c_{ik}^{(2\cdot 2)}$, $c_{ik}^{(2\cdot 1)}$;[2] es

[1] Diese Sitzungsber., CIV, Abth. II. a., S. 178, 1895 oder Wied. Ann. 55, S. 521, 1895.

[2] Bezüglich der Bedeutung der c_{ik} und c_{ii} vergl. Maxwell, Elektr. und Magnet. Deutsch von Weinstein, 1883, I, §. 87; die entsprechenden Grössen sind bei Maxwell mit q_{rs} und q_{rr} bezeichnet.

bedeutet, wie auch in der Figur ersichtlich gemacht ist, z. B.: $c_{ik}^{(2.1)} = c_{ki}^{(1.2)}$ den elektrostatischen Inductionscoëfficienten des Conductors (2) des Erregers i auf den Conductor (1) des Erregers k u. s. w.

Mit $V_i^{(1)}$, $V_i^{(2)}$ werden die Potentiale bezeichnet, welche beziehungsweise auf dem Conductor (1) oder (2) des Erregers i herrschen. Unter $A_i^{(1)}$, $A_i^{(2)}$ sind die Maximalwerthe (Amplituden) dieser Potentiale verstanden. Es bedeutet ferner $x = \frac{2\pi}{T}$, wenn T die Periode einer Schwingung ist.

Die Rechnung ergibt ein System von $2n$ linearen, in den $2n$ Grössen $A_i^{(1)}$ und $A_i^{(2)}$ homogenen Gleichungen. Die Determinante der Coëfficienten dieser Grössen muss bekanntlich verschwinden. Dies liefert, da n von den $2n$ Gleichungen nur die Abhängigkeit der A mit gleichem unteren Index von einander darstellen und x^2 nicht enthalten,[1] eine algebraische Gleichung n^{ten} Grades zur Bestimmung der x^2, beziehungsweise der Schwingungsdauern T. Das heisst:

Ein System von n beliebigen einfachen Erregern, welche einander gegenseitig beliebig beeinflussen, erzeugt gleichzeitig höchstens n von einander und von den n Eigenschwingungen der unbeeinflussten n Erreger verschiedene Schwingungen.

In den praktisch wichtigen Fällen wird die experimentelle Anordnung meist einen hohen Grad von Symmetrie aufweisen. Ist das ganze System von Erregern vollständig symmetrisch um eine durch dasselbe gelegte Ebene und ausserdem jeder einzelne Erreger symmetrisch um einen Punkt seines Drahtes, so bestehen folgende Gleichungen zwischen den in die Rechnung eintretenden Grössen, wodurch letztere wesentlich vereinfacht wird:

$$L_{ik} = L_{ki}; \quad c_{ik}^{(1.2)} = c_{ik}^{(2.1)} = c_{ki}^{(2.1)} = c_{ki}^{(1.2)}; \quad c_{ik}^{(1.1)} = c_{ik}^{(2.2)};$$

$$V_i^{(1)} = -V_i^{(2)} = V_i; \qquad A_i^{(1)} = -A_i^{(2)} = A_i.$$

---

[1] Die Grösse x kommt nur in der zweiten Potenz in diesen Gleichungen vor. Zur Bestimmung der Schwingungsdauern T kann selbstverständlich nur die positive Quadratwurzel aus x^2 herangezogen werden.

Mit Rücksicht hierauf erhält die für die Grössen A geltende Gleichung die Gestalt:

$$\sum_{p=1}^{p=n} \sum_{k=1}^{k=n} (c_{pk}^{(1,1)} + c_{pk}^{(1,2)}) L_{ip} . x^2 . A_k - A_i = 0; \qquad [i = 1, 2, \ldots n].$$

Dies ist ein System von n mit Bezug auf die n Grössen A homogenen linearen Gleichungen; demnach muss die Determinante der Coëfficienten dieser n Grössen verschwinden, wodurch, wie im allgemeineren Falle, eine Gleichung $n$ten Grades zur Bestimmung der x^2, beziehungsweise der T erhalten wird. Diese Gleichung ist die folgende:

$$\begin{vmatrix} \left[\sum_{k=1}^{k=n} (c_{k1}^{(1,1)} + c_{k1}^{(1,2)}) L_{1k} x^2 - 1\right], & \sum_{k=1}^{k=n} (c_{k2}^{(1,1)} + c_{k2}^{(1,2)}) L_{1k} x^2, & \ldots, & \sum_{k=1}^{k=n} (c_{kn}^{(1,1)} + c_{kn}^{(1,2)}) L_{1k} . x^2 \\ \sum_{k=1}^{k=n} (c_{k1}^{(1,1)} + c_{k1}^{(1,2)}) L_{2k} x^2, & \left[\sum_{k=1}^{k=n} (c_{k2}^{(1,1)} + c_{k2}^{(1,2)}) L_{2k} x^2 - 1\right], & \ldots, & \sum_{k=1}^{k=n} (c_{kn}^{(1,1)} + c_{kn}^{(1,2)}) L_{2k} x^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum_{k=1}^{k=n} (c_{k1}^{(1,1)} + c_{k1}^{(1,2)}) L_{nk} x^2, & \sum_{k=1}^{k=n} (c_{k2}^{(1,1)} + c_{k2}^{(1,2)}) L_{nk} x^2, & \ldots, & \left[\sum_{k=1}^{k=n} (c_{kn}^{(1,1)} + c_{kn}^{(1,2)}) L_{nk} x^2 - 1\right] \end{vmatrix} = 0$$

Es vermag demnach auch ein mit Bezug auf eine Ebene vollkommen symmetrisches System von n einander beeinflussenden einfachen Hertz'schen Erregern höchstens n von einander und von den Eigen-

schwingungen der n unbeeinflussten Einzelkreise verschiedene Schwingungsdauern zu erzeugen.

Um die Anwendbarkeit dieser Formel auf specielle Fälle zu zeigen, soll zunächst der Schwingungsvorgang in einer Tesla'schen Anordnung mit Hilfe derselben berechnet werden, denn die Rechnung ist auch auf Erreger von anderen Dimensionen, als denjenigen der Hertz'schen Kreise, anwendbar, so-

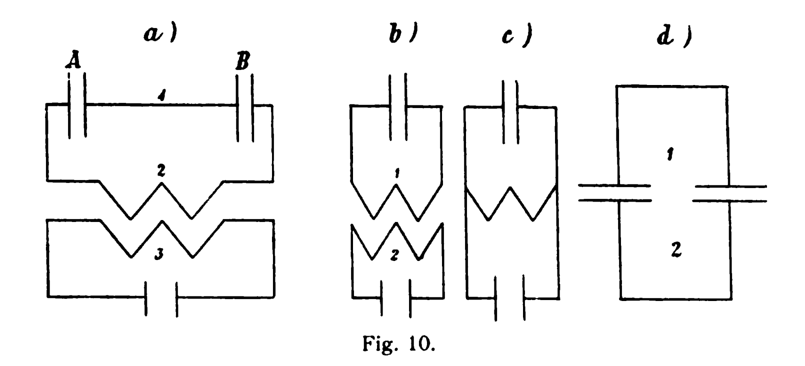


Fig. 10.

lange nur die der Rechnung zugrundeliegenden Annahmen giltig bleiben.

Fig. 10 *a)* gibt eine Skizze der Tesla'schen Aufstellung. Man hat zu setzen:

$$n = 3; \qquad c_{13} = c_{31} = c_{23} = c_{32} = 0,$$
$$L_{13} = L_{31} = L_{12} = L_{21} = 0.$$

Mithin:

$$\begin{vmatrix} (c_{11}L_{11}x^2 - 1), & c_{12}L_{11}x^2, & 0 \\ c_{12}L_{22}x^2, & (c_{22}L_{22}x^2 - 1), & c_{33}L_{23}x^2 \\ c_{12}L_{23}x^2, & c_{22}L_{23}x^2, & (c_{33}L_{33}x^2 - 1) \end{vmatrix} = 0.$$

Die gewöhnliche Tesla'sche Anordnung erzeugt demnach drei Schwingungen.

Für den Fall $n = 2$ ergibt sich:

$$\begin{vmatrix} [(c_{11}L_{11} + c_{12}L_{12})x^2 - 1], & (c_{12}L_{11} + c_{22}L_{12})x^2 \\ (c_{11}L_{12} + c_{12}L_{22})x^2, & [(c_{12}L_{12} + c_{22}L_{22})x^2 - 1] \end{vmatrix} = 0$$

oder

$$x^4 - \frac{c_{11}L_{11}+c_{22}L_{22}+2c_{12}L_{12}}{(c_{11}c_{22}-c_{12}^2).(L_{11}L_{22}-L_{12}^2)}x^2 + \frac{1}{(c_{11}c_{22}-c_{12}^2).(L_{11}L_{22}-L_{12}^2)} = 0.$$

Dies ergibt für den Fall der Blondlot'schen[1] Anordnung (vergl. Fig. 10 *b*), bei welcher $c_{12} = 0$ zu setzen ist, für T die Gleichung:

$$x^2 = \frac{1}{2}\frac{c_{11}L_{11}+c_{22}L_{22}}{c_{11}c_{22}(L_{11}L_{22}-L_{12}^2)} \pm$$

$$\pm \sqrt{\left[\frac{1}{2}\frac{c_{11}L_{11}+c_{22}L_{22}}{c_{11}c_{12}(L_{11}L_{22}-L_{12}^2)}\right]^2 - \frac{1}{c_{11}c_{22}(L_{11}L_{22}-L_{12}^2)}}.$$

Diese Anordnung ergibt also im Allgemeinen zwei von den Eigenschwingungen der Einzelkreise verschiedene Schwingungen.[2] In dem extremen Falle, dass $L_{12} = 0$ wird, wenn also die Kreise sich gegenseitig nicht beeinflussen, so sind die möglichen zwei Schwingungen gleich den Eigenschwingungen der Einzelkreise;[3] in dem anderen extremen Falle, in welchem eine der Grössen c_{11}, L_{11}, c_{22}, L_{22} unendlich wird, hat das

---

[1] R. Blondlot, Compt. rend. 114, p. 283, 1892.

[2] A. Overbeck (Wied. Ann. 55, S. 623, 1895) legt seiner Berechnung der Tesla'schen Versuche nicht das Schema Fig. 10 *a* zu Grunde, sondern sagt: »Endlich können wir uns die Condensatoren *A* und *B* (siehe Fig. 10 *a*) für die Berechnung durch einen einzigen Condensator von halber Capacität ersetzt denken, so dass wir den weiteren Betrachtungen die Anordnung Fig. 10 *b* zu Grunde legen können.« A. Overbeck erhält auch das richtige Resultat, dass eine Anordnung Fig. 10*b* zwei Perioden besitzt. Dies gilt aber, wie gezeigt wurde, nicht für die wirkliche Tesla'sche Aufstellung. Noch eine Bemerkung sei mit Bezug auf diese Anordnung gestattet. Denkt man sich die einander beeinflussenden Theile der Drähte in Fig 10 *b* einander immer mehr und mehr genähert, bis dieselben endlich, wie in Fig. 10 *c*, zusammenfallen (ein Übergang, wie er bei der Berechnung von Selbstinductionscoëfficienten angewendet wird), so erhält man hiedurch unmittelbar einen complicirten Erreger von der Form, welche ich in meiner früheren Mittheilung (diese Sitzungsber., Bd. CIV, Abth. II. a., Februar 1895, oder Wied. Ann. 55, S. 513, 1895) untersucht habe. Es kann daher nicht verwundern, dass das Resultat für beide Fälle nahezu identisch ist. Bezüglich der Discussion specieller Fälle der Anordnung 10 *b* vergl. A. Overbeck, l. c.

[3] Vergl. V. Bjerknes, l. c. S. 127.

System nur eine einzige Schwingungsdauer gleich derjenigen des Einzelkreises, dessen Periode endlich bleibt.

Für die Lecher'sche Aufstellung (Fig. 10 *d*), bei welcher c_{12} nicht verschwindet, hingegen $L_{12} = 0$ zu setzen ist, folgt:

$$x^2 = \frac{1}{2} \frac{c_{11} L_{11} + c_{22} L_{22}}{(c_{11} c_{22} - c_{12}^2) . L_{11} L_{22}} \pm$$

$$\pm \sqrt{\left[\frac{1}{2} \frac{c_{11} L_{11} + c_{22} L_{22}}{(c_{11} c_{22} - c_{12}^2) L_{11} L_{22}}\right]^2 - \frac{1}{(c_{11} c_{22} - c_{12}^2) L_{11} L_{22}}} .$$

Auch hier gelten ganz ähnliche Sätze, wie für die Blondlot'sche Anordnung, wenn einmal $c_{12} = 0$, das anderemal eine der Grössen c_{11}, L_{11}, c_{22}, $L_{22} = \infty$ gesetzt wird. Im Allgemeinen emittirt jedoch die Lecher'sche Anordnung zwei Schwingungen, welche von den freien Eigenschwingungen der Einzelkreise verschieden sind.

Alle angeführten Resultate gelten streng nur für die einschränkenden Voraussetzungen, welche über den Widerstand und die Capacität der Drähte gemacht wurden. Die hier in Kürze dargestellte Theorie gestattet daher keinerlei Aussage: einestheils über die Dämpfung oder Aperiodicität der einzelnen Schwingungen bei Versuchen, wo der Widerstand der Drähte nicht zu vernachlässigen ist, anderentheils über das Auftreten von Oberschwingungen bei Benützung von Drähten, deren eigene Capacität gegenüber derjenigen der verwendeten Condensatoren nicht als verschwindend klein betrachtet werden kann. Es ist möglich, Versuchsanordnungen zu treffen, bei welchen die genannten Voraussetzungen nahezu erfüllt sind; bei den mitgetheilten Versuchen war dies jedoch keineswegs der Fall.



Beitrag zur Bestimmung des täglichen Ganges der Veränderlichkeit der Lufttemperatur

von

Eduard Mazelle.

Bei einer Untersuchung über die gegenseitigen Beziehungen im täglichen Gange der Scheitelwerthe und Mittelwerthe,[1] namentlich bei der Behandlung der »Stabilität« der Lufttemperatur (S. 73 u. f. der erwähnten Abhandlung) entstand der Wunsch, die Veränderlichkeit der Temperatur nicht nur auf Grund der Tagesmittel zu bestimmen, sondern auch, behufs Ableitung der täglichen Periode, die Beobachtungen einer grösseren Anzahl von bestimmten Stunden des Tages heranzuziehen.

Es wurden zu diesem Zwecke wieder die Thermographenbeobachtungen der Sternwarte des hydrographischen Amtes der k. u. k. Kriegsmarine zu Pola als die derzeit brauchbarsten Thermographen-Aufzeichnungen unserer Küste benützt. Dank dem gütigen Entgegenkommen der Direction dieses hydrographischen Amtes konnte die Sammlung dieser Beobachtungen am k. k. astronomisch-meteorologischen Observatorium in Triest vervollständigt werden, so dass dieser Arbeit die Beobachtungen des vollen Decenniums 1881—1890 zu Grunde gelegt werden konnten.

Zur Bearbeitung gelangten die Temperaturaufzeichnungen jeder zweiten Stunde der vier Monate Jänner, April, Juli und

---

[1] Beziehungen zwischen den mittleren und wahrscheinlichsten Werthen der Lufttemperatur, von Eduard Mazelle, LXII. Bd. der Denkschriften der mathem.-naturw. Classe der kaiserl. Akademie der Wissenschaften, Wien, 1895.

October, welche Monate als Repräsentanten der einzelnen Jahreszeiten dienen sollen.

Zuerst kommt die tägliche Periode der Veränderlichkeit zur Bestimmung, um sodann nach einer Trennung der Veränderlichkeiten die Beziehungen zwischen den Erkaltungen und Erwärmungen der einzelnen Tagesstunden festzustellen. Zum Schlusse folgt eine kurze Betrachtung der jährlichen Periode der Veränderlichkeit und der Temperaturwellen.

I. Täglicher Gang der Veränderlichkeit.

Die Veränderlichkeiten von Tag zu Tag, ohne Rücksicht auf ihr Zeichen, geben die in Tabelle 1—4 dargestellten mittleren Veränderlichkeiten der einzelnen Monate. Aus der Betrachtung der Verticalreihen findet man, dass die Extreme der einzelnen Jahre auf verschiedene Stunden fallen. Die Vertheilung sowohl der Maxima, als auch der Minima ist sehr unregelmässig, so dass wenige Jahre kaum zur Darstellung des täglichen Ganges herangezogen werden könnten.

Im Jänner und October fallen allerdings die Maxima grösstentheils auf die Nacht- und Vormittagstunden (von 10^h p. bis 8^h a.), aber doch in zwei Fällen, Jänner 1887 auf 2^h p. und October 1881 auf 4^h p. Die Minima vertheilen sich auf die Mittag- und Nachmittagstunden (bis 8^h p.). Die in Tabelle 5 mitgetheilten Lustrenmittel geben aber einen bereits ziemlich übereinstimmenden täglichen Gang.

Ebenso finden wir in den zwei Sommermonaten April und Juli für die einzelnen Jahre die Extreme auf sehr verschiedene Stunden vertheilt, während die Lustrenmittel aber schon eine sehr hübsche Übereinstimmung geben. In den einzelnen Jahren ist die in den Lustrenmitteln deutlich ersichtliche Doppelschwankung theilweise kaum bemerkbar.

Die zehnjährigen Mittelwerthe dieser Veränderlichkeiten lassen die tägliche Periode sehr deutlich entnehmen. Aus einer Betrachtung der Tabelle 6, in welcher dieser Gang für die in Betracht gezogenen Monate dargestellt erscheint, ersieht man aus diesen nicht ausgeglichenen Werthen das Vorkommen einer Doppelschwankung, welche namentlich in den Frühlings- und Sommermonaten sehr deutlich hervortritt.

Tabelle 1.

Mittlere Veränderlichkeit der Temperatur.

Jänner.

	1881	1882	1883	1884	1885	1886	1887	1888	1889	1890
2ʰ a.	2·95	2·21	2·60	1·74	2·20	2·26	1·66	1·97	2·74	1·73
4	2·94	2·05	2·46	1·86	2·05	2·73	1·70	1·44	2·58	1·77
6	3·13	1·87	2·34	2·57	2·17	2·84	1·79	1·70	2·33	1·80
8	2·99	2·03	2·31	3·01	1·82	2·68	1·92	1·86	2·38	1·92
10	2·42	1·74	2·20	2·44	1·90	2·37	1·90	1·66	2·37	1·73
12ʰ m.	2·27	1·50	2·09	1·51	1·96	1·70	1·88	1·38	2·53	1·32
2ʰ p.	2·01	1·19	2·30	1·30	1·75	1·40	2·14	1·46	2·22	1·39
4	2·21	1·23	1·95	1·22	1·51	1·57	2·10	1·42	2·13	1·46
6	2·36	1·33	1·90	1·38	1·66	1·51	1·83	1·14	2·15	1·39
8	2·40	1·82	2·10	1·87	2·05	1·92	1·64	1·58	2·75	1·62
10	2·70	1·69	2·27	1·96	2·22	2·34	1·88	1·95	2·77	1·47
12ʰ n.	2·75	1·94	2·42	1·91	2·36	2·46	1·68	1·91	2·70	1·52

Tabelle 2.

Mittlere Veränderlichkeit der Temperatur.

April.

	1881	1882	1883	1884	1885	1886	1887	1888	1889	1890
2ʰ a.	1·38	1·95	1·33	1·47	1·84	1·81	1·53	1·73	1·83	2·36
4	1·37	1·91	1·43	1·67	1·81	2·22	1·51	1·90	1·83	2·56
6	1·48	1·78	1·68	1·85	1·79	2·11	1·44	1·82	2·05	2·40
8	1·44	1·32	1·89	1·26	1·52	1·78	2·22	1·67	1·93	1·49
10	1·69	1·64	1·26	1·16	1·51	1·63	2·06	1·70	2·52	1·54
12ʰ m.	1·55	2·04	1·54	1·50	1·47	1·43	2·05	1·86	2·55	1·86
2ʰ p.	1·34	2·17	1·63	1·60	1·57	1·56	1·73	1·88	2·24	1·78
4	1·49	2·01	1·59	1·40	1·47	1·21	1·41	1·50	1·96	1·47
6	1·03	1·59	1·31	1·03	1·39	1·01	1·16	1·25	1·58	1·38
8	1·09	1·44	1·26	0·76	1·19	1·08	1·03	1·23	1·39	1·36
10	1·35	1·70	1·44	1·34	1·26	1·59	1·32	1·26	1·65	1·48
12ʰ n.	1·51	2·03	1·45	1·29	1·61	1·83	1·54	1·49	1·71	1·72

Tabelle 3.

Mittlere Veränderlichkeit der Temperatur.

Juli.

	1881	1882	1883	1884	1885	1886	1887	1888	1889	1890
2^h a.	1·70	1·83	2·13	2·09	1·45	1·64	1·42	1·63	1·98	2·32
4	2·18	2·05	2·02	1·84	1·15	1·98	1·56	1·85	2·17	2·15
6	1·84	1·78	2·13	1·89	1·40	1·79	1·68	1·71	2·35	1·87
8	1·69	1·45	1·89	1·92	1·40	1·38	1·24	0·94	1·34	1·60
10	1·67	1·43	2·30	2·47	1·79	1·61	1·66	1·40	1·81	1·82
12^h m.	1·64	2·46	1·71	2·43	2·60	1·99	2·06	1·45	1·40	1·75
2^h p.	1·80	2·21	1·97	2·86	1·90	1·82	1·18	1·35	1·35	1·38
4	1·30	2·28	1·79	2·24	1·69	1·67	1·20	1·69	1·13	2·26
6	1·54	2·10	2·07	2·38	1·59	1·60	1·54	1·48	1·44	1·70
8	1·36	1·45	2·43	1·89	1·52	1·59	1·23	1·22	1·63	1·73
10	1·48	1·52	2·26	1·76	1·20	1·40	1·14	1·06	1·64	1·45
12^h n.	1·39	1·54	2·35	1.87	1·20	1·73	1·24	1·48	1·97	2·10

Tabelle 4.

Mittlere Veränderlichkeit der Temperatur.

October.

	1881	1882	1883	1884	1885	1886	1887	1888	1889	1890
2^h a.	1·82	1·98	1·65	2·44	3·00	2·02	1·99	1·85	1·83	2·23
4	1·85	2·07	1·47	2·58	3·08	2·00	2·26	1·87	1·77	2·36
6	2·05	2·43	1·29	2·64	2·99	1·95	2·37	1·90	1·76	2·33
8	1·94	2·32	1·73	2·54	2·84	1·79	1·98	1·75	1·63	2·59
10	1·81	1·57	1·62	1·87	2·05	1·47	1·64	1·75	1·58	2·06
12^h m.	1·95	1·68	1·28	1·74	2·50	1·31	1·48	1·78	1·44	1·96
2^h p.	1·80	1·43	1·47	1·69	2·79	1·17	1·59	1·57	1·37	2·13
4	2·20	1·41	1·47	1·78	2·90	1·44	1·64	1·45	1·26	2·01
6	1·80	1·28	1·60	1·95	2·64	1·35	1·72	1·27	1·36	2·11
8	1·57	1·47	1·71	2·04	2·67	1·77	1·81	1·27	1·57	2·21
10	1·72	1·83	1·81	2·49	3·48	2·52	1·96	1·59	1·85	2·27
12^h n.	1·66	2·02	1·82	2·64	3·32	2·51	2·11	1·78	1·86	2·48

Tabelle 5.

Lustrenmittel der Veränderlichkeit.

	Jänner		April		Juli		October	
	1881 bis 1885	1886 bis 1890	1881 bis 1885	1886 bis 1890	1881 bis 1885	1886 bis 1890	1881 bis 1885	1886 bis 1890
2^h a.	**2·34**	**2·07**	1·59	1·85	1·84	1·80	2·18*	1·98*
4	2·27*	2·04*	1·64	**2·00**	**1·85**	**1·94**	2·21	2·05
6	2·42	2·09	**1·72**	1·96	1·81	1·88	**2·28**	**2·06**
8	**2·43**	**2·15**	1·49	1·82*	1·67*	1·30*	2·27	1·95
10	2·14	2·01	1·45*	1·89	1·93	1·66	1·78*	1·70
12^h m.	1·87	1·76	1·62	**1·95**	**2·17**	**1·73**	1·83	1·59
2^h p.	1·71	1·72	**1·66**	1·84	2·15	1·42	1·84	1·57
4	1·62*	1·74	1·59	1·51	1·86	1·59	1·95	1·56*
6	1·73	1·60*	1·27	1·28	1·94	1·55	1·85	1·56
8	2·05	1·90	1·15*	1·22*	1·73	1·48	1·89	1·73
10	2·17	2·08	1·42	1·46	1·64*	1·33*	2·27	2·04
12^h n.	2·28	2·05	1·58	1·66	1·67	1·70	**2·29**	**2·15**

Tabelle 6.

Täglicher Gang der Veränderlichkeit. 10 Jahre, 1881—1890.

	Jänner		April		Juli		October	
2^h a.	**2·21**	**·20**	1·72	·11	1·82	·08	2·08*	·14*
4	2·16*	·15*	1·82	·21	**1·89**	**·15**	2·13	·19
6	2·25	·24	**1·84**	**·23**	1·84	·10	**2·17**	**·23**
8	**2·29**	**·28**	1·65*	·04*	1·48*	—·26*	2·11	·17
10	2·07	·06	1·67	·06	1·80	·06	1·74	—·20
12^h m.	1·81	—·20	**1·78**	**·17**	**1·95**	**·21**	1·71	—·23
2^h p.	1·72	—·29	1·75	·14	1·78	·04	1·70*	—·24*
4	1·68	—·33	1·55	—·06	1·73	—·01	1·76	—·18
6	1·66*	—·35*	1·27	—·34	1·75	·01	1·71	—·23
8	1·98	—·03	1·18*	—·43*	1·61	—·13	1·81	—·13
10	2·12	·11	1·44	—·17	1·49*	—·25*	2·15	·21
12^h n.	2·17	·16	1·62	·01	1·69	—·05	**2·22**	**·28**
Mittel	2·01	—	1·61	—	1·74	—	1·94	—

Tabelle 7.

Ausgeglichener täglicher Gang der Veränderlichkeit.

	Jänner		April		Juli		October	
2h a.	2·19	·18	1·72	·11	1·80	·06	2·13*	·19*
4	2·20	·19	**1·80**	**·19**	**1·86**	**·12**	2·13*	·19*
6	**2·24**	**·23**	1·79	·18	1·76	·02	**2·15**	**·21**
8	2·23	·22	1·70	·09	1·65*	—·09*	2·03	·09
10	2·06	·05	1·69*	·08*	1·76	·02	1·82	—·12
12h m.	1·85	—·16	**1·74**	**·18**	**1·87**	**·18**	1·71*	—·23*
2h p.	1·73	—·28	1·71	·10	1·81	·07	1·72*	—·22
4	1·68*	—·33*	1·53	—·08	1·75	·01	1·73	—·21
6	1·74	—·27	1·32	—·29	1·71	—·03	1·75	—·19
8	1·93	—·08	1·27*	—·34*	1·61	—·13	1·87	—·07
10	2·10	·09	1·42	—·19	1·57*	—·17*	2·08	·14
12h n.	2·17	·16	1·60	—·01	1·67	—·07	**2·17**	**·23**

Tabelle 8.

Täglicher Gang der Veränderlichkeit für die Jahreszeiten und ein Durchschnittsjahr.

	Winter (Jänner, October)		Sommer (April, Juli)		Jahr (Jänner, October, April, Juli)	
2h a.	2·16*	·19*	1·76	·09	1·96	·14
4	2·16	·19	**1·83**	**·16**	**2·00**	**·18**
6	**2·19**	**·22**	1·77	·10	1·98	·16
8	2·13	·16	1·67*	·00*	1·90	·08
10	1·94	—·03	1·72	·05	1·83	·01
12h m.	1·78	—·19	**1·80**	**·13**	1·79	—·03
2h p.	1·72	—·25	1·76	·09	1·74	—·08
4	1·70*	—·27*	1·64	—·03	1·67	—·15
6	1·74	—·23	1·51	—·16	1·63*	—·19*
8	1·90	—·07	1·44*	—·23*	1·67	—·15
10	2·09	·12	1·49	—·18	1·79	—·03
12h n.	**2·17**	**·20**	1·63	—·04	1·90	·08
Mittel	1·97	—	1·67	—	1·82	—

Die Maxima Nachts (Morgens) und Vormittags (Mittags), die Minima Morgens (Vormittags) und Nachmittags (Abends). Die eingeklammerten Werthe beziehen sich auf den Frühling und Sommer.

Diese Mittelwerthe wurden, vor der Construction der einzelnen Gangcurven, nach der Formel $^1/_4(m_{n-1}+2m_n+m_{n+1})$ ausgeglichen:[1] die diesbezüglichen Resultate finden sich in Tabelle 7.

Im Jänner finden wir grössere Veränderlichkeit der Temperatur Nachts und Vormittags, kleinere vom Mittag bis zum Abend. Nachts und in den ersten Morgenstunden lässt sich die Bildung der secundären Extreme erkennen. Die grösste Veränderlichkeit finden wir Morgens um 7^h, die kleinste um 4^h Nachmittags. Von hier aus nimmt die Veränderlichkeit (in den unausgeglichenen Werthen) zu bis 2^h Morgens, wo sich ein secundäres Maximum bildet, sinkt sodann etwas bis 4^h Morgens, die Zeit des secundären Minimums.

Ähnlichen Gang finden wir im October. Auch hier ist die Veränderlichkeit in den letzten Vormittagstunden, Nachmittags und Abends kleiner, Nachts bis in die ersten Vormittagstunden grösser. Das Hauptmaximum fällt um 6^h a., das Hauptminimum in den ersten Nachmittagstunden, secundäre Extreme um Mitternacht und um 3^h a.

Die Doppelschwankung erscheint im April und Juli kräftig ausgebildet. Für den April finden wir um 5^h a. ein Maximum, sodann um 9^h a. ein secundäres Minimum, das zweite Maximum gegen 1^h p., das Hauptminimum um 7^h p. Ähnlich im Juli, Maxima um 4^h a. und um 12^h Mittags, Minima um 8^h a. und 9^h p.

In groben Zügen könnte hervorgehoben werden, dass im Jänner und October wir beiläufig zur Zeit der Temperaturextreme auch die Extreme der Veränderlichkeiten vorfinden, nur entspricht dem Temperaturminimum das Maximum der Veränderlichkeit. In Folge dieses Verhaltens gehen auch die entsprechenden Gangcurven beiläufig zur selben Zeit durch

[1] Es soll gleich hier hervorgehoben werden, dass sämmtliche in dieser Abhandlung vorkommenden Ausgleichsrechnungen nach der Formel $^1/_4(m_{n-1}+2m_n+m_{n+1})$ vorgenommen wurden.

ihre Mittelwerthe. Im April und Juli finden wir im Ganzen und Grossen zur Zeit der Temperaturextreme die Maxima der Veränderlichkeit, zur Zeit, wo die tägliche Gangcurve der Temperatur durch ihren Mittelwerth geht (Zeit des ersten und zweiten Mediums), finden wir annähernd die Minima der Veränderlichkeit.

Wir haben daher für den Frühling und Sommer die grösste Veränderlichkeit beiläufig dort, wo im täglichen Gange der Temperatur die kleinste stündliche Änderung vorkommt, die kleinste Veränderlichkeit hingegen zur Zeit der grössten stündlichen Änderungen der Gangordinaten. Im Herbst und Winter fallen zur Zeit der kleinsten stündlichen Änderungen der Ordinaten der täglichen Temperaturcurve die Extreme der Veränderlichkeiten.

Nachfolgende Tabelle bringt diesen Zusammenhang zur Darstellung. Die Angaben für die Mittelwerthe *(M)* und Scheitelwerthe *(S)* wurden aus meiner früher erwähnten Abhandlung, S. 68, entnommen. Für die Scheitelwerthe wurde der Durchgang der Gangcurve sowohl durch den mittleren Scheitelwerth, als auch durch den häufigsten Temperaturwerth angegeben. Eine gewisse Übereinstimmung ist vorhanden. Die Angaben wurden auf ganze Stunden abgerundet.

Jänner.

Veränderlichkeit			Temperatur *M*	Temperatur *S*	
Maximum	7^h a.	Minimum	7^h a.	6^h a.	
I. Mittel	10^h a.	I. Mittel	10^h a.	10^h a.	10^h a.[1]
Minimum	4^h p.	Maximum	2^h p.	2^h p.	
II. Mittel	8^h p.	II. Mittel	8^h p.	8^h p.	8^h p.[1]

October.

Veränderlichkeit			Temperatur *M*	Temperatur *S*	
Maximum	6^h a.	Minimum	6^h a.	4^h a.	
I. Mittel	9^h a.	I. Mittel	9^h a.	8^h a.	8^h a.[1]
Minimum	2^h p.	Maximum	1^h p.	1^h p.	
II. Mittel	9^h p.	II. Mittel	7^h p.	8^h p.	8^h p.[1]

[1] Tägliche Gangcurve der Scheitelwerthe geht durch den häufigsten Werth.

April.

Veränderlichkeit			Temperatur M	Temperatur S	
I. Maximum ...	5^h a.	Minimum.....	5^h a.	5^h a.	
I. Minimum ...	9^h a.	I. Mittel	8^h a.	9^h a.	9^h a.[1]
II. Maximum ..	1^h p.	Maximum	1^h p.	1^h p.	
II. Minimum...	7^h p.	II. Mittel	8^h p.	8^h p.	8^h p.[1]

Juli.

I. Maximum ...	4^h a.	Minimum.....	4^h a.	3^h a.	
I. Minimum ...	8^h a.	I. Mittel	8^h a.	8^h a.	7^h a.[1]
II. Maximum..12	12^h m.	Maximum	2^h p.	1^h p.	
II. Minimum...	9^h p.	II. Mittel	8^h p.	8^h p.	9^h p.[1]

Die in dem Wintermonate schwach ausgeprägten secundären Extreme werden bedeutend im Frühling und rücken zugleich, wie die Hauptextreme, auf spätere Tagesstunden vor. Im Sommer, wo sich das Morgenminimum am deutlichsten ausprägt, bleiben die Eintrittszeiten der Wendepunkte beiläufig dieselben wie im Frühling, nur das Abendminimum erscheint noch mehr in die Abendstunden hinein gerückt. Im October zeigen sich die secundären Nacht- und Morgenextreme wieder sehr schwach ausgebildet und im Vereine mit den übrigen Extremen in rücklaufender Bewegung.

Vereinigen wir der grossen Übereinstimmung halber die Ergebnisse des Jänner mit denen des October und die des April mit denen des Juli, so erhalten wir folgende Reihen — Tabelle 8 — welche als Typen für den Winter und Sommer aufgefasst werden können.

Wir ersehen für den Winter die grösste Veränderlichkeit zur Zeit des Temperaturminimums, die kleinste in den ersten Nachmittagstunden. Das Abfallen, beziehungsweise das Ansteigen der Gangcurve vom Maximum zum Minimum und umgekehrt, findet ganz regelmässig statt, nur nach Mitternacht und in den ersten Morgenstunden, beiläufig zur Zeit der früher

---

[1] Tägliche Gangcurve der Scheitelwerthe geht durch den häufigsten Werth.

erwähnten secundären Extreme, ist fast keine Änderung in der Veränderlichkeit zu erkennen, die Gangcurve bleibt fast horizontal.

Im Sommer finden wir die grössten Veränderlichkeiten zur Zeit des Temperaturminimums und Mittags, die kleinsten um 8^h Abends und um 8^h Morgens.

Vereinigen wir die Ergebnisse aller vier Monate, so erhalten wir ein Resultat, welches als Darstellung der täglichen Periode im Jahresmittel betrachtet werden kann. Wir finden hier eine Periode zum Ausdrucke gebracht, welche fast als Spiegelbild des täglichen Ganges der Temperatur aufgefasst werden kann. Die grösste Veränderlichkeit fällt nach 4^h Morgens, nimmt Vormittags und Nachmittags ab, um das Minimum — allerdings erst — um 6^h zu erreichen, von welcher Zeit an die Veränderlichkeit wieder regelmässig wächst.

Diese Ergebnisse, welche ich hier aus zehnjährigen Beobachtungen für die nördliche Adria abgeleitet habe, stimmen mit denen von Kremser[1] für Hamburg und Wahlén für Barnaul berechneten überein.

Die Amplituden sind für Pola natürlich nicht so stark wie bei Barnaul, sie nähern sich denen Hamburgs.

Wir finden für Pola folgende Amplituden und mittlere Ordinaten:

	Jänner	April	Juli	Octob.	Winter	Sommer	Jahr
Amplitude....	0·56	0·53	0·30	0·46	0·49	0·39	0·37
Mittl. Ordinate	0·19	0·15	0·08	0·17	0·18	0·11	0·11

Analoges Verhalten zeigen die Amplituden, welche ich aus den Reihen der Kremser'schen Abhandlung entnehmen kann

	Winter	Sommer	Jahr
Hamburg.....	0·51	0·46	0·20
Barnaut.	2·0	0·8	0·92

Zur Erleichterung der Vergleiche erscheinen in nachfolgender Tabelle die Winter-, Sommer- und Jahresreihen für jede zweite Stunde neben einander gestellt.

[1] Die Veränderlichkeit der Lufttemperatur in Norddeutschland, von V. Kremser, Abhandlungen des königl. preuss. meteorolog. Institutes, Berlin, Bd. 1, Nr. 1, 1890.

	Winter			Sommer			Jahr		
	Pola	Hamburg	Barnaul	Pola	Hamburg	Barnaul	Pola	Hamburg	Barnaul
2h a.	2·16*	2·24	5·9	1·76	1·93	3·1	1·96	2·09	4·57
4	2·16	2·30	6·2	**1·88**	**2·01**	**3·3**	**2·00**	**2·16**	**4·74**
6	**2·19**	**2·36**	**6·4**	1·77	1·78	3·0	1·98	2·07	4·68
8	2·13	2·35	6·2	1·67*	1·70*	2·6*	1·90	2·03	4·41
10	1·94	2·22	5·4	1·72	1·92	3·0	1·83	2·06	4·18
12h m.	1·78	1·97	4·6	**1·80**	2·09	3·2	1·79	2·03	3·95
2h p.	1·72	1·91	4·4*	1·76	2·11	3·3	1·74	2·01	3·85*
4	1·70*	1·89*	4·4*	1·64	**2·13**	**3·4**	1·67	2·01	3·88
6	1·74	1·94	4·7	1·51	2·11	3·1	1·63*	2·02	3·89
8	1·90	1·98	5·1	1·44*	1·94	2·8*	1·67	1·96*	3·96
10	2·09	2·12	5·5	1·49	1·88	2·9	1·79	2·00	4·19
12h n.	**2·17**	2·16	5·7	1·63	1·87*	3·1	1·90	2·01	4·41
Amplit.	0·49	0·47	2·0	0·39	0·43	0·8	0·37	0·20	0·89

Eine eingehende Discussion über die einzelnen Wendestunden soll und kann hier, bei dem geringen vorliegenden Materiale, noch nicht gegeben werden, doch mögen diese Resultate benützt werden, um Nachfolgendes kurz hervorzuheben.

Die secundären Extreme, welche für den Winter in Pola zwar kaum erkennbar, aber doch noch vorhanden sind, finden sich in Hamburg und Barnaul nicht vor. Die Maxima und Minima — auf ganze Stunden abgerundet — fallen sehr annähernd auf dieselbe Zeit:

	Max.	Min.
Barnaul	6h a.	3h p.
Hamburg	7h a.	4h p.
Pola	6h a.	4h p.

Die Amplitude ist in Barnaul natürlich die grösste, in Hamburg und Pola fast gleich gross.

Im Sommer zeigen alle drei Orte ähnliche Doppelschwankungen.

	Max.	Min.	Max.	Min.
Barnaul.........	4^h a.	8^h a.	3^h p.	8^h p.
Hamburg	4^h a.	8^h a.	3^h p.	11^h p.
Pola	4^h a.	8^h a.	12^h m.	8^h p.

Die beiden Vormittags-Wendestunden erscheinen an allen drei Orten zur gleichen Zeit, das Nachmittagsmaximum fällt in Pola schon auf den Mittag, während in Hamburg und Barnaul dasselbe erst um 3^h p. eintritt. Das Nachmittagsminimum für Hamburg verspätet sich in diesen Reihen.

Die Amplitude ist in Barnaul wieder am grössten, aber bedeutend kleiner geworden als im Winter. Pola und Hamburg zeigen auch im Sommer nahezu gleiche Amplituden, die für Pola wäre etwas kleiner. Beide Amplituden haben im Vergleiche zur Winteramplitude abgenommen, aber um ganz geringe Beträge. In der Jahrescurve, welche in Barnaul besonders gut ausgeprägt erscheint, in Pola sich auch noch sehr deutlich darstellt, finden wir das Maximum zur selben Stunde, beiläufig 4^h Morgens, das Minimum Nachmittags, und zwar in Barnaul nach 2^h p., in Pola um 6^h p., in Hamburg um 8^h p.

In der bereits genannten Abhandlung über die tägliche Periode der Scheitelwerthe und Mittelwerthe wurde aus den Wahrscheinlichkeitscurven jeder Stunde für das Eintreffen bestimmter Temperaturen entnommen, der wie vielte Theil des Temperatur-Schwankungsgebietes zu einer Wahrscheinlichkeit von mindestens $100^0/_{00}$ gelangt, und dadurch ein Mass gewonnen für die Bestimmung der »Stabilität« der Temperatur. In Tabelle XXXI der oberwähnten Abhandlung erscheint die tägliche Periode dieser Stabilität zusammengestellt. Wir wollen hier nun dieselbe in Verbindung mit dem täglichen Gange der Veränderlichkeit betrachten, um einerseits den Grad der Übereinstimmung, anderseits auch die Berechtigung abzuleiten, dass wir früher die vier Monate als Repräsentanten der vier Jahreszeiten auffassen durften und ebenso die einzelnen Mittelwerthe zur Darstellung des Winter- und Sommerhalbjahres und Jahres benützen konnten.

Tabelle 9.

Täglicher Gang der Stabilität.

	Jänner	April	Juli	October
2h a.	22·2*	**28·1**	38·6	9·1
4	21·7	34·6*	**35·3**	12·8*
6	19·1	33·6	41·9*	8·3
8	**18·9**	34·8*	34·5	**7·9**
10	27·9*	**26·8**	27·1	12·0
12h m.	24·2	27·7	**24·7**	19·4
2h p.	24·4	27·0	26·1	23·2
4	22·6	32·7	27·1	24·4
6	21·5	44·7*	27·1	27·5*
8	22·3	42·3	29·0	12·9
10	**19·8**	38·2	42·2*	7·7
12h n.	22·0	31·1	41·0	**5·6**
Mittel	22·2	33·5	32·9	14·2

Tabelle 10.

Ausgeglichener täglicher Gang der Stabilität.

	Jänner		April		Juli		October	
2h a.	22·0*	0·2*	**30·5**	**3·0**	38·4	—5·5	9·1	5·1
4	21·2	1·0	32·7	0·8	**37·8**	**—4·9**	10·8*	3·4*
6	**19·7**	**2·5**	34·1*	—0·6*	38·4*	—5·5*	9·3	4·9
8	21·2	1·0	32·5	1·0	34·5	—1·6	**9·0**	**5·2**
10	24·7	—2·5	29·0	4·5	28·3	4·6	12·8	1·4
12h m.	25·2*	—3·0*	**27·3**	**6·2**	**25·6**	**7·3**	18·5	— 4·3
2h p.	23·9	—1·7	28·6	4·9	26·0	6·9	22·6	— 8·4
4	22·8	—0·6	34·3	—0·8	26·9	6·0	24·9*	—10·7*
6	22·0	0·2	41·1	—7·6	27·6	5·3	23·1	— 8·9
8	21·5	0·7	41·9*	—8·4*	31·8	1·1	15·2	— 1·0
10	**21·0**	**1·2**	37·5	—4·0	38·6	—5·7	8·5	5·7
12h n.	21·5	0·7	32·1	1·4	40·7*	—7·8*	**7·0**	**7·2**

Diese hier citirte Tabelle XXXI enthält bereits ausgeglichene Werthe, wir wollen nun zu dieser Untersuchung die nicht veröffentlichten unausgeglichenen Zahlen heranziehen, und zwar soll auch hier nur jede zweite Stunde angegeben werden, nachdem ich mich durch eine eigene Untersuchung, welche ich hier anzuführen unterlassen kann, überzeugt habe, dass der tägliche Gang mit zufriedenstellender Genauigkeit aus den Werthen jeder zweiten Stunde dargestellt werden kann.

In Tabelle 9 und 10 erscheinen nun die Zahlen für die »Stabilität« zusammengestellt. Diese geben an, der wie vielte Theil der vorkommenden Temperaturen — in Hundertel ausgedrückt — zu einer Wahrscheinlichkeit des Eintreffens von mindestens 100‰ gelangt, oder, vorausgesetzt die Temperaturschwankung würde 100° betragen, wie viele davon die Wahrscheinlichkeit von $\geqq$ 100‰ erreichen.

Da der kleineren Veränderlichkeit eine grössere Stabilität entsprechen muss, wurden die grössten Werthe hier, analog wie in den früheren Tabellen die kleinsten Veränderlichkeiten, durch einen Stern hervorgehoben, die kleinste Stabilität, der grössten Veränderlichkeit entsprechend, durch besonderen Druck ersichtlich gemacht. Im täglichen Gange erscheinen daher auch die Zeichen so gewählt, dass das negative Zeichen der grösseren Stabilität, daher der kleineren Veränderlichkeit entspricht.

Wir ersehen auch hier in den vier Monaten die früher erwähnte Doppelschwankung und das Vorrücken der Extreme vom Jänner auf den Juli und das Rücklaufen im October.

Extreme der Stabilität.

	Max.	Min.	Max.	Min.
Jänner	2^h a.	6^h a.	11^h a.	10^h p.
April	6^h a.	12^h m.	7^h p.	2^h a.
Juli	6^h a.	1^h p.	12^h n.	4^h a.
October	4^h a.	7^h a.	4^h p.	12^h n.

Es stimmen die einzelnen Wendestunden der Stabilität mit den entsprechenden der Veränderlichkeit nicht immer

überein, was auch kaum zu erwarten wäre, doch ergibt sich eine ähnliche tägliche Periode und analoge Verschiebung derselben für die einzelnen Monate.

Das Wichtigere dieser Untersuchung über die Stabilität, nämlich die Beruhigung zu erlangen, dass die Betrachtung der vier Monate wirklich den Charakter der vier Jahreszeiten deutlich zur Anschauung bringt, wird durch nachfolgende Tabelle 11 erbracht. In dieser erscheinen die Werthe für die vier Jahreszeiten aus den Mitteln je dreier Monate gebildet, man ersieht aus dem Gange den gleichen Verlauf wie für die vier Einzelmonate. Construirt man sich die einzelnen Gangcurven und bringt dieselben zur Deckung, so ergeben dieselben eine hübsche Übereinstimmung.

Vereinigen wir die 6 Winter- und Herbstmonate und die 6 Sommer- und Frühlingsmonate und sodann alle 12 Monate, so dass die resultirenden Grössen für das Winter- und Sommerhalbjahr und für das durchschnittliche Jahr die täglichen Gänge darstellen, siehe Tabelle 12, so zeigen diese ebenfalls Übereinstimmung mit den in Tabelle 13 nur aus den vier Hauptmonaten dargestellten täglichen Perioden. Beide Jahrescurven zeigen grössere Stabilität, analog kleinere Veränderlichkeit, nach Mittag, kleinere Stabilität vor Mittag. Die Extreme fallen auf dieselben Stunden.

In der oben angeführten Abhandlung über die Beziehungen zwischen den mittleren und wahrscheinlichsten Temperaturen erscheint auch in Tabelle XX für jede einzelne Tagesstunde angegeben, welche Lage der Scheitelwerth (S) zu dem Mittelwerthe (M) annimmt und um welchen Betrag diese zwei Werthe auseinanderliegen. Aus einer Betrachtung dieser Zusammenstellung, welche hier in Tabelle 14 auszugsweise mitgetheilt wird, findet man einen Zusammenhang zwischen diesen Differenzen $S-M$ und der täglichen Periode der Veränderlichkeiten in Tabelle 7. Man ersieht für den Jänner und October, wenn sich der S über dem M erhebt, wie die Veränderlichkeit dem kleinsten Werthe zustrebt. S über M sagt, dass zu dieser Zeit häufiger Temperaturen über den dazugehörigen Mittelwerthen vorkommen, was im Winter eine Folge der grösseren Bewölkung dieser Stunden ist.

Tabelle 11.

Täglicher Gang der Stabilität für die Jahreszeiten.

	Winter		Frühling		Sommer		Herbst	
2h a.	19·7*	1·2*	**24·0**	**1·2**	38·4	—5·9	**11·2**	**5·1**
4	18·5	2·4	25·8*	—0·6	**36·3**	**—3·8**	12·8*	3·5*
6	18·5	2·4	25·2*	0·0*	37·9*	—5·4*	11·0	5·3
8	**15·3**	**5·3**	25·8*	—0·6	31·8	0·7	**7·8**	**8·5**
10	23·4	—2·5	22·9	2·3	24·8	7·7	12·8	3·5
12h m.	24·6	—3·7	**18·0**	**7·2**	26·2	6·3	21·1	— 4·8
2h p.	25·2*	—4·3*	20·1	5·1	**24·2**	**8·8**	23·7	— 7·4
4	23·9	—3·0	23·6	1·6	26·6	5·9	24·6	— 8·3
6	22·5	—1·6	30·6	—5·4	28·6	3·9	27·2*	—10·9*
8	20·8	0·1	31·5*	—6·3*	34·4	—1·9	18·0	— 1·7
10	**19·2**	**1·7**	28·7	—3·5	39·9	—7·4	14·1	2·2
12h n.	19·5	1·4	25·7	—0·5	40·6*	—8·1*	11·3	5·0
Mittel	20·9	—	25·2	—	32·5	—	16·3	—

Tabelle 12.

Täglicher Gang der Stabilität für das Winter- und Sommerhalbjahr und das durchschnittliche Jahr.

	Winterhalbjahr		Sommerhalbjahr		Jahr	
2h a.	**15·4**	**3·2**	31·2	—2·4	**23·3**	**0·4**
4	15·7*	2·9*	**31·0**	**—2·2**	23·4*	0·3*
6	14·7	3·9	31·5*	—2·7*	23·1	0·6
8	**11·6**	**7·0**	28·8	0·0	**20·2**	**3·5**
10	18·1	0·5	23·9	4·9	21·0	2·7
12h m.	22·9	—4·3	**22·1**	**6·7**	22·5	1·2
2h p.	24·5	—5·9	22·2	6·6	23·3	0·4
4	24·2	—5·6	25·1	3·7	24·7	—1·0
6	24·9*	—6·3*	29·6	—0·8	27·2*	—3·5*
8	19·4	—0·8	33·0	—4·2	26·2	—2·5
10	16·6	2·0	34·3*	—5·5*	25·5	—1·8
12h n.	**15·4**	**3·2**	33·1	—4·3	24·3	—0·6
Mittel	18·6	—	28·8	—	23·7	—

Tabelle 13.

Täglicher Gang der Stabilität.

	Winter		Sommer		Jahr	
	(Jänner, October)		(April, Juli)		(Jänner, October, April, Juli)	
2h a.	15·6	2·6	**34·4**	**—1·2**	**25·0**	**0·7**
4	16·0*	2·2*	35 3	—2·1	25·6*	0·1*
6	**14·5**	**3·7**	36·2*	—3·0*	25·4	0·3
8	15·1	3·1	33·5	—0·3	24·3	1·4
10	18·8	—0·6	28·6	4·6	**23·7**	**2·0**
12h m.	21·9	—3·7	**26·5**	**6·7**	24·2	1·5
2h p.	23·3	—5·1	27·3	5·9	25·3	0·4
4	23·9*	—5·7*	30·6	2·6	27·2	—1·5
6	22·5	—4·3	34·3	—1·1	28·4*	—2·7*
8	18·3	—0·1	36·9	—3·7	27·6	—1·9
10	14·7	3·5	38·1*	—4·9*	26·4	—0·7
12h n.	**14·2**	**4·0**	36·4	—3·2	25·3	0·4
Mittel	18·2	—	33·2	—	25·7	—

Tabelle 14.

Täglicher Gang der Differenzen $S—M$.

	Jänner		April		Juli		October	
	Diff.	Gang	Diff.	Gang	Diff.	Gang	Diff.	Gang
2h a.	—0·5	—0·4	0·2	0·2	0·7	0·2	0·1	—1·3
4	—0·6	—0·5	**0·4**	**0·4**	**1·1**	**0·6**	0·0*	—1·4*
6	—0·8*	—0·7*	0·3	0·3	1·2	0·7	0·6	—0·8
8	—0·7	—0·6	—0·7*	—0·7*	0·1*	—0·4*	1·6	0·2
10	—0·3	—0·2	—0·5	—0·5	0·7	0·2	2·5	1·1
12h m.	0·7	0·8	0·2	0·2	**0·5**	**0·0**	2·3	0·9
2h p.	**0·7**	**0·8**	**0·0**	**0·0**	0·4	—0·1	**2·2**	**0·8**
4	**0·6**	**0·7**	**0·0**	**0·0**	0·2	—0·3	2·4	1·0
6	0·5	0·6	0·3	0·3	0·2*	—0·3*	2·2	0·8
8	0·1	0·2	—0·2*	—0·2*	0·2*	—0·3*	1·7	0·3
10	—0·5	—0·4	0·0	0·0	0·3	—0·2	1·1	—0·3
12h n.	—0·5	—0·4	0·2	0·2	0·6	0·1	0·6	—0·8
Mittel	—0·1	—	0·0	—	0·5	—	1·4	—

Nachts und Morgens, wo die Bewölkung kleiner ist, Temperaturen unter den entsprechenden Mittelwerthen grössere Wahrscheinlichkeit ihres Eintreffens haben, daher S unter M liegt, finden wir die grössere Veränderlichkeit. Diese steht also hier im directen Zusammenhang mit der Ausstrahlung.

Im April und Juli zeigte die tägliche Gangcurve der Differenzen $S—M$ und die tägliche Gangcurve der Veränderlichkeiten fast parallelen Verlauf. Je mehr sich der S über dem M erhebt, je grösser also die Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen der Temperaturen über den diesbezüglichen Mittelwerth ist, desto grösser wird die Veränderlichkeit.

Wie ich bereits auf S. 66 der genannten Abhandlung hervorgehoben hatte, könnte aus dem Gange der Differenzen $S—M$ auf die tägliche Periode der Bewölkung ein Schluss gezogen werden. Man müsste eine Zunahme der Bewölkung in den Vormittagstunden und in den Spätnachmittagstunden constatiren. Diese Bewölkungszunahme, welche ein Nähern der S an die M, beziehungsweise ein Sinken der S unter die M hervorrufen sollte, würde hier zugleich einer Verminderung der Veränderlichkeit der Temperatur entsprechen.

Wir ersehen daher für den Sommer im täglichen Gange der Veränderlichkeit auch den Einfluss der Einstrahlung, da hier den kleineren Veränderlichkeiten eine geringere Einstrahlung entsprechen würde. Auch Kremser hat in seiner früher angeführten Abhandlung auf S. 17 hingewiesen, dass beim Verlaufe der winterlichen Curve der Effect der Ausstrahlung, bei der Sommercurve die Einstrahlung massgebend zu sein scheint, wobei im Sommer auch die Ausstrahlung zur Nachtzeit nicht ohne Einfluss ist.

Ich möchte hier noch aus meinen Reihen hervorheben, dass im April, wo die Einstrahlung noch nicht so vorwiegend ist, das Morgenmaximum eine grössere Veränderlichkeit zeigt als das Mittagsmaximum, und zwar 1·84 gegen 1·78. Im Juli hingegen ist das Mittagsmaximum das grössere, 1·95 gegen 1·89, siehe Tabelle 6.

Bevor die Trennung der Veränderlichkeiten nach ihren Vorzeichen vorgenommen werden soll, möge hier noch, zurückkehrend zu den ersten Tabellen 1—4, die Schwankung der

mittleren Veränderlichkeiten der verschiedenen Jahre zu den einzelnen Stunden betrachtet werden.

In Tabelle 15 wurden zu diesem Zwecke die grössten und kleinsten Werthe sammt den resultirenden Schwankungen zusammengestellt. Wir finden die Maxima und Minima der einzelnen Reihen beiläufig zu den Zeiten der grössten und kleinsten Werthe des allgemeinen Ganges der mittleren Veränderlichkeit.

Die kleinsten Schwankungen der Veränderlichkeiten fallen in den Wintermonaten auf den Spätvormittag (10^h a.), die grössten Nachts und Morgens (Jänner 4^h a., October 10^h p.). Im Sommer hingegen finden wir umgekehrt die kleinsten Schwankungen Nachts und Morgens (April 10^h p., Juli 2^h a.), die grössten um die Mittagszeit (April 10^h a., Juli 2^h p.).

II. Beziehungen zwischen den Erwärmungen und Erkaltungen zu den einzelnen Tagesstunden.

Aus sämmtlichen Veränderlichkeiten gleichen Zeichens und ihrer Häufigkeitsanzahl konnte die mittlere Veränderlichkeit der Erwärmungen und Erkaltungen für jede einzelne Stunde bestimmt werden.

In der Tabelle 16 ist der tägliche Gang dieser Erwärmungen und Erkaltungen zusammengestellt.

Aus dieser Tabelle wäre hauptsächlichst hervorzuheben, dass in allen Monaten die tägliche Periode der Erwärmung mit der täglichen Periode der mittleren Veränderlichkeit übereinstimmt, nur ist die der Erwärmung deutlicher ausgeprägt und zeigt eine grössere Amplitude. Die tägliche Periode der Erkaltung erscheint lange nicht so deutlich ausgebildet und zeigt auch eine kleinere Amplitude. In den zwei Sommermonaten ist z. B. der tägliche Gang Morgens undeutlich, das Mittagsmaximum und das Abendminimum sind hingegen gut ausgeprägt.

Für jede zweite Stunde der vier Hauptmonate wurden sodann die mittleren maximalen Erwärmungen und Erkaltungen bestimmt, siehe Tabelle 17.

Zur Darstellung der täglichen Periode wurden diese Reihen einer Ausgleichsrechnung unterzogen, die resultirenden Werthe finden sich in Tabelle 18 und 19.

Tabelle 15.

Extreme der mittleren Veränderlichkeiten im Decennium 1881/1890.

	Jänner			April			Juli			October		
	Grösste	Kleinste	Schwankung	Grösste	Kleinste	Schwankung	Grösste	Kleinste	Schwankung	Grösste	Kleinste	Schwankung
2h a.	2·95	1·66	1·29	2·36	1·33	1·03	2·32	**1·42**	0·90*	3·00	1·65	1·35
4	2·94	1·44	**1·50**	**2·56**	1·37	1·19	2·18	1·15	1·03	3·08	1·47	1·61
6	**3·13**	1·70	1·43	2·40	**1·44**	0·96	**2·85**	1·40	0·95	2·99	1·29	1·70
8	3·01	**1·82**	1·19	2·22*	1·26	0·96	1·92*	0·94*	0·98	2·84	1·63	1·21
10	2·44	1·66	0·78*	2·52	1·16*	**1·36**	2·47	1·40	1·07	2·06*	1·47	0·59*
12h m.	2·53	1·32	1·21	**2·55**	**1·48**	1·12	2·60	1·40	1·20	2·50	1·28	1·22
2h p.	2·30	1·19	1·11	2·24	1·34	0·90	**2·86**	1·18	**1·68**	2·79	1·17*	1·62
4	2·21*	1·22	0·99	2·01	1·21	0·80	2·28	1·13	1·15	2·90	1·26	1·64
6	2·36	1·14*	1·22	1·59	1·01	0·58	2·38	**1·44**	0·94	2·64	1·27	1·37
8	2·75	1·58	1·17	1·44*	0·76*	0·68	2·43	1·22	1·21	2·67	1·27	1·40
10	2·77	1·47	**1·30**	1·70	1·26	0·44*	2·26*	1·06*	1·20	**3·48**	1·59	**1·89**
12h n.	2·75	1·52	1·23	2·03	1·29	0·74	2·35	1·20	1·15	3·32	**1·66**	1·66

Tabelle 16.

Täglicher Gang der mittleren Erwärmungen und Erkaltungen.

	Jänner		October		April		Juli	
	Erwärmung	Erkaltung	Erwärmung	Erkaltung	Erwärmung	Erkaltung	Erwärmung	Erkaltung
2h a.	2·25	2·20	2·24*	2·09	1·80	1·75	1·83	1·90
4	2·17*	**2·25**	**2·34**	2·06*	**2·05**	1·73	**1·96**	1·87
6	2·44	2·17*	2·30	2·15	1·98	1·77	1·82	1·97
8	**2·53**	**2·19**	2·14	**2·18**	1·68*	1·78	1·38*	1·83
10	2·08	2·10	1·65	1·88	1·71	1·70	1·62	2·09
12h m.	1·91	1·83	1·69	1·84*	**1·88**	**1·93**	**1·82**	**2·20**
2h p.	1·66	1·81	1·56	1·97	1·81	1·78	1·66	2·13
4	1·63	1·78*	1·56	2·05	1·55	1·63	1·61	2·02
6	1·61*	1·82	1·52*	2·06	1·30	1·39	1·67	1·93
8	1·97	2·05	1·77	1·98	1·20*	1·25*	1·43	1·97
10	**2·28**	2·05	2·23	2·18	1·51	1·45	1·40*	1·75*
12h n.	2·27	2·12	**2·29**	**2·25**	1·66	1·66	1·67	1·83
Mittel	2·07	2·03	1·94	2·06	1·67	1·65	1·66	1·96

Tabelle 17.

Mittlere maximale Erwärmungen und Erkaltungen.

	Jänner		October		April		Juli	
	Erwärmung	Erkaltung	Erwärmung	Erkaltung	Erwärmung	Erkaltung	Erwärmung	Erkaltung
2ʰ a.	6·49	6·11	6·09	5·56	4·69	4 36	5·02	5·43
4	7·35	5·97	6 66	5·42	4·94	4·72	5·37	5·85
6	6·94	6·27	6·63	6·32	5·19	4·35	4·86	6·19
8	6·99	6·60	6·35	6·36	4·13	4·85	3·50	5·68
10	5·62	5·68	5·22	5·44	4·39	4 98	4·12	6·65
12ʰ m.	4 82	4·94	4·75	5 83	5·14	4·82	4·50	6·95
2ʰ p.	4·91	4·92	4·31	6·14	4·88	4 77	4·52	6·13
4	4·32	5 53	4·67	6·64	4·76	4·41	4·42	6·76
6	4·31	5·72	4·46	6 07	3·96	3·59	4·64	6·61
8	5·30	5·95	4·98	5·43	3·40	3·61	4·62	6·01
10	5·96	6 02	6·21	5 66	3·89	3·82	3·59	5·86
12ʰ n.	6·18	6·42	6·36	5·90	4·55	4·36	4·81	5·72
Mittel	5·77	5·84	5·57	5·90	4·49	4·39	4·50	6·15

Tabelle 18.

Täglicher Gang der mittleren maximalen Erwärmung.

Ausgeglichene Werthe.

	Jänner		October		April		Juli	
2ʰ a.	6·63	0·86	6·30	0·73	4·72	0·23	5·06	0·56
4	7·03	1·26	6·51	0·94	**4·94**	**0 45**	**5·15**	**0·65**
6	**7·06**	**1·29**	**6·62**	**1·05**	4·89	0·40	4·65	0·15
8	6·63	0·86	6·24	0·67	4·46*	—0·03*	3 99*	—0·51*
10	5·76	—0·01	5·43	—0·14	4·51	0·02	4·06	- 0·44
12ʰ m.	5·04	—0·73	4·76	—0·81	4·89	0·40	4·41	—0·09
2ʰ p.	4·74	—1·03	4·51*	—1·06*	**4·91**	**0·42**	4·49	—0·01
4	4·47*	—1·30*	4·53	—1·04	4·59	0·10	4·50	0·00
6	4·56	—1·21	4·64	—0·93	4·02	—0·47	**4·58**	**0·08**
8	5·22	—0·55	5·16	—0·41	3·66*	—0·83*	4·37	—0·13
10	5·85	0·08	5·94	0·37	3·93	—0·56	4·15*	—0·35*
12ʰ n.	6·20	0·43	6·25	0·68	4·42	—0·07	4·56	0·06
Mittel	5·77	—	5·57	—	4·49	—	4·50	—

Nach dieser Ausgleichsrechnung lassen sich die täglichen Perioden schon sehr deutlich und als sehr regelmässige entnehmen. In den zwei Wintermonaten fallen die grössten Erwärmungen Nachts und Morgens, während tagsüber kleinere mittlere maximale Erwärmungen vorkommen. Die tägliche Periode ist eine einfache, mit einem Maximum Morgens und einem Minimum in den ersten Nachmittagstunden, so dass dieser Gang beiläufig dem umgekehrten Temperaturgange entspricht. Das Maximum fällt im Jänner wie im October um 6^h a., das Minimum im Jänner um 4^h p., im October um 3^h p.

Für die beiden Sommermonate finden wir auch eine tägliche Periode recht regelmässig ausgeprägt, nur zeigt dieselbe hier eine Doppelschwankung. Im April fallen die Maxima der mittleren maximalen Erwärmung zur Zeit der Temperaturextreme, die Minima finden sich um 8^h Morgens und Abends. Im Juli ist das Nachmittagsmaximum auf 6^h gerückt und das Minimum auf 10^h, doch kommt auch hier die Doppelschwankung regelmässig zum Vorschein.

Was nun die mittlere maximale Erkaltung anbelangt, siehe Tabelle 19, so lässt sich hier das entgegengesetzte Verhalten hervorheben. Wir finden im April und Juli eine tägliche Periode mit nur einem Maximum und Minimum; im April fällt das Maximum gegen 10^h a., im Juli Mittags, das Minimum im April um 8^h Abends, im Juli 2^h Nachts.

Im Jänner und October lässt sich hingegen eine Doppelschwankung erkennen. Im Jänner ist die mittlere maximale Erkaltung am grössten Nachts und Morgens, das Maximum wird zwischen 6 und 8^h a. beiläufig zur Zeit des Temperaturminimums erreicht, das Minimum um 2^h, zur Zeit des Temperaturmaximums. Die secundären Extreme zeigen sich Nachts, das Maximum um Mitternacht, das Minimum um 4^h Früh. Im October finden wir die Doppelschwankung deutlicher ausgeprägt, mit dem Maximum um 7^h a. und 4^h p., die Minima gegen 11^h a. und 2^h a. Eine kleine Störung vor dem letzterwähnten Nachtminimum wäre noch zu erwähnen.

Wir entnehmen daher aus dem Gesagten für den Winter eine einfache Periode für die mittlere maximale Erwärmung, im Sommer hingegen eine einfache Periode für die mittlere

maximale Erkaltung; doppelte Extreme hingegen in den Sommermonaten beim täglichen Gange der mittleren maximalen Erwärmung und in den Wintermonaten im täglichen Gange der mittleren maximalen Erkaltung.

Bilden wir aus den entsprechenden Reihen in Tabelle 18 und 19, welche die tägliche Periode der mittleren maximalen Erwärmungen und Erkaltungen darstellen, das Mittel, so finden wir in demselben die tägliche Periode der Veränderlichkeit wiedergegeben, siehe Tabelle 20.

Die Curve, welche den täglichen Gang der Veränderlichkeit darstellt, ist der Gangcurve der mittleren maximalen Erwärmung ähnlicher.

Bevor zur Behandlung der gegenseitigen Beziehungen zwischen diesen maximalen Erwärmungen und Erkaltungen übergegangen werden soll, wollen wir zuerst die Häufigkeit der Erwärmungen und Erkaltungen, welche bereits zur Bestimmung der Reihen in Tabelle 16 aus den ersten Zusammenstellungen herausgehoben werden mussten, zur Besprechung bringen, da das wechselseitige Verhalten dieser Häufigkeiten in Zusammenhang zu bringen sein wird mit den oberwähnten Beziehungen.

In der Tabelle 21 erscheinen die Anzahl der Erwärmungen und Erkaltungen dieses Decenniums 1881/1890 für jede der einzelnen in Betracht gezogenen Stunden angeführt. Die Summe je zweier Gruppen dieser Häufigkeitszahlen wird nicht 310 bzw. 300 betragen, da die Tage, wo keine Änderung der Temperatur im Vergleiche zum Vortage zu bemerken war, in dieser Zählung ausgelassen wurden, da die Fälle mit 0° Veränderlichkeit weder der Erwärmung, noch der Erkaltung zugezählt werden können.

Um auf den ersten Blick das Verhältniss zwischen der Häufigkeit der Erwärmungen und Erkaltungen erkennen zu lassen, wurden für die einzelnen Stunden die Quotienten berechnet, Tabelle 22, und zwar die Quotienten der Verhältnisse Häufigkeit der Erwärmung : Häufigkeit der Erkaltung. In dieser Tabelle 22 sind auch zugleich die ausgeglichenen Reihen aufgenommen worden.

Schon in den unausgeglichenen Werthen ersieht man im Jänner und October die Bildung eines einfachen Ganges mit

einem Maximum und einem Minimum. Die ausgeglichenen Werthe geben einen äusserst regelmässigen Gang, mit einem Minimum zur Zeit der niedrigsten Temperatur und einem Maximum in den Nachmittagstunden zwischen 4 und 6^h. Es überwiegen die Erkaltungen an Häufigkeit am meisten zur Zeit des Temperaturminimums, überhaupt ist von circa 9^h Abends bis gegen Mittag die Häufigkeit der Erkaltungen grösser als die der Erwärmungen. Nur Nachmittags sind die Erwärmungen häufiger als die Erkaltungen. Im Jänner ist Nachts eine sehr kleine Störung in diesem regelmässigen Verlaufe durch Bildung kaum bemerkbarer secundärer Extreme zu bemerken.

Es wäre hervorzuheben, dass zur Zeit der kleineren Veränderlichkeit ein Überwiegen der Erwärmungen an Häufigkeit gegenüber den Erkaltungen stattfindet. In Folge der grossen Ähnlichkeit können die beiden Reihen, für den Jänner und October, vereinigt werden; dieselben geben:

2^h a.	4^h	6^h	8^h	10^h	12^h m.	2^h p.	4^h	6^h	8^h	10^h	12^h n.	Mittel
0·88	0·86	0·85*	0·88	0·93	0·98	1·05	**1·12**	1·10	1·01	0·93	0·90	0·96

ein Resultat, welches als Darstellung des täglichen Ganges der Quotienten zwischen der Erwärmungs- und Erkaltungshäufigkeit für den Winter betrachtet werden kann. Diese Reihe zeigt einen äusserst regelmässigen Verlauf, Minimum gegen 6^h, zur Zeit des Temperaturminimums, das Maximum gegen 5^h Nachmittag. Der Gang ist dem Wintergange der Veränderlichkeit entgegengesetzt.

Betrachten wir die tägliche Periode dieser Quotienten der Tabelle 22 während der Sommermonate April und Juli, so ersehen wir zuerst, dass die Erwärmungen immer häufiger sind als die Erkaltungen, mit Ausnahme der Morgenstunden, in welchen im täglichen Gange das Minimum zu erwarten ist und zu welcher Zeit die Erkaltungen an Häufigkeit überwiegen. Von diesem Minimum steigt der Quotient rasch über den Mittelwerth an, um Vormittags zwischen 8 und 10^h und Nachmittags gegen 8^h die grössten Werthe anzunehmen. Zwischen diesen grössten Werthen nimmt der Quotient etwas ab, um gegen Mittag und zur Zeit des Temperaturmaximums eine Zunahme anzudeuten, welcher wieder eine Abnahme folgt.

Tabelle 19.

Täglicher Gang der mittleren maximalen Erkaltung.

Ausgeglichene Werthe.

	Jänner		October		April		Juli	
2^h a.	6·15	0·31	5·61*	−0·29*	4·45	0·06	5·61*	−0·54*
4	6·08*	0·24*	5·68	−0·22	4·54	0·15	5·83	−0·32
6	6·28	0·44	**6·11**	**0·21**	4·57	0·18	5·98	−0·17
8	**6·29**	**0·45**	**6·12**	**0·22**	4·76	0·37	6·05	−0·10
10	5·72	−0·12	5·77*	−0·13*	**4·91**	**0·52**	6·48	0·33
12^h m.	5·12	−0·72	5·81	−0·09	4·85	0·46	**6·67**	**0·52**
2^h p.	5·08*	−0·76*	6·19	0·29	4·69	0·30	6·49	0·34
4	5·43	−0·41	**6·37**	**0·47**	4·29	−0·10	**6·57**	**0·42**
6	5·73	−0·11	6·05	0·15	3·80	−0·59	6·50	0·35
8	5·91	0·07	5·65	−0·25	3·66*	−0·73*	6·12	−0·03
10	6·10	0·26	5·66	−0·24	3·90	−0·49	5·86	−0·29
12^h n.	**6·24**	**0·40**	5·75	−0·15	4·22	−0·17	5·68	−0·47
Mittel	5·84	—	5·90	—	4·39	—	6·15	—

Tabelle 20.

Mittel aus dem täglichen Gange der mittleren maximalen Erwärmung und Erkaltung.

	Jänner	October	April	Juli
2^h a.	0·58	0·22	0·15	0·01
4	0·75	0·36	**0·30**	**0·16**
6	**0·87**	**0·63**	0·29	−0·01
8	0·66	0·44	0·17*	−0·31*
10	−0·07	−0·14	0·27	−0·06
12^h m.	−0·73	−0·45*	**0·43**	**0·21**
2^h p.	−0·90*	−0·39	0·36	0·16
4	−0·86	−0·29	0·00	0·21
6	−0·66	−0·39	−0·53	**0·22**
8	−0·24	−0·33	−0·78*	−0·08
10	−0·17	0·06	−0·52	−0·32*
12^h n.	−0·41	0·26	−0·12	−0·21
Mittel	5·81	5·74	4·44	5·33

Tabelle 21.

Häufigkeit der Erwärmungen und Erkaltungen.

	Jänner		October		April		Juli	
	Erwärmung	Erkaltung	Erwärmung	Erkaltung	Erwärmung	Erkaltung	Erwärmung	Erkaltung
2^h a.	148	160	135	164	151	141	153	149
4	150	153	132	171	139	151	148	159
6	139	166	137	166	147	148	155	147
8	138	165	142	161	161	126	174	120
10	153	154	149	157	158	136	185	123
12^h m.	146	155	143	157	157	129	175	130
2^h p.	161	147	155	145	156	136	175	123
4	160	146	162	143	163	131	175	125
6	160	142	162	138	160	125	170	133
8	155	150	148	151	162	127	181	121
10	145	160	142	161	153	138	171	127
12^h n.	148	158	143	161	155	137	162	138
Mittel	150	155	146	156	155	135	169	133

Tabelle 22.

Quotienten zwischen der Häufigkeit der Erwärmungen und Erkaltungen.

	Jänner		October		April		Juli	
	Quotienten	Ausgeglichen	Quotienten	Ausgeglichen	Quotienten	Ausgeglichen	Quotienten	Ausgeglichen
2^h a.	0·93	0·94	0·82	0·82	1·07	1·05	1·03	1·04
4	0·98	0·93	0·77	0·80*	0·92	0·97*	0·93	0 99*
6	0·84	0·87*	0·83	0·83	0·99	1·04	1·06	1·12
8	0·84	0·88	0·88	0·88	1·28	1·18	1·45	1·36
10	0·99	0·94	0·95	0·92	1·16	**1·20**	1·50	**1·45**
12^h m.	0·94	0·99	0·91	0·96	1·22	1·19	1·35	1·40
2^h p.	1·10	1·06	1·07	1·04	1·15	1·19*	1·42	1·40
4	1·10	**1·11**	1·13	**1·12**	1·24	1·23	1·40	1·37
6	1·13	1·10	1·17	1·11	1·28	**1·27**	1·28	1·36
8	1·03	1·02	0·98	1 00	1·28	1·24	1·50	**1·41**
10	0·91	0·95	0·88	0·91	1·11	1·16	1·35	1·34
12^h n.	0·94	0·93	0·89	0·87	1·13	1·11	1·17	1·18
Mittel	0·98	0·98	0·94	0·94	1·15	1·15	1·29	1·29

Gleichen wir diese Reihen aus, so verschwinden diese secundären Bildungen, um die zwei Hauptmaxima Vormittags und Abends beizubehalten.

Auch hier finden wir zur Zeit der kleinsten Veränderlichkeit die grössten Quotienten vor, d. h. eine grössere Häufigkeit der Erwärmungen. Es entspricht dies zugleich, in Folge der an früherer Stelle gemachten Bemerkungen, dass zur Zeit, wo die Differenz ($S—M$) zwischen Scheitelwerth und Mittelwerth kleiner wird, beziehungsweise der Scheitelwerth unter dem Mittelwerthe sinkt, die Häufigkeit der Erwärmung gegenüber der Erkaltung grösser wird, während in den zwei Wintermonaten das Umgekehrte stattfindet.

Die Vereinigung der Reihen pro April und Juli, in nachfolgender Zeile

2h a.	4h	6h	8h	10h	12h m.	2h p.	4h	6h	8h	10h	12h n.	Mittel
1·05	0·98*	1·08	1·27	**1·32**	1·29	1·29*	1·30	1·31	**1·32**	1·25	1·15	1·22

kann den täglichen Gang für die Sommerperiode anschaulich machen. Die Häufigkeit der Erwärmung überwiegt am meisten, die Häufigkeit der Erkaltungen beiläufig zur Zeit, wo im täglichen Gange der Lufttemperatur die Curve durch ihre Mittelwerthe geht.

Kehren wir nun zu unserer früheren Andeutung in Bezug auf die gegenseitigen Beziehungen zwischen den mittleren maximalen Erwärmungen und Erkaltungen zurück, so müsste man bei diesen ein diametral entgegengesetztes Verhalten beobachten, denn in den Stunden, wo die Erwärmungen häufiger vorkommen, müssten dementsprechend die mittleren maximalen Erkaltungen an Grösse den mittleren maximalen Erwärmungen überlegen sein. Bilden wir zur Vereinfachung dieser Darstellung die Quotienten der Verhältnisse zwischen den Werthen der Tabelle 17, so dass die Quotienten grösser als die Einheit angeben, dass die Erwärmungen an Grösse den Erkaltungen überlegen sind. In der Tabelle 23 erscheinen diese Quotienten, nebst denen durch Ausgleichung erhaltenen zusammengestellt.

Wir entnehmen daraus für alle vier Monate wirklich eine vollständig entgegengesetzte tägliche Periode, beiläufig zur Zeit der Maxima des einen Ganges finden sich die Minima der

anderen. In der Tabelle 21 ersehen wir z. B. im Juli durch alle Stunden ein Vorherrschen der Erwärmungen an Häufigkeit gegenüber den Erkaltungen, nur für 4^h Morgens sind die Erkaltungen etwas häufiger. Analog finden wir hier in Tabelle 23 im Juli durch alle Stunden die Erkaltungen an Grösse den Erwärmungen überlegen, wobei der Unterschied für die ersten Morgenstunden am kleinsten wird. In Bezug auf die Julireihe soll noch erwähnt werden, dass in den ausgeglichenen Werthen die Nachmittagsextreme verschwinden und sich nur durch die gleichbleibenden Ordinatenwerthe zu erkennen geben. Namentlich das Minimum, welches in der unausgeglichenen Reihe gut ausgeprägt auf 10^h Abends fällt, ist in der ausgeglichenen Reihe durch die höheren Nachbarwerthe verdeckt worden.

Bilden wir auch hier aus je zwei Monaten die dem Winter und Sommer entsprechenden Mittelwerthe:

2^h a.	4^h	6^h	8^h	10^h	12^h m.	2^h p.	4^h	6^h	8^h	10^h	12^h n.	Mitte
						Winter						
1·10	**1·15**	1·11	1·04	0·97	0·90	0·84	0·77*	0·78	0·90	1·01	1·04	0·97
						Sommer						
0·98	**0·99**	0·93	0·80	0·78*	0·84	0·87	**0·88**	**0·89**	0·86*	0·86*	0·93	0·88

so finden wir eine tägliche Periode, welche ein Spiegelbild des bereits erwähnten Ganges der Häufigkeit der Erwärmungen und Erkaltungen ist.

Anschaulich werden diese gegenseitigen Beziehungen durch nachfolgende Ordinaten dargestellt:

Täglicher Gang für die Quotienten der Häufigkeit und der Grösse der mittleren Maxima der Erwärmungen und Erkaltungen.

	Winter		Sommer	
	Häufigkeit	Grösse	Häufigkeit	Grösse
2^h a.	—·08	·13	—·17	·10
4	—·10*	**·18**	—·24*	**·11**
6	—·11*	·14	—·14	·05
8	—·08	·07	·05	—·08
10	—·03	·00	**·10**	—·10*

	Häufigkeit	Grösse	Häufigkeit	Grösse
12h m.	·02	—·07	·07	—·04
2h p.	·09	—·13	·07	—·01
4	**·16**	—·20*	·08	·00
6	·14	—·19	·09	·01
8	·05	—·07	**·10**	—·02*
10	—·03	·04	·03	—·02
12h n.	—·06	·07	—·07	·05

In den nächsten Tabellen 24 und 25 sind die absoluten Maxima der Erwärmungen und Erkaltungen des Decenniums 1881—1890 zusammengestellt. In den geradzahligen Columnen stellen die ersten Zahlen das Jahr vor, die zweiten den Tag.

Im Jänner fallen die grössten Erwärmungen und Erkaltungen auf die Nacht- und Morgenstunden. Zu allen Stunden sind die absoluten Maxima der Erkaltungen grösser als die der Erwärmungen.

Im October sind die grössten Erwärmungen Nachts und Morgens, die grössten Erkaltungen Nachmittags zu beobachten. In beiden Monaten entspricht dies auch der Vertheilung der mittleren Maxima, siehe Tabelle 17. In diesem Monate sind daher die absoluten Maxima der Erwärmungen denen der Erkaltungen Nachts und Morgens überlegen, die Erkaltungen sind hingegen grösser als die Erwärmungen von den letzten Vormittagstunden bis zum Abend.

Im April kommen die grössten Erwärmungen zur Mittagszeit und in den ersten Nachmittagsstunden vor, die grössten Erkaltungen Vormittags. Die Erwärmungen überwiegen fast in allen Stunden an Grösse die Erkaltungen, mit Ausnahme der Stunden, an welchen, wie schon früher erwähnt wurde, auch die mittleren maximalen Erkaltungen vorwiegen. Im Juli sind wieder wie im Jänner die absoluten Maxima der Erkaltungen immer grösser als die der Erwärmungen, nur fallen die grössten Erkaltungen um die Mittagszeit, die grössten Erwärmungen bleiben Nachts und Morgens. Es wäre erwähnenswerth hervorzuheben, dass im Juli grössere Erkaltungen vorkommen, als im Jänner, 16·9° im Juli um Mittag, im Jänner 11·6° um 6^h a. In

den Nacht- und Morgenstunden finden sich im Jänner grössere Erkaltungen vor als im Juli, von 10^h Vormittags bis 8^h Abends sind hingegen im Juli die Erkaltungen grösser. Was die absoluten Maxima der Erwärmungen anbelangt, so sind dieselben im Jänner zu allen Stunden, mit Ausnahme von 4 und 6^h Nachmittag immer grösser als im Juli. Die grösste Erwärmung findet man im Jänner mit 10·8° um 4^h Früh, im Juli erreicht die grösste Erwärmung nur 7·2°, und zwar auch zur gleichen Stunde.

Aus der Aufeinanderfolge der Veränderlichkeiten gleichen Zeichens wurde die mittlere Dauer der Temperaturzunahme und -Abnahme berechnet. In den Tabellen 26 und 27 erscheinen in den ersten zwei Columnen die entsprechenden Decennienmittel in Tagen ausgedrückt. Daraus konnte für jede Stunde die Länge der Temperaturwellen bestimmt werden, siehe dritte Columne. In den nächstfolgenden Reihen sind die diesbezüglichen ausgeglichenen Werthe sammt ihren Ordinaten dargestellt. Der tägliche Gang der Temperaturwellen für den Jänner ist ein einfacher. Die grössten Wellenlängen fallen zur Zeit des Temperaturmaximums und der darauffolgenden Stunden, die kleinsten Wellenlängen um die Zeit des Temperaturminimums; Maximum um 4^h p., Minimum um 5^h a. Es würde hier resultiren, dass zur Zeit, wo die absolut grössten Erwärmungen und Erkaltungen vorkommen, die kleinsten Wellenlängen zu bemerken sind, da man aus Tabelle 24 ersehen kann, wie die absoluten Maxima der Erwärmungen und Erkaltungen Nachts, namentlich Morgens 4^h und 6^h vorkommen.

Um das Übergewicht der Dauer einer continuirlichen Temperaturzunahme (Wellenberg) über die einer andauernden Abnahme (Wellenthal) darzustellen, wurden die Quotienten bestimmt, siehe Tabellen 28 und 29. Für den Jänner ersehen wir, dass die Wellenberge den Wellenthälern an Grösse überlegen sind von beiläufig 10^h Vormittag bis nach 8^h Abends. Nachts und Morgens sind die Wellenthäler länger. Der tägliche Gang dieser Quotienten ist daher dem täglichen Gange der Quotienten zwischen den Häufigkeiten der Erwärmungen und Erkaltungen ähnlich.

Tabelle 23.

Quotienten zwischen den mittleren maximalen Erwärmungen und Erkaltungen.

	Jänner		October		April		Juli	
	Quotienten	Ausgeglichen	Quotienten	Ausgeglichen	Quotienten	Ausgeglichen	Quotienten	Ausgeglichen
2^h a.	1·06	1·08	1·09	1·12	1·08	1·06	0·92	**0·90**
4	1·23	**1·15**	1·23	**1·15**	1·05	**1·09**	0·92	0·89
6	1·10	1·12	1·05	1·09	1·19	1·07	0·79	0·78
8	1·06	1·05	1·03	1·02	0·85	0·94	0·62	0·66
10	0·99	1·00	0·96	0·94	0·88	0·92*	0·62	0·63*
12^h m.	0·98	0·99	0·81	0·82	1·07	1·01	0·65	0·66
2^h p.	1·00	0·94	0·70	0·73	1·02	1·05	0·74	0·69
4	0·78	0·83	0·70	0·71*	1·08	**1·07**	0·65	0·69
6	0·75	0·79*	0·74	0·77	1·10	1·06	0·70	0·71
8	0·89	0·88	0·92	0·92	0·94	1·00	0·77	0·71
10	0·99	0·96	1·10	1·05	1·02	1·00*	0·61	0·71
12^h n.	0·96	0·99	1·08	1·09	1·04	1·05	0·84	0·80
Mittel	0·98	0·98	0·95	0·95	1·03	1·03	0·74	0·74

Tabelle 24.

Absolute Maxima der Erwärmungen und Erkaltungen.

	Jänner				October			
	Erwärmung		Erkaltung		Erwärmung		Erkaltung	
2^h a.	9·0	1885, 12.	11·2	81, 7.	8·3	87, 31.	7·6	85, 22.
4	10·8	81, 18.	11·5	81, 7.	8·8	85, 15.	7·2	85, 22.
6	10·5	81, 18.	11·6	81, 7.	8·7	85, 15. 90, 27.	7·5	85, 3.
8	9·7	84, 27.	10·6	86, 10.	8·9	82, 28.	8·4	82, 27.
10	7·3	81, 18.	9·0	86, 10.	7·0	90, 27.	7·7	81, 16.
12^h m.	6·7	85, 16.	7·9	86, 10.	8·0	84, 6.	10·4	81, 16.
2^h p.	7·6	83, 28.	8·0	89, 2.	7·5	85, 15.	9·2	81, 16.
4	5·6	82, 17. 83, 28.	8·8	89, 2.	7·1	85, 15.	11·6	81, 16.
6	6·0	87, 5.	9·6	89, 2.	6·8	85, 15.	11·0	81, 16.
8	6·8	89, 10.	9·3	81, 6.	6·2	85, 31.	8·2	81, 16.
10	7·5	85, 31.	9·8	86, 9.	9·4	85, 31.	8·7	81, 16. 85, 26.
12^h n.	8·3	85, 11.	10·3	81, 6.	8·5	85. 31.	8·5	81, 16.
Maximum	10·8	1881, 18. 4^h a.	11·6	81, 7. 6^h a.	9·4	1885, 31. 10^h p.	11·6	1881, 16. 4^h p.

Tabelle 25.

Absolute Maxima der Erwärmungen und Erkaltungen.

	April				Juli			
	Erwärmung		Erkaltung		Erwärmung		Erkaltung	
2^h a.	7·0	1889, 6.	6·6	87, 16.	6·7	90, 6.	8·4	84, 21.
4	6·2	82, 14. 89, 6.	7·1	90, 25.	7·2	90, 6.	7·8	83, 17.
6	7·0	82, 14.	6·0	90, 6.	6·0	88, 16. 90, 6.	8·1	83, 17.
8	5·6	89, 28.	7·6	89, 17.	5·3	84, 2.	9·6	84, 26.
10	7·3	89, 28.	8·7	89, 17.	5·5	84, 27.	13·1	84, 20.
12^h m.	9·3	89, 28.	6·3	87, 15.	5·7	82, 4.	16·9	84, 20.
2^h p.	9·2	89, 28.	6·0	82, 9.	5·8	82, 4.	14·6	84, 20.
4	8·4	89, 28.	5·7	90, 1.	6·5	90, 8.	14·3	84, 20.
6	6·9	89, 28	5·1	90, 1.	6·2	82, 13.	11·2	84, 20.
8	4 9	89, 28.	5·8	89, 17.	6·0	89, 19.	10·2	83, 16.
10	6·6	82, 14.	5·7	89, 17.	5·0	83, 18.	8·8	81, 27.
12^h n.	7·1	89, 5.	6·2	87, 15.	7·0	86, 31.	7·8	84, 20.
Maximum	9·3	1889, 28. 12^h m.	8·7	1889, 17. 10^h a.	7·2	1890, 6. 4^h a.	16·9	1884, 20. 12^h m.

Tabelle 26.

Täglicher Gang der Temperaturwellen.

	Jänner					October				
	Zunahme	Abnahme	Wellenlänge	Ausgegl. Wellenlänge	Gang	Zunahme	Abnahme	Wellenlänge	Ausgegl. Wellenlänge	Gang
2^h a.	1·70	1·84	3·54	3·60	—0·16	1 66	1·98	3 64	3·61	—·09
4	1·71	1·77	3·48	3 49*	— ·27*	1·68	2·00	3·68	3·69	—·01
6	1·57	1·87	3·44*	3·49*	— ·27*	1·77	2 01	**3·78**	**3·72**	**·02**
8	1·61	1·99	3·60	3·61	— ·15	1·73	1·89	3·62	3·62*	—·08*
10	1·92	1·89	3·81	3·74	— ·02	1·65	1·78	3·43*	3·67	—·03
12^h m.	1·87	1·86	3·73	3·83	·07	2·02	2·19	**4·21**	3·94	·24
2^h p.	2·12	1·91	4·03	3·95	·19	2·00	1·91	3·91	**3·98**	**·28**
4	2·08	1 94	**4·02**	**4·03**	**·27**	2·04	1·83	3·87	3·82	·12
6	2·19	1·88	**4·07**	3·98	·22	1·95	1·69	3·64	3·71	·01
8	1·89	1·87	3·76	3·85	·09	1·83	1·86	3·69	3·63	—·07
10	1·80	2·02	3 82	3·81	·05	1·67	1·83	3·50	3·54	—·16
12^h n.	1·87	1·98	3·85	3 77	·01	1·67	1·81	3·48*	3·52*	—·18*
Mittel	1·86	1·90	3·76	3·76	—	1·81	1·90	3·70	3·70	—

Tabelle 27.

Täglicher Gang der Temperaturwellen.

	April					Juli				
	Zunahme	Abnahme	Wellenlänge	Ausgegl. Wellenlänge	Gang	Zunahme	Abnahme	Wellenlänge	Ausgegl. Wellenlänge	Gang
2ʰ a.	1·80	1 68	3·48	3·49	−0·04	1·78	1·85	3·63	3·48	—·11
4	1·63	1·76	3·39	3·37*	— ·16*	1·59	1·73	3·32	3 39	—·20
6	1·60	1·64	3·24*	3·40	— ·13	1·68	1·60	3·28*	3·38*	—·21*
8	2·07	1·68	3·75	3·63	·10	2·12	1·53	3·65	3·57	—·02
10	2·03	1·73	**3·76**	**3·71**	**·18**	2·17	1·52	3·69	3·67	·08
12ʰ m.	1·96	1·62	3·58	3·56	·03	2·10	1·57	**3·67**	**3·69**	**·10**
2ʰ p.	1·79	1·54	3·33*	3·47*	— ·06*	2·19	1·53	3·72	3·68	09
4	2·06	1·57	3·63	3·59	·06	2·08	1·53	3·61	3·59	·00
6	2·14	1·62	**3·76**	**3·66**	**·13**	1·94	1·48	3·42*	3·54*	—·05*
8	1·95	1·54	3·49	3·54	·01	2·22	1·50	3·72	3·71	·12
10	1·77	1·64	3·41	3·48	— ·05	2·30	1·67	**3·97**	**3·76**	**·17**
12ʰ n.	1·89	1·71	3·60	3·52	— ·01	1·79	1·57	3·36	3·58	—·01
Mittel	1·89	1·64	3·53	3·53	—	2·00	1·59	3·59	3 59	—

Tabelle 28.

Quotienten zwischen der mittleren Dauer der Temperaturzunahme und -Abnahme.

	Jänner			October		
	Quotienten	Ausgegl. Quotienten	Gang	Quotienten	Ausgegl. Quotienten	Gang
2ʰ a.	0·92	0·94	—0·04	0·84	0·86	—0·10
4	0·97	0·92	— ·06	0·84	0·85*	— ·11*
6	0·84	0·86*	— ·12*	0·88	0·88	— ·08
8	0·81	0·87	— ·11	0·92	0·91	— ·05
10	1·02	0·97	— ·01	0·93	0·93	— ·03
12ʰ m.	1·01	1·04	·06	0·92	0·95	— ·01
2ʰ p.	1·11	1·07	·09	1·05	1·03	·07
4	1·07	**1·11**	**·13**	1·12	**1·11**	**·15**
6	1·17	**1·11**	**·18**	1·15	1·10	·14
8	1·01	1·02	·04	0·98	1·01	·05
10	0·89	0 93	— ·05	0·91	0·93	— ·03
12ʰ n.	0·94	0·92	— ·06	0·92	0·90	— ·06
Mittel	0·98	0·98	—	0·96	0·96	—

Im October ist der tägliche Gang dieser Quotienten dem des Jänner ähnlich und stimmt ebenfalls mit dem der Quotienten der Häufigkeit der Erwärmungen und Erkaltungen überein. Dort, wo bei den absoluten Extremen der Veränderlichkeit, Tabelle 24, die grössten Erkaltungen vorkommen und diese zugleich den grössten Erwärmungen am meisten überlegen sind, finden wir die Dauer der Erwärmung über die Dauer der Erkaltung am meisten vorherrschend.

Der Gang der Wellenlängen zeigt hingegen doppelte Maxima und Minima. Die grössten Wellenlängen finden sich zur Mittagszeit und zur Zeit des Temperaturminimums, die kleinsten um Mitternacht und gegen 10^h Vormittags. Die mittleren Wellenlängen schwanken im Jänner zwischen 4·07 und 3·44 Tagen, im October bewegt sich die Dauer einer mittleren continuirlichen Erwärmung und Erkaltung zwischen 4·21 und 3·43 Tagen. Im April und Juli sind die Wellenlängen etwas kleiner. Im ersten Monate liegen dieselben zwischen 3·76 und 3·24, im zweiten zwischen 3·97 und 3·28 Tage.

Im April zeigen die Wellenlängen auch eine doppelte Schwankung in ihrer täglichen Periode, die kleinsten Wellenlängen fallen zur Zeit der Temperaturextreme, die grössten gegen 9^h a. und 6^h p. Noch eine Nebenbildung von Extremen wäre in den ersten Nachtstunden zu bemerken.

Der Gang der Quotienten im April zeigt das Minimum um 4^h Morgens, das Maximum um 6^h Abends. In den letzten Vormittagstunden ist jedoch im Ansteigen der Gangcurve eine Störung bemerklich. Auch im Juli finden wir eine ähnliche Vertheilung. Die Wellenberge sind an Länge den Wellenthälern tagsüber überlegen. Im ausgeglichenen Gange ist ein Maximum in den letzten Vormittagstunden zu bemerken, sodann Nachmittags ein secundäres Minimum, um gegen Abend dem Hauptmaximum zuzustreben. Ähnliche Gangcurven fanden wir bei den Quotienten zwischen der Häufigkeit der Erwärmungen und Erkaltungen, es zeigt sich überhaupt für alle Monate zwischen den täglichen Perioden dieser beiden Quotientenreihen grosse Ähnlichkeit.

Die früher im April erwähnte secundäre Bildung der Vormittagstunden hat sich hier im Juli zu einem sehr kräftigen

Maximum ausgebildet, im October ist das secundäre Extrem kaum bemerklich, im Jänner verschwindet es ganz.

Was nun die tägliche Periode der Wellenlängen anbelangt, so finden wir auch hier für den Juli im ausgeglichenen Gange eine doppelte tägliche Periode, wie im April und October. Die grössten Wellenlängen finden sich Mittags und Abends vor. Es dürfte noch eine Verschiebung der Eintrittszeiten der Extreme, welche sich aus der Betrachtung der ausgeglichenen Gangcurven sofort ergeben, erwähnenswerth sein.

Wendestunden im täglichen Gange der Temperaturwellen.

	Min.	Max.	Min.	Max.
April	5^h a.	9^h a.	2^h p.	6^h p.
Juli	5^h a.	12^h m.	6^h p.	9^h p.

Wie an anderer Stelle bereits hervorgehoben wurde, finden sich im Juli die grössten Erkaltungen zur Mittagszeit. Aus einer Betrachtung der diesbezüglichen Tabelle 25 ersehen wir negative Veränderlichkeiten von mehr als 10° in den Stunden von 10^h a. bis 8^h p., um welche Zeit zugleich diese maximalen Erkaltungen auch am meisten die maximalen Erwärmungen überwiegen. Zu den gleichen Tagesstunden finden wir nun im Juli die Wellenberge am meisten die Wellenthäler an Länge übertreffen, die mittlere Dauer continuirlicher Erkaltungen wird kleiner.

Aus der Anzahl der Fälle mit Temperaturzunahme und Temperaturabnahme wurde durch Bildung der zehnjährigen Mittelwerthe die mittlere Häufigkeit der Temperaturwellen im Laufe eines Monates, wie dieselben in den Tabellen 30 und 31 vorkommen, gebildet. Da natürlich je kleiner die Wellenlänge ist, desto grösser ihre Häufigkeit in einer bestimmten Zeitperiode sein wird, so muss im täglichen Gange dieser mittleren Häufigkeit der Temperaturwellen sich der tägliche Gang der Temperaturwellen wiederspiegeln.

In Wirklichkeit ersieht man in diesen Zusammenstellungen die Maxima genau auf jene Stunden fallen, in welchen bei den Temperaturwellen Minima hervorgehoben wurden.

Tabelle 29.

Quotienten zwischen der mittleren Dauer der Temperaturzunahme und -Abnahme.

	April			Juli		
	Quotienten	Ausgegl. Quotienten	Gang	Quotienten	Ausgegl. Quotienten	Gang
2ʰ a.	1·07	1·04	—0·11	0·96	0·99	—0·28
4	0·93	0·98*	—0·17*	0·92	0·96*	— ·31*
6	0·98	1·03	— ·12	1·05	1·10	— ·17
8	1·23	1·15	·00	1·39	1·32	·05
10	1·17	1·19	·04	1·43	**1·40**	**·18**
12ʰ m.	1·21	1·19	·04	1·34	1·39	·12
2ʰ p.	1·16	1·21	·06	1·43	1·39	·12
4	1·31	1·27	·12	1·36	1·36	·09
6	1·32	**1·31**	**·16**	1·31	1·36	·09
8	1·27	1·24	·09	1·48	**1·41**	**·14**
10	1·08	1·14	— ·01	1·38	1·35	·08
12ʰ n.	1·11	1·09	— ·06	1·14	1·16	— ·11
Mittel	1·15	1·15	—	1·27	1·27	—

Tabelle 30.

Mittlere Häufigkeit der Temperaturwellen.

	Jänner			October		
	Häufigkeit	Ausgegl.	Gang	Häufigkeit	Ausgegl.	Gang
2ʰ a.	8·9	8·7	0·3	8·4	8·6	0·2
4	8·9	**9·0**	**0·6**	8·5	8·5*	0·1*
6	9·1	**9·0**	**0·6**	8·4	8·5*	0·1*
8	8·7	8·7	0·3	8·7	**8·7**	**0·3**
10	8·4	8·5	0·1	9·1	8·6	0·2
12ʰ m.	8·6	8·4	0·0	7·4	7·9	—0·5
2ʰ p.	8·0	8·1	—0·3	7·9	7·8*	—0·6*
4	7·9	7·9*	—0·5*	8·2	8·2	—0·2
6	7·8	8·0	—0·4	8·4	8·3	—0·1
8	8·4	8·2	—0·2	8·3	8·4	0·0
10	8·2	8·2	—0·2	8·8	8·7	0·3
12ʰ n.	8·1	8·3	—0·1	8·9	**8·8**	**0·4**
Mittel	8·4	8·4	—	8 4	8·4	—

Tabelle 31.

Mittlere Häufigkeit der Temperaturwellen.

	April			Juli		
	Häufigkeit	Ausgegl.	Gang	Häufigkeit	Ausgegl.	Gang
2ʰ a.	8·7	8·7	0·2	8·6	8·9	0·3
4	8·8	**8·9**	**0·4**	9·4	**9·2**	**0·6**
6	9·3	**8·9**	**0·4**	9·4	**9·1**	**0·5**
8	8·0	8·3	—0·2	8·2	8·6	0·0
10	8·0	8·1*	—0·4*	8·6	8·5	—0·1
12ʰ m.	8·2	8·3	—0·2	8·5	8·4*	—0·2*
2ʰ p.	8·9	**8·6**	**0·1**	8·2	8·3*	—0·3*
4	8·3	8·3	—0·2	8·5	8·6	0·0
6	7·9	8·1*	—0·4*	9·1	**8·8**	**0·2**
8	8·5	8·4	—0·1	8·3	8·3	—0·3
10	8·9	8·7	0·2	7·7	8·2*	—0·4
12ʰ n.	8·4	8·6	0·1	9·0	8·6	0·0
Mittel	8·5	8·5	—	8·6	8·6	—

Tabelle 32.

Durchschnittliche grösste Dauer einer continuirlichen Veränderlichkeit gleichen Zeichens.

	Jänner				October			
	Zunahme	Abnahme	Quotienten	Ausgeglichen	Zunahme	Abnahme	Quotienten	Ausgeglichen
2ʰ a.	2·9	3·7	0·8	0·8	3·2	4·5	0·7	0·7*
4	3·2	3·7	0·9	0·8	3·3	4·3	0·8	0·8
6	3·1	4·2	0·7	0·7*	3·7	4·0	0·9	0·9
8	2·9	4·6	0·6	0·7*	3·3	3·8	0·9	0·9
10	4·0	3·9	1·0	0·9	3·7	3·8	1·0	1·0
12ʰ m.	3·7	3·5	1·1	1·0	4·1	4·2	1·0	1·0
2ʰ p.	4·1	4·1	1·0	1·0	4·1	3·9	1·1	1·1
4	4·1	4·2	1·0	1·1	4·2	3·8	1·1	**1·2**
6	4·6	3·9	1·2	**1·2**	4·2	3·2	1·3	**1·2**
8	3·8	3·2	1·2	**1·2**	3·4	3·9	0·9	1·0
10	4·0	3·9	1·0	1·0	3·2	3·8	0·8	0·8
12ʰ n.	3·7	4·7	0·8	0·9	3·3	3·9	0·8	0·8
Mittel	3·7	4·0	0·9	0·9	3·6	3·9	0·9	0·9

Nach der Bestimmung der mittleren Dauer einer continuirlichen Erwärmung und Erkaltung dürfte es von Interesse sein die durchschnittliche grösste Dauer einer continuirlichen Veränderlichkeit gleichen Zeichens zu bestimmen. In den Tabellen 32 und 33 erscheint dieselbe für die einzelnen Stunden in Tagen ausgedrückt. Die beigefügten Quotienten geben direct die Verhältnisse, welche zwischen diesen andauernden Veränderlichkeiten bestehen. Man ersieht daraus, dass im Winter (Jänner und October) in späteren Tagesstunden anhaltende Erwärmungen von Tag zu Tag an Dauer die Erkaltungen überwiegen. In den Nacht- und Morgenstunden ist eine längere Dauer in der Erkaltung zu erkennen.

Im Sommer sind zu allen Stunden anhaltende Erwärmungen von grösserer Dauer als andauernde Erkaltungen. Auch hier ist in den Quotienten eine tägliche Periode erkennbar, mit einem Hauptminimum in den ersten Morgenstunden. Die tägliche Gangcurve erhebt sich sodann rasch über den Mittelwerth, um die Bildung zweier Maxima in den letzten Vormittagstunden und Abends anzudeuten, welche in den ausgeglichenen Reihen sich theilweise nur durch das Gleichbleiben der Ordinaten erkennen lassen.

Vergleichen wir diese Tabellen mit den Zusammenstellungen der Quotienten der mittleren maximalen Erwärmungen und Erkaltungen, Tabelle 23, so ersehen wir eine Coincidenz in den Extremen, natürlich entspricht dem Maximum des einen Ganges ein Minimum im anderen, da längeren andauernden Erwärmungen zur Ausgleichung starke Erkaltungen folgen und umgekehrt. In Folge dessen wird auch der Gang der Quotienten dieser Tabellen 32 und 33 dem Gange in der Tabelle 22 zwischen den Häufigkeitsquotienten der Erwärmungen und Erkaltungen direct entsprechen.

Unterziehen wir die in den ersten zwei Columnen der Tabellen 32 und 33 vorkommenden Werthe einer kleinen Ausgleichsrechnung, so erhalten wir zur Darstellung des täglichen Ganges der mittleren grössten Dauer anhaltender Erwärmungen und Erkaltungen die in Tabelle 34 zusammengestellten Reihen. Für die Temperaturzunahme finden wir im Jänner und October eine einfache Periode, im April und Juli eine doppelte. Der

Verlauf der Gangcurven entspricht dem täglichen Gange der mittleren maximalen Erwärmung in Tabelle 18, wobei einem Extreme der einen Gangcurve das entgegengesetzte Extrem der anderen entspricht.

Für den täglichen Gang der grössten Dauer einer continuirlichen Temperaturabnahme lässt sich schwer eine solche einfache Übereinstimmung mit der täglichen Periode der mittleren maximalen Erkaltung finden. Wir wollen nur hervorheben, dass auch hier, wie bei Tabelle 19, im Juli und April die tägliche Periode eine einfache mit nur einem Maximum und Minimum ist, während im Winter sich dieselbe mit doppelten, ja dreifachen Extremen darstellt.

Die absolut grösste Dauer, sowohl einer continuirlichen Erwärmung, als auch einer continuirlichen Erkaltung betrug 9 Tage, und zwar fällt die längste Erkaltung auf den Jänner um Mitternacht, die längste Erwärmung auf den Juli um 8^h Abends. Die Vertheilung über die einzelnen Stunden wird in Tabelle 35 ersichtlich gemacht.

Aus den Vortabellen, welche behufs Bestimmung der Grösse der anhaltenden Erwärmungen und Erkaltungen angelegt werden mussten, wurden noch die mittleren Häufigkeiten der über 3 Tage dauernden Erwärmungen und Erkaltungen bestimmt und in Tabelle 36 dargestellt.

Im Jänner und October ist die Wahrscheinlichkeit einer längeren Erkaltung mit Ausnahme der ersten Nachmittagsstunden immer grösser als die einer andauernden Erwärmung. Im Sommer ist hingegen zu allen Stunden des Tages die Wahrscheinlichkeit für eine längere Temperaturzunahme grösser als die einer längeren Temperaturabnahme. Am kleinsten ist dieses Vorherrschen in den Morgenstunden, am grössten Vormittags um 8^h und Nachmittags zwischen 2^h und 6^h.

In den Tabellen 37—40 sind die Häufigkeiten der Veränderlichkeiten von Grad zu Grad für die einzelnen Stunden zusammengestellt und ausserdem noch getrennt angeführt, wie sich die Häufigkeit von Erwärmungen und Erkaltungen $\gtreqless 4 \cdot 0°$ und $\gtreqless 8 \cdot 0°$ über die einzelnen Stunden vertheilen.

Tabelle 33.

Durchschnittliche grösste Dauer einer continuirlichen Veränderlichkeit gleichen Zeichens.

	April				Juli			
	Zunahme	Abnahme	Quotienten	Aus-geglichen	Zunahme	Abnahme	Quotienten	Aus-geglichen
2^h a.	4·2	3·6	1·2	1·1	3·7	3·3	1·1	1·1*
4	3·3	3·6	0·9	1·0*	3·7	3·4	1·1	1·1*
6	3·5	3·5	1·0	1·1	3·8	3·2	1·2	1·3
8	4·0	3·2	1·3	1·2	4·2	2·5	1·7	1·5
10	4·0	3·5	1·1	**1·2**	4·4	3·1	1·4	**1·5**
12^h m.	4·4	3·4	1·3	1·2	4·5	3·0	1·5	1·5
2^h p.	3·3	3·0	1·1	1·2	4·5	3·2	1·4	1·4
4	4·6	3·2	1·4	1·3	4·4	3·1	1·4	1·4
6	4·3	3·0	1·4	1·4	4·2	3·3	1·3	1·4
8	4·4	3·0	1·5	**1·4**	5·4	3·4	1·6	**1·4**
10	3·8	3·0	1·3	1·3	4·6	3·7	1·2	1·3
12^h n.	3·8	3·2	1·2	1·2	3·9	3·2	1·2	1·2
Mittel	4·0	3·3	1·2	1·2	4·3	3·2	1·3	1·3

Tabelle 34.

Durchschnittliche grösste Dauer einer anhaltenden Erwärmung und Erkaltung.

(Ausgeglichene Werthe.)

	Temperaturzunahme				Temperaturabnahme			
	Jänner	Oct.	April	Juli	Jänner	Oct.	April	Juli
2^h a.	3·2	3·2*	3·9	3·8	3·9	**4·3**	3·5	3·3
4	3·1*	3·4	3·6*	3·7*	3·8*	**4·3**	**3·6**	3·3
6	3·1*	3·5	3·6*	3·9	4·2	4·0	3·4	3·1
8	3·2	3·5	3·9	4·1	**4·3**	3·8*	3·3	2·8*
10	3·6	3·7	**4·1**	4·4	4·0	3·9	3·4	2·9
12^h m.	3·9	4·0	4·0	**4·5**	3·8*	**4·0**	3·3	3·1
2^h p.	4·0	4·1	3·9*	**4·5**	4·0	3·9	3·2	3·1
4	4·2	**4·2**	4·2	4·4*	**4·1**	3·7	3·1	3·2
6	**4·3**	4·0	**4·4**	4·5	3·8	3·5*	3·1	3·3
8	4·0	3·6	4·2	**4·9**	3·6*	3·7	3·0*	3·4
10	3·9	3·3	4·0	4·6	3·9	3·9	3·1	**3·5**
12^h n.	3·6	3·2	3·9	4·0	**4·2**	4·0	3·2	3·4
Mittel	3·7	3·6	4·0	4·3	4·0	3·9	3·3	3·2

Tabelle 35.

Absolut längste Dauer der Erwärmungen und Erkaltungen.

	Jänner		October		April		Juli	
	Erwärmung	Erkaltung	Erwärmung	Erkaltung	Erwärmung	Erkaltung	Erwärmung	Erkaltung
2ʰ a.	4	7	5	6	7	6	5	5
4	4	7	6	7	5	7	6	5
6	4	8	6	7	5	5	5	5
8	4	7	6	6	5	6	6	3
10	6	6	5	5	5	5	8	6
12ʰ m.	8	5	5	6	8	6	6	4
2ʰ p.	7	6	5	5	5	5	7	5
4	7	6	5	5	8	5	6	5
6	7	6	5	6	8	4	7	8
8	7	5	5	8	8	5	9	6
10	7	6	5	5	6	4	6	6
12ʰ n.	5	9	4	6	7	4	5	5
Mittel	5·8	6·5	5·2	6·0	6·4	5·2	6·3	5·3

Tabelle 36.

Mittlere Häufigkeit einer über drei Tage dauernden Erwärmung und Erkaltung.

	Jänner		October		April		Juli	
	Erwärmung	Erkaltung	Erwärmung	Erkaltung	Erwärmung	Erkaltung	Erwärmung	Erkaltung
2ʰ a.	0·3	0·6	0·4	0·9	0·8	0·4	0·7	0·5
4	0·3	0·5	0·5	1·1	0·5	0·4	0·4	0·5
6	0·3	0·8	0·7	0·9	0·5	0·5	0·6	0·3
8	0·1	1·2	0·5	0·8	0·9	0·2	1·0	0·0
10	0·8	1·0	0·6	0·8	0·9	0·4	0·9	0·2
12ʰ m.	0·6	0·9	1·1	1·2	0·8	0·5	1·2	0·3
2ʰ p.	1·0	0·9	1·0	0·9	0·6	0·1	1·2	0·5
4	1·2	1·0	0·9	0·6	0·7	0·4	1·0	0·2
6	0·8	0·9	0·9	0·4	0·9	0·2	0·8	0·3
8	0·6	0·5	0·4	0·5	0·7	0·2	1·3	0·3
10	0·5	0·8	0·4	0·7	0·6	0·2	1·2	0·4
12ʰ n.	0·5	1·0	0·4	0·7	0·6	0·4	0·8	0·3
Mittel	0·6	0 8	0·6	0·8	0·7	0·3	0·9	0·3

Tabelle 37.

Häufigkeit der Veränderlichkeiten nach 1° Intervall geordnet.

Jänner.

	2^h a.	4^h	6^h	8^h	10^h	12^h m.	2^h p.	4^h	6^h	8^h	10^h	12^h n.	Summe	Mittel
0·0— 0·9	9·6	10·9	8·6	8·8	8·0	10·6	11·1	11·1	11·7	10·3	9·2	9·8	119·7	10·0
1·0— 1·9	7·2	7·3	8·9	8·8	9·2	8·3	9·4	9·5	9·5	8·5	8·2	7·6	102·4	8·5
2·0— 2·9	5·6	3·8	5·0	4·6	6·4	6·1	5·0	5·4	4·7	5·3	6·0	4·7	62·6	5·2
3·0— 3·9	2·8	3·8	3·4	3·5	3·8	3·7	3·1	2·7	2·4	3·3	3·1	3·9	39·5	3·3
4·0— 4·9	2·7	2·0	1·8	2·0	2·0	1·0	1·2	1·2	1·7	1·4	2·0	2·4	21·4	1·8
5·0— 5·9	1·9	1·5	1·5	1·0	·4	·8	·8	·8	·6	1·0	·8	1·3	12·4	1·0
6·0— 6·9	·3	·7	·8	1·2	·8	·3	·2	·1	·2	·6	1·1	·4	6·7	·6
7·0— 7·9	·4	·5	·4	·4	·3	·2	·1	·1	·0	·4	·4	·6	3·8	·3
8·0— 8·9	·3	·1	·3	·3	·0	—	·1	·1	·1	·1	·0	·1	1·5	·1
9·0— 9·9	·1	·2	·0	·3	·1	—	—	—	·1	·1	·2	·1	1·2	·1
10·0—10·9	·0	·1	·2	·1	—	—	—	—	—	—	—	·1	·5	·1
11·0—11·9	·1	·1	·1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	·3	·0
Erwärmungen														
4·0— 7·9	2·7	2·6	2·7	2·6	1·7	1·2	1·0	1·0	1·1	2·0	2·9	2·7	24·2	2·0
≧ 8·0	·2	·3	·2	·4	·0	·0	·0	·0	·0	·0	·0	·1	1·2	·1
Erkaltungen														
4·0— 7·9	2·6	2·1	1·8	2·0	1·8	1·1	1·3	1·2	1·4	1·4	1·4	2·0	20·1	1·7
≧ 8·0	·3	·2	·4	·3	·1	·0	·1	·1	·2	·2	·2	·2	2·3	·2
Summe														
≧ 4·0	5·8	5·2	5·1	5·3	3·6	2·3	2·4	2·3	2·7	3·6	4·5	5·0	47·8	4·0
≧ 8·0	·5	·5	·6	·7	·1	·0	·1	·1	·2	·2	·2	·3	3·5	·3

Tabelle 38.

Häufigkeit der Veränderlichkeiten nach 1° Intervall geordnet.

October.

	2h a.	4h	6h	8h	10h	12h m.	2h p.	4h	6h	8h	10h	12h n.	Summe	Mittel
0·0 – 0·9	10·5	9·5	9·1	8·5	12·6	12·4	13·3	12·4	12·6	12·4	9·3	8·8	131·4	10·9
1·0 – 1·9	6·8	7·7	8·9	9·3	7·8	7·5	6·6	8·1	7·4	7·0	8·1	7·8	93·0	7·8
2·0 – 2·9	5·2	5·6	5·0	6·3	4·9	5·9	5·5	5·2	5·6	4·4	4·7	5·5	63·8	5·3
3·0 – 3·9	4·1	3·8	3·1	2·5	2·5	2·7	3·5	2·1	2·9	3·3	4·9	3·8	39·2	3·3
4·0 – 4·9	2·0	2·1	1·8	1·4	1·6	1·1	·5	1·6	1·2	2·2	1·9	2·5	19·9	1·7
5·0 – 5·9	1·2	1·0	·9	1·4	·8	·4	·7	·6	·3	1·0	·6	1·4	10·3	·9
6·0 – 6·9	·5	·4	1·3	1·0	·6	·4	·3	·3	·6	·6	·7	·3	7·0	·6
7·0 – 7·9	·6	·6	·6	·0	·2	·3	·2	·4	·3	·0	·5	·4	4·1	·3
8·0 – 8·9	·1	·3	·3	·6	—	·1	·3	·2	·0	·1	·2	·5	2·7	·2
9·0 – 9·9	—	—	—	—	—	·1	·1	·0	·0	—	·1	—	·3	·0
10·0 – 10·9	—	—	—	—	—	·1	—	·0	·0	—	—	—	·1	·0
11·0 – 11·9	—	—	—	—	—	—	—	·1	·1	—	—	—	·2	·0
Erwärmungen														
4·0 – 7·9	2·3	2·3	2·3	1·7	1·4	0·8	0·5	1·1	0·7	1·5	2·1	2·3	19·0	1·6
≧ 8·0	0·1	·3	·3	·4	·0	·1	·0	·0	·0	·0	·1	·3	1·6	·1
Erkaltungen														
4·0 – 7·9	2·0	1·8	2·3	2·1	1·8	1·4	1·2	1·8	1·7	2·3	1·6	2·3	22·3	1·9
≧ 8·0	·0	·0	·0	·2	·0	·2	·4	·3	·1	·1	·2	·2	1·7	·1
Summe														
≧ 4·0	4·4	4·4	4·9	4·4	3·2	2·5	2·1	3·2	2·5	3·9	4·0	5·1	44·6	3·7
≧ 8·0	·1	·3	·3	·6	·0	·3	·4	·3	·1	·1	·3	·5	3·3	·2

Tabelle 39.

Häufigkeit der Veränderlichkeiten nach 1° Intervall geordnet.

April.

	2h a.	4h	6h	8h	10h	12h m.	2h p.	4h	6h	8h	10h	12h n.	Summe	Mittel
0·0—0·9	9·7	10·9	9·7	9·9	11·3	10·1	11·3	12·1	14·0	14·9	11·7	11·2	136·8	11·4
1·0—1·9	9·7	7·2	8·4	10·3	7·8	8·4	7·5	8·3	8·9	9·7	10·3	8·7	105·2	8·8
2·0—2·9	4·9	5·0	5·5	4·7	5·8	6·4	5·7	5·2	4·5	3·8	5·1	5·5	62·1	5·2
3·0—3·9	3·5	4·0	3·4	3·5	3·0	2·7	3·0	2·7	1·7	1·0	2·3	2·9	33·7	2·8
4·0—4·9	1·4	1·6	1·9	1·1	1·4	·9	1·6	1·0	·7	·5	·2	·9	13·2	1·1
5·0—5·9	·6	·9	·8	·2	·2	1·0	·6	·6	·1	·1	·3	·5	5·9	0·5
6·0-6·9	·1	·3	·2	·1	·1	·4	·2	·0	·1	—	·1	·2	1·8	0·1
7·0—7·9	·1	·1	·1	·2	·3	·0	·0	·0	—	—	—	·1	·9	0·1
8·0—8·9	—	—	—	—	·1	·0	·0	·1	—	—	—	—	·2	·0
9·0—9·9	—	—	—	—	—	·1	·1	—	—	—	—	—	·2	·0
Erwärmungen														
4·0—7·9	1·2	1·8	1·9	0·7	1·0	0·9	0·9	0·7	0·5	0·2	0·3	0·7	10·8	0·9
≧ 8·0	·0	·0	·0	·0	·0	·1	·1	·1	·0	·0	·0	·0	·3	·0
Erkaltungen														
4·0—7·9	1·0	1·1	1·1	0·9	1·0	1·4	1·5	0·9	0·4	0·4	0·3	1·0	11·0	0·9
≧ 8·0	·0	·0	·0	·0	·1	·0	·0	·0	·0	·0	·0	·0	·1	·0
Summe														
≧ 4·0	2·2	2·9	3·0	1·6	2·1	2·4	2·5	1·7	0·9	0·6	0·6	1·7	22·2	1·8
≧ 8·0	·0	·0	·0	·1	·1	·1	·1	·1	·0	·0	·0	·0	·4	·0

Tabelle 40.

Häufigkeit der Veränderlichkeiten nach 1° Intervall geordnet.

Juli.

	2h a.	4h	6h	8h	10h	12h m.	2h p.	4h	6h	8h	10h	12h n.	Summe	Mittel
0·0— 0·9	9·9	10·5	10·7	12·9	10·9	10·0	11·5	11·2	10·5	13·3	13·4	11·5	**136·3**	11·4
1·0— 1·9	9·5	7·6	8·5	9·5	9·9	7·3	8·6	9·5	10·0	8·6	9 4	9·5	**107·9**	9·0
2·0— 2·9	5·6	6·4	5·2	4·7	5·2	7·1	5·4	6·0	5·0	4·3	4·6	4·8	**64·3**	5·4
3·0— 3·9	3·0	2·9	3·6	2·4	2·0	4·0	2·5	1·6	2·5	1·8	1·9	2·2	**30·4**	2·5
4·0— 4·9	1·6	1·8	1·2	·6	1·4	1·2	1·2	1·4	1 7	1·6	1·0	1·3	**16·0**	1·3
5·0— 5·9	·7	·9	1·1	·5	·8	·8	1·3	·5	·6	·9	·3	1·0	**9·4**	·8
6·0— 6·9	·6	·4	·5	·1	·3	·2	·3	·3	·3	·3	·0	·3	**3·6**	·3
7·0— 7·9	·0	·5	·1	·1	·0	·1	·1	·2	·1	·0	·1	·4	**1·7**	·2
8·0— 8·9	·1	—	·1	·1	·2	·2	·0	·1	·0	·0	·3	—	**1·1**	·1
9·0— 9·9	—	—	—	·1	·1	·0	·0	·0	·1	·1	—	—	**·4**	·0
10·0—10·9	—	—	—	—	·0	·0	·0	·1	·1	·1	—	—	**·3**	·0
11·0—11·9	—	—	—	—	·1	·0	·0	·0	·1	—	—	—	**·2**	·0
12·0—12·9	—	—	—	—	·0	·0	·0	·0	—	—	—	—	**·0**	·0
13·0—13·9	—	—	—	—	·1	·0	·0	·0	—	—	—	—	**·1**	·0
14·0—14·9	—	—	—	—	—	·0	·1	·1	—	—	—	—	**·2**	·0
15·0—15·9	—	—	—	—	—	·0	—	—	—	—	—	—	**·0**	·0
16·0—16·9	—	—	—	—	—	·1	—	—	—	—	—	—	**·1**	·0
Erwärmungen														
4·0— 7·9	1·5	1·9	1·3	0·3	1·2	0·9	1·4	1·0	1·5	1·2	0·6	1·4	14·2	1·2
≥ 8·0	·0	·0	·0	·0	·0	·0	·0	·0	·0	·0	·0	·0	·0	·0
Erkaltungen														
4·0— 7·9	1·4	1·7	1·6	1·0	1·3	1·4	1·5	1·4	1·2	1·6	0·8	1·6	16 5	1·4
≥ 8·0	·1	·0	·1	·2	·5	·3	·1	·3	·3	·2	·3	·0	2·4	·2
Summe														
≥ 4·0	3·0	3·6	3·0	1·5	3·0	2·6	3·0	2·7	3 0	3·0	1·7	3·0	33·1	2·8
≥ 8·0	·1	·0	·1	·2	·5	·3	·1	·3	·3	·2	·3	·0	2·4	·2

Von diesen letzteren soll nur kurz angeführt werden, dass die grossen Veränderlichkeiten im Jänner und October am häufigsten in den Nacht- und Morgenstunden vorkommen, tagsüber werden sie seltener. Für die erstangeführte Zeitperiode sind grosse Erwärmungen ($\gtreqless$ 4·0°) häufiger, tagsüber hingegen die grossen Erkaltungen. Veränderlichkeiten der Temperatur von einem Tage zum anderen von und über 8° kommen sehr selten vor, Erwärmungen fast nur Nachts und Morgens, Erkaltungen auch Nachmittags.

Im April fallen die grössten Veränderlichkeiten am häufigsten Nachts und Mittags. Aus der Vertheilung der Erwärmungen und Erkaltungen $\gtreqless$ 4·0° lässt sich hervorheben, dass die erstgenannten in den Morgenstunden häufiger sind, die letzteren um die Mittagszeit herum. Erkaltungen von $\gtreqless$ 8° kommen fast gar nie vor, Erwärmungen nur von Mittag bis 4^h Nachmittag.

Im Juli finden wir die grossen Veränderlichkeiten wie im April zwar auch Nachts und unmittelbar vor und nach Mittag, doch aber noch um 6^h und 8^h Nachmittags. Erkaltungen von und über 4·0° kommen fast immer häufiger vor als ähnlich grosse Erwärmungen; Erwärmungen $\gtreqless$ 8·0° gar nie, Erkaltungen fast zu allen Stunden, namentlich aber um Mittag und in den späteren Nachmittagstunden.

Was nun die Vertheilung der Häufigkeiten über die einzelnen Gradintervalle anbelangt, so ersehen wir im Jänner in den ersten Morgenstunden die Grenze am weitesten gezogen, da hier noch Veränderlichkeiten bis zur Temperaturgruppe 11·0—11·9° vorkommen. Im October finden wir dieselbe Grenze, doch fallen diese grössten Veränderlichkeiten auf den Nachmittag. Im April ist die Grenze enger gezogen, da die grössten Veränderlichkeiten, welche noch vorkommen, der Temperaturgruppe der 9° angehören, und zwar kommen diese, für hier grössten Veränderlichkeiten, um Mittag vor.

Im Juli treffen wir die Möglichkeit der grössten Veränderlichkeiten an, und zwar, wie bereits früher betont wurde, sind es nur Erkaltungen, die hier bemerkt werden konnten. Ihre Grenze erstreckt sich bis zur Gruppe von 16·0 bis 16·9°, und zwar fällt diese grösste Veränderlichkeit auf die Mittagszeit.

Tabelle 41.

Ausgeglichene Häufigkeit der Veränderlichkeit nach 0·2° geordnet.

Jänner.

	2h a.	4	6	8	10	12h m.	2h p.	4	6	8	10	12h n.
0·0—0·1	**22**	17	16	15	10	17	19	19	18	15	18	17
0·2—0·3	21	22	17	18	14	20	21	**24**	22	21	**21**	**23**
0·4—0·5	19	**25**	19	19	19	**24**	22	**24**	25	**24**	17	**23**
0·6—0·7	18	23	**19**	17	**20**	23	23	22	**26**	22	17	18
0·8—0·9	16	21	18	19	19	21	**26**	23	25	22	19	18
1·0—1·1	15	19	18	**21**	**20**	20	24	**24**	23	20	18	20
1·2—1·3	16	16	17	20	18	19	18	**24**	20	17	**20**	18
1·4—1·5	14	14	16	15	16	17	17	18	20	18	20	12
1·6—1·7	12	13	17	14	17	15	18*	14*	18*	18	15	11
1·8—1·9	15	11	18	15	17	13*	15	15	14	13*	12	13
2·0—2·1	16	11	15	11	16*	13	13	14	13	11	12*	13
2·2—2·3	11*	9*	11*	10*	15	13	12	12	11	13	12	10*
2·4—2·5	9	7	9	10	14	14	10	10	8	11	10	8
2·6—2·7	10	6	8	9	12	12	9	9	8	8	11	7
2·8—2·9	10	6	7	9	9	9	8	8	8	8	12	10

Tabelle 42.

Ausgeglichene Häufigkeit der Veränderlichkeit nach 0·2° geordnet.

Juli.

	2h a.	4	6	8	10	12h m.	2h p.	4	6	8	10	12h n.
0·0—0·1	20	17	21	30	16	17	22	20	19	22	21	23
0·2—0·3	**22**	21	20	**31**	21	19	24	23	23	26	25	**24**
0·4—0·5	20	**23**	22	28	**25**	**21**	**24**	**26**	**24**	28	**32**	23
0·6—0·7	19	22	**23**	22	**25**	**21**	23	24	22	**29**	**32**	23
0·8—0·9	19	**23**	22	20	24	20	22	21	20	28	24	25
1·0—1·1	19	21	21	22	23	19	20	21	24	25	22	**28**
1·2—1·3	20	15	19	21	21	16	18	23	**25**	23	21	23
1·4—1·5	**21**	13	16	19	19	13	17	22	19	19	19	15
1·6—1·7	19	15	14	17*	18	12	16	16	15*	13*	17*	14*
1·8—1·9	17*	15*	12*	13	16*	15*	15*	12*	16	10	14	14
2·0—2·1	16	16	10	11	13	18	13	11	18	11	11	13
2·2—2·3	14	15	12	10	11	18	11	11	12	11	10	11
2·4—2·5	10	11	14	9	11	14	11	12	8	7	9	9
2·6—2·7	7	10	11	9	9	11	10	13	6	5	9	7
2·8—2·9	7	8	7	9	8	10	9	12	4	5	8	6

Der * bezeichnet die Lage des Mittelwerthes.

Scheitelwerthe. Schon bei den Vorarbeiten behufs Aufstellung der Häufigkeit für die einzelnen Temperaturgrade war es bereits auffallend, dass nicht immer die erste Gruppe mit den niedrigsten Veränderlichkeiten von 0·0 bis 0·9° die grösste Häufigkeit aufweist, dass hingegen mitunter das zweite Gradintervall eine grössere oder gleich grosse Häufigkeit zeigt, oder dass hie und da der Unterschied zwischen diesen Häufigkeitszahlen kleiner ausfällt als der der vorangehenden und nachfolgenden Stunden. Da aus diesen Häufigkeitszahlen und den daraus construirten Wahrscheinlichkeitscurven das Entnehmen der Scheitelwerthe in den meisten Fällen eine Unmöglichkeit ist, anderseits aber eine diesbezügliche Untersuchung ein Interesse doch beanspruchen musste, wenn nicht anders, um wenigstens das gegenseitige Verhalten der *S* und *M* der Veränderlichkeit der Temperatur kennen zu lernen, so wurden für die zwei extremen Monate Jänner und Juli, und zwar für die ersten Gradintervalle, innerhalb welcher diese häufigsten Werthe zu suchen sind, zunächst die Häufigkeitszahlen für jede Grösse der Veränderlichkeiten, von Zehntel zu Zehntel Grad gehend, bestimmt. Da die erhaltenen Häufigkeitszahlen, in Folge der für solche specielle Untersuchungen doch zu geringen Anzahl von zur Verfügung stehenden Beobachtungsjahren, noch zu unregelmässig vertheilt erscheinen, so wurden je zwei Gruppen zusammengefasst und dieselben einer Ausgleichsrechnung unterzogen. Die Resultate finden sich in den Tabellen 41 und 42. Es soll hier noch zuerst bemerkt werden, dass in Folge der Ausgleichung die Summe von je fünf Gruppen dieser Tabellen nicht genau mit den in den Tabellen 37 und 40 vorkommenden Zahlen des entsprechenden ganzen Gradintervalles übereinstimmen werden; die Summe sämmtlicher Häufigkeitszahlen dieser 15 Gruppen in den Tabellen 41 und 42 stimmen aber mit der Summe der ersten drei Gruppen jeder Stunde in den Tabellen 37 und 40.

Vor Annahme dieser Intervalle, welche von zwei zu zwei Zehntel Grade vorschreiten, wurden versuchsweise Gruppen von fünf zu fünf und drei zu drei Zehntel gebildet, doch geben diese, namentlich die ersteren, noch schwer zu benützende Curven, da die Bestimmung der *S*, in Folge des zu flach

ausfallenden obersten Curventheiles, unsicher wird. Auch zeigt sich die Bildung von Doppelscheitel sehr störend, welche allerdings auch in dem hier zur Benützung kommenden zwei Zehntel-Intervall noch vorkommen. Vielleicht fallen diese Einsattelungen bei einer grösseren Anzahl von Beobachtungsjahren fort, was sehr wahrscheinlich ist, da im später zur Behandlung kommenden jährlichen Gange die Wahrscheinlichkeitscurven regelmässiger erscheinen.

Hier wurden daher zur graphischen Bestimmung der *S* der Veränderlichkeit die Curven, welche als Abscissen die Temperaturintervalle, als Ordinaten die dazugehörigen Häufigkeitszahlen besitzen, durch einen freien Handzug gewissenhaft ausgeglichen.

Die gefundenen Scheitelwerthe sind folgende:

Täglicher Gang der Scheitelwerthe und der Differenzen mit den Mittelwerthen.

Jänner					Juli				
	S	Ausgeglichene *S*	Δ *M—S*	Häufigkeit der Veränderlichkeit ≧ 8·0°		*S*	Ausgeglichene *S*	Δ *M—S*	Häufigkeit der Veränderlichkeit ≧ 8·0°
2^h a.	0·05	0·2*	**2·0**	0·5	2^h a.	0·85	**0·9**	0·9	0·1*
4	·50	·4	1·8	**·5**	4	·70	·7	1·2	·1
6	·60	·7	1·5	**·6**	6	·65	·6	1·2	·1
8	1·05	**·9**	1·3	·5	8	·25	·4*	1·3	·2
10	·85	·8	1·3	·2	10	·60	·5	1·3	**·4**
12^h m.	·50	·7	1·2	·1	12^h m.	·60	·5	**1·4**	·3
2^h p.	·85	·7	1·0*	·1*	2^h p.	·40	·5	1·3	·2
4	·75	·7	1·0*	·1	4	·50	·6	1·2	·2
6	·65	·6	1·1	·2	6	·90	·7	1·0	·3
8	·45	·5	1·4	·2	8	·65	·7	0·9	·2
10	·30	·4	1·7	·2	10	·55	·7	0·9	·2
12^h n.	·35	·3	1·9	·3	12^h n.	1·00	**·9**	0·8*	·1

Die Scheitelwerthe für den Jänner ergeben zwar auch eine tägliche Periode mit einer einfachen Schwankung ähnlich wie die Mittelwerthe, doch fallen die Extreme nicht auf die gleiche

Tageszeit, sie erscheinen im Vergleiche zum *M* auf spätere Stunden verlegt (siehe Tabelle 7).

Die *S*, welche zu allen Stunden zwischen den *M* und der fixen Grenze — Veränderlichkeit $= 0$ — liegen, zeigen ihr Maximum in den letzten Vormittagstunden, ihr Minimum um Mitternacht und in den ersten Morgenstunden. Es werden daher zu der erstgenannten Zeit die häufigsten Werthe bei den grösseren Veränderlichkeiten zu finden sein (0·9° in der ausgeglichenen Reihe), im zweiten Falle bei den kleineren Veränderlichkeiten (von 0·2°). Die Verschiebung dieser häufigsten Werthe ist, namentlich in der ausgeglichenen Reihe, eine sehr regelmässige. Die Amplitude der täglichen Periode der *S* ist grösser als die der *M*, 0·7° gegen 0·5°.

Die *S* erscheinen in der ausgeglichenen Reihe auf eine Decimale angegeben, da das Entnehmen einer zweiten Decimale aus den Curven illusorisch ist.

Bilden wir uns, um die gegenseitige Lage der *S* und *M* zu präcisiren, die Differenzen $M—S$, so ersehen wir, dass die *S* sich von den *M* am meisten gegen Mitternacht und in den ersten Morgenstunden entfernen, während in den ersten Nachmittagsstunden dieser Unterschied am kleinsten wird. Vergleichen wir diese Differenzreihe, welche einen sehr regelmässigen Gang zeigt, mit der täglichen Periode der Häufigkeit der grössten Veränderlichkeiten $\gtreqless$ 8·0° der Tabelle 37, so ersehen wir einen hübschen Parallelismus. Zur Erleichterung des Vergleiches wurden diese Häufigkeitszahlen, nachdem dieselben etwas ausgeglichen wurden, obiger Tabelle in der vierten Columne beigefügt.

In den Stunden, wo die Häufigkeit grösserer Veränderlichkeiten abnimmt, in welchem Falle der *M* von der Häufigkeit dieser grossen Veränderlichkeiten am geringsten beeinflusst erscheint, finden wir den *S* am wenigsten vom *M* entfernt. Wird die Häufigkeit der Veränderlichkeiten $\gtreqless$ 8·0° grösser, so entfernen sich auch der *M* und *S* mehr von einander.

Die in analoger Weise für den Sommermonat Juli bestimmten *S* geben eine tägliche Periode, welche von der bereits früher besprochenen der *M* erheblich abweicht. Die Doppelschwankung scheint hier zu verschwinden, um einer einfachen

Periode Platz zu machen, wobei gleich hier erwähnt werden soll, dass diese tägliche Periode der S der Veränderlichkeit im Juli einen vollständig entgegengesetzten Verlauf zur täglichen Periode der S im Jänner zeigt. Nachfolgende zwei Reihen stellen den täglichen Gang dar.

Täglicher Gang der Scheitelwerthe der Veränderlichkeit.

	2^h a.	4^h	6^h	8^h	10^h	12^h m.	2^h p.	4^h	6^h	8^h	10^h	12^h n.
Jänn.	—0·4*	—·2	·1	·3	·2	·1	·1	·1	·0	—·1	—·2	—·3*
Juli . .	·3	·1	·0	—·2*	—·1	—·1	—·1	·0	·1	·1	·1	·3

Die grösste Wahrscheinlichkeit fällt im Winter um 8^h Morgens auf die in dieser Vertheilung höchste Veränderlichkeit von 0·9°, während um 2^h Morgens die grösste Wahrscheinlichkeit für die kleine Veränderlichkeit von 0·2° gefunden wurde.

Genau das entgegengesetzte Verhalten entnehmen wir für den Sommer. Um 8^h Morgens ist die Veränderlichkeit von 0·4° (d. h. die in dieser Tagesperiode kleinste Veränderlichkeit) am häufigsten, Mitternachts und in den ersten Morgenstunden hingegen die in dieser ausgeglichenen Periode grösste Veränderlichkeit von 0·9°.

Die Amplitude ist hier bei den S, ebenso wie bei den M kleiner im Sommer als im Winter; aber auch hier ist die S-Amplitude grösser als die M-Amplitude, 0·5 gegen 0·3. Die S liegen auch hier im Juli zwischen den M und der festen Grenze (Veränderlichkeit = 0°).

Bilden wir die Differenzen $M—S$, um die Lage der S den M gegenüber festzustellen, so ersehen wir hier abermals einen sehr regelmässigen Verlauf dieser Differenzen. Die S und M sind zur Mittagszeit am weitesten von einander entfernt, Nachts am nächsten. Wir finden daher auch bei diesen Differenzen im Sommer genau das entgegengesetzte Verhalten des Winters.

Aus der Betrachtung der Häufigkeiten der grössten Veränderlichkeiten $\geqq$ 8·0° der Tabelle 40, beziehungsweise der ausgeglichenen Reihe in der achten Columne obiger Tabelle, finden wir hier ebenso, wie in dem früher besprochenen

Wintermonate, zur Zeit des grössten Auseinanderrückens der beiden Hauptwerthe (S und M) die grösste Häufigkeit von maximalen Veränderlichkeiten. Wenn das Vorkommen dieser grössten Veränderlichkeiten am seltensten wird, wo also der M durch grosse Veränderlichkeiten am geringsten beeinflusst werden kann durch eine Verlegung auf höhere Beträge, dort finden wir S und M einander am nächsten.

Dieser Gang der Häufigkeit von Veränderlichkeiten $\gtreqless 8\cdot0°$ entspricht auch dem Verschieben der obersten, nicht festen Grenze der Veränderlichkeit, wie aus den Tabellen 37 und 40 entnommen werden kann. Aus letzterer folgt z. B., dass im Juli zur Mittagszeit noch Veränderlichkeiten in der Temperaturgruppe 16·0—16·9° vorkommen können, während Nachts kaum noch Veränderlichkeiten des Gradintervalles 8·0—8·9° zu bemerken sind. In Tabelle 37 finden wir hingegen die Grenze Morgens am weitesten gezogen, mit Veränderlichkeiten von 11·0—11·9°, Mittags am geringsten mit 7·0—7·9°.

In den Stunden, wo daher diese nicht fixe Grenze sich auf die grössten Veränderlichkeiten verschiebt, dort finden sich S und M am meisten von einander entfernt. Zur Zeit hingegen, wo der Spielraum der Veränderlichkeiten kleiner erscheint, dort erreichen die Differenzen $S-M$ ihre kleinsten Beträge.

III. Jährlicher Gang der Veränderlichkeit und der Temperaturwellen.

Bevor ich diese Arbeit schliesse, soll behufs Vergleiches mit der für Triest[1] bestimmten jährlichen Vertheilung der Veränderlichkeiten auch der jährliche Gang für Pola aus den Beobachtungen dieses Decenniums abgeleitet werden.

In der Tabelle 43 finden sich die Veränderlichkeiten der Tagesmittel für die einzelnen Monate und Jahre für Pola und in Tabelle 44 die Lustren- und das Decenniummittel derselben Zeitperiode für beide Orte zusammengestellt.

Die Tagesmittel für Pola sind aus den 24stündlichen Beobachtungen entnommen.

---

[1] Der jährliche und tägliche Gang und die Veränderlichkeit der Lufttemperatur in Triest, von Eduard Mazelle, LX. Bd. der Denkschriften der mathem.-naturw. Classe der kaiserl. Akademie der Wissenschaften, Wien, 1893.

Tabelle 43.

Veränderlichkeit der Tagestemperatur.

Aus 24 stündlichen Mitteln abgeleitet.

	1881	1882	1883	1884	1885	1886	1887	1888	1889	1890
Jänner .	2·13	1 19	1·87	1·46	1·47	1·55	1·49	1·23	2·02	1·16
Februar	1·41	1·18	1·26	1·37	1·28	1·13	1·80	1·91	1·74	0·93
März ..	1·54	0·86	1·97	1·10	1·31	1·70	1·00	1·05	1·49	1·13
April ..	0·83	1·15	0·99	0·62	0·94	0·75	1·14	1·22	1·46	0·94
Mai ...	1·59	1·17	0·97	1·01	1·04	1·11	0·98	1·33	0·97	0·89
Juni ...	1·09	1·32	1·02	1·46	1·57	1·16	1·60	1·25	0·92	1·26
Juli....	1·00	1·05	1·42	1·38	1·09	1·07	0·87	0·92	0·80	1·27
August .	0·98	0·94	1 32	1·11	1·12	1·18	1·18	1·28	1·04	1·16
Sept. ..	1·03	1·05	0·96	1·42	1·63	1·41	1·09	0·87	1·58	0·86
Oct. ...	1·29	1·06	1·22	1·58	1·84	1·08	1·24	1·27	1·12	1·66
Nov....	0·87	1·68	1·63	1·58	1·31	1·31	1·88	1·55	1·35	1·12
Dec. ...	1·56	1·89	1·37	1·38	1·58	1·67	1·67	1·24	1·55	1·26
Jahr ...	1·28	1 21	1·33	1·29	1·35	1·26	1·33	1·26	1·34	1·14

Tabelle 44.

Veränderlichkeit der Tagestemperatur.

Lustren- und Decennienmittel.

	Pola			Triest			Ausgegl. 10 jähr. Mittel	
	1881 bis 1885	1886 bis 1890	1881 bis 1890	1881 bis 1885	1886 bis 1890	1881 bis 1890	Pola	Triest
Jänner	**1·62**	1·49	**1·56**	**1·64**	**1·55**	**1·59**	**1·51**	**1·50**
Februar ...	1·30	**1·50**	1·40	1·38	1·39	1·39	1·42	1·45
März	1·36	1·27	1·31	1·49	1·39	1·44	1 26	1·38
April	0·91*	1·10*	1·00*	1·16*	1·32*	1·24*	1·10*	1·36*
Mai	1·16	1·06*	1·11	1·59	1·45	1·52	1·12	1·46
Juni	**1·29**	**1·24**	**1·27**	**1·59**	**1·54**	**1·57**	**1·19**	**1·52**
Juli........	1·19	0·99*	1·09*	1·43	1·41	1·42	1·14	1·47
August.....	1·09*	1·17	1·13	1·37	1·52	1·45	1·13*	1·39
Sept.	1·22	1·16	1·19	1·20*	1·31*	1·25*	1·21	1·34*
Oct.	1·40	1·27	1·34	1·40	1·45	1·43	1·33	1·36
Nov........	1·41	1·44	1·43	1·28	1·36	1·32	1·43	1·38
Dec........	1·56	1·48	1·52	1·40	1·48	1·44	1·51	1·45
Jahr	1·29	1·26	1·28	1·41	1·43	1·42	1·28	1·42

Der jährliche Gang der Veränderlichkeiten für Pola zeigt im Decenniummittel das Maximum im Jänner, Nebenmaximum im Juni, sodann Hauptminimum im April, Nebenminimum im Juli. In den Lustrenmitteln fallen die Hauptmaxima im Jänner und Februar, die Nebenmaxima auf den Juni, die Minima im April, beziehungsweise Mai und im Juli, August.

Die Differenzen der einzelnen Lustrenmitteln zwischen Pola und Triest zeigen eine ziemliche Verschiedenheit, doch lässt sich beiderseits hervorheben, dass die Veränderlichkeiten der Wintermonate für Pola theilweise grösser sind als für Triest, im Sommer hingegen kleiner, und zwar um ziemlich grosse Beträge. Das Jahresmittel der Veränderlichkeit für Pola resultirt daher kleiner als für Triest (für Pola 1·28, für Triest 1·42), was übrigens in jedem der einzelnen zehn Jahre auch zu bemerken ist.

In den zwei letzten Reihen der Tabelle 44 sind die ausgeglichenen Werthe der mittleren Veränderlichkeiten für beide Orte und für dasselbe Decennium angegeben.

Der jährliche Gang resultirt folgendermassen:

Jän.	Feb.	März	April	Mai	Juni	Juli	Aug.	Sept.	Oct.	Nov.	Dec.
					Pola						
0·23	·14	—·02	—·18*	—·16	—**·09**	—·14	—·15*	—·07	·05	·15	·23
					Triest						
0·08	·03	—·04	—·06*	·04	**·10**	·05	—·03	—·08*	—·06	—·04	·03

Wir ersehen daraus an beiden Orten ähnliche Doppelschwankungen im jährlichen Gange, mit der grössten Veränderlichkeit im Jänner und Juni und der kleinsten im April und August, beziehungsweise September. Die Amplitude ist bei Pola grösser als bei Triest.

Die Differenzen zwischen den ausgeglichenen Veränderlichkeiten Pola—Triest sind:

Jän.	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	Aug.	Sept.	Oct.	Nov.	Dec.
0·01	—·03	—·12	—·26	—·34	—·33	—·33	—·26	—·13	—·03	·05	·06

Wie bereits oben erwähnt, sind die Veränderlichkeiten für Pola im November, December und Jänner grösser als für Triest,

in den übrigen Monaten kleiner, am kleinsten in den Sommermonaten Mai, Juni und Juli.

Hofrath Hann hat in einer Arbeit[1] über die Veränderlichkeit der Temperatur in Österreich auch für Pola, unter Zuhilfenahme der Beobachtungen des fünfjährigen Zeitraumes 1876 bis 1880 die mittlere Veränderlichkeit abgeleitet. Diese auf S. 174 der genannten Abhandlung angegebenen Daten geben mit den oben angeführten nachfolgende Veränderlichkeiten, welche sich daher auf den 15jährigen Zeitraum 1876/1890 beziehen:

Jän.	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	Aug.	Sept.	Oct.	Nov.	Dec.	Jahr
1·56	1·45	1·37	1·02*	1·15	**1·24**	1·12	1·11*	1·18	1·36	1·50	1·53	1·30

Für das Decennium 1881/1890 wurden auch noch die mittleren und absoluten Extreme der Veränderlichkeit der Tagesmittel berechnet, siehe Tabelle 45.

Man findet, wie bekanntlich schon Hann für das österreichische Küstenland bestimmt hatte, die Erkaltungen grösser als die Erwärmungen, und zwar überwiegen die Erkaltungen den Erwärmungen gegenüber am meisten in den Sommermonaten, April und December bilden in Pola jedoch eine Ausnahme, wie aus folgenden Quotienten zwischen den mittleren Erwärmungen und Erkaltungen ersichtlich wird.

Jän.	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	Aug.	Sept.	Oct.	Nov.	Dec.
1·07	1·27	1·01	0·95	1·38	1·53	1·82	1·78	1·72	1·16	1·02	0·99

Das Vorherrschen der Erkaltungen ihrer mittleren Grösse nach resultirt am grössten im Juli, im April hingegen erscheinen die Erwärmungen etwas grösser als die Erkaltungen, im December sind beide fast gleich gross.

Auch die absoluten Erkaltungen sind mit Ausnahme des März und April grösser als die absoluten Erwärmungen, am grössten ist der Unterschied im Juli.

Für das Jahr finden wir die grössten mittleren Erwärmungen mit 5·76°, die grösste mittlere Erkaltung mit 6·78°,

[1] Die Veränderlichkeit der Temperatur in Österreich, von J. Hann, LVIII. Bd. der Denkschriften der mathem.-naturw. Classe der kaiserl. Akademie der Wissenschaften, Wien, 1891.

für Triest, und zwar aus demselben Decennium abgeleitet. 5·66° und 7·61°. Es ist daher in Pola die mittlere maximale Erwärmung etwas grösser, hingegen die mittlere maximale Erkaltung kleiner als in Triest.

Die absolut grösste Erkaltung der Tagesmittel in diesen zehn Jahren konnte für Pola mit 9·4° gefunden werden, und zwar vom 19. auf den 20. Juli 1884. Die grösste Erwärmung mit 7·1° vom 2. auf den 3. März 1886.

In der Tabelle 46 wurden analog wie früher für die einzelnen Stunden die Häufigkeiten der Veränderlichkeit, nach 1°-Intervallen geordnet, angegeben.

Diese Tabelle ist ganz ähnlich der Zusammenstellung auf S. 174 der genannten Publication von Hann angelegt und kann daher leicht — falls diese Werthe benützt werden sollten — auf den 15jährigen Zeitraum 1876/1890 ergänzt werden.

Hier folgen nur die Häufigkeitszahlen der grossen Veränderlichkeiten für ein mittleres Jahr, unter Berücksichtigung sämmtlicher 15jähriger Beobachtungen.

	Erwärmungen	Erkaltungen		Veränderlichkeiten
	4·0—7·9°	4·0—7·9°	$\gtreqless$ 8·0°	$\gtreqless$ 4·0°
Jänner	1·1	0·7	0·0	1·8
Februar	0·4	0·6	0·0	1·0
März	0·6	0·9	0·1	1·6
April	0·2	0·2	0·0	0·4
Mai	0·0	0·7	0·0	0·7
Juni	0·1	0·5	0·0	0·6
Juli	0·0	0·7	0·1	0·8
August	0·0	0·9	0·0	0·9
September	0·3	0·8	0·1	1·2
October	0·4	1·1	0·0	1·5
November	0·7	0·8	0·0	1·5
December	0·7	0·5	0·0	1·2
Jahr	4·5	8·4	0·3	13·2

Im mittleren Jahre kommen daher Erkaltungen $\gtreqless$ 4·0° 8·7 mal vor, Erwärmungen $\gtreqless$ 4·0° nur 4·5 mal; in den Sommermonaten fehlen die letzteren fast ganz.

Tabelle 45.

Grösste Veränderlichkeit der Tagesmittel der Temperatur.

	Mittel der		Absolute Maxima der					
	Erwärm.	Erkalt.	Erwärmungen			Erkaltungen		
				Jahr	Tag		Jahr	Tag
Jänner	4·33	4·62	5·3	1881	18.	7·0	1889	2.
Februar	3·32	4·21	4·6	1885	16.	6·5	1887	16.
März	4·02	4·06	7·1	1886	3.	5·5	1885	11.
April	2·82	2·67*	5·5	1889	28.	4·2	1889	17.
Mai	2·73	3·76	3·5	1888	8.	7·6	1881	23.
Juni	2·97	4·55	3·8	1885	25.	6·7	1887	11.
Juli	2·36*	4·30	3·9	1884	1.	9·4	1884	20.
August	2·73	**4·86**	3·8	1881	17.	6·7	1881	15.
September	2·72	4·68	4·7	1884	6.	8·2	1885	29.
October	3·84	4·44	6·6	1885	15.	7·1	1881	16.
November	4·15	4·23	5·9	1887	19.	5·9	1884	30.
December	**4·36**	4·34	6·8	1882	10.	7·3	1885	10.
Mittel	3·36	4·23	5·1	—	—	6·8	—	—
Jahr	5·76	6·78	7·1	1886	3. März	9·4	1884	20. Juli

Tabelle 46.

Häufigkeit der Veränderlichkeit nach 1° Intervall geordnet.

Aus dem Decennium 1881—1890 für ein mittleres Jahr bestimmt. Ausgedrückt in Tagen.

	Jänn.	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	Aug.	Sept.	Oct.	Nov.	Dec.	Jahressumme
0·0—0·9	12·1	11·8	14·3	15·8	16·8	14·0	17·3	17·4	16·0	15·1	12·5	13·1	176·2
1·0—1·9	9·6	9·7	9·9	11·0	9 5	10·5	9·3	7·9	8·7	8·4	10·2	8·1	112·8
2·0—2·9	4 3	3·7	4 0	2·5	3·5	3 2	2·9	3·7	3·0	4·4	3·9	6·0	45 1
3·0—3·9	3·0	2·1	1·5	0·5	0 5	1·6	0·9	1·0	1·4	1·8	2·3	2·6	19·2
4·0—4·9	1·2	0 7	0·7	0·1	0 6	0·4	0·3	0·4	0·4	0·8	0·4	0 6	6·6
5·0—5·9	0·6	0·1	0·4	0·1	0·0	0·2	0·2	0·5	0·3	0·3	0·7	0 2	3·6
6·0—6·9	0·1	0·1	0·1	—	0 0	0·1	0·0	0·1	0·0	0·1	—	0·3	0·9
7·0—7·9	0·1	—	0·1	—	0·1	—	0·0	—	0·1	0·1	—	0·1	0·6
8·0—8·9	—	—	—	—	—	—	0·0	—	0 1	—	—	—	0·1
9·0—9·9	—	—	—	—	—	—	0·1	—	—	—	—	—	0·1
Erwärmungen													
4·0—7·9	1·2	0·1	0·4	0·1	0·0	0·0	0·0	0·0	0·2	0·4	0 5	0·8	3·7
≧ 8·0	·0	·0	·0	·0	·0	·0	·0	·0	·0	·0	·0	0	0·0
Erkaltungen													
4·0—7·9	0·8	0·8	0·9	0·1	0·7	0·7	0 5	1·0	0·6	0·9	0·6	0·4	8·0
≧ 8·0	·0	·0	·0	·0	·0	·0	·1	·0	·1	·0	·0	·0	0 2
Summe													
≧ 4·0	2·0	0·9	1·3	0·2	0 7	0·7	0·6	1·0	0·9	1·3	1·1	1·2	11·9
≧ 8·0	·0	·0	·0	·0	·0	·0	·1	·0	·1	·0	·0	·0	0·2

Grössere Erkaltungen überwiegen stets an Häufigkeit die grösseren Erwärmungen, mit Ausnahme des December und Jänner.

Erwärmungen mit oder über 8° kommen in diesen 15 Jahren nicht vor, Erkaltungen nur je einmal im März, Juli und September.

Geradeso wie früher bei der täglichen Periode wurden auch hier die Veränderlichkeiten der Tagesmittel dieses Decenniums 1881/1890 von Zehntel- zu Zehntelgraden geordnet, um die Construction von Wahrscheinlichkeitscurven und daraus die Bestimmung der Scheitelwerthe zu ermöglichen.

Die Häufigkeitszahlen von je zwei Zehntelgraden wurden vereinigt, die nach der Ausgleichung erhaltenen Zahlen finden sich in Tabelle 47. Die Summe dieser Häufigkeitszahlen von 0·0 bis 2·9° entsprechen den in Tabelle 46 vorkommenden Grössen der drei ersten Gradintervalle.

Die aus den Zahlen der Tabelle 47 construirten Curven wurden durch einen freien Handzug ausgeglichen; die daraus entnommenen Scheitelwerthe finden sich in der ersten Columne nachfolgender Zusammenstellung:

		Ausgeglichene		Δ	Häufigkeit der Veränderlichkeit
	S	S	M	$M-S$	≧ 4·0°
Jänner	0·2	0·4	**1·5**	**1·1**	**1·5**
Februar	0·8	**0·6**	1·4	0·8	1·4
März	0·5	0·5	1·3	0·8	1·1
April	0·4	0·4*	1·1*	0·7	0·8
Mai	0·4	0·4	1·1	0·7	0·6*
Juni	0·5	0·5	**1·2**	0·7	0·7*
Juli	0·4	**0·5**	1·1	0·6*	0·8
August	0·6	0·5	1·1*	0·6	0·9
September	0·3	0·4	1·2	0·8	1·2
October	0·4	0·4	1·3	0·9	1·4
November	0·4	0·4*	1·4	1·0	1·4
December	0·5	0·4	1·5	**1·1**	**1·4**

In der zweiten Reihe erscheinen die durch Ausgleichung erhaltenen Scheitelwerthe, welche zwar einen jährlichen Gang

der Veränderlichkeit auch in Form einer Doppelschwankung ergeben, welche aber nicht der jährlichen Gangcurve der mittleren Veränderlichkeit parallel verläuft. In der Tabelle 44 oder hier in der dritten Columne finden wir bei den ausgeglichenen Mittelwerthen der Veränderlichkeit das Wintermaximum im Jänner, während bei den Scheitelwerthen dasselbe auf den Februar fällt. Das Sommermaximum liegt bei den *M* im Juni, bei den *S*, wieder um einen Monat später, im Juli. Das Frühlingsminimum findet sich bei beiden Hauptwerthen zwischen April und Mai, das zweite Minimum befindet sich aber bei den *M*, wie bekannt, im August, bei den *S* im Spätherbst.

Vergleichen wir die gegenseitigen Lagen der *S* und *M*, so ersehen wir zuerst, dass der *S* immer zwischen dem *M* und der festen Grenze — Veränderlichkeit $= 0°$ — liegt, ausserdem aber, dass die Differenzen $M—S$ einen äusserst regelmässigen Verlauf zeigen. Am meisten entfernen sich diese Hauptwerthe im Winter von einander, am geringsten im Sommer.

Aus einer Betrachtung der Häufigkeiten grosser Veränderlichkeiten — siehe Tabelle 46 — finden wir eine analoge Vertheilung. Nehmen wir hier, da die Veränderlichkeit der Tagesmittel $\gtreqless 8\cdot0°$ nur zweimal vorkommt, die Häufigkeit der Veränderlichkeit $\gtreqless 4\cdot0°$, so finden wir in der vorletzten horizontalen Reihe dieser Tabelle 46 eine kleine Häufigkeit im Juli, hingegen die grösste im Jänner. Die ausgeglichenen Häufigkeitszahlen für diese Veränderlichkeiten $\gtreqless 4\cdot0°$, aus dem 15jährigen Zeitraum abgeleitet, erscheinen in obiger Zusammenstellung in der fünften Columne.

Es wiederholt sich daher hier dieselbe Erscheinung, welche bei der täglichen Periode der *S* und *M* die Veränderlichkeit bereits hervorgehoben wurde.

Es soll nur noch erwähnt werden, dass die Wahrscheinlichkeitscurven der Tagesmittel einen regelmässigeren Verlauf zeigten, als die Curven der directen Beobachtungen, welche früher bei Bestimmung der täglichen Periode benützt werden mussten.

Entnehmen wir aus diesen nach der Tabelle 46 gezeichneten und mit freier Hand ausgeglichenen Häufigkeitscurven

die Ordinaten der *S*, also die jeder Monatscurve zukommende grösste Häufigkeit, so erhalten wir nachfolgende Zahlen, welche, des Vergleiches halber, da die Monate verschiedene Länge haben, in Promille umgerechnet wurden.

Ordinaten der Scheitelwerthe.

	Jän.	Feb.	Mz.	Apr.	Mai	Juni	Juli	Aug.	Sept.	Oct.	Nv.	Dec.
Häufigkeit...	27	26	36	34	39	31	37	37	37	32	28	29
Promille	87*	92	116	113	**126**	103*	119	119	**123**	103	93	94
Ausgegl. ‰	90*	97	109	**117**	**117**	113*	115	**120**	117	105	96	92

Diese letzte Reihe lässt nun eine jährliche Periode entnehmen, welche dem jährlichen Gange der *M* der Veränderlichkeit entgegengesetzt verläuft. Wir finden die kleinste Wahrscheinlichkeit bei den *S* des Jänner und Juni, die grösste im April, Mai und August, wobei in den zwei erstgenannten Monaten die tägliche Periode der mittleren Veränderlichkeit die Maxima aufweist, während in den letzten die kleinste mittlere Veränderlichkeit vorkommt. Dort, wo also die *S* mit einer grossen Wahrscheinlichkeit auftreten, finden wir den kleinsten mittleren Betrag für die Veränderlichkeit. Da die *S* immer auf verhältnissmässig sehr kleine Veränderlichkeiten fallen, muss durch Vermehrung dieser kleinen Addenden die mittlere Summe auch kleiner werden.

Ganz analoges Verhalten zeigen auch die Ordinaten der *S*, wie sie aus den ausgeglichenen Häufigkeitscurven der einzelnen Tagesstunden der früher in Untersuchung gezogenen Monate, Jänner und Juli, entnommen werden können. Trage diese Ergebnisse hier nach:

Ordinaten der Scheitelwerthe

(Wahrscheinlichkeit der *S* in Promille).

	2^h a.	4^h	6^h	8^h	10^h	12^h m.	2^h p.	4^h	6^h	8^h	10^h	12^h n
Jänner ...	71	77	61*	65	65	77	81	**77**	84	77	65	71
Juli	65*	74	74	**97**	81	68*	77	81	77	94	**97**	84

Die erste dieser beiden unausgeglichenen Reihen ergibt für die *S* des Jänner die kleinste Ordinate um 6^h a., die grösste fällt circa um 4^h p., während die mittlere Veränderlichkeit um

6^h a. den grössten Betrag erreicht und um 4^h p. den kleinsten; siehe Tabelle 7.

Ebenso finden sich im Juli die S mit der grössten Wahrscheinlichkeitszahl um 8^h a. und 10^h p. zur Zeit der kleinsten mittleren Veränderlichkeit.

Temperaturwellen. In der früher citirten Abhandlung über die Lufttemperatur in Triest habe ich auf S. 447 u. ff. einige Ergebnisse über die Temperaturwellen für Triest nach 20jährigen Beobachtungen 1871—1890 zusammengestellt. Die hier nachfolgende Untersuchung soll nun eine Ergänzung dazu bieten, indem aus der Aufeinanderfolge von Veränderlichkeiten gleichen Zeichens auch für Pola die Länge dieser Temperaturwellen bestimmt werden soll, hauptsächlichst aber, um zu untersuchen, ob der jährliche Gang der Temperaturwellen für Pola den früher für Triest gefundenen bestätigt, welcher von dem für Centraleuropa bestimmten entschieden abweicht. Zum besseren Vergleiche habe ich noch nachträglich für Triest denselben zehnjährigen Zeitraum 1881/1890 herangezogen und in den nachstehenden Tabellen 48 und 49 die Resultate beider Orte zusammengestellt.

Man ersieht beiderseits ähnliche jährliche Perioden, sowohl in der mittleren Dauer der Erwärmungen, als der Erkaltungen. Die grösste Dauer der Erwärmungen findet sich in den Frühlings- und Sommermonaten, die kleinste im Herbst und Winter. Umgekehrt verhält es sich bei den Erkaltungen. Im Jahresdurchschnitt ist die mittlere Dauer der Erwärmung in Pola etwas kleiner als in Triest, hingegen die mittlere Dauer der Erkaltung grösser. Auch in den vier Jahreszeiten findet sich dasselbe Verhältniss. In beiden Orten ist die Amplitude im jährlichen Gange bei der Temperaturelevation grösser als bei der Depression. Sowohl bei der Elevation als bei der Depression ist die Amplitude in Triest grösser als in Pola.

Für dasselbe Decennium finden wir folgende Amplituden:

Mittlere Dauer der Temperatur-			
Zunahme		Abnahme	
Triest	Pola	Triest	Pola
1·02	0·93	0·72	0·62

Tabelle 47.

Ausgeglichene Häufigkeit der Veränderlichkeit nach 0·2° geordnet.

	Jän.	Feb.	Mz.	Apr.	Mai	Juni	Juli	Aug.	Sept.	Oct.	Nov.	Dec.
0·0–0·1	26	22	22	33	32	23	33	31	28	29	20	25
0·2–0·3	**27**	22	29	**34**	**38**	28	**37**	34	**37**	**31**	27	27
0·4–0·5	25	22	**36**	**34**	**39**	**32**	**37**	**36**	**36**	**32**	**28**	**29**
0·6–0·7	23	**25**	32	32	32	29	35	**37**	31	30	26	27
0·8–0·9	22	**26**	27	28	25	27	30	32	29	26	25	23
1·0–1·1	**24**	22	27	28*	22*	25	26*	24*	27	22	24	21
1·2–1·3	22	19	23*	25	22	24*	23	21	22*	21*	22	18
1·4–1·5	18*	20*	18	22	22	23	20	17	17	19	21*	15*
1·6–1·7	16	19	15	19	18	19	15	12	12	14	20	13
1·8–1·9	15	16	14	13	12	13	10	11	7	12	15	13
2·0–2·1	14	13	12	8	8	9	9	12	5	12	10	14
2·2–2·3	13	10	7	7	7	7	8	10	6	12	10	13
2·4–2·5	8	8	6	4	7	6	5	7	7	10	8	12
2·6–2·7	4	5	7	3	7	6	4	4	7	6	6	11
2·8–2·9	3	3	7	3	7	6	3	2	6	3	4	11

Der * bezeichnet die Lage des Mittelwerthes.

Tabelle 48.

Jährlicher Gang der Temperaturwellen. Pola.

	Mittlere Dauer der Temperatur- Zunahme		Mittlere Dauer der Temperatur- Abnahme		Länge der Temperaturwellen		Differenz Zunahme Abnahme	Quotient Zunahme Abnahme
Jänner	2·23	−0·09	2·02	−0·02	4·25	−0·12	0·21	1·10
Februar	2·27	− ·05	2·39	·35	4 66	·29	− ·12	0·95
März	2·36	·04	1·80	− ·24	4·16	− ·21	·56	1 31
April	2·42	·10	1·92	− ·12	4·34	− ·03	·50	1·26
Mai	2·55	·23	1·77	− ·27	4·32	− ·05	·78	1·44
Juni	2·42	·10	1·84	− ·20	4·26	− ·11	·58	1·32
Juli	2 85	·53	1·98	− ·06	4·83	·46	·87	1·44
August	2·84	·52	2·12	·08	4·96	·59	·72	1·34
September	1·97	− ·35	1 90	− ·14	3·87	− ·50	·07	1·04
October	2·05	− ·27	2·28	·24	4·33	− ·04	− ·23	0·90
November	1·92	− ·40	2·31	·27	4·23	− ·14	− ·39	0·83
December	1·98	− ·34	2·20	·16	4·18	− ·19	− ·22	0·90
Winter	2 16	− ·16	2·20	·16	4·36	− ·01	− ·04	0·98
Frühling	2·44	·12	1·83	− ·21	4·27	− ·10	·61	1·33
Sommer	2 70	·38	1·98	− ·06	4·68	·31	·72	1·36
Herbst	1·98	− ·34	2·16	·12	4·14	− ·23	− ·18	0·92
Jahr	2 32	—	2·04	—	4·37	—	0·28	1·14

Tabelle 49.

Jährlicher Gang der Temperaturwellen. Triest.

	Mittlere Dauer der Temperatur-				Länge der Temperatur-wellen		Differenz Zunahme Abnahme	Quotient Zunahme / Abnahme
	Zunahme		Abnahme					
Jänner	2·25	−0·15	1·98	0·11	4·23	−0·04	0·27	1·14
Februar	2·39	− ·01	1·99	·12	4·38	·11	0·40	1·20
März	2·64	·24	1·66	− ·21	4·30	·03	0·98	1·59
April	2·48	·08	1·75	− ·12	4·23	− ·04	0·73	1·42
Mai	2·39	− ·01	1·60	− ·27	3·99	− ·28	0·79	1·49
Juni	2·57	·17	1·82	− ·05	4·39	·12	0·75	1·41
Juli	3·06	·66	1·74	− ·13	4·80	·53	1·32	1·76
August	2·65	·25	1·92	·05	4·57	·30	0·73	1·38
September	2·04	− ·36	1·76	− ·11	3·80	− ·47	0·28	1·16
October	2·11	− ·29	2·02	·15	4·13	− ·14	0·09	1·04
November	2·10	− ·30	1·93	·06	4·03	− ·24	0·17	1·09
December	2·11	− ·29	2·32	·45	4·43	·16	−0·21	0·91
Winter	2·25	− ·15	2·10	·23	4·35	·08	0·15	1·07
Frühling	2·50	·10	1·67	− ·20	4·17	− ·10	0·83	1·50
Sommer	2·76	·36	1·83	− ·04	4·59	·32	0·93	1·51
Herbst	2·08	− ·32	1·90	·03	3·98	− ·29	0·18	1·10
Jahr	2·40	—	1·87	—	4·27	—	0·53	1·28

Tabelle 50.

Häufigkeit und Dauer anhaltender Erwärmungen und Erkaltungen.

	Mittl. Häufigkeit einer üb. 3 Tage dauernden		Durchschnittl. grösste Dauer einer continuirl.		Absolut längste Dauer einer	
	Erwärm.	Erkaltung	Erwärm.	Erkaltung	Erwärm.	Erkaltung
Jänner	0·9	0·7	4·5	3·8	7	7
Febr.	1·0	1·2	4·3	4·6	6	6
März	1·6	0·4	4·6	2·8	6	5
April	1·4	0·4	5·3	3·5	8	7
Mai	2·0	0·5	4·9	3·3	6	5
Juni	1·5	0·4	5·9	3·7	9	6
Juli	2·0	0·6	5·4	3·7	9	6
August	1·6	0·5	5·8	3·9	9	7
Sept.	1·0	0·4	3·7	3·4	6	6
Oct.	0·9	1·2	3·9	4·7	5	6
Nov.	0·5	1·3	3·7	4·6	6	6
Dec.	0·8	0·9	3·6	3·9	5	5
Winter	2·7	2·8	4·1	4·1	6·0	6·0
Frühl.	5·0	1·3	4·9	3·2	6·7	5·7
Som.	5·1	1·5	5·7	3·8	9·0	6·3
Herbst	2·4	2·9	3·8	4·2	5·7	6·0
Jahr	15·2	8·5	4·6	3·8	6·8	6·0

Die aus dieser mittleren Dauer der Elevationen und Depressionen folgende mittlere Länge der Temperaturwellen der einzelnen Monate lässt eine jährliche Periode entnehmen, welche der in obgenannter Abhandlung für Triest berechneten entspricht. Die Länge der Temperaturwellen ist in Pola etwas grösser als in Triest, 4·37 gegen 4·27. Die jährliche Periode zeigt wie in Triest im Allgemeinen Maxima im Sommer und Winter, Minima im Herbst und Frühling.

Länge der Temperaturwellen.

	Pola	Triest
Winter	**4·36**	**4·35**
Frühling	4·27*	4·17*
Sommer	**4·68**	**4·59**
Herbst	4·14*	3·98*

Die in obiger Tabelle 48 für Pola angeführten Längen der Temperaturwellen für die einzelnen Monate geben schon nach einer einfachen Ausgleichsrechnung eine regelmässige Gangcurve.

Ausgeglichener jährlicher Gang der Temperaturwellen für Pola. — 10 Jahre.

Jän.	Feb.	März	April	Mai	Juni	Juli	Aug.	Sept.	Oct.	Nov.	Dec.	Jahr
4·34	**4·43**	4·33	4·29*	4·31	4·42	**4·72**	4·66	4·26	4·19*	4·24	4·21	4·37
—·03	**·06**	—·04	—·08*	—·06	·05	**·35**	·29	—·11	—·18*	—·13	—·16	—

Es wurden nun probeweise sowohl für die Reihe in Tabelle 48, als auch für diese ausgeglichene die Gleichungen nach der Bessel'schen Formel aufgestellt und die Gangcurven berechnet.

Gleichungen für den jährlichen Gang der Temperaturwellen für Pola.

1. Aus den unausgeglichenen Werthen:

$$
\begin{aligned}
v = 4 \cdot 37 + 0 \cdot 140 \sin(285°49' + x \, . \, z) + \\
+ 0 \cdot 214 \sin(63°36' + x \, . \, 2z) + 0 \cdot 135 \sin(253°42' + x \, . \, 3z).
\end{aligned}
$$

2. Aus den ausgeglichenen Werthen:

$$y = 4\cdot 37 + 0\cdot 132 \sin(285°31' + x.z) + $$
$$+ 0\cdot 162 \sin(63°32' + x.2z) + 0\cdot 066 \sin(252°28' + x.3z).$$

In diesen Gleichungen ist $x = 0$ für Mitte Jänner zu setzen. Die Gleichungen unterscheiden sich natürlich sehr wenig von einander, nur die Amplituden werden bei der ausgeglichenen Reihe kleiner erscheinen.

Hier bringe ich nur die Werthe, welche aus der Gleichung 2 abgeleitet wurden, da die daraus berechnete Gangcurve sich besser an die dazugehörige ursprüngliche anschmiegt. Es wurden hier beide Gleichungen, welche den jährlichen Gang durch einen mathematischen Ausdruck darstellen, mitgetheilt, behufs Erleichterung eventueller Vergleiche mit den bereits berechneten Gleichungen anderer Stationen.

Auch die in Tabelle 49 aus demselben Decennium abgeleiteten Längen der Temperaturwellen für Triest wurden ausgeglichen:

Jän.	Feb.	März	Apr.	Mai	Juni	Juli	Aug.	Sept.	Oct.	Nov.	Dec.	Jahr
4·32	**4·32**	4·30	4·19	4·15*	4·39	**4·64**	4·44	4·08	4·02*	4·16	4·28	4·27
·05	**·05**	·03	—·08	—·12*	·12	**·37**	·17	—·19	—·25*	—·11	·01	—

und auf Grund dieser Werthe folgende Sinusgleichung berechnet:

$$3.\ y = 4\cdot 27 + 0\cdot 089 \sin(310°38' + x.z) + $$
$$+ 0\cdot 188 \sin(83°57' + x.2z) + 0\cdot 097 \sin(251°56' + x.3z).$$

Die aus diesen beiden Gleichungen 2 und 3 bestimmten Gangcurven sind folgende:

Jährlicher Gang der Temperaturwellen.

	Pola		Triest	
Jänner	4·32	—0·05	4·30	0·03
Februar	**4·39**	**·02**	**4·32**	**·05**
März	**4·39**	**·02**	4·30	·03
April	4·28	— ·09	4·17	— ·10
Mai	4·27*	— ·10*	4·15*	— ·12*

Juni	4·49	·12	4·40	·13
Juli	**4·71**	**·34**	**4·62**	**·35**
August.....	4·62	·25	4·44	·17
September ..	4·33	— ·04	4·09	— ·18
October	4·17*	— ·20*	3·99*	— ·28*
November ..	4·20	— ·17	4·17	— ·10
December...	4·27	— ·10	4·29	·02

Aus beiden Reihen entnehmen wir Maxima im Februar und Juli, Minima im Mai und October. Die Hauptextreme fallen auf den Juli und October.

Die Dauer der Temperaturzunahme ist durchschnittlich genommen, sowohl in Pola als in Triest, grösser als die Dauer der Temperaturabnahme. In den zwei letzten Columnen obiger Tabellen 48 und 49 sind sowohl die Differenzen, als die Quotienten dieser Theile der Temperaturwellen dargestellt.

Schon auf den ersten Blick lassen diese zwei Quotientenreihen eine jährliehe Periode erkennen, mit dem Maximum in den Sommermonaten und dem Minimum in den Wintermonaten. Diese beiden Reihen ausgeglichen, geben:

Jän.	Febr.	März	Apr.	Mai	Juni	Juli	Aug.	Sept.	Oct.	Nov.	Dec.	Mittel
						Pola						
1·01	1·08	1·21	1·32	1·36	1·38	**1·39**	1·29	1·08	0·92	0·86*	0·93	1·15
—·14	—·07	·06	·17	·21	·23	**·24**	·14	—·07	—·23	—·29*	—·22	—
						Triest						
1·10	1·28	1·45	1·48	1·45	1·52	**1·58**	1·42	1·19	1·08	1·03	1·01*	1·30
—·20	—·02	·15	·18	·15	·22	**·28**	·12	—·11	—·22	—·27	—·29*	—

Am meisten überwiegt die Dauer der Elevation über die der Depression im Juli.[1]

Aus der Zusammenstellung, welche zur Bestimmung der Länge der Temperaturwellen angelegt werden musste, lässt sich mit Leichtigkeit die Anzahl der Temperaturwellen entnehmen, welche in jedem Monat beobachtet werden konnte. Die mittlere Häufigkeit der Temperaturwellen ist:

Jän.	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	Aug.	Sept.	Oct.	Nov.	Dec.
7·35	6·15	7·85	6·95	7·05	7·05	6·45	6·15	7·65	7·00	7·30	7·60

Winter	Frühling	Sommer	Herbst	Jahr
7 03*	7·28	6·55*	7·32	7·05

Im Sommer und Winter, wo die Temperaturwellen die grösste Länge erreichen, wird die mittlere Häufigkeit ihres Vorkommens folgerichtig am kleinsten sein, im Herbst und Frühling hingegen den grössten Werth erreichen.

Da die Temperaturwellen in Pola etwas länger als in Triest sind, so wird auch die mittlere Häufigkeit ihres Vorkommens kleiner werden. Auf einen mittleren Monat fallen in Pola 7·1 Wellen, in Triest, nach 20jährigen Beobachtungen, 7·4 Wellen.

Aus den Beobachtungen des Decenniums 1881/1890 wurde noch, siehe Tabelle 50, die mittlere und absolut grösste Dauer einer Erwärmung und Erkaltung bestimmt. Die längste Dauer einer continuirlichen Temperaturzunahme betrug neun Tage und ist dieselbe in den Sommermonaten zu erwarten, während die grösste continuirliche Temperaturabnahme nur sieben Tage anhielt und solche sowohl in den Wintermonaten, als auch im Sommer zu erwarten ist.

Die durchschnittlich grösste Dauer einer Erwärmung wurde im Sommer mit 5·7 Tagen, die kleinste im Herbst mit 3·8 Tagen bestimmt. Die mittlere längste Erkaltung fällt auf den Herbst und Winter mit beiläufig 4·2 Tagen, die kürzeste mit 3·2 im Frühling.

Eine mehr als drei Tage dauernde Temperaturzunahme zeigt in den Sommermonaten eine grössere Frequenz, ähnliche Temperaturabnahmen sind hingegen im Winter häufiger.

Die Häufigkeit für eine längere Temperaturzunahme überwiegt die einer längeren Temperaturabnahme immer von März bis September. In den Wintermonaten ist hingegen die längere Dauer der Temperaturdepression grösser, als die der Temperaturelevation, wobei allerdings hervorzuheben wäre, dass dieses Überwiegen immer kleiner ist, als das des Sommers.

In Triest, siehe Tabelle auf S. 448 der genannten Abhandlung über die Veränderlichkeit der Temperatur für Triest, ist die mittlere Häufigkeit einer längeren Temperaturelevation immer der mittleren Häufigkeit einer längeren Temperatur-

depression überwiegend, nur wird auch hier im Sommer das Vorkommen einer andauernden Temperaturerhöhung häufiger, im Winter hingegen geringer werden.

Eine über drei Tage anhaltende Erwärmung kommt in Pola im Jahre durchschnittlich 15·2mal vor, eine Erkaltung 8·5mal. Das Vorherrschen der Erwärmung wird durch die Differenz 6·7 ausgedrückt, oder durch den Quotienten 1·79.

Stelle hier die Resultate zusammen, wie ich sie aus meiner erwähnten Abhandlung über die Veränderlichkeit der Lufttemperatur zu Triest entnehmen konnte, unter Zuhilfenahme der Resultate Hann's für Klagenfurt und Salzburg.

		Differenzen	Quotienten
		der Häufigkeit einer längeren Erwärmung und einer längeren Erkaltung	
Thalstationen des Alpenlandes (Salzburg und Klagenfurt)...		4·2	1·40
Nördliche Adria	Triest......	9·7	2·47
	Pola........	6·7	1·79

Das Überwiegen einer anhaltenden Erwärmung gegenüber einer andauernden Erkaltung in einem Durchschnittsjahre wird daher bei Pola kleiner sein als zu Triest, bleibt aber noch grösser als in den Thalstationen unseres Alpenlandes.

SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

CIV. BAND. IX. HEFT.

ABTHEILUNG II. a.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE, PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.



XXII. SITZUNG VOM 7. NOVEMBER 1895.

Erschienen sind Heft VII (Juli 1895), Abtheilung II. a. des 104. Bandes der Sitzungsberichte, ferner das Heft IX (November 1895) des 16. Bandes der Monatshefte für Chemie.

Das k. u. k. Reichs-Kriegs-Ministerium »Marine-Section« theilt ein Telegramm des Commandos S. M. Schiffes »Pola« mit, laut welchem letzteres mit der wissenschaftlichen Expedition ins Rothe Meer am 2. d. M. Nachmittag wohlbehalten in Djeddah eingelaufen ist.

Sir Archibald Geikie in London spricht den Dank aus für seine Wahl zum ausländischen correspondirenden Mitgliede dieser Classe.

Der Secretär legt eine Abhandlung von Dr. Wilhelm Sigmund in Prag: »Über die Einwirkung des Ozons auf die Pflanze« vor.

Das w. M. Herr Prof. H. Weidel überreicht eine im I. chemischen Universitäts-Laboratorium von Herrn Dr. J. Herzig ausgeführte Arbeit: »Über Haematoxylin und Brasilin« (III. Abhandlung).

Das w. M. Herr Hofrath Prof. V. v. Lang überreicht eine Abhandlung der Herren Regierungsrath Dr. J. M. Eder und E. Valenta in Wien: »Über die Spectren von Kupfer, Silber und Gold«.

Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:

Le Prince Albert I[er], Prince Souverain de Monaco, Résultats des Campagnes Scientifiques accomplies sur Son Yacht »l'Hirondelle«. Publiés sous la direction avec le concours du Baron Jules de Guerne, chargé des Travaux zoologiques à bord. Fascicule VIII. Zoanthaires provenant des campagnes du Yacht »l'Hirondelle« (Golfe de Gascogne, Açores, Terre-Neuve) (avec deux planches) par E. Jourdan. — Fascicule IX. Contribution à l'étude des Céphalopodes de l'Atlantique Nord (avec six planches) par L. Joubin. Imprimerie de Monaco, 1895; Folio

XXIII. SITZUNG VOM 14. NOVEMBER 1895.

Erschienen ist Heft V—VII (Mai—Juli 1895), Abtheilung I, des 104. Bandes der Sitzungsberichte.

Herr P. C. Puschl, Stiftscapitular in Seitenstetten, übersendet eine Abhandlung unter dem Titel: »Höchster Siedepunkt und kritische Temperatur«.

Herr Prof. Dr. E. Richter in Graz erstattet einen vorläufigen Bericht über seine im Sommer l. J. mit Unterstützung der kaiserl. Akademie der Wissenschaften unternommene Reise nach Norwegen.

Der Secretär theilt mit, dass das in der Sitzung vom 17. März 1892 behufs Wahrung der Priorität vorgelegte versiegelte Schreiben des Prof. Dr. Richard Godeffroy in Wien, mit der Aufschrift: »Zur Constitution der Kohlenhydrate« nach erfolgtem Ableben des Einsenders von dessen Gattin Frau Adele Godeffroy zurückgezogen wurde.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. Ad. Lieben überreicht eine Arbeit aus dem chemischen Laboratorium der Universität in Bern von den Herren St. v. Kostanecki und J. Tambor: »Über einen weiteren synthetischen Versuch in der Gentisinreihe«.

XXIV. SITZUNG VOM 21. NOVEMBER 1895.

Der Secretär legt eine eingesendete Abhandlung von Dr. Anton Lampa in Wien vor: »Über die Bestimmung der Dielektricitätsconstante eines anisotropen Stoffes nach einer beliebigen Richtung aus den Dielektricitätsconstanten nach den Hauptrichtungen«.

Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:

Bosscha J., Christian Huygens. Rede, gehalten am 200. Gedächtnisstage seines Lebensendes zu Haarlem am 8. Juli 1895. Aus dem Holländischen übersetzt von Th. W. Engelmann. Leipzig, 1895; 8°.

Cabreira Th., Principios de Stereochimica. Lisboa, 1894; 8°.

Hinrichs G. D., The true atomic weights of the chemical elements and the unity of matter. (With plates and diagrams.) St. Louis, Mo., U. S., 1894; 8°.

Sacco F., Essai sur l'orogénie de la terre. Turin, 1895; 8°.

SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

CIV. BAND. X. HEFT.

ABTHEILUNG II. a.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.



XXV. SITZUNG VOM 5. DECEMBER 1895.

Der Secretär legt den akademischen Almanach für das Jahr 1895, ferner das erschienene Heft VIII (October 1895), Abtheilung II. b. des 104. Bandes der Sitzungsberichte vor.

Das c. M. Herr Hofrath Prof. E. Ludwig übersendet eine Arbeit aus dem Laboratorium für medicinische Chemie der k. k. Universität in Krakau von Dr. Michael Seńkowski: »Zur Kenntniss der Constitution der Cholsäure«.

Der Secretär legt eine eingesendete Abhandlung von Dr. Max Margules in Wien: »Über die Zusammensetzung der gesättigten Dämpfe von Mischungen« vor.

Herr Franz Karl Lukas, k. k. Rechnungs-Official in Wien, ersucht um Eröffnung seines in der Sitzung dieser Classe vom 7. März d. J. behufs Wahrung der Priorität vorgelegten versiegelten Schreibens mit der Aufschrift: »Rotationsreihen«, indem derselbe zugleich einen Abdruck seiner eben erschienenen Publication: »Zur Untersuchung biologischer Erscheinungen« überreicht, worin dieser Gegenstand behandei worden ist.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. J. Wiesner überreicht eine Abhandlung, betitelt: »Beiträge zur Kenntniss des tropischen Regens«.

Herr Hofrath Wiesner legt ferner eine von Herrn A. Stift, Adjunct am chemischen Laboratorium der Versuchsstation für Zuckerindustrie in Wien, ausgeführte Arbeit über die chemische Zusammensetzung des Blüthenstaubes der Runkelrübe vor.

Das w. M. Herr Regierungsrath Prof. F. Mertens überreicht eine Abhandlung: »Über Dirichlet'sche Reihen«.

Der Vorsitzende bringt den wesentlichen Inhalt zweier brieflicher Mittheilungen zur Kenntniss, welche von dem wissenschaftlichen Leiter der Expedition S. M. Schiffes »Pola« im Rothen Meere, Herrn Hofrath Director F. Steindachner, w. M., aus Djeddah ddo. 9. November 1895 eingelangt sind.

Über Dirichlet'sche Reihen

von

F. Mertens,
w. M. k. Akad.

In Dirichlet's Beweise für das Vorkommen von unendlich vielen Primzahlen in einer gegebenen ganzzahligen arithmethischen Reihe, deren Differenz zu ihren Gliedern theilerfremd ist, besteht bekanntlich die grösste Schwierigkeit in dem Nachweise, dass gewisse unendliche Reihen von Null verschiedene Werthe haben. Dirichlet führt diesen Nachweis bei den Reihen mit complexen Gliedern apagogisch durch Stetigkeitsbetrachtungen.

Man kann indessen auch ganz elementar zu demselben Ziele durch Multiplication unendlicher Reihen gelangen, wie in dem Folgenden gezeigt werden soll.

1.

Es handele sich um die Multiplication von r Reihen

$$u_1^{(1)}+u_2^{(1)}+u_3^{(1)}+\ldots$$
$$u_1^{(2)}+u_2^{(2)}+u_3^{(2)}+\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$u_1^{(r)}+u_2^{(r)}+u_3^{(r)}+\ldots$$

Von den Gliedern dieser Reihen wird vorausgesetzt, dass für je zwei Zahlen a, b, von welchen $a \leqq b$ ist,

$$\operatorname{mod}(u_a^{(i)}+u_{a+1}^{(i)}+u_{a+2}^{(i)}+\ldots+u_b^{(i)}) \leqq \frac{f_i(a)}{a^{\varepsilon}}$$

ist, wo mod das Zeichen für den analytischen Modul, π eine gegebene positive Zahl und $f_i(n)$ eine gegebene, mit wachsendem n nicht abnehmende Function bedeuten.

Es sei zur Abkürzung

$$u_1^{(i)}+u_2^{(i)}+\ldots+u_n^{(i)} = U_n^{(i)},$$

$$\text{mod}\, u_1^{(i)}+\text{mod}\, u_2^{(i)}+\ldots+\text{mod}\, u_n^{(i)} = \mathfrak{A}_n^{(i)}$$

und n eine beliebige, die Einheit übersteigende Zahl. Denkt man sich das Product

$$U_n^{(1)}.U_n^{(2)}\ldots U_n^{(r)}$$

ausgeführt, so haben alle Glieder des Resultats die Gestalt

$$u_\alpha^{(1)}.u_\beta^{(2)}\ldots u_\varepsilon^{(r)},$$

wo jeder der Stellenzeiger $\alpha, \beta\ldots\varepsilon$ von 1 bis n lauft, und zerfallen zunächst in zwei Classen. Die erste Classe möge alle Glieder umfassen, in welchen das Product der Stellenzeiger $\alpha, \beta,\ldots\varepsilon$ die Zahl n nicht übersteigt, die zweite die übrigen Glieder.

Um die Summe der Glieder der ersten Classe aufzustellen, fasse man alle Glieder zusammen, in welchen das Product $\alpha.\beta\ldots\varepsilon$ einen und denselben Werth hat. Setzt man

$$\Sigma u_\alpha^{(1)} u_\beta^{(2)}\ldots u_\varepsilon^{(r)} = t_m,$$

wo die Summe über alle Lösungen der Gleichung

$$\alpha\beta\ldots\varepsilon = m$$

in ganzen positiven Zahlen $\alpha, \beta,\ldots\varepsilon$ zu erstrecken ist, so wird die Summe der Glieder der ersten Classe

$$= t_1+t_2+t_3+\ldots+t_n.$$

In den Gliedern der zweiten Classe muss wenigstens einer der r Stellenzeiger $\alpha, \beta,\ldots\varepsilon$ die in $n^{\frac{1}{r}}$ enthaltene grösste ganze Zahl ν übersteigen. Man kann daher diese Glieder in r Inbegriffe vertheilen, indem man in den i^{ten} Inbegriff alle Glieder aufnimmt, in welchen der i^{te} der Stellenzeiger $\alpha, \beta,\ldots\varepsilon$ der erste ist, welcher die Zahl ν übersteigt.

Es sei Σ_i die Summe der Glieder des $i$ten Inbegriffs. Jedes Glied von Σ_i muss eine der Grössen

$$u_{\nu+1}^{(i)},\ u_{\nu+2}^{(i)}, \ldots u_n^{(i)}$$

als Factor enthalten und man gelangt zu einer übersichtlichen Darstellung von Σ_i, wenn man alle Glieder zusammenfasst, in welchen je eine der genannten Grössen vorkommt. Bringt man zu diesem Ende jedes Glied von Σ_i auf die Form

$$u_m^{(i)} \,.\, u_a^{(\rho)} \,.\, u_b^{(\sigma)} \ldots u_e^{(\tau)},$$

wo $\rho, \sigma, \ldots \tau$ die Stellenzeiger $1, 2, \ldots r$ nach Ausschluss von i bezeichnen, so ist

$$u_a^{(\rho)} \,.\, u_b^{(\sigma)} \ldots u_e^{(\tau)}$$

ein Glied des Products

$$U_n^{(\rho)} \,.\, U_n^{(\sigma)} \ldots U_n^{(\tau)},$$

und zwar ein solches, in welchem

$$ab \ldots e > \frac{n}{m}.$$

ist und überdies in dem Falle $i > 1$ die $i-1$ ersten der Stellenzeiger $a, b, \ldots e$ die Zahl ν nicht übersteigen. Bezeichnet also $\varphi\left(\frac{n}{m}\right)$ die Summe dieser Glieder von $U_n^{(\rho)} . U_n^{(\sigma)} \ldots U_n^{(\tau)}$, so ist $\varphi\left(\frac{n}{m}\right)$ der Coëfficient von $u_m^{(i)}$ in Σ_i und man hat

$$\Sigma_i = u_{\nu+1}^{(i)} \varphi\left(\frac{n}{\nu+1}\right) + u_{\nu+2}^{(i)} \varphi\left(\frac{n}{\nu+2}\right) + \ldots + u_n^{(i)} \varphi\left(\frac{n}{n}\right).$$

Schreibt man diese Gleichung in der Form

$$\begin{aligned}
\Sigma_i = {} & (u_{\nu+1}^{(i)} + u_{\nu+2}^{(i)} + \ldots + u_n^{(i)}) \varphi\left(\frac{n}{\nu+1}\right) \\
& + (u_{\nu+2}^{(i)} + u_{\nu+3}^{(i)} + \ldots + u_n^{(i)}) \left(\varphi\left(\frac{n}{\nu+2}\right) - \varphi\left(\frac{n}{\nu+1}\right)\right) \\
& + (u_{\nu+3}^{(i)} + \ldots + u_n^{(i)}) \left(\varphi\left(\frac{n}{\nu+3}\right) - \varphi\left(\frac{n}{\nu+2}\right)\right) \\
& + \ldots
\end{aligned}$$

$$+\dots$$

$$+(u_{n-1}^{(i)}+u_n^{(i)})\left(\varphi\left(\frac{n}{n-1}\right)-\varphi\left(\frac{n}{n-2}\right)\right)$$

$$+u_n^{(i)}\left(\varphi\left(\frac{n}{n}\right)-\varphi\left(\frac{n}{n-1}\right)\right),$$

so ergibt sich

$$\operatorname{mod}\Sigma_i \leqq \operatorname{mod}(u_{\nu+1}^{(i)}+\dots+u_n^{(i)})\operatorname{mod}\varphi\left(\frac{n}{\nu+1}\right)$$

$$+\operatorname{mod}(u_{\nu+2}^{(i)}+\dots+u_n^{(i)})\operatorname{mod}\left(\varphi\left(\frac{n}{\nu+2}\right)-\varphi\left(\frac{n}{\nu+1}\right)\right)$$

$$+\dots$$

$$+\operatorname{mod}u_n^{(i)}\operatorname{mod}\left(\varphi\left(\frac{n}{n}\right)-\varphi\left(\frac{n}{n-1}\right)\right).$$

Hierin ist aber nach der Annahme

$$\operatorname{mod}(u_{\nu+1}^{(i)}+u_{\nu+2}^{(i)}+\dots+u_n^{(i)}) \leqq \frac{f_i(\nu+1)}{(\nu+1)^\tau} \leqq \frac{f_i(n)}{(\nu+1)^\tau},$$

$$\operatorname{mod}(u_{\nu+2}^{(i)}+\dots+u_n^{(i)}) \leqq \frac{f_i(\nu+2)}{(\nu+2)^\tau} \leqq \frac{f_i(n)}{(\nu+1)^\tau},$$

$$\dots\dots$$

$$\operatorname{mod}u_n^{(i)} \leqq \frac{f_i(n)}{n^\tau} \leqq \frac{f_i(n)}{(\nu+1)^\tau}.$$

Bezeichnet ferner $\varphi_0\left(\frac{n}{m}\right)$ das Resultat, in welches $\varphi\left(\frac{n}{m}\right)$ übergeht, wenn man jede Grösse $u_m^{(\mu)}$ durch ihren Modul ersetzt, so wird

$$\operatorname{mod}\varphi\left(\frac{n}{\nu+1}\right) \leqq \varphi_0\left(\frac{n}{\nu+1}\right),$$

$$\operatorname{mod}\left(\varphi\left(\frac{n}{\nu+2}\right)-\varphi\left(\frac{n}{\nu+1}\right)\right) \leqq \varphi_0\left(\frac{n}{\nu+2}\right)-\varphi_0\left(\frac{n}{\nu+1}\right),$$

$$\dots\dots$$

$$\operatorname{mod}\left(\varphi\left(\frac{n}{n}\right)-\varphi\left(\frac{n}{n-1}\right)\right) \leqq \varphi_0\left(\frac{n}{n}\right)-\varphi_0\left(\frac{n}{n-1}\right),$$

weil die Differenz

$$\varphi\left(\frac{n}{h+1}\right)-\varphi\left(\frac{n}{h}\right)$$

entweder aus lauter Gliedern von $U_n^{(\rho)}.U_n^{(\sigma)}\ldots U_n^{(\tau)}$ besteht oder aber zugleich mit $\varphi_0\left(\frac{n}{h+1}\right)-\varphi_0\left(\frac{n}{h}\right)$ verschwindet.

Man hat also

$$\operatorname{mod}\Sigma_i \leqq \frac{f_i(n)}{(\nu+1)^\sigma}\left(\varphi_0\left(\frac{n}{\nu+1}\right)+\varphi_0\left(\frac{n}{\nu+2}\right)-\varphi_0\left(\frac{n}{\nu+1}\right)+\ldots\right.$$
$$\left.+\varphi_0\left(\frac{n}{n}\right)-\varphi_0\left(\frac{n}{n-1}\right)\right)\leqq\frac{f_i(n)\varphi_0(1)}{(\nu+1)^\sigma}.$$

Da aber $\varphi_0(1)$ nur aus Gliedern des Ausdrucks

$$\mathfrak{A}_n^{(\rho)}.\mathfrak{A}_n^{(\sigma)}\ldots\mathfrak{A}_n^{(\tau)}-\operatorname{mod} n_1^{(\rho)}.\operatorname{mod} n_1^{(\sigma)}\ldots\operatorname{mod} n_1^{(\tau)}$$

besteht, so ergibt sich

$$\varphi_0(1)\leqq\mathfrak{P}_n^{(i)}$$

und demzufolge

$$\operatorname{mod}\Sigma_i\leqq\frac{f_i(n)\mathfrak{P}_n^{(i)}}{(\nu+1)^\sigma},$$

wenn das Product aller Ausdrücke

$$\mathfrak{A}_n^{(1)},\ \mathfrak{A}_n^{(2)},\ldots\mathfrak{A}_n^{(r)}$$

nach Ausschluss von $\mathfrak{A}_n^{(i)}$ mit $\mathfrak{P}_n^{(i)}$ bezeichnet wird.

Aus der Gleichung

$$U_n^{(1)}.U_n^{(2)}\ldots U_n^{(r)}=t_1+t_2+\ldots+t_n+\Sigma_1+\Sigma_2+\ldots+\Sigma_r$$

folgt nun, wenn zur Abkürzung

$$f_1(n)\mathfrak{P}_n^{(1)}+f_2(n)\mathfrak{P}_n^{(2)}+\ldots+f_r(n)\mathfrak{P}_n^{(r)}=A_n$$

gesetzt und eine Grösse, deren Modul die Grenze g nicht übersteigt, mit $\{g\}$ bezeichnet wird,

$$U_n^{(1)}.U_n^{(2)}\ldots U_n^{(r)}=t_1+t_2+\ldots+t_n+\left\{\frac{A_n}{(\nu+1)^\sigma}\right\}. \qquad (1)$$

Diese Gleichung gilt auch noch für $n=1$, wo

$$U_1^{(1)}.U_1^{(2)}\ldots U_1^{(r)}=t_1$$

ist.

2.

Mit Hilfe der Gleichung (1) kann nun auch eine Grenze angegeben werden, welche der Modul der Summe

$$t = t_a + t_{a+1} + \ldots + t_b$$

nicht übersteigen kann. Es wird hiebei $a > 1$ angenommen.

Man hat nach (1)

$$t_1 + t_2 + \ldots + t_b = U_b^{(1)} . U_b^{(2)} \ldots U_b^{(r)} + \left\{ \frac{A_b}{(1+\mu)^\varkappa} \right\},$$

$$t_1 + t_2 + \ldots + t_{a-1} = U_{a-1}^{(1)} . U_{a-1}^{(2)} \ldots U_{a-1}^{(r)} + \left\{ \frac{A_{a-1}}{(1+\varkappa)^\varkappa} \right\},$$

wo μ, $\varkappa$ die grössten in $b^{\frac{1}{r}}$, $(a-1)^{\frac{1}{r}}$ enthaltenen ganzen Zahlen bezeichnen.

Durch Subtraction dieser Gleichungen ergibt sich

$$\begin{aligned} t = & (U_b^{(1)} - U_{a-1}^{(1)}) U_b^{(2)} . U_b^{(3)} \ldots U_b^{(r)} \\ & + (U_b^{(2)} - U_{a-1}^{(2)}) U_{a-1}^{(1)} . U_b^{(3)} \ldots U_b^{(r)} \\ & + \ldots \\ & + (U_b^{(r)} - U_{a-1}^{(r)}) U_{a-1}^{(1)}, U_{a-1}^{(2)} \ldots U_{a-1}^{(r-1)} \\ & + \left\{ \frac{A_b}{(1+\mu)^\varkappa} \right\} + \left\{ \frac{A_{a-1}}{(1+\varkappa)^\varkappa} \right\} \end{aligned}$$

und hieraus

$$\begin{aligned} \text{mod } t \leqq & \mathfrak{P}_b^{(1)} \text{ mod } \{U_b^{(1)} - U_{a-1}^{(1)}\} \\ & + \mathfrak{P}_b^{(2)} \text{ mod } \{U_b^{(2)} - U_{a-1}^{(2)}\} \\ & + \ldots \\ & + \mathfrak{P}_b^{(r)} \text{ mod } \{U_b^{(r)} - U_{a-1}^{(r)}\} \\ & + \left\{ \frac{2 A_b}{(1+\varkappa)^\varkappa} \right\}; \end{aligned}$$

es ist aber nach der Annahme

$$\text{mod } (U_b^{(i)} - U_{a-1}^{(i)}) \leqq \frac{f_i(a)}{a^\varkappa} \leqq \frac{f_i(b)}{(1+\varkappa)^\varkappa}.$$

Daher wird

$$\mathrm{mod}\, t \leqq \frac{1}{(1+\varkappa)^{\pi}}\left(f_1(b)\mathfrak{P}_b^{(1)}+f_2(b)\mathfrak{P}_b^{(2)}+\ldots\right)+\frac{2A_b}{(1+\varkappa)^{\pi}}$$

$$\leqq \frac{3A_b}{(1+\varkappa)^{\pi}}.$$

3.

Sind die gegebenen Reihen so beschaffen, dass $\frac{A_n}{n^{\frac{\pi}{r}}}$ mit wachsendem n der Null zustrebt, so hat man, da $1+\nu > n^{\frac{1}{r}}$ ist,

$$\lim \frac{A_n}{(1+\nu)^{\pi}} = 0.$$

Das Product dieser Reihen wird demnach durch die Reihe

$$t_1+t_2+t_3+\ldots+ \text{ in inf.}$$

dargestellt.

Haben insbesondere die Glieder der gegebenen Reihen die Gestalt

$$u_m^{(i)} = \frac{c_m^{(i)}}{m}$$

und ist für jedes i und beliebige Zahlen a, b

$$c_a^{(i)}+c_{a+1}^{(i)}+\ldots+c_b^{(i)} = \{G_i\}$$

wo

$$G_1,\ G_2, \ldots G_r$$

bekannte Grössen bezeichnen, so darf der vorstehende Satz angewendet werden.

Denn man hat mit Hilfe der Abel'schen Umformung

$$u_a^{(i)}+u_{a+1}^{(i)}+\ldots+u_b^{(i)}$$

$$= c_a^{(i)}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{a+1}\right)+(c_a^{(i)}+c_{a+1}^{(i)})\left(\frac{1}{a+1}-\frac{1}{a+2}\right)+\ldots$$

$$+(c_a^{(i)}+c_{a+1}^{(i)}+\dots+c_{b-1}^{(i)})\left(\frac{1}{b-1}-\frac{1}{b}\right)$$

$$+(c_a^{(i)}+c_{a+1}^{(i)}+\dots+c_b^{(i)})\frac{1}{b}$$

$$=\{G_i\}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{a+1}+\frac{1}{a+1}-\frac{1}{a+2}+\dots+\frac{1}{b-1}-\frac{1}{b}+\frac{1}{b}\right)$$

$$=\left\{\frac{G_i}{a}\right\}.$$

Ferner wird

$$\mathfrak{A}_n^{(i)} \leqq \frac{G_i}{1}+\frac{G_i}{2}+\dots+\frac{G_i}{n}$$

$$\leqq G_i\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}\right);$$

da aber

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n} < 1+\log n$$

ist, so wird

$$\mathfrak{A}_n^{(i)} < G_i(1+\log n).$$

Man kann demnach

$$f_i(n) = G_i, \qquad \pi = 1$$

setzen und es wird A_n kleiner als der Ausdruck

$$r\,G_1\,G_2\dots G_r(1+\log n)^{r-1}$$

Ein solcher Ausdruck tritt aber mit wachsendem n gegen jede Potenz $n^{\frac{1}{r}}$ von n zurück.

4.

Es werde jetzt das Polynom

$$T_n = t_1+t_2+\dots+t_n$$

mit der Summe

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$$

multiplicirt. Zu diesem Ende setze man, über alle Theiler d von m erstreckt,

$$\Sigma d t_d = m v_m$$

und bezeichne die grösste in $\sqrt{n}$ enthaltene ganze Zahl mit μ.

Die Glieder des Products $S_n T_n$ haben alle die Gestalt $\frac{t_\beta}{\alpha}$ und zerfallen in vier Gruppen.

In die erste Gruppe stelle man die Glieder, in welchen $\alpha\beta \leqq n$ ist. Ihre Summe ist

$$v_1 + v_2 + \ldots + v_n.$$

Die zweite Gruppe enthalte die Glieder, in welchen $\alpha\beta > n$ und $\alpha \leqq \mu$, $\beta > \mu$ ist. Jedes derselben enthält einen der Brüche $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots \frac{1}{\mu}$ als Factor, und zwar ist die Summe aller Glieder, welche $\frac{1}{k}$ enthalten, $= \frac{1}{k} a_k$, wenn

$$t_{1+\varepsilon} + t_{2+\varepsilon} + \ldots + t_n = a_k,$$

$$\varepsilon = E\left(\frac{n}{k}\right)$$

gesetzt wird, wo $E(z)$ die grösste in z enthaltene ganze Zahl bezeichnen soll. Die Summe der Glieder der zweiten Gruppe ist daher

$$= \frac{1}{2} a_2 + \frac{1}{3} a_3 + \ldots + \frac{1}{\mu} a_\mu.$$

Die dritte Gruppe umfasse alle Glieder, in welchen $\alpha\beta > n$ und $\alpha > \mu$, $\beta \leqq \mu$ ist. Jedes derselben muss eine der Grössen $t_2, t_3, \ldots t_\mu$ als Factor enthalten. Fasst man daher alle Glieder zusammen, welche t_k enthalten, und setzt wieder

$$\varepsilon = E\left(\frac{n}{k}\right),$$

so erscheint t_k mit dem Coëfficienten

$$b_k = \frac{1}{1+\varepsilon} + \frac{1}{2+\varepsilon} + \ldots + \frac{1}{n}$$

und die Summe der Glieder der dritten Gruppe ist

$$= b_2 t_2 + b_3 t_3 + \ldots + b_\mu t_\mu .$$

Endlich nehme man in die vierte Gruppe alle Glieder auf, in welchen α und $\beta > \mu$ sind. Ihre Summe ist

$$\left(\frac{1}{\mu+1} + \frac{1}{\mu+2} + \ldots + \frac{1}{n}\right)(t_{\mu+1} + t_{\mu+2} + \ldots + t_n).$$

Nach Abschnitt 2 ist

$$a_k = \left\{\frac{3 A_n}{(1+\zeta)^\pi}\right\},$$

wenn ζ die grösste in $E\left(\frac{n}{k}\right)^{\frac{1}{r}}$ enthaltene ganze Zahl bezeichnet.

Da

$$(1+\zeta)^r > E\left(\frac{n}{k}\right),$$

also auch

$$(1+\zeta)^r > \frac{n}{k}$$

ist, so wird

$$1+\zeta > \frac{n^{\frac{1}{r}}}{k^{\frac{1}{r}}}$$

und demzufolge

$$a_k = \left\{\frac{3 A_n}{n^{\frac{\pi}{r}}}\right\} k^{\frac{\pi}{r}}.$$

Hieraus folgt

$$\frac{1}{2}a_2 + \frac{1}{3}a_3 + \ldots + \frac{1}{\mu}a_\mu$$

$$= \left\{\frac{3A_n}{n^{\frac{\pi}{r}}}\right\}\left(\frac{1}{2^{1-\frac{\pi}{r}}} + \frac{1}{3^{1-\frac{\pi}{r}}} + \ldots + \frac{1}{\mu^{1-\frac{\pi}{r}}}\right).$$

Es ist aber

$$\frac{\pi}{r}\frac{1}{k^{1-\frac{\pi}{r}}} < k^{\frac{\pi}{r}} - (k-1)^{\frac{\pi}{r}}$$

und demzufolge

$$\frac{1}{2^{1-\frac{\pi}{r}}} + \frac{1}{3^{1-\frac{\pi}{r}}} + \ldots + \frac{1}{\mu^{1-\frac{\pi}{r}}} < \frac{r}{\pi}\mu^{\frac{\pi}{r}} \tag{2}$$

$$< \frac{r}{\pi}n^{\frac{\pi}{2r}}.$$

Man hat also

$$\frac{1}{2}a_2 + \frac{1}{3}a_3 + \ldots + \frac{1}{\mu}a_\mu = \left\{\frac{3rA_n}{\pi n^{\frac{\pi}{2r}}}\right\}.$$

Ferner ist

$$\log(h+1) - \log h - \frac{1}{h+1} = \log\frac{1}{1-\frac{1}{h+1}} - \frac{1}{h+1}$$

$$= \frac{1}{2(h+1)^2} + \frac{1}{3(h+1)^3} + \ldots$$

$$< \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(h+1)^2} + \frac{1}{(h+1)^3} + \ldots\right)$$

$$< \frac{1}{2h(h+1)} < \frac{2}{h+1} - \frac{2}{h+2}.$$

Wird $h = \varepsilon, \varepsilon+1, \ldots n-1$ gesetzt und summirt, so folgt

$$\log n - \log \varepsilon - b_k < \frac{2}{1+\varepsilon} < \frac{2k}{n};$$

es ist aber, wenn $\varepsilon = E\left(\frac{n}{k}\right) = \frac{n-\rho}{k}$ gesetzt und $n \geqq 4$ angenommen wird,

$$\log\frac{n}{k} - \log\varepsilon = \log\frac{n}{n-\rho} = \log\left(1+\frac{\rho}{n-\rho}\right)$$
$$< \frac{\rho}{n-\rho} < \frac{2\rho}{n},$$

weil hier nur Werthe von k in Betracht kommen, welche $\leqq \mu$ sind.

Man hat also

$$b_k = \log k + \left\{\frac{2k}{n}\right\}.$$

Mit Hilfe dieser Gleichung ergibt sich

$$b_2 t_2 + b_3 t_3 + \ldots + b_\mu t_\mu = t_2 \log 2 + t_3 \log 3 + \ldots + t_\mu \log \mu$$
$$+ \left\{\frac{4t_2}{n}\right\} + \left\{\frac{6t_3}{n}\right\} + \ldots + \left\{\frac{2\mu t_\mu}{n}\right\}.$$

Nach Abschnitt 2 ist

$$2kt_k = \left\{\frac{6kA_n}{(1+\eta)^\pi}\right\},$$

wo η die grösste in $(k-1)^{\frac{1}{r}}$ enthaltene ganze Zahl bezeichnet; es ist aber

$$(1+\eta)^r > k-1$$

und daher

$$\frac{k}{(1+\eta)^\pi} < \frac{k}{(k-1)^{\frac{\pi}{r}}} = \left(\frac{k}{k-1}\right)^{\frac{\pi}{r}} k^{1-\frac{\pi}{r}} \leqq 2k^{1-\frac{\pi}{r}}$$
$$< \frac{2n^{1-\frac{\pi}{r}}}{k^{1-\frac{\pi}{r}}},$$

wenn $k^2 \leqq n$. Hienach ergibt sich nach (2)

$$\left\{\frac{4t_2}{n}\right\} + \left\{\frac{6t_3}{n}\right\} + \ldots + \left\{\frac{2\mu t_\mu}{n}\right\}$$

$$= \left\{ \frac{12 A_n}{n^{\frac{\pi}{r}}} \right\} \left(\frac{1}{2^{1-\frac{\pi}{r}}} + \frac{1}{3^{1-\frac{\pi}{r}}} + \ldots \right)$$

$$= \left\{ \frac{12 r A_n}{\pi n^{\frac{\pi}{2r}}} \right\}.$$

Wird noch berücksichtigt, dass identisch

$$\begin{aligned} t_{\mu+1} \log(\mu+1) + t_{\mu+2} \log(\mu+2) + \ldots + t_n \log n = \\ (t_{\mu+1} + t_{\mu+2} + \ldots + t_n) \log n \\ -(t_{\mu+1} + t_{\mu+2} + \ldots + t_{n-1}) (\log n - \log(n-1)) \\ -(t_{\mu+1} + t_{\mu+2} + \ldots + t_{n-1}) (\log(n-1) - \log(n-2)) \\ - \ldots \\ -t_{\mu+1} (\log(\mu+2) - \log(\mu+1)) \end{aligned}$$

ist, so ergibt sich nach Abschnitt 2

$$\begin{aligned} & t_{\mu+1} \log(\mu+1) + \ldots + t_n \log n \\ & = \log n \{ t_{\mu+1} + t_{\mu+2} + \ldots + t_n \} \\ & \qquad + (\log n - \log(n-1)) \{ t_{\mu+1} + t_{\mu+2} + \ldots + t_{n-1} \} \\ & \qquad + \ldots \\ & \qquad + (\log(\mu+2) - \log(\mu+1)) \{ t_{\mu+1} \} \\ & = \left\{ \frac{3 A_n}{n^{\frac{\pi}{2r}}} \right\} (\log n + \log n \quad \log(n-1) + \ldots + \log(\mu+2) - \log(\mu+1)) \\ & = \left\{ \frac{9 A_n \log n}{2 n^{\frac{\pi}{2r}}} \right\}. \end{aligned}$$

Man hat demnach

$$b_2 t_2 + b_3 t_3 + \ldots b_\mu t_\mu = t_2 \log 2 + t_3 \log 3 + \ldots + t_n \log n$$
$$+ \left\{ \frac{A_n}{n^{\frac{\pi}{2r}}} \left(\frac{12 r}{\pi} + \frac{9 \log n}{2} \right) \right\}.$$

Endlich ist nach Abschnitt 2

$$\left(\frac{1}{\mu+1} + \frac{1}{\mu+2} + \ldots + \frac{1}{n} \right) (t_{\mu+1} + \ldots + t_n) = \left\{ \frac{3 A_n \log n}{n^{\frac{\pi}{2r}}} \right\}.$$

Fasst man nun die Glieder der vier Gruppen zusammen, so ergibt sich

$$S_n T_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n$$
$$+ t_2 \log 2 + t_3 \log 3 + \dots + t_n \log n$$
$$+ \left\{ \frac{A_n}{n^{\frac{\pi}{2r}}} \left(\frac{15 r}{\pi} + \frac{15 \log n}{2} \right) \right\}.$$

Nach (1) folgt hieraus

$$S_n U_n^{(1)} U_n^{(2)} \dots U_n^{(r)} = S_n T_n + \left\{ \frac{A_n S_n}{n^{\frac{\pi}{r}}} \right\} \tag{3}$$
$$= v_1 + v_2 + \dots + v_n$$
$$+ t_2 \log 2 + t_3 \log 3 + \dots + t_n \log n$$
$$+ \left\{ \frac{A_n (1 + \log n)}{n^{\frac{\pi}{r}}} + \frac{A_n}{n^{\frac{\pi}{2r}}} \left(\frac{15 r}{\pi} + \frac{15 \log n}{2} \right) \right\}.$$

5.

Man ersetze in Gleichung (1) für ein bestimmtes i die Grössen

$$u_1^{(i)},\ u_2^{(i)},\ u_3^{(i)},\ \dots u_n^{(i)}$$

beziehungsweise durch

$$u_1^{(i)} \log 1,\ u_2^{(i)} \log 2,\ u_3^{(i)} \log 3, \dots u_n^{(i)} \log n$$

und setze

$$u_2^{(i)} \log 2 + u_3^{(i)} \log 3 + \dots + u_n^{(i)} \log n = V_n^{(i)}.$$

Da

$$u_a^{(i)} \log a + u_{a+1}^{(i)} \log (a+1) + \dots + u_b^{(i)} \log b$$
$$= (u_a^{(i)} + u_{a+1}^{(i)} + \dots + u_b^{(i)}) \log b$$
$$-(u_a^{(i)} + u_{a+1}^{(i)} + \dots + u_{b-1}^{(i)})(\log b - \log (b-1))$$
$$-(u_a^{(i)} + u_{a+1}^{(i)} + \dots + u_{b-2}^{(i)})(\log (b-1) - \log (b-2))$$
$$- \dots$$
$$- u_a^{(i)} (\log (a+1) - \log a)$$

$$= \left\{\frac{f_i(a)}{a^\pi}\right\} (\log b + \log b - \log (b-1) + \ldots + \log (a+1) - \log a)$$

$$= \left\{\frac{2 \log b f_i(a)}{a^\pi}\right\} = \left\{\frac{2 \log n f_i(a)}{a^\pi}\right\}$$

ist, so genügt es, um Gleichung (1) auf den vorliegenden Fall anwenden zu können, $f_i(m)$ durch $2 \log n f_i(m)$ zu ersetzen. Man darf dann $\mathfrak{A}_n^{(i)}$ durch $\mathfrak{A}_n^{(i)} \log n$ und demgemäss A_n durch $(A_n + f_i(n)\mathfrak{P}_n^{(i)} \log n)$ ersetzen. Bezeichnen daher $\rho, \sigma, \ldots \tau$ die Stellenzeiger $1, 2, \ldots r$ nach Ausschluss von i und $t_m^{(i)}$ die Summe aller Producte

$$u_\alpha^{(1)} u_\beta^{(2)} \ldots u_\varepsilon^{(r)} \log \lambda_i,$$

in welchen $\alpha\beta \ldots \varepsilon = m$ und λ_i der i^{te} der Stellenzeiger $\alpha, \beta, \ldots \varepsilon$ ist, so folgt

$$U_n^{(\rho)} U_n^{(\sigma)} \ldots U_n^{(\tau)} V_n^{(i)} = t_1^{(i)} + t_2^{(i)} + \ldots + t_n^{(i)} + \left\{\frac{(A_n + f_i(n)\mathfrak{P}_n^{(i)}) \log n}{n^{\frac{\pi}{r}}}\right\}.$$

Man denke sich nun alle Gleichungen summirt, welche aus der vorstehenden hervorgehen, wenn man $i = 1, 2, 3, \ldots r$ setzt. Da

$$t_m^{(1)} + t_m^{(2)} + \ldots + t_m^{(r)} = t_m \log m$$

ist, so erhält man

$$\begin{aligned} U_n^{(2)} U_n^{(3)} \ldots U_n^{(r)} V_n^{(1)} + U_n^{(1)} U_n^{(3)} \ldots U_n^{(r)} V_n^{(2)} \\ + \ldots + U_n^{(1)} U_n^{(2)} \ldots U_n^{(r-1)} V_n^{(r)} \\ = t_2 \log 2 + t_3 \log 3 + \ldots + t_n \log n \\ + \left\{\frac{(r+1) A_n \log n}{n^{\frac{\pi}{r}}}\right\}. \end{aligned}$$

Nach (3) wird dann

$$\begin{aligned} S_n U_n^{(1)} U_n^{(2)} \ldots U_n^{(r)} - U_n^{(2)} U_n^{(3)} \ldots U_n^{(r)} V_n^{(1)} \qquad (4) \\ - U_n^{(1)} U_n^{(3)} \ldots U_n^{(r)} V_n^{(2)} - \ldots - U_n^{(1)} U_n^{(2)} \ldots U_n^{(r-1)} V_n^{(r)} \end{aligned}$$

$$= v_1 + v_2 + \ldots + v_n$$

$$+ \left\{ \frac{A_n(1+(r+2)\log n)}{n^{\frac{\pi}{r}}} + \frac{A_n}{n^{\frac{\pi}{2r}}} \left(\frac{15r}{\pi} + \frac{15\log n}{2} \right) \right\}.$$

6.

Die Gleichung (4) werde jetzt auf die Dirichlet'schen Reihen angewendet.

Es sei

$$M = 2^{\rho_0} p^{\rho} \ldots$$

die Differenz einer gegebenen arithmetischen Reihe, $p, \ldots$ ihre etwaigen ungeraden Primfactoren, wo $\rho_0 = 0$ oder > 1 angenommen werden darf, und

$$\varphi(M) = 1 + r.$$

Man stelle für jede zu M theilerfremde Zahl m eine vollständige Indicesreihe auf. Ist $\rho_0 > 0$, so seien die durch die Congruenz

$$m \equiv (-1)^{\frac{m-1}{2}} 5^{\operatorname{in} dm} \pmod{2^{\rho_0}}$$

definirten Exponenten die ersten zwei Zahlen dieser Reihe. Für jede in M aufgehende Potenz p^{ρ} einer ungeraden Primzahl p nehme man den auf eine bestimmte primitive Congruenzwurzel von p^{ρ} sich beziehenden Index von m in diese Indicesreihe auf.

Sind dann

$$\varepsilon, \eta, \omega, \ldots$$

Wurzeln der Gleichungen

$$\varepsilon^2 = 1, \qquad \eta^{\varphi(2^{\rho_0 - 1})} = 1, \qquad \omega^{\varphi(p^{\rho})} = 1, \ldots,$$

so setze man

$$c_m^{(i)} = \varepsilon^{\frac{m-1}{2}} \eta^{\operatorname{in} dm} \omega^{\operatorname{in} dm} \ldots;$$

der Factor $\varepsilon^{\frac{m-1}{2}} \eta^{\operatorname{in} dm}$ ist nur vorhanden, wenn $\rho_0 > 1$ und der Exponent von ω ist der auf den Modul p^{ρ} sich beziehende Index von m u. s. f. Der Stellenzeiger i möge die Werthe 0, 1,

$2, \ldots r$ durchlaufen und zur Kennzeichnung aller verschiedenen Combinationen der möglichen Werthe von $\varepsilon, \eta, \omega, \ldots$ dienen, wobei der Stellenzeiger 0 den Werthen

$$\varepsilon = \eta = \omega = \ldots = 1$$

entsprechen soll.

Für eine nicht zu M theilerfremde Zahl m werde

$$c_m^{(i)} = 0$$

festgesetzt.

Es ist

$$c_m^{(i)} c_n^{(i)} = c_{mn}^{(i)}$$

$$c_{m+M}^{(i)} = c_m^{(i)}$$

und, wenn $i > 0$,

$$c_1^{(i)} + c_2^{(i)} + \ldots + c_M^{(i)} = 0,$$

woraus

$$c_a^{(i)} + c_{a+1}^{(i)} + \ldots + c_b^{(i)} = \left\{ \frac{1+r}{2} \right\}$$

folgt.

Es werde nun in Gleichung (4)

$$u_m^{(i)} = \frac{1}{m} c_m^{(i)}$$

gesetzt. Man hat dann

$$\begin{aligned}
\frac{c_a^{(i)}}{a} + \frac{c_{a+1}^{(i)}}{a+1} + \ldots + \frac{c_b^{(i)}}{b} &= c_a^{(i)} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a+1} \right) \\
&\quad + (c_a^{(i)} + c_{a+1}^{(i)}) \left(\frac{1}{a+1} - \frac{1}{a+2} \right) \\
&\quad + \ldots \\
&\quad + (c_a^{(i)} + c_{a+1}^{(i)} + \ldots + c_{b-1}^{(i)}) \left(\frac{1}{b-1} - \frac{1}{b} \right) \\
&\quad + (c_a^{(i)} + c_{a+1}^{(i)} + \ldots + c_b^{(i)}) \frac{1}{b} \\
= \left\{ \frac{r+1}{2} \right\} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a+1} + \frac{1}{a+1} - \frac{1}{a+2} + \ldots + \frac{1}{b} \right) & \\
= \left\{ \frac{r+1}{2a} \right\} &
\end{aligned}$$

und kann demnach

$$f_i(n) = \frac{r+1}{2}$$

$$\pi = 1$$

setzen. Für $\mathfrak{A}_m^{(i)}$ findet man

$$\mathfrak{A}_n^{(i)} \leqq S_n < 1+\log n.$$

Ferner wird

$$V_n^{(i)} = \frac{1}{2} c_2^{(i)} \log 2 + \frac{1}{3} c_3^{(i)} \log 3 + \ldots + \frac{1}{n} c_n^{(i)} \log n$$

$$= -c_2^{(i)} \left(\frac{\log 3}{3} - \frac{\log 2}{2}\right) + (c_2^{(i)}+c_3^{(i)}) \left(\frac{\log 3}{3} - \frac{\log 4}{4}\right)$$

$$+ (c_2^{(i)}+c_3^{(i)}+c_4^{(i)}) \left(\frac{\log 4}{4} - \frac{\log 5}{5}\right) + \ldots$$

$$+ (c_2^{(i)}+c_3^{(i)}+ \ldots c_n^{(i)}) \frac{\log n}{n}$$

$$= \left\{\frac{r+1}{2}\right\} \left(\frac{\log 3}{3} - \frac{\log 2}{2} + \frac{\log 3}{3} - \frac{\log 4}{4} + \ldots\right)$$

$$= \left\{\frac{(r+1) \log 3}{3}\right\}.$$

Die Grössen $v_1, v_2, \ldots v_n$ sind hier nicht negative rationale Zahlen.

Um sich hievon zu überzeugen, setze man, über alle positiven Zahlen $\alpha, \beta, \ldots \varepsilon$, deren Product in m aufgeht, erstreckt,

$$\Sigma c_\alpha^{(1)} . c_\beta^{(2)} \ldots c_\varepsilon^{(r)} = F(m).$$

Dann ist, wenn d in einer Potenz von M aufgeht und $\frac{m}{d}$ zu M theilerfremd ist,

$$v_m = \frac{1}{m} F(m) = \frac{1}{m} F\left(\frac{m}{d}\right).$$

Besteht m aus mehreren zu M theilerfremden Primzahlpotenzen $q^\lambda, q_1^\mu, \ldots$, so wird

$$F(q^\lambda q_1^\mu \ldots) = F(q^\lambda) . F(q_1^\mu) \ldots$$

Man braucht also nur noch $F(m)$ für eine zu M theilerfremde Primzahlpotenz q^s zu bestimmen.

$F(q^s)$ ist der Coëfficient von x^s in der Entwickelung des Bruches

$$\frac{1}{(1-x)(1-xc_q^{(1)})(1-xc_q^{(2)})\ldots(1-xc_q^{(r)})}$$

nach Potenzen von x. Ist μ die kleinste Zahl, mit welcher die einzelnen Indices von q multiplicirt werden müssen, um durch die entsprechende Zahl der Reihe

$$2, \quad \varphi(2^{\rho_0-1}), \quad \varphi(p^\rho), \ldots$$

theilbar zu sein, so sind $1, c_q^{(1)}, c_q^{(2)}, \ldots c_q^{(r)}$ μ^{te} Einheitswurzeln und man hat, wenn $\mu > 1$, für jede unter μ liegende positive Zahl ν

$$1+(c_q^{(1)})^\nu+(c_q^{(2)})^\nu+\ldots+(c_q^{(r)})^\nu = 0.$$

Ist also ω eine primitive μ^{te} Einheitswurzel und kommt ω^k in der Reihe

$$1, \quad c_q^{(1)}, \quad c_q^{(2)}, \ldots c_q^{(r)}$$

genau h_k mal vor, so hat man

$$\begin{aligned}
h_0+h_1+h_2+\ldots+h_{\mu-1} &= r+1 \\
h_0+h_1\omega+h_2\omega^2+\ldots+h_{\mu-1}\omega^{\mu-1} &= 0 \\
h_0+h_1\omega^2+h_2\omega^4+\ldots+h_{\mu-1}\omega^{2\mu-2} &= 0 \\
\ldots\ldots & \\
h_0+h_1\omega^{\mu-1}+h_2\omega^{2\mu-2}+\ldots+h_{\mu-1}\omega^{(\mu-1)(\mu-1)} &= 0
\end{aligned}$$

und demzufolge

$$h_0 = h_1 = h_2 = \ldots = h_{\mu-1} = \frac{1+r}{\mu}.$$

Dies gilt auch noch für $\mu = 1$. Hienach wird

$$\begin{aligned}
&(1-x)(1-xc_q^{(1)})(1-xc_q^{(2)})\ldots(1-xc_q^{(r)}) \\
&\qquad = ((1-x)(1-x\omega)(1-x\omega^2)\ldots(1-x\omega^{\mu-1}))^{\frac{1+r}{\mu}} \\
&\qquad = (1-x^\mu)^{\frac{1+r}{\mu}}.
\end{aligned}$$

$F(q^3)$ ist demnach als Coëfficient von x^3 in $\dfrac{1}{(1-x^{\mu})^{\frac{1+r}{\mu}}}$
eine nicht negative Zahl. Dann ist aber allgemein $F(m) \geqq 0$.

Insbesondere ist

$$v_1 = F(1) = 1$$

und daher

$$v_1 + v_2 + \ldots + v_n \geqq 1.$$

Die Gleichung (4) lautet in dem vorliegenden Falle

$$\begin{aligned} S_n U_n^{(1)} U_n^{(2)} \ldots U_n^{(r)} - U_n^{(2)} U_n^{(3)} \ldots U_n^{(r)} V_n^{(1)} \\ - U_n^{(1)} U_n^{(3)} \ldots U_n^{(r)} V_n^{(2)} - \ldots - U_n^{(1)} U_n^{(2)} \ldots U_n^{(r-1)} V_n^{(r)} \\ = v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \{\Delta_n\}, \end{aligned} \tag{5}$$

wo

$$\Delta_n = \frac{1}{2} r(r+1)(1+\log n)^{r-1} \left(\frac{1+(r+2)\log n}{n^{\frac{1}{r}}} + \frac{15\left(r+\frac{1}{2}\log n\right)}{n^{\frac{1}{2r}}} \right).$$

Befinden sich nun in der Reihe

$$U_n^{(1)},\ U_n^{(2)}, \ldots U_n^{(r)}$$

irgend zwei conjugirte Grössen, etwa $U_n^{(1)}$ und $U_n^{(2)}$, was nur in den Fällen $M = 4, 8$ nicht stattfindet, so setze man

$$\operatorname{mod} U_n^{(1)} = \operatorname{mod} U_n^{(2)} = R_n$$

und zur Abkürzung

$$1 + \frac{2r-4}{3} \log 3 = a$$

$$\frac{1+r}{3} \log 3 = b$$

$$\frac{2^{r-3}}{(1+r)^{r-2}} = c.$$

Dann ist

$$S_n U_n^{(1)} U_n^{(2)} \ldots U_n^{(r)} = \left\{ R_n^2 (1+\log n) \left(\frac{1+r}{2} \right)^{r-2} \right\}$$

$$U_n^{(2)} U_n^{(3)} \dots U_n^{(r)} V_n^{(1)} = \left\{ R_n \left(\frac{r+1}{2} \right)^{r-2} b \right\}$$

$$U_n^{(1)} U_n^{(3)} \dots U_n^{(r)} V_n^{(2)} = \left\{ R_n \left(\frac{r+1}{2} \right)^{r-2} b \right\}$$

$$U_n^{(1)} U_n^{(2)} U_n^{(4)} \dots V_n^{(3)} = \left\{ R_n^2 \left(\frac{r+1}{2} \right)^{r-3} b \right\}$$

$$\dots\dots$$

und somit nach (5)

$$\left(\frac{r+1}{2} \right)^{r-1} ((a+\log n) R_n^2 + 2 b R_n) \geqq 1 - \Delta_n$$

oder

$$R_n^2 + \frac{2b . R_n}{a+\log n} \geqq \frac{2c(1-\Delta_n)}{a+\log n}. \tag{6}$$

Verschafft man sich daher eine möglichst kleine Zahl s von der Art, dass etwa

$$\Delta_s < \frac{1}{2}$$

und zugleich

$$\frac{b}{a+\log s} + \frac{r+1}{2(s+1)} \leqq \frac{1}{2} \sqrt{\frac{c}{a+\log s} + \frac{b^2}{(a+\log s)^2}} \tag{7}$$

ausfällt, so wird zunächst nach (6)

$$R_s^2 + \frac{2b}{a+\log s} R_s > \frac{c}{a+\log s},$$

also

$$R_s + \frac{b}{a+\log s} > \sqrt{\frac{c}{a+\log s} + \left(\frac{b}{a+\log s} \right)^2}$$

und dann nach (7)

$$R_s > \frac{r+1}{2(s+1)} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{c}{a+\log s} + \frac{b^2}{(a+\log s)^2}}.$$

Ist $n > s$, so hat man

$$\frac{c_{s+1}^{(1)}}{s+1} + \frac{c_{s+2}^{(1)}}{s+2} + \dots + \frac{c_n^{(1)}}{n} = \left\{ \frac{r+1}{2(s+1)} \right\},$$

also

$$U_s^{(1)} = U_n^{(1)} + \left\{ \frac{r+1}{2(s+1)} \right\}$$

und demzufolge

$$R_s \leqq R_n + \frac{r+1}{2(s+1)}.$$

Von $n = s$ an ist daher

$$R_n > \frac{1}{2}\sqrt{\frac{c}{a+\log s} + \frac{b^2}{(a+\log s)^2}}.$$

7.

Das Nichtverschwinden einer Reihe

$$\frac{c_1^{(i)}}{1} + \frac{c_2^{(i)}}{2} + \frac{c_3^{(i)}}{3} + \dots$$

mit reellen Gliedern lässt sich auch ohne eine ausgedehnte Theorie der quadratischen Formen nur mit Hilfe der Form $x^2 - Dy^2$ und des Reciprocitätssatzes beweisen, welcher ja auch bei dem Dirichlet'schen Beweise intervenirt.

Es sei, über alle Theiler d von m erstreckt,

$$\Sigma c_d^{(i)} = \psi(m)$$

und

$$\psi(1) + \psi(2) + \dots + \psi(n) = S.$$

Bezeichnet $E(z)$ die grösste in z enthaltene ganze Zahl und setzt man

$$E\left(\frac{n}{m}\right) = \frac{n}{m} - r_m$$

$$E(\sqrt{n}) = \mu,$$

so wird

$$S = c_1^{(i)} E\left(\frac{n}{1}\right) + c_2^{(i)} E\left(\frac{n}{2}\right) + \dots + c_n^{(i)} E\left(\frac{n}{n}\right)$$

$$= nU_n^{(i)} - c_1^{(i)} r_1 - c_2^{(i)} r_2 - \dots - c_n^{(i)} r_n$$

und

$$c_1^{(i)} r_1 + c_2^{(i)} r_2 + \dots + c_\mu^{(i)} r_\mu = \{\mu\}$$

$$c_{\mu+1}^{(i)} r_{\mu+1} + \ldots + c_n^{(i)} r_n = c_{\mu+1}^{(i)} (r_{\mu+1} - r_{\mu+2})$$
$$+ (c_{\mu+1}^{(i)} + c_{\mu+2}^{(i)}) (r_{\mu+2} - r_{\mu+3})$$
$$+ \ldots$$
$$+ (c_{\mu+1}^{(i)} + c_{\mu+2}^{(i)} + \ldots + c_n^{(i)}) r_n$$
$$= \left\{ \frac{r+1}{2} \right\} (\operatorname{mod} (r_{\mu+1} - r_{\mu+2}) + \operatorname{mod} (r_{\mu+2} - r_{\mu+3}) + \ldots);$$

da aber

$$r_m - r_{m+1} = \frac{n}{m} - \frac{n}{m+1} - \left(E\left(\frac{n}{m}\right) - E\left(\frac{n}{m+1}\right) \right),$$

also

$$\operatorname{mod} (r_m - r_{m+1}) \leqq \frac{n}{m} - \frac{n}{m+1} + E\left(\frac{n}{m}\right) - E\left(\frac{n}{m+1}\right)$$

ist, so folgt

$$c_{\mu+1}^{(i)} r_{\mu+1} + \ldots + c_n^{(i)} r_n = \left\{ \frac{r+1}{2} \right\} \left(\frac{n}{\mu+1} + E \frac{n}{\mu+1} \right)$$
$$= \{ (r+1) \sqrt{n} \}$$
$$c_1^{(i)} r_1 + \ldots + c_n^{(i)} r_n = \{ (r+2) \sqrt{n} \}.$$

Man hat also

$$U_n^{(i)} = \frac{1}{n} S + \left\{ \frac{r+2}{\sqrt{n}} \right\}. \tag{8}$$

Die Zahl $\psi(m)$ kann nicht negativ sein. Ist nämlich

$$m = q^{\rho} q_1^{\sigma} \ldots,$$

wo $q, q_1, \ldots$ verschiedene Primzahlen bezeichnen, so wird

$$\psi(m) = \psi(q^{\rho}) \psi(q_1^{\sigma}) \ldots$$
$$\psi(q^{\sigma}) = 1 + c_q^{(i)} + (c_q^{(i)})^2 + \ldots + (c_q^{(i)})^{\sigma}.$$

Bezeichnet daher S' die Summe aller Zahlen $\psi(m)$, welche sich nur auf die zu $2M$ theilerfremden Zahlen m bis zur Grenze n beziehen, so ist

$$S \geqq S'.$$

Für eine zu $2M$ theilerfremde Zahl m aber ist $c_m^{(i)}$ als Legendre—Jacobi'sches Symbol darstellbar. Ist nämlich P das Product derjenigen ungeraden Primfactoren von M, für welche die entsprechenden Einheitswurzeln in der Reihe $\omega, \omega_1, \ldots$ den Werth -1 haben, Q das Product der übrigen Primfactoren von M, und setzt man

$$D = \varepsilon(-1)^{\frac{P-1}{2}} 2^{\frac{1-\eta}{2}} PQ^2,$$

so ist

$$c_m^{(i)} = \left(\frac{D}{m}\right).$$

Die Zahl $\psi(m)$ gibt demnach in diesem Falle die Anzahl aller Wurzeln an, welche die Congruenzen

$$z^2 \equiv D \pmod{m}$$
$$z^2 \equiv D \left(\operatorname{mod} \frac{m}{\delta^2}\right)$$
$$\ldots\ldots$$

zusammengenommen besitzen, wenn $1, \delta^2, \ldots$ die verschiedenen quadratischen Theiler von m bedeuten. S' ist daher die Anzahl aller Wurzeln, welche die vorstehenden Congruenzen für alle zu $2D$ theilerfremden Zahlen m bis zur Grenze n zulassen.

Es sei nun Δ der Zahlenwerth von D und man setze in $x^2 - Dy^2$ für y nach und nach alle Zahlen

$$2, 4, \ldots 2E\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{n}{2\Delta}}\right)$$

und für x alle zu $2D$ theilerfremden Zahlen ein, welche die Grenze $\sqrt{\frac{n}{2}}$ nicht übersteigen, bei negativem D positiv sind und bei positivem D über $y\sqrt{D+1}$ liegen. Für alle diese Zahlenpaare x, y fällt dann $x^2 - Dy^2$ zu $2D$ theilerfremd, positiv und $\leqq n$ aus. Bezeichnet daher $\mathfrak{N}$ die Anzahl dieser Zahlenpaare und $\chi(m)$ die Anzahl derselben, für welche $x^2 - Dy^2 = m$ wird, so ist

$$\mathfrak{N} = \chi(1) + \chi(2) + \ldots + \chi(n).$$

Es ist nun leicht nachzuweisen, dass

$$\chi(m) \leqq \psi(m)$$

ist.

Es sei zu diesem Ende x, y eines der fraglichen Zahlenpaare,

$$x^2 - Dy^2 = m,$$

δ der grösste gemeinschaftliche Theiler von x und y, und

$$x = \delta X, \qquad y = \delta Y.$$

Es ist dann

$$X^2 - DY^2 = \frac{m}{\delta^2}.$$

Bestimmt man daher eine Zahl h aus der Congruenz

$$hY \equiv 1 \quad \left(\text{mod}\ \frac{m}{\delta^2}\right)$$

und setzt

$$hX \equiv \omega \quad \left(\text{mod}\ \frac{m}{\delta^2}\right),$$

so ergibt sich

$$h^2(X^2 - DY^2) = h^2 \frac{m}{\delta^2}$$

oder

$$\omega^2 \equiv D \quad \left(\text{mod}\ \frac{m}{\delta^2}\right).$$

ω ist also eine der bei der Bildung der Anzahl $\psi(m)$ mitzuzählenden Wurzeln.

Aus zwei verschiedenen Zahlenpaaren x_1, y_1 und x_2, y_2, für welche

$$x_1^2 - Dy_1^2 = m, \qquad x_2^2 - Dy_2^2 = m$$

ist, kann aber in der vorstehenden Weise nie dieselbe Wurzel ω hervorgehen. Dies könnte nur eintreten, wenn x_2, y_2 denselben grössten gemeinschaftlichen Theiler δ besitzen, wie x_1, y_1. Setzt man aber

$$x_1 = \delta X_1, \quad y_1 = \delta Y_1, \quad x_2 = \delta X_2, \quad y_2 = \delta Y_2,$$

$$h_1 Y_1 \equiv 1, \qquad h_2 Y_2 \equiv 1 \quad \left(\operatorname{mod} \frac{m}{\delta^2}\right)$$

und wäre zugleich

$$h_1 X_1 \equiv \omega, \qquad h_2 X_2 \equiv \omega \quad \left(\operatorname{mod} \frac{m}{\delta^2}\right),$$

so hätte man

$$h_1 X_1 - h_2 X_2 \equiv 0, \qquad h_1 Y_1 - h_2 Y_2 \equiv 0 \quad \left(\operatorname{mod} \frac{m}{\delta^2}\right),$$

also auch

$$X_1 Y_2 - X_2 Y_1 \equiv 0 \quad \left(\operatorname{mod} \frac{m}{\delta^2}\right).$$

Aus der Gleichung

$$\begin{aligned} \frac{m^2}{\delta^4} &= (X_1^2 - D Y_1^2)(X_2^2 - D Y_2^2) \\ &= (X_1 X_2 - D Y_1 Y_1)^2 - D(X_1 Y_2 - X_2 Y_1)^2 \end{aligned}$$

folgt dann, dass auch $X_1 X_2 - D Y_1 Y_2$ durch $\frac{m}{\delta^2}$ theilbar sein muss und man kann

$$X_1 X_2 - D Y_1 Y_2 = \frac{m}{\delta^2} t$$

$$X_1 Y_2 - X_2 Y_1 = \frac{m}{\delta^2} u$$

setzen und u nicht negativ annehmen. Es wäre dann

$$t^2 - D u^2 = 1.$$

Ist nun D negativ, so folgt hieraus, da t positiv ist,

$$u = 0, \qquad t = 1.$$

Ist aber D positiv, so hat man

$$\begin{aligned} t + u\sqrt{D} &= \frac{X_2 + Y_2\sqrt{D}}{X_1 + Y_1\sqrt{D}} = \frac{X_1 - Y_1\sqrt{D}}{X_2 - Y_2\sqrt{D}} \\ &= \sqrt{\frac{X_2 + Y_2\sqrt{D}}{X_2 - Y_2\sqrt{D}}} \cdot \sqrt{\frac{X_1 - Y_1\sqrt{D}}{X_1 + Y_1\sqrt{D}}} \end{aligned}$$

$$= \sqrt{\frac{1+\frac{y_2}{x_2}\sqrt{D}}{1-\frac{y_2}{x_2}\sqrt{D}}} : \sqrt{\frac{1-\frac{y_1}{x_1}\sqrt{D}}{1+\frac{y_1}{x_1}\sqrt{D}}}$$

$$< \sqrt{\frac{1+\frac{y_2}{x_2}\sqrt{D}}{1-\frac{y_2}{x_2}\sqrt{D}}} < \sqrt{\frac{1+\sqrt{\frac{D}{D+1}}}{1-\sqrt{\frac{D}{D+1}}}}$$

$$< \sqrt{D+1}+\sqrt{D}$$

und daher auch

$$t-u\sqrt{D} > \sqrt{D+1}-\sqrt{D}.$$

Durch Subtraction folgt hieraus

$$2u\sqrt{D} < 2\sqrt{D},$$

also $u < 1$ und demzufolge $u = 0$, $t = 1$.

In allen Fällen ist also

$$X_1X_2 - DY_1Y_2 = \frac{m}{\delta^2}$$

$$X_1Y_2 - X_2Y_1 = 0$$

und somit

$$X_2 = X_1, \qquad Y_2 = Y_1.$$

Verschiedene Zahlenpaare führen also zu verschiedenen Wurzeln ω und es kann nicht $\chi(m) > \psi(m)$ sein.

Dann ist aber

$$S \geqq S' \geqq \mathfrak{N}.$$

Da jede zu $2D$ theilerfremde Zahl auf die Form $k+2DV$ gebracht werden kann, so zerfallen die Zahlenpaare x, y je nach den Werthen von k in $\varphi(2\Delta)$ Classen.

Die Anzahl der Zahlenpaare, welche einer bestimmten Zahl k entsprechen, wird für ein negatives D erhalten, wenn man die Anzahl $E\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{n}{2\Delta}}\right)$ der Werthe von y mit der Anzahl

$E\left(\frac{\sqrt{\frac{n}{2}}-k}{2\Delta}\right)$ der Werthe von x multiplicirt, und ist also

$$>\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{n}{2\Delta}}-1\right)\left(\frac{\sqrt{\frac{n}{2}}-k}{2\Delta}-1\right),$$

also umsomehr

$$>\frac{n}{8\Delta\sqrt{\Delta}}-\frac{1+2\sqrt{\Delta}}{2\Delta}\sqrt{\frac{n}{2}}.$$

Mithin ist

$$\mathfrak{N}>\frac{\varphi(2\Delta)}{8\Delta\sqrt{\Delta}}n-\frac{\varphi(2\Delta)(1+2\sqrt{\Delta})}{2\Delta}\sqrt{\frac{n}{2}}.$$

Für ein positives D ist die Anzahl der Werthe von x für ein bestimmtes y

$$=E\frac{\sqrt{\frac{n}{2}}-k}{2\Delta}-E\frac{y\sqrt{D+1}+2D-k}{2D},$$

also

$$>\frac{1}{2D}\left(\sqrt{\frac{n}{2}}-y\sqrt{D+1}\right)-2$$

und daher die Anzahl der Zahlenpaare x, y

$$>\frac{1}{2D}\left(\sqrt{\frac{n}{2}}E\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{n}{2D}}\right)-\sqrt{D+1}\,E\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{n}{2D}}\right)\left(1+E\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{n}{2D}}\right)\right)\right)$$

$$-2E\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{n}{2D}}\right)$$

$$>\frac{1}{2D}\sqrt{\frac{n}{2}}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{n}{2D}}-1\right)$$

$$-\frac{\sqrt{D+1}}{2D}\frac{1}{2}\sqrt{\frac{n}{2D}}\left(1+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{n}{2D}}\right)-\sqrt{\frac{n}{2D}}$$

$$>\left(1-\frac{\sqrt{D+1}}{2\sqrt{D}}\right)\frac{n}{8D\sqrt{D}}-\frac{(2\sqrt{D}+\sqrt{D+1}+4D)}{4D}\sqrt{\frac{n}{2D}}.$$

Hieraus folgt

$$\mathfrak{N} > \frac{\varphi(2D)}{8D\sqrt{D}}\left(1-\frac{\sqrt{D+1}}{2\sqrt{D}}\right)n-$$

$$-\frac{\varphi(2D)}{4D}(2\sqrt{D}+\sqrt{D+1}+4D)\sqrt{\frac{n}{2D}}.$$

Setzt man also

$$g=\frac{\varphi(2\Delta)}{8\Delta\sqrt{\Delta}},\qquad h=\frac{\varphi(2\Delta)}{2\Delta\sqrt{2}}(1+2\sqrt{\Delta})$$

oder

$$g=\frac{\varphi(2D)}{8D\sqrt{D}}\left(1-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{D+1}{D}}\right),$$

$$h=\frac{\varphi(2D)(\sqrt{D+1}+2\sqrt{D}+4D)}{4D\sqrt{2D}},$$

je nachdem D negativ oder positiv ist, so wird

$$\mathfrak{N} > gn-\sqrt{n}$$

und daher nach (8)

$$U_n^{(i)} > g-\frac{h+r+2}{\sqrt{n}}.$$

8.

Die Gleichung (4) ist auch auf die Reihen anwendbar, welche bei dem Beweise für die Darstellbarkeit von Primzahlen durch eine gegebene quadratische Form auftreten.[1]

Es sei für eine gegebene nicht quadratische Determinante D

$$f_1, f_2, \ldots f_x$$

---

[1] Lejeune Dirichlet, Monatsberichte der Berliner Akademie, 1840, Crelle's Journal, Bd. 21, Comptes rendus, 1840.

H. Weber: Beweis des Satzes, dass jede eigentlich primitive quadratische Form unendlich viele Primzahlen darzustellen fähig ist. Math. Annalen, Bd. 20.

A. Meyer: Über einen Satz von Dirichlet; Crelle, Bd. 103.

P. Bachmann: Die analytische Zahlentheorie. Leipzig, 1894.

ein System von eigentlich primitiven quadratischen Fundamentalformen, welche beziehungsweise zu den Exponenten m_1, $m_2, \ldots m_\varkappa$ gehören und der Bedingung genügen, dass die Formel

$$f = f_1^{e_1} f_2^{e_2} \ldots f_\varkappa^{e_\varkappa}$$

genau ein vollständiges System Ω von eigentlich primitiven Formen der Determinante D liefert, wenn e_1 alle Werthe 0, $1, \ldots m_1 - 1$, e_2 alle Werthe $0, 1, \ldots m_2 - 1, \ldots$ $e_\varkappa$ alle Werthe $0, 1, \ldots m_\varkappa - 1$ durchlaufen und $f_1^{e_1} f_2^{e_2} \ldots f_\varkappa^{e_\varkappa}$ die aus der Zusammensetzung von e_1 Formen f_1 mit e_2 Formen $f_2 \ldots$ mit $e_\varkappa$ Formen $f_\varkappa$ hervorgehende Form bezeichnet. Die Anzahl h aller Formen von Ω ist demnach

$$h = m_1 \, m_2 \ldots m_\varkappa.$$

Kommen unter den Zahlen $m_1, m_2, \ldots m_\varkappa$ gerade vor, so seien es die $\lambda - 1$ ersten

$$m_1, m_2, \ldots m_{\lambda-1}.$$

Alle sich selbst uneigentlich äquivalenten Formen des vollständigen Systems Ω ergeben sich dann aus der obigen Formel, wenn e_1 einen der Werthe $0, \frac{1}{2} m_1$, e_2 einen der Werthe $0, \frac{1}{2} m_2, \ldots e_{\lambda-1}$ einen der Werthe $0, \frac{1}{2} m_{\lambda-1}$ und $m_\lambda, \ldots m_\varkappa$ den Werth 0 annehmen. Die Anzahl l der eigentlich primitiven ambigen Classen oder der Geschlechter, in welche die Formen von Ω zerfallen, ist demnach $2^{\lambda-1}$. Dies gilt auch noch, wenn $\lambda = 1$, also keine der Zahlen $m_1, m_2, \ldots$ gerade und die Hauptclasse die einzige ambige Classe ist. Die Formen $f_\lambda \ldots f_\varkappa$ gehören dem Hauptgeschlechte an.

Hienach gibt es für die Determinante D λ Charaktere von der Form

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}}, \quad (-1)^{\frac{n^2-1}{8}}, \quad (-1)^{\frac{n-1}{2} + \frac{n^2-1}{8}}, \quad \left(\frac{n}{p}\right),$$

welche mit

$$\chi_1(n), \; \chi_2(n), \ldots \chi_\lambda(n)$$

bezeichnet werden mögen. Unter einem Charakterproducte der Determinante D werde das Product irgend einer Anzahl von

verschiedenen Charakteren oder ein solcher Charakter selbst oder auch nur die Einheit verstanden, so dass alle Charakterproducte mit den Gliedern des entwickelt zu denkenden Productes

$$(1+\chi_1(n)).(1+\chi_2(n))\dots(1+\chi_\lambda(n))$$

zusammenfallen.

Das Legendre-Jacobi'sche Zeichen $\left(\frac{D}{n}\right)$ ist immer als Charakterproduct darstellbar, welches mindestens einen der Charaktere als Factor enthält. Ist $\Pi_0(n)$ dieses Charakterproduct, so hat man für alle zu $2D$ theilerfremde und durch Formen aus Ω darstellbare Zahlen n

$$\left(\frac{D}{n}\right) = \Pi_0(n) = 1.$$

Mittelst dieser Gleichung kann einer der in $\Pi_0(n)$ vorkommenden Charaktere, etwa $\chi_1(n)$, durch das Product $\frac{\Pi_0(n)}{\chi_1(n)}$ ausgedrückt werden.

Die l Charakterproducte, in welchen der Factor $\chi_1(n)$ nicht vorkommt, sollen kurz als unabhängige Charakterproducte bezeichnet werden. Zwei verschiedene unabhängige Charakterproducte, wofern es überhaupt zwei solche gibt, d. h. $l > 1$ ist, können nicht für alle Formen von Ω denselben Werth haben.

Es sei ω_1 eine beliebige m_1^{te}, ω_2 eine beliebige m_2^{te},.. $\omega_\varkappa$ eine beliebige $m_\varkappa^{\text{te}}$ Einheitswurzel und man bilde für jede Form $f_1^{e_1} f_2^{e_2} \dots f_\varkappa^{e_\varkappa}$ von Ω das Product $\omega_1^{e_1}\omega_2^{e_2}\dots\omega_\varkappa^{e_\varkappa}$, welches kurz das dieser Form zugehörige Product $\omega_1^{e_1}\omega_2^{e_2}\dots\omega_\varkappa^{e_\varkappa}$ heissen möge. Es gibt dann bei festen Werthen von $e_1, e_2, \dots e_\varkappa$ so viele solcher Producte, als es Wurzelverbindungen $\omega_1, \omega_2, \dots \omega_\varkappa$ gibt.

Unter den h Wurzelsystemen $\omega_1, \omega_2, \dots \omega_\varkappa$ gibt es l solche, für welche

$$\omega_1 = \pm 1, \qquad \omega_2 = \pm 1, \qquad \omega_{\lambda-1} = \pm 1, \qquad \omega_\lambda = \dots = \omega_\varkappa = 1$$

ist. Sind

$$(\alpha_{01}, \alpha_{02}, \dots \alpha_{0\varkappa}), (\alpha_{11}, \alpha_{12}, \dots \alpha_{1\varkappa}), \dots (\alpha_{l-1,1}, \alpha_{l-1,2}, \dots \alpha_{l-1,\varkappa})$$

diese Wurzelsysteme, wo $\alpha_{01} = \alpha_{02} = \ldots = \alpha_{0\varkappa} = 1$, so können dieselben entweder alle möglichen Wurzelsysteme $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_\varkappa$ erschöpfen oder nicht, je nachdem $l = h$ oder $h > l$ ist. Im zweiten Falle lassen sich alle Wurzelsysteme in $\frac{h}{l}$ Reihen von der Form

$$(\alpha_{01}\alpha_1, \alpha_{02}\alpha_2, \ldots \alpha_{0\varkappa}\alpha_\varkappa), \quad (\alpha_{11}\alpha_1, \alpha_{12}\alpha_2, \ldots \alpha_{1\varkappa}\alpha_\varkappa), \ldots$$
$$(\alpha_{01}\beta_1, \alpha_{02}\beta_2, \ldots \alpha_{0\varkappa}\beta_\varkappa), \quad (\alpha_{11}\beta_1, \alpha_{12}\beta_2, \ldots \alpha_{1\varkappa}\beta_\varkappa), \ldots$$
$$\ldots\ldots$$
$$(\alpha_{01}\varepsilon_1, \alpha_{02}\varepsilon_2, \ldots \alpha_{0\varkappa}\varepsilon_\varkappa), \quad (\alpha_{11}\varepsilon_1, \alpha_{12}\varepsilon_2, \ldots \alpha_{1\varkappa}\varepsilon_\varkappa), \ldots$$

vertheilen, wo

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_\varkappa = 1.$$

Wenn das System $\beta_1^{-1}, \beta_2^{-1}, \ldots \beta_\varkappa^{-1}$ der conjugirten Werthe von $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_\varkappa$ nicht in der Reihe

$$(\alpha_{01}\beta_1, \alpha_{02}\beta_2, \ldots \alpha_{0\varkappa}\beta_\varkappa), \quad (\alpha_{11}\beta_1, \alpha_{12}\beta_2, \ldots \alpha_{1\varkappa}\beta_2) \ldots$$

vorkommt, so kann

$$\gamma_1 = \beta_1^{-1}, \gamma_2 = \beta_2^{-1}, \ldots \gamma_\varkappa = \beta_\varkappa^{-1}$$

gesetzt werden. Ebenso darf man annehmen, dass die Wurzelsysteme der fünften Reihe aus den conjugirten Werthen derjenigen Wurzeln bestehen, welche die Systeme der vierten Reihe bilden, wenn sie nicht schon der vierten Reihe angehören. So lassen sich die Wurzelsysteme

$$(\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_\varkappa), \quad (\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_\varkappa), \ldots \quad (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_\varkappa),$$

paarweise gruppiren und nur diejenigen Wurzelsysteme ($\delta_1, \delta_2, \ldots \delta_\varkappa$) bilden eine Ausnahme, deren conjugirte ($\delta_1^{-1}, \delta_2^{-1}, \ldots \delta_\varkappa^{-1}$) in der Reihe

$$(\alpha_{01}\delta_1, \alpha_{02}\delta_2, \ldots \alpha_{0\varkappa}\delta_\varkappa), \quad (\alpha_{11}\delta_1, \alpha_{12}\delta_2, \ldots \alpha_{1\varkappa}\delta_\varkappa), \ldots$$

vorkommen.

Die Wurzelsysteme

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_\varkappa), \quad (\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_\varkappa), \ldots \quad (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_\varkappa)$$

sollen als engere Systeme bezeichnet werden.

Stellt man die Werthe auf, welche jedes einzelne unabhängige Charakterproduct $\Pi(m)$ für die durch die Fundamentalformen $f_1, f_2, \ldots f_\varkappa$ darstellbaren zu $2D$ theilerfremden Zahlen m annimmt, so erhält man l Systeme von $\lambda - 1$ positiven oder negativen Einheiten. Diese Werthsysteme sind alle untereinander verschieden. Fielen nämlich zwei solche Werthsysteme zusammen, so hätten die betreffenden Charakterproducte auch für alle h Formen von Ω gleiche Werthe, was nicht der Fall ist. Die genannten Werthsysteme sind daher genau alle Systeme von $\lambda - 1$ positiven oder negativen Einheiten, welche man überhaupt bilden kann. Es muss also auch ein und nur ein Charakterproduct $\Pi(m)$ geben, für welches

$$\Pi(m_1) = \alpha_{i1}, \quad \Pi(m_2) = \alpha_{i2} \ldots \Pi(m_\varkappa) = \alpha_{i\varkappa}$$

wird, wenn allgemein m_μ eine durch f_μ dargestellte zu $2D$ theilerfremde Zahl bezeichnet. Es ist dann für jede Form $f_1^{e_1} f_2^{e_2} \ldots f_\varkappa^{e_\varkappa}$, welche zu demselben Geschlechte wie eine die Zahl m darstellende Form gehört,

$$\Pi(m) = \alpha_{i1}^{e_1} \cdot \alpha_{i2}^{e_2} \ldots \alpha_{i\varkappa}^{e_\varkappa}.$$

Die Producte

$$\alpha_{01}^{e_1} \alpha_{02}^{e_2} \ldots \alpha_{0\varkappa}^{e_\varkappa}, \; \alpha_{11}^{e_1} \alpha_{12}^{e_2} \ldots \alpha_{1\varkappa}^{e_\varkappa}, \; \ldots \; \alpha_{l-1\,1}^{e_1} \alpha_{l-1\,2}^{e_2} \ldots \alpha_{l-1\,\varkappa}^{e_\varkappa}$$

sollen mit

$$P_0, P_1, \ldots P_{l-1},$$

die Producte

$$\alpha_1^{e_1} \alpha_2^{e_2} \ldots \alpha_\varkappa^{e_\varkappa}, \; \beta_1^{e_1} \beta_2^{e_2} \ldots \beta_\varkappa^{e_\varkappa}, \; \varepsilon_1^{e_1} \varepsilon_2^{e_2} \ldots \varepsilon_\varkappa^{e_\varkappa}$$

mit

$$Q_0, Q_1, \ldots Q_{\text{II}-1}$$

bezeichnet werden.

9.

Es sei ferner[1] eine positive Zahl M gegeben, welche durch 8 und D theilbar ist, und es sei

$$M = 2^\vartheta q^\rho \ldots,$$

---

[1] A. Meyer, l. c.

wo $q, \ldots$ die ungeraden Primfactoren von M bezeichnen. Man stelle für jede zu M theilerfremde Zahl m eine Reihe von Indices auf, welche sich auf die Moduln

$$4,\ 2^{\vartheta},\ q^{\rho}, \ldots$$

beziehen, und bilde aus Wurzeln $\varepsilon, \eta, \omega, \ldots$ der Gleichungen

$$\varepsilon^2 = 1, \qquad \eta^{\varphi(2^{\vartheta-1})} = 1, \qquad \omega^{\varphi(q^{\rho})} = 1 \ldots$$

das Product

$$W = \varepsilon^{\frac{1}{2}(m-1)}\, \eta^{\text{in}\, dm}\, \omega^{\text{in}\, dm} \ldots$$

Für ein gegebenes zu M theilerfremdes m hat der Ausdruck W $\varphi(M)$ Werthe, welche allen möglichen Combinationen der Werthe der Wurzeln

$$\varepsilon, \eta, \omega, \ldots$$

entsprechen. Unter diesen Werthen gibt es einen, welcher mit dem Charakterproduct $\Pi_0(m)$ zusammenfällt und mit

$$\varepsilon_0^{\frac{1}{2}(m-1)}\, \eta_0^{\text{in}\, dm}\, \omega^{\text{in}\, dm} \ldots$$

bezeichnet werden möge. Denn man braucht nur, um dieses Charakterproduct zu erhalten, für jedes in $\Pi_0(m)$ stehende Legendre'sche Symbel $\left(\frac{m}{p}\right)$ die der betreffenden Potenz von p entsprechende Wurzel $= -1$, die den in M, aber nicht in D aufgehenden ungeraden Primzahlpotenzen entsprechenden Wurzeln dagegen $= 1$ und überdies, wenn in $\Pi_0(m)$ einer der Charaktere

$$(-1)^{\frac{m-1}{2}}, \ (-1)^{\frac{m^2-1}{8}}, \qquad (-1)^{\frac{m-1}{2}+\frac{m^2-1}{8}}$$

vorkommt, beziehungsweise

$$\begin{array}{ll} \varepsilon_0 = -1 & \eta_0 = 1 \\ \varepsilon_0 = 1 & \eta_0 = -1 \\ \varepsilon_0 = -1 & \eta_0 = -1 \end{array}$$

zu setzen.

Mit Hilfe des Wurzelsystemes

$$\varepsilon_0, \eta_0, \omega_0, \ldots$$

können alle Wurzelsysteme

$$\varepsilon, \eta, \omega, \ldots$$

derart in Paare vertheilt werden, dass, wenn das eine Wurzelsystem eines Paares aus den Wurzeln $\varepsilon, \eta, \omega, \ldots$ besteht, das andere Wurzelsystem desselben Paares von den Wurzeln $\varepsilon_0 . \varepsilon, \eta_0 . \eta, \omega_0 . \omega, \ldots$ gebildet wird. Nimmt man aus je einem solchen Paare ein Wurzelsystem, so sollen die so erhaltenen $\frac{1}{2} \varphi(M)$ Systeme engere Wurzelsysteme genannt werden. Zu demselben möge das Wurzelsystem

$$\varepsilon = 1, \quad \eta = 1, \quad \omega = 1 \ldots$$

gehören. Die Werthe von W für die engeren Wurzelsysteme sollen mit

$$\psi_0(m), \psi_1(m), \psi_2(m), \ldots \psi_{m-1}(m)$$

bezeichnet werden, wo $\psi_0(m)$ den Wurzeln $\varepsilon = \eta = \omega = \ldots = 1$ entspricht.

Hat W für ein Wurzelsystem eines Paares den Werth $\psi_i(m)$, so hat es für das andere Wurzelsystem desselben Paares den Werth $\psi_i(m) \Pi_0(m)$. Für alle zu M theilerfremde durch Formen aus Ω darstellbare Zahlen m fallen diese zwei Werthe zusammen.

Für eine zu M nicht theilerfremde Zahl m soll für jedes i

$$\psi_i(m) = 0$$

festgesetzt werden.

10.

Es gibt $h \ \varphi(M)$ verschiedene Wurzelsysteme

$$\varepsilon, \eta, \omega, \ldots \omega_1, \omega_2, \ldots \omega_\varkappa.$$

Ein solches Wurzelsystem heisse ein engeres, wenn sowohl die Wurzeln $\varepsilon, \eta, \omega \ldots$ als auch die Wurzeln $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_\varkappa$ engere

Wurzelsysteme bilden. Die Anzahl $\frac{h}{l} \cdot \frac{1}{2} \varphi(M)$ dieser engeren Wurzelsysteme soll mit $1 + r$ bezeichnet werden.

Bildet man das Product

$$\varepsilon^{\frac{1}{2}(m-1)} \eta^{\text{in } dm} \omega^{\text{in } dm} \ldots \omega_1^{e_1} \omega_2^{e_2} \ldots \omega_\varkappa^{e_\varkappa}$$

für irgend eine zu M theilerfremde und durch Formen aus Ω darstellbare Zahl m und für die Exponenten $e_1, e_2, \ldots e_\varkappa$ irgend einer Form $f_1^{e_1} f_2^{e_2} \ldots f_\varkappa^{e_\varkappa}$, welche demselben Geschlechte angehört, wie eine die Zahl m darstellende Form, so durchläuft dasselbe für alle möglichen Wurzelsysteme

$$\varepsilon, \eta, \omega, \ldots \omega_1, \omega_2, \ldots \omega_\varkappa$$

jeden der Werthe, welche es für die engeren Wurzelsysteme annimmt, also die Werthe

$$\begin{array}{l} \psi_0(m)Q_0, \ \psi_1(m)Q_0, \ldots \psi_{m-1}(m)Q_0 \\ \psi_0(m)Q_1, \ \psi_1(m)Q_1, \ldots \psi_{m-1}(m)Q_1 \\ \ldots\ldots \\ \psi_0(m)Q_{n-1}, \ \psi_1(m)Q_{n-1}, \ldots \psi_{m-1}(m)Q_{n-1} \end{array} \tag{9}$$

genau $2l$ mal. Denn man erhält alle möglichen Werthe des obigen Productes, wenn man jeden Ausdruck $\psi_a(m)Q_b(m)$ mit je einem der $2l$ Factoren

$$\begin{array}{l} P_0, \ P_1, \ldots P_{l-1} \\ P_0\Pi_0(m), \ P_1\Pi_0(m), \ldots P_{l-1}\Pi_0(m) \end{array}$$

multiplicirt. Da aber diese Factoren bestimmten Charakterproducten $\Pi(m)$ und daher auch bestimmten Ausdrücken $\psi_i(m)$ gleich sind, so ändert die Multiplication mit denselben nicht die Gesammtheit der Grössen (9).

11.

Es sei m eine zu M theilerfremde und durch Formen aus Ω darstellbare Zahl und Q_b ein auf das Exponentensystem $e_1, e_2, \ldots e_\varkappa$ einer Form $f_1^{e_1} f_2^{e_2} \ldots f_\varkappa^{e_\varkappa}$ sich beziehendes Wurzelproduct, welche zu demselben Geschlechte wie die die Zahl m darstellenden Formen

gehört; es sei ferner μ die kleinste positive Zahl von der Art, dass das μfache aller in $\psi_a(m)Q_b$ vorkommenden Indices und aller Exponenten $e_1, e_2, \ldots e_\varkappa$, beziehungsweise durch die Zahlen

$$2,\ \varphi(2^{\vartheta-1}),\ \varphi(q^\rho), \ldots m_1,\ m_2, \ldots m_\varkappa$$

theibar wird. Es ist dann, wenn $\mu > 1$, für jedes i, welches > 0 und $< \mu$ ist,

$$\Sigma \psi_a^i(m)\, Q_b^i = 0,$$

wo die Summe über alle Werthe von a und b zu erstrecken ist.

Das $2l$fache dieser Summe ist nämlich die über alle möglichen Wurzelsysteme

$$\varepsilon,\ \eta,\ \omega, \ldots \omega_1,\ \omega_2, \ldots \omega_\varkappa$$

zu erstreckende Summe

$$\Sigma \varepsilon^{i\frac{1}{2}(m-1)} \eta^{i \operatorname{in} dm} \omega^{i \operatorname{in} dm} \ldots \omega_1^{ie_1} \omega_2^{ie_2} \ldots \omega_\varkappa^{ie_\varkappa}.$$

Letztere zerfällt aber in ein Product von Theilsummen, welche eine der Gestalten

$$1 + (-1)^{i\frac{m-1}{2}}$$

$$1 + \zeta^{i \operatorname{in} dm} + \zeta^{2 i \operatorname{in} dm} + \ldots + \zeta^{(\varphi k - 1) i \operatorname{in} dm}$$

$$1 + \zeta^{ie_\alpha} + \zeta^{2ie_\alpha} + \ldots + \zeta^{(m_\alpha - 1) ie_\alpha}$$

haben, wo ζ eine primitive $\varphi(k)^{\text{te}}$ oder $m_\alpha{}^{\text{te}}$ Einheitswurzel und k eine der Zahlen

$$2^{\vartheta-1},\ q^\rho, \ldots$$

ist. Eine solche Theilsumme verschwindet aber immer, wenn $i\frac{1}{2}(m-1)$ nicht durch 2 oder $i \operatorname{in} dm$, nicht durch $\varphi(k)$, oder endlich ie_α nicht durch m_α theilbar ist.

Da das Product $\psi_a(m)Q_b$ für alle Werthe von a und b eine μ^{te} Einheitswurzel ist, so lässt sich die vorstehende Gleichung in der Form

$$h_0 + h_1 t^i + h_2 t^{2i} + \ldots + h_{\mu-1} t^{(\mu-1)i} = 0$$

schreiben, wenn t eine primitive μ^{te} Einheitswurzel bezeichnet und h_α ausdrückt, wie viele unter den Producten $\psi_a(m)Q_b = t^\alpha$ sind. Nimmt man die Gleichung

$$h_0 + h_1 + h_2 + \ldots + h_{\mu-1} = 1 + r$$

hinzu, so ergibt sich

$$h_0 = h_1 = \ldots = h_{\mu-1} = \frac{1+r}{\mu}.$$

Dies gilt auch noch für $\mu = 1$.

Man hat daher, über alle Werthe von a und b erstreckt,

$$\Pi(1 - z\psi_a(m)Q_b) = ((1-z)(1-tz)(1-t^2z)\ldots(1-t^{\mu-1}z))^{\frac{1+r}{\mu}}$$
$$= (1-z^\mu)^{\frac{1+r}{\mu}}.$$

12.

Man bezeichne eine quadratische Form

$$\left(\frac{m}{\delta^2},\ v,\ \frac{v^2-D}{m}\delta^2\right)$$

kurz als Hilfsform der Zahl m für die Determinante D, wenn δ^2 ein quadratischer Theiler von m und v eine nicht negative unter dem Zahlenwerthe von $\frac{m}{\delta^2}$ liegende Wurzel der Congruenz

$$z^2 \equiv D \pmod{\frac{m}{\delta^2}}$$

ist. Man stelle für jede zu M theilerfremde Zahl m alle möglichen Hilfsformen auf, bestimme, falls solche Hilfsformen existiren, für jede derselben die äquivalente Form $f_1^{e_1} f_2^{e_2} \ldots f_\varkappa^{e_\varkappa}$ in Ω und bezeichne die Summe der Producte Q_b, welche sich auf alle erhaltenen Exponentensysteme $e_1, e_2, \ldots e_\varkappa$ beziehen, mit $\Theta_b(m)$. Existiren aber keine Hilfsformen der Zahl m, so sei

$$\Theta_b(m) = 0.$$

Dies vorausgeschickt, sei (a, b) das i^{te} der r Zahlenpaare

$$\begin{array}{c} (1, 0), (2, 0), \ldots (\mathfrak{m}-1, 0) \\ (0, 1), (1, 1), (2, 1), \ldots (\mathfrak{m}-1, 1) \\ (0, 2), (1, 2), (2, 2), \ldots (\mathfrak{m}-1, 2) \\ (0, \mathfrak{n}-1), (1, \mathfrak{n}-1), (2, \mathfrak{n}-1, \ldots (\mathfrak{m}-1, \mathfrak{n}-1) \end{array} \tag{10}$$

und man setze

$$\frac{\psi_a(m)\Theta_b(m)}{m} = u_m^{(i)}.$$

Es fragt sich, ob die Formel (4) auf die r Ausdrücke

$$U_n^{(i)} = \frac{\psi_a(1)\Theta_b(1)}{1} + \frac{\psi_a(2)\Theta_b(2)}{2} + \ldots + \frac{\psi_a(n)\Theta_b(n)}{n}$$

anwendbar ist,

13.

Die Summe

$$\Phi(z) = \psi_a(1)\Theta_b(1) + \psi_a(2)\Theta_b(2) + \ldots + \psi_a(\mathfrak{z})\Theta_b(\mathfrak{z}),$$

wo $\mathfrak{z} = E(z)$, ist für jedes der Zahlenpaare (10) eine Grösse von der Ordnung $\sqrt{z}$.

Fasst man nämlich in derselben alle Glieder zusammen, in welchen $e_1, e_2, \ldots e_\varkappa$ dieselben Werthe haben, so erscheint das der Form $f_1^{e_1} f_2^{e_2} \ldots f_\varkappa^{e_\varkappa}$ zugehörige Product

$$Q_h = \omega_1^{e_1}\omega_2^{e_2}\ldots\omega_\varkappa^{e_\varkappa}$$

mit der Summe S derjenigen Ausdrücke $\psi_a(m)$ multipliciert, in welchen die Zahlen m eine mit $f_1^{e_1} f_2^{e_2} \ldots f_\varkappa^{e_\varkappa}$ äquivalente Hilfsform $\left(\frac{m}{\delta^2}, v, \frac{v^2-D}{m}\delta^2\right)$ besitzen. Aus jeder die Form

$$f = f_1^{e_1} f_2^{e_2} \ldots f_\varkappa^{e_\varkappa}$$

in eine solche Hifsform verwandelnden Substitution $(\alpha, \alpha'; \gamma, \gamma')$ geht eine Darstellung der Zahl m durch f hervor, wenn

$$x = \delta\alpha \qquad y = \delta\gamma$$

gesetzt wird. Es gibt aber genau τ solche Substitutionen, wenn τ bei negativer Determinante die Anzahl der Lösungen der Pell'schen Gleichung

$$t^2 - Du^2 = 1$$

bezeichnet und bei positiver Determinante $\tau = 1$ gesetzt und α, γ den Bedingungen

$$\alpha > 0 \qquad 0 \gtreqless \gamma < \frac{AU}{T-BU}\alpha$$

unterworfen werden, wo A, B die beiden ersten Coëfficienten der Form f und T, U die kleinste positive Lösung der Pell'schen Gleichung bedeuten. Man erhält daher auch das τfache der Summe S, wenn man die Ausdrücke $\psi_a(f(x,y))$ addirt, welche aus allen Zahlenpaaren x, y mit folgenden Eigenschaften hervorgehen: $f(x,y)$ muss zu M theilerfremd und nicht grösser als z ausfallen und bei positiver Determinante haben x, y überdies den Bedingungen

$$x > 0 \qquad 0 \leqq y < \frac{AU}{T-BU}x$$

zu genügen.

Es sind zunächst die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen aufzusuchen, welche die Zahlen x, y erfüllen müssen, damit $f(x,y)$ zu M theilerfremd ausfalle. Setzt man

$$x = \xi + uM \qquad 0 \leqq \xi < M$$
$$y = \zeta + vM \qquad 0 \leqq \zeta < M,$$

so ist $f(x,y)$ zugleich mit $f(\xi, \zeta)$ theilerfremd zu M. Bestimmt man also durch Versuche alle Zahlenpaare ξ, ζ, für welche $f(\xi, \zeta)$ zu M theilerfremd ausfällt, so sind alle Zahlenpaare x, y, für welche $f(x,y)$ dieselbe Eigenschaft besitzt, ausschliesslich in den Paaren von arithmetischen Reihen

$$x = \xi + uM \qquad y = \zeta + vM$$

enthalten.

Da f für alle Zahlenpaare x, y, welche aus zwei bestimmten zusammengehörigen arithmetischen Reihen dieser Art hervor-

gehen, Zahlen von der Gestalt $f(\xi, \zeta)+\omega M$ darstellt, so hat $\psi_a(f(x,y))$ für alle diese Zahlenpaare denselben Werth $\psi_a(f(\xi,\zeta))$. Es genügt also, die Anzahl aller solcher Zahlenpaare zu kennen, für welche $f(x, y)$ nicht grösser als z ausfällt und im Falle einer positiven Determinante

$$0 \leqq \zeta + vM < \frac{AU}{T-BU}(\xi + vM)$$

ist. Diese Anzahl ist aber bekanntlich eine Zahl von der Form

$$\mathfrak{g}z+\mathfrak{h}\sqrt{z},$$

wo $\mathfrak{g}$ bei negativer Determinante den Werth $\frac{\pi}{M^2\sqrt{-D}}$ und bei positiver den Werth $\frac{\log(T+U\sqrt{D})}{2M^2\sqrt{D}}$ hat und $\mathfrak{h}$ eine feste Grenze $\mathfrak{h}_0$ nicht übersteigt.

Hienach ist derjenige Bestandtheil der Summe S, welcher sich auf die in zwei bestimmten zusammengehörigen arithmetischen Reihen enthaltenen darstellenden Zahlen x, y bezieht

$$= \frac{\mathfrak{g}z+\mathfrak{h}\sqrt{z}}{\tau}\psi_a(f(\xi, \zeta))$$

und S nimmt die Gestalt

$$S = \frac{\mathfrak{g}}{\tau} z\Sigma\psi_a(f(\xi, \zeta))+\mathfrak{h}'\sqrt{z}$$

an, wo das Summenzeichen auf alle Zahlenpaare ξ, ζ zu erstrecken ist und $\mathfrak{h}'$ die Grenze $\frac{M^2}{\tau}\mathfrak{h}_0$ nicht übersteigt.

Setzt man den gefundenen Werth von S in die Gleichung

$$\Phi(z) = \Sigma Q_b S$$

ein, in welcher die Summe über alle Werthe von $e_1, e_2, \ldots e_\varkappa$ zu erstrecken ist, so ergibt sich

$$\Phi(z) = \frac{\mathfrak{g}z}{\tau}\Sigma Q_b\psi_a(f(\xi, \zeta))+\mathfrak{H}\sqrt{z},$$

wo jetzt die Summation sich auf alle Werthe von $e_1, e_2, \ldots e_\varkappa$ und die zugehörigen Zahlenpaare ξ, ζ bezieht und $\mathfrak{H}$ die Grenze $\frac{hM^2}{\tau}$ nicht übersteigt.

Die Summe

$$L = \Sigma Q_b \psi_a (f(\xi, \zeta))$$

verschwindet aber für alle Zahlenpaare (10).

Um dies darzuthun, darf man der Einfachheit wegen den ersten Coëfficienten A von f theilerfremd zu M und den zweiten B durch M theilbar annehmen.

Ist nun das Wurzelsystem

$$\varepsilon, \eta, \omega, \ldots$$

in dem Ausdrucke $\psi_a(m)$ so beschaffen, dass derselbe sich auf ein Charakterproduct $\Pi(m)$ reducirt, so hat $\psi_a(f(\xi, \zeta))$ für alle Zahlenpaare ξ, ζ denselben Werth $\Pi(A)$. Bringt man demnach $\Pi(A)$ auf die Gestalt $\varepsilon_1^{c_1} \varepsilon_2^{c_2} \ldots \varepsilon_\varkappa^{c_\varkappa}$ und setzt

$$Q_b = \omega_1^{e_1} \omega_2^{e_2} \ldots \omega_\varkappa^{e_\varkappa},$$

so wird

$$L = \mathfrak{A}\, \Sigma (\varepsilon_1 \omega_1)^{e_1} (\varepsilon_2 \omega_2)^{e_2} \ldots (\varepsilon_\varkappa \omega_\varkappa)^{e_\varkappa},$$

wo $\mathfrak{A}$ die Anzahl der Zahlenpaare ξ, ζ bezeichnet und die Summe über alle Werthe der Exponenten $e_1, e_2, \ldots e_\varkappa$ zu erstrecken ist. Es kann aber nicht zugleich

$$\omega_1 = \varepsilon_1 \qquad \omega_2 = \varepsilon_2 \qquad \omega_\varkappa = \varepsilon_\varkappa$$

sein, da alsdann wegen der Realität von $\omega_1, \omega_2 \ldots \omega_\varkappa$ $b = 0$ also

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \ldots = \varepsilon_\varkappa = 1$$

und daher auch $a = 0$ sein müsste. Da somit eines der Producte $\varepsilon_1 \omega_1, \varepsilon_2 \omega_2, \ldots \varepsilon_\varkappa \omega_\varkappa$ von 1 verschieden ist, so hat man

$$\Sigma (\varepsilon_1 \omega_1)^{e_1} (\varepsilon_2 \omega_2)^{e_2} \ldots (\varepsilon_\varkappa \omega_\varkappa)^{e_\varkappa} = 0$$

und demzufolge

$$L = 0.$$

Wenn aber $\psi_a(m)$ sich nicht auf ein Charakterproduct reducirt, so ist schon

$$\Sigma \psi_a (f(\xi, \zeta)) = 0.$$

Es seien q^ρ eine der in M genau aufgehenden ungeraden Primzahlpotenzen, ξ_0, ζ_0 die echten Reste von ξ, ζ in Bezug auf den Modul q^ρ, ξ_1, ζ_1 die von ξ, ζ in Bezug auf den Modul $\frac{M}{q^\rho}$ und ω die zu q^ρ gehörende Einheitswurzel in $\psi_a(f(\xi, \zeta))$. Man setze zur Abkürzung

$$f(\xi_0, \zeta_0) = m_0$$

$$\psi_a(f(\xi, \zeta)) = \omega^{\text{in}\, df(\zeta, \xi)}\, \psi' = \omega^{\text{in}\, dm_0} \psi'.$$

Derjenige Bestandtheil der vorstehenden Summe, welcher sich auf alle Zahlenpaare ξ, ζ mit festen Resten ξ_1, ζ_1 bezieht, ist dann

$$= \psi' \Sigma\, \omega^{\text{in}\, dm_0},$$

wo die Summation alle nicht negativen und q^ρ nicht erreichenden Zahlen ξ_0 und η_0 zu umfassen hat, welche der Form f einen zu q^ρ theilerfremden Werth m_0 ertheilen.

Geht nun q in M aber nicht in D auf, so durchläuft m_0 nach dem Modul q^ρ genau $q^\rho - \left(\frac{D}{q}\right) q^{\rho-1}$ mal ein vollständiges Restsystem von zu q^ρ theilerfremden Zahlen und in dm_0 demzufolge ebenso oft jede der Zahlen

$$0, 1, 2, \ldots \varphi(q^\rho) - 1.$$

Es ist also

$$\Sigma\, \omega^{\text{in}\, dm_0} = \left(q^\rho - \left(\frac{D}{q}\right) q^{\rho-1}\right) \left(1 + \omega + \omega^2 + \ldots + \omega^{\varphi(q^\rho)-1}\right)$$
$$= 0,$$

wenn nicht $\omega = 1$ ist.

Geht q in D auf, so ist

$$m_0 \equiv A \xi_0^2 \pmod{q}$$

und daher

$$\text{in}\, dm_0 \equiv \text{in}\, dA \pmod{2};$$

in dm_0 durchläuft $2q^\rho$ mal jede der Zahlen

$$\text{in}\, dA,\ \text{in}\, dA + 2,\ \text{in}\, dA + 4 \ldots \text{in}\, dA + \varphi(q^\rho) - 2$$

und man hat

$$\Sigma\omega^{\text{in}\, dm_0} = 2q^\rho\omega^{\text{in}\, dA}(1+\omega^2+\omega^4+\ldots+\omega^{\varphi(q^\rho)-2})$$
$$= 0,$$

wenn nicht $\omega = \pm 1$ ist.

Ist endlich ξ_0, ζ_0 das echte Restepaar von ξ, ζ in Bezug auf den Modul 2^ϑ, ξ_1, ζ_1 das von ξ, ζ in Bezug auf den Modul $\frac{M}{2^\vartheta}$ und

$$f(\xi_0, \zeta_0) = m_0$$
$$\psi_a(f(\xi, \zeta)) = \varepsilon^{\frac{1}{2}(m_0-1)}\eta^{\text{in}\, dm_0}\psi',$$

so ist

$$m_0 \equiv A\xi_0^2 + C\zeta_0^2 (\text{mod}\ 2^\vartheta)$$

und man hat folgende Fälle zu unterscheiden.

Ist $D \equiv 1$ (mod 4), so durchläuft m_0 in Bezug auf den Modul 2^ϑ 2^ϑmal alle ungeraden Zahlen

$$1,\ 3,\ 5,\ \ldots\ 2^\vartheta - 1$$

und es ist daher

$$\Sigma\varepsilon^{\frac{1}{2}(m_0-1)}\eta^{\text{in}\, dm_0} = (1+\varepsilon)(1+\eta+\eta^2+\ldots+\eta^{2^{\vartheta-2}-1})$$
$$= 0,$$

wenn nicht $\varepsilon = \eta = 1$ ist.

Ist $D \equiv 3$ (mod 4) oder $D \equiv 4$ (mod 8), so wird

$$m_0 \equiv A\ (\text{mod}\ 4);$$

m_0 durchläuft also $2^{\vartheta+1}$mal jede der Zahlen

$$1,\ 5,\ 9,\ \ldots\ 2^\vartheta - 3$$

oder jede der Zahlen

$$3,\ 7,\ 11,\ \ldots\ 2^\vartheta - 1,$$

je nachdem $A \equiv 1$ oder $\equiv 3$ (mod 4) ist, und man hat

$$\Sigma\varepsilon^{\frac{1}{2}(m_0-1)}\eta^{\text{in}\, dm_0} = \varepsilon^{\frac{A-1}{2}}(1+\eta+\eta^2+\ldots+\eta^{2^{\vartheta-2}-1})$$
$$= 0,$$

wenn nicht $\eta = 1$ ist.

Ist $D \equiv 0 \pmod 8$, so wird

$$m_0 \equiv A\xi_0^2 \equiv A \pmod 8;$$

m_0 durchläuft mod 2^ϑ $2^{\vartheta+2}$mal die Zahlen

$$A,\ A+8,\ A+16,\ \ldots\ A+2^\vartheta-8$$

also in dm_0 ebenso oft die Zahlen

$$\frac{A^2-1}{8},\ \frac{A^2-1}{8}+2,\ \frac{A^2-1}{8}+4,\ldots\ \frac{A^2-1}{8}+2^{\frac{\vartheta-2}{-2}}.$$

Daher wird

$$\Sigma \varepsilon^{\frac{1}{2}(m_0-1)} \eta^{\text{in } dm_0} = 2^{\vartheta+2} \varepsilon^{\frac{A-1}{2}} \eta^{\frac{1}{8}(A^2-1)} (1+\eta^2+\eta^4+\ldots)$$
$$= 0,$$

wenn nicht $\eta = \pm 1$ ist.

Ist $D \equiv 2 \pmod 8$, so wird

$$m_0 \equiv A(\xi_0^2 - 2\eta_0^2) \equiv A(\vdash 2\eta_0^2) \pmod 8$$
$$\equiv \pm A \pmod 8;$$

m_0 durchläuft je $2^{\vartheta+1}$mal jede der Zahlenreihen

$$A,\quad A+8,\quad A+16\ \ldots$$
$$-A,\ -A+8,\ -A+16,\ldots$$

also in dm_0 $2^{\vartheta+2}$mal die Zahlen

$$\frac{A^2-1}{8},\ \frac{A^2-1}{8}+2,\ \frac{A^2-1}{8}+4,\ldots$$

Daher wird

$$\Sigma \varepsilon^{\frac{1}{2}(m_0-1)} \eta^{\text{in } dm_0} = 2^{\vartheta+1} \left(\varepsilon^{\frac{A-1}{2}} + \varepsilon^{\frac{A+1}{2}}\right) \eta^{\frac{A^2-1}{8}} (1+\eta^2+\eta^4+\ldots)$$
$$= 0,$$

wenn nicht $\varepsilon = 1$, $\eta = \pm 1$ ist.

Ist endlich $D \equiv 6 \pmod 8$, so wird

$$m_0 \equiv A(\xi_0^2 + 2\eta_0^2) \equiv A(1+2\eta_0^2)$$
$$\equiv A$$

oder

$$\equiv 3A \pmod 8;$$

m_0 durchläuft mod 2^ϑ je $2^{\vartheta+1}$mal jede der Zahlenreihen

$$A,\quad A+8,\quad A+16,\ldots$$
$$3A,\ 3A+8,\ 3A+16,\ldots$$

also in dm_0 ebenso oft jede der Reihen

$$\frac{A^2-1}{8},\qquad \frac{A^2-1}{8}+2,\ \frac{A^2-1}{8}+4,\ldots$$
$$\frac{A^2-1}{8}+1,\ \frac{A^2-1}{8}+3,\ \frac{A^2-1}{8}+5,\ldots$$

Daher wird

$$\Sigma \varepsilon^{\frac{1}{2}(m_0-1)} \eta^{\text{in}\,dm_0} = 2^{\vartheta+1}\varepsilon^{\frac{A-1}{2}}\eta^{\frac{A^2-1}{8}}(1+\varepsilon\eta)(1+\eta^2+\ldots)$$
$$= 0,$$

wenn nicht

$$\varepsilon = \eta = \pm 1$$

ist.

Es wird also

$$\Phi(z) = \mathfrak{H}\sqrt{z}.$$

Dann ist aber

$$u_{\mathfrak{a}}^{(i)}+u_{\mathfrak{a}+1}^{(i)}+\ldots+u_{\mathfrak{b}}^{(i)} = \frac{\Phi(\mathfrak{a})-\Phi(\mathfrak{a}-1)}{\mathfrak{a}}$$
$$+\frac{\Phi(\mathfrak{a}+1)-\Phi(\mathfrak{a})}{\mathfrak{a}+1}+\ldots+\frac{\Phi(\mathfrak{b})-\Phi(\mathfrak{b}-1)}{\mathfrak{b}}$$
$$= -\frac{\Phi(\mathfrak{a}-1)}{\mathfrak{a}}+\Phi(\mathfrak{a})\left(\frac{1}{\mathfrak{a}}-\frac{1}{\mathfrak{a}+1}\right)$$
$$+\Phi(\mathfrak{a}+1)\left(\frac{1}{\mathfrak{a}+1}-\frac{1}{\mathfrak{a}+1}\right)+\ldots$$
$$+\Phi(\mathfrak{b}-1)\left(\frac{1}{\mathfrak{b}-1}-\frac{1}{\mathfrak{b}}\right)+\frac{\Phi(\mathfrak{b})}{\mathfrak{b}},$$

also

$$\operatorname{mod}(u_{\mathfrak{a}}^{(i)}+u_{\mathfrak{a}+1}^{(i)}+\ldots+u_{\mathfrak{b}}^{(i)})$$

$$\leqq \frac{h\mathfrak{h}_0 M^2}{\tau}\left(\frac{\sqrt{\mathfrak{a}-1}}{\mathfrak{a}}+\sqrt{\mathfrak{a}}\left(\frac{1}{\mathfrak{a}}-\frac{1}{\mathfrak{a}+1}\right)+\ldots+\right.$$

$$\left.+\sqrt{\mathfrak{b}-1}\left(\frac{1}{\mathfrak{b}-1}-\frac{1}{\mathfrak{b}}\right)+\frac{\sqrt{\mathfrak{b}}}{\mathfrak{b}}\right)$$

$$< \frac{h\mathfrak{h}_0 M^2}{\tau}\left(\frac{1}{\sqrt{\mathfrak{a}}}+2\left(\frac{1}{\sqrt{\mathfrak{a}}}-\frac{1}{\sqrt{\mathfrak{a}+1}}\right)+\ldots+\right.$$

$$\left.+2\left(\frac{1}{\sqrt{\mathfrak{b}-1}}-\frac{1}{\sqrt{\mathfrak{b}}}\right)+\frac{1}{\sqrt{\mathfrak{b}}}\right)$$

$$< \frac{3h\mathfrak{h}_0 M^2}{\tau\sqrt{\mathfrak{a}}}.$$

Formel (4) ist demnach auf die Ausdrücke $U_n^{(i)}$ anwendbar, wenn

$$\pi = \frac{1}{2}, \qquad f_j(n) = \frac{3h\mathfrak{h}_0 M^2}{\tau}$$

gesetzt wird.

14.

In dem vorliegenden Falle ist

$$\mathfrak{A}_n^{(i)} = \operatorname{mod}\frac{\psi_a(1)\Theta_b(1)}{1}+\operatorname{mod}\frac{\psi_a(2)\Theta_b(2)}{2}+$$

$$+\ldots+\operatorname{mod}\frac{\psi_a(n)\Theta_b(n)}{n}.$$

Da aber die Anzahl der Hilfsformen einer zu $2D$ theilerfremden Zahl m höchstens der Anzahl $T(m)$ der Theiler dieser Zahl gleich ist, so hat man

$$\operatorname{mod}\Theta_b(m) \leqq T(m),$$

also auch

$$\operatorname{mod}\psi_a(m)\Theta_b(m) \leqq T(m)$$

und daher

$$\mathfrak{A}_n^{(i)} \leqq \frac{T(1)}{1}+\frac{T(2)}{2}+\ldots+\frac{T(n)}{n}$$

$$< \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right)^2$$

$$< (1+\log n)^2.$$

15.

Es handelt sich jetzt noch um den Nachweis, dass die Grössen $v_1, v_2, \ldots$ nicht negativ sind.

Es sei

$$F(m) = mv_m = \Sigma \Pi \psi_a(\delta_{a,b}) \Theta_b(\delta_{a,b}),$$

wo das Productzeichen auf alle in (10) angeführten Zahlenpaare a, b und die Summe auf alle möglichen Gruppen von r ganzen positiven Zahlen

$$\delta_{01}, \delta_{02}, \ldots \delta_{10}, \delta_{11}, \ldots \delta_{m-1, n-1}$$

zu beziehen ist, deren Product in m aufgeht.

Sind m, m_1 theilerfremd zu einander, so ist

$$\Theta_b(m) . \Theta_b(m_1) = \Theta_b(mm_1).$$

Sind nämlich

$$f = \left(\frac{m}{\delta^2}, v, \frac{v^2-D}{m} \delta^2\right)$$

$$f_1 = \left(\frac{m_1}{\delta_1^2}, v_1, \frac{v_1^2-D}{m_1} \delta_1^2\right)$$

irgend zwei Hilfsformen von m und m_1, und setzt man

$$w \equiv v \quad \left(\text{mod}\, \frac{m}{\delta^2}\right)$$

$$w \equiv v_1 \quad \left(\text{mod}\, \frac{m_1}{\delta_1^2}\right),$$

wo $0 < w < \frac{mm_1}{(\delta\delta_1)^2}$, so ist

$$\left(\frac{mm_1}{(\delta\delta_1)^2}, w, \frac{w^2-D}{mm_1} (\delta\delta_1)^2\right)$$

eine aus f, f_1 zusammengesetzte Hilfsform von mm_1. Umgekehrt kann jede Hilfsform von mm_1 in dieser Weise aus zwei und nur zwei Hilfsformen von m und m_1 hervorgehen.

Hieraus folgt zunächst, dass es keine Hilfsformen von m oder m_1 gibt, wenn keine solche für mm_1 existiren.

Gibt es aber Hilfsformen für m und m_1 und sind die Hilfsformen von m den Formen

$$f_1^{a_1} f_2^{a_2} \ldots f_x^{a_x},\ f_1^{b_1} f_2^{b_2} \ldots f_x^{b_x}, \ldots$$

die Hilfsformen von m_1 den Formen

$$f_1^{a'_1},\ f_2^{a'_2} \ldots f_x^{a'_x},\ f_1^{b'_1},\ f_2^{b'_2}, \ldots f_x^{b'_x}, \ldots$$

äquivalent, so sind die Hilfsformen von mm_1 ausschliesslich den Formen

$$f_1^{a_1+a'_1} f_2^{a_2+a'_2} \ldots f_x^{a_x+a'_x},\ f_1^{a_1+b'_1} f_2^{a_2+b'_2} \ldots f_x^{a_x+b'_x}, \ldots$$

äquivalent. Es ist dann

$$\begin{aligned}
\Theta_b(m) &= \omega_1^{a_1} \omega_2^{a_2} \ldots + \omega^{b_1} \omega_2^{b_2} + \ldots \\
\Theta_b(m_1) &= \omega_1^{a'_1} \omega_2^{a'_2} \ldots + \omega^{b'_1} \omega_2^{b'_2} \ldots + \ldots \\
\Theta_b(mm_1) &= \omega_1^{a_1+a'_1} \omega_2^{a_2+a'_2} \ldots + \omega_1^{a_1+b'_1} \omega_2^{a_2+b'_2} \ldots \\
&\qquad + \omega_1^{b_1+a'_1} \omega_2^{b_2+a'_2} \ldots + \ldots
\end{aligned}$$

und daher

$$\Theta_b(m)\Theta_b(m_1) = \Theta_b(mm_1).$$

Da überdies

$$\psi_a(m)\psi_a(m_1) = \psi_a(mm_1)$$

ist, so wird

$$\psi_a(m)\Theta_b(m) . \psi_b(m)\Theta_b(m_1) = \psi_a(mm_1)\Theta_b(mm_1)$$

und demzufolge

$$F(m)F(m_1) = F(mm_1).$$

Man braucht also $F(m)$ nur für eine in M nicht aufgehende, durch Formen von Ω darstellbare Primzahlpotenz p^σ zu ermitteln.

Ist $f_1^{c_1} f_2^{c_2} \ldots f_x^{c_x}$ einer Hilfsform von p äquivalent und Q_b das zugehörige Wurzelproduct $\omega_1^{c_1} \omega_2^{c_2} \ldots \omega_x^{c_x}$, so ist

$$\begin{aligned}
\Theta_b(p) &= Q_b + Q_b^{-1} \\
\Theta_b(p^2) &= Q_b^2 + Q_b^0 + Q_b^{-2} \\
&\ldots\ldots \\
\Theta_b(p^\sigma) &= Q_b^\sigma + Q_b^{\sigma-2} + \ldots + \Theta_b^{-\sigma}.
\end{aligned}$$

$\Theta_b(p^\nu)$ ist somit der Coëfficient von x^ν in der Entwicklung des Ausdruckes

$$\frac{1}{(1-xQ_b)(1-xQ_b^{-1})}$$

und somit $\psi_a(p^\nu)\Theta_b(p^\nu)$ der Coëfficient derselben Potenz von x in dem Ausdrucke

$$\frac{1}{(1-x\psi_a(p)Q_b)(1-x\psi_a(p)Q_b^{-1})}.$$

Dann ist aber $F(p^\nu)$ der Coëfficient von x^ν in der Entwicklung des Ausdruckes

$$\Pi\frac{1}{(1-x\psi_a(p)Q_b)(1-x\psi_a(p)Q_b^{-1})},$$

in welchem sich das Productzeichen auf alle Werthe 0, 1, $\ldots\mathfrak{m}-1$ von a und alle Werthe 0, $1,\ldots\mathfrak{n}-1$ von b bezieht und welcher nach Abschnitt 10

$$=\frac{1}{(1-x^\mu)^{2.\frac{r+1}{\mu}}}$$

ist. $F(p^\nu)$ ist demnach eine nicht negative ganze Zahl.

Ist m nicht zu M theilerfremd, d ein Theiler von m und einer Potenz von M und $\frac{m}{d}$ zu M theilerfremd, so ist

$$F(m)=F\left(\frac{m}{d}\right),$$

also ebenfalls nicht negativ.

Insbesondere ist

$$F(1)=1.$$

Es ist demnach

$$v_1+v_2+\ldots+v_n\geqq 1.$$

16.

Nach Formel (4) wird nun

$$S_nU_n^{(1)}U_n^{(2)}\ldots U_n^{(r)}-V_n^{(1)}U_n^{(2)}U_n^{(3)}\ldots U_n^{(r)}-\ldots-V_n^{(r)}U_n^{(1)}U_n^{(2)}\ldots U_n^{(r-1)}=$$
$$=v_1+v_2+\ldots+v_n+\{\Delta_n\},$$

wo Δ_n von der Ordnung $\frac{(\log n)^{2r-1}}{n^{\frac{1}{4r}}}$ ist. Mit Hilfe dieser Gleichung kann in derselben Weise, wie in Abschnitt 6 für den Modul jeder der Grössen $U_n^{(i)}$ eine untere von Null verschiedene Grenze angegeben werden, wenn es in der Reihe

$$U_n^{(1)}, U_n^{(2)}, \ldots U_n^{(r)}$$

noch eine zweite Grösse $U_n^{(k)}$ mit von i verschiedenem oberen Stellenzeiger k gibt, welche denselben Modul wie $U_n^{(i)}$ hat.

Da die Reihen

$$u_1^{(i)} + u_2^{(i)} + u_3^{(i)} + \ldots$$
$$u_2^{(i)} \log 2 + u_3^{(i)} \log 3 + \ldots$$

alle convergent sind, so kann man positive Grössen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ von der Art angeben, dass für jedes i

$$\operatorname{mod} U_n^{(i)} \leqq \mathfrak{A},$$
$$\operatorname{mod} V_n^{(i)} \leqq \mathfrak{B}$$

ist. Setzt man dann

$$\operatorname{mod} U_n^{(i)} = \operatorname{mod} U_n^{(k)} = R_n,$$

so wird

$$\operatorname{mod} S_n U_n^{(1)} U_n^{(2)} \ldots U_n^{(r)} \leqq (1 + \log n) \mathfrak{A}^{r-2} R_n^2$$

und

$$\operatorname{mod} V_n^{(\mu)} U_n^{(\alpha)} U_n^{(\beta)} \ldots U_n^{(\varepsilon)} \leqq \mathfrak{A}^{r-2} \mathfrak{B} R_n$$

oder

$$\leqq \mathfrak{A}^{r-3} \mathfrak{B} R_n^2,$$

je nachdem nur eine der Zahlen i, k in der Reihe

$$\alpha, \beta, \ldots \varepsilon$$

vorkommt oder beide. Daher ist

$$\mathfrak{A}^{r-3} (\mathfrak{A}(\log n + 1) + (r-2)\mathfrak{B}) R_n^2 + 2\mathfrak{A}^{r-2} \mathfrak{B} R_n$$
$$\geqq 1 - \Delta_n$$

oder, wenn zur Abkürzung

$$\mathfrak{A}(\log n + 1) + (r-2)\mathfrak{B} = \mathfrak{C}_n$$

gesetzt wird,

$$R_n^2 + 2\frac{\mathfrak{A}\mathfrak{B}}{\mathfrak{C}_n} R_n \geqq \frac{1-\Delta_n}{\mathfrak{A}^{r-3}\mathfrak{C}_n}.$$

Hieraus folgt

$$R_n + \frac{\mathfrak{A}\mathfrak{B}}{\mathfrak{C}_n} \geqq \sqrt{\frac{1-\Delta_n}{\mathfrak{A}^{r-3}\mathfrak{C}_n} + \frac{\mathfrak{A}^2\mathfrak{B}^2}{\mathfrak{C}_n^2}}.$$

Bestimmt man nun s so, dass

$$\Delta_s < \frac{1}{2}$$

und zugleich

$$\frac{\mathfrak{A}\mathfrak{B}}{\mathfrak{C}_s} + \frac{3h\mathfrak{h}_0 M^2}{\tau\sqrt{s}} < \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2\mathfrak{A}^{r-3}\mathfrak{C}_s} + \frac{\mathfrak{A}^2\mathfrak{B}^2}{\mathfrak{C}_s^2}}$$

wird, so hat man von $n = s$ an

$$R_n > \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2\mathfrak{A}^{r-1}\mathfrak{C}_s} + \frac{\mathfrak{A}^2\mathfrak{B}^2}{\mathfrak{C}_s^2}}.$$

Entspricht die Grösse $U_n^{(i)}$ einem Wurzelsystem

$$\varepsilon, \eta, \omega, \ldots \omega_1, \omega_2, \ldots \omega_\varkappa,$$

für welches Q_b imaginär ist und Q_b^{-1} nicht in der Reihe

$$Q_b P_0, \; Q_b P_1, \ldots Q_b P_{l-1}$$

vorkommt, so kommt die dem conjugirten Wurzelsysteme

$$\varepsilon^{-1}, \eta^{-1}, \omega^{-1}, \ldots \omega_1^{-1}, \omega_2^{-1}, \ldots$$

entsprechende Grösse $U_n^{(k)}$ ebenfalls in der Reihe

$$U_n^{(1)}, \; U_n^{(2)}, \ldots$$

vor und hat einen von i verschiedenen oberen Stellenzeiger k.

Ist Q_b imaginär und kommt Q_b^{-1} in der Reihe

$$Q_b P_0, \; Q_b P_1, \ldots Q_b P_{l-1}$$

vor, so hat man

$$Q_b^{-1} = Q_b P_\delta$$

und $\delta > 0$. Ist dann

$$U_n^{(i)} = \frac{\psi_a(1)\Theta_b(1)}{1} + \frac{\psi_a(2)\Theta_b(2)}{2} + \ldots$$

und setzt man

$$\psi_a(m) P_\delta = \psi_c(m),$$

$$U_n^{(k)} = \frac{\psi_c(1)\Theta_b(1)}{1} + \frac{\psi_c(2)\Theta_b(2)}{2} + \dots,$$

so ist k von i verschieden und

$$U_n^{(k)} = U_n^{(i)}.$$

Denn der conjugirte Werth von $\Theta_b(m)$ ist einerseits $= P_\delta \Theta_b(m)$ und anderseits $= \Theta_b(m)$, da $\Theta_b(m)$ reell ist. Man hat also

$$\Theta_b(m) P_\delta = \Theta_b(m)$$

und demzufolge

$$\Theta_b(m) = 0$$

für alle Zahlen m, wo $P_\delta = -1$ ist. Ist aber $P_\delta = 1$, so ist $\psi_a(m) = \psi_c(m)$.

Wenn also Q_b imaginär ist, so ist die Reihe

$$\frac{\psi_a(1)\Theta_b(1)}{1} + \frac{\psi_a(2)\Theta_b(2)}{2} + \dots$$

immer von Null verschieden.

17.

Ist Q_i reel, also $i = 0$, so ist $\Theta_0(m)$ die Anzahl aller Theiler von m oder Null, je nachdem m durch Formen aus Ω darstellbar ist oder nicht. In beiden Fällen ist, über alle Theiler δ von m erstreckt,

$$\Theta_0(m) = \Sigma\left(\frac{D}{\delta}\right).$$

Für jede zu $2D$ theilerfremde Zahl m ist aber

$$\left(\frac{D}{m}\right) = \Pi_0(m)$$

$$= \varepsilon_0^{\frac{1}{2}(m-1)} \eta_0^{\operatorname{in} dm} \omega_0^{\operatorname{in} dm} \dots$$

Ist daher

$$\psi_a(m) = \varepsilon^{\frac{1}{2}(m-1)} \eta^{\text{in } dm} \omega^{\text{in } dm} \ldots$$

und setzt man

$$\psi_c(m) = (\varepsilon\varepsilon_0)^{\frac{1}{2}(m-1)} (\eta\eta_0)^{\text{in } dm} (\omega\omega_0)^{\text{in } dm} \ldots,$$

so besteht weder das Wurzelsystem

$$\varepsilon, \eta, \omega, \ldots,$$

noch das System

$$\varepsilon\varepsilon_0, \eta\eta_0, \omega\omega_0, \ldots$$

aus lauter positiven Einheiten. Man kann also den Satz des Abschnittes 3 auf das Product der beiden Reihen

$$\frac{\psi_a(1)}{1} + \frac{\psi_a(2)}{2} + \frac{\psi_a(3)}{3} + \ldots$$

$$\frac{\psi_c(1)}{1} + \frac{\psi_c(2)}{2} + \frac{\psi_c(3)}{3} + \ldots$$

anwenden. Dasselbe ergibt sich

$$= \frac{C_1}{1} + \frac{C_2}{2} + \frac{C_3}{3} + \ldots,$$

wo, über alle Lösungen α, β der Gleichung

$$\alpha\beta = m$$

erstreckt,

$$C_m = \Sigma \psi_a(\alpha) \psi_c(\beta)$$

ist. Es ist aber

$$\psi_a(\alpha)\psi_c(\beta) = \psi_a(\alpha)\psi_a(\beta)\Pi_0(\beta)$$

$$= \psi_a(m)\left(\frac{D}{\beta}\right)$$

und demzufolge

$$C_m = \psi_a(m) \Sigma \left(\frac{D}{\beta}\right)$$

$$= \psi_a(m) \Theta_0(m).$$

Daher ist

$$\frac{\psi_a(1)\Theta_0(1)}{1}+\frac{\psi_a(2)\Theta_0(2)}{2}+\frac{\psi_a(3)\Theta_0(3)}{3}+\dots$$

$$=\left(\frac{\psi_a(1)}{1}+\frac{\psi_a(2)}{2}+\dots\right)\left(\frac{\psi_c(1)}{1}+\frac{\psi_c(2)}{2}+\dots\right)$$

und somit nach Abschnitt 6, 7 von Null verschieden.

18.

Steht einmal fest, dass alle Reihen

$$\frac{\psi_a(1)\Theta_b(1)}{1}+\frac{\psi_a(2)\Theta_b(2)}{2}+\frac{\psi_a(3)\Theta_b(3)}{3}+\dots$$

von Null verschieden sind, so kann der Dirichlet'sche Satz über die Darstellbarkeit von Primzahlen einer bestimmten zulässigen Linearform durch eine gegebene eigentlich primitive quadratische Form f in derselben Weise bewiesen werden, wie ich es in dem 77ten Bande des Crelle'schen Journals ausgeführt habe. Man kann nämlich für die Summe der natürlichen Logarithmen aller bis zu einer gegebenen Grenze G vorkommenden Primzahlen der in Rede stehenden Art, deren jeder durch eben diese Primzahl dividirt ist, einen asymptotischen Ausdruck von der Gestalt

$$\frac{2l}{\sigma h\varphi(M)}\log G+\{\Gamma\}$$

aufstellen, wo Γ eine angebbare Constante und $\sigma=2$ oder $=1$ ist, je nachdem die Form f ambig ist oder nicht. Dieser Ausdruck enthält unmittelbar den gewünschten Beweis. Nimmt man z. B.

$$n \geqq e^{\frac{\Gamma\sigma\varphi(M)}{l}},$$

so weiss man, dass zwischen n und n^2 sicher Primzahlen der gewünschten Art anzutreffen sind.

Setzt man für eine Primzahl p

$$\Theta_b(p)=\varrho_b+\varrho_b^{-1},$$

so ist $\psi_a(p^\mu)\,\Theta_b(p^\mu)$ der Coëfficient von x^μ in der Entwickelung des Ausdruckes

$$\frac{1}{(1-x\psi_a(p)Q_b)\,(1-x\psi_a(p)Q_b^{-1})};$$

differentiirt man diesen Ausdruck nach x, so erscheint $\mu\psi_a(p^\mu)\,\Theta_b(p^\mu)$ als Coëfficient von $x^{\mu-1}$ in dem Ausdrucke

$$\frac{1}{(1-x\psi_a(p)Q_b(p))(1-x\psi_a(p)Q_b^{-1})}\left(\frac{\psi_a(p)Q_b}{1-x\psi_a(p)Q_b}+\frac{\psi_a(p)Q_b^{-1}}{1-x\psi_a(p)Q_b^{-1}}\right)$$
$$=(1+x\psi_a(p)\Theta_b(p)+x^2\psi_a(p^2)\Theta_b(p^2)+\ldots)$$
$$(\psi_a(p)\Theta_b(p)+x\psi_a(p^2)\,(Q_b^2+Q_b^{-2})+\ldots)$$

Es ist also

$$\begin{aligned}\mu\psi_a(p^\mu)\Theta_b(p^\mu)=\ &\psi_a(p)(Q_b+Q_b^{-1})\psi_a(p^{\mu-1})\ \Theta_b(p^{\mu-1})\\ &+\psi_a(p^2)(Q_b^2+Q_b^{-2})\psi_a(p^{\mu-2})\Theta_b(p^{\mu-2})\\ &+\ldots\\ &+\psi_a(p^\mu)(Q_b^\mu+Q_b^{-\mu})\psi_a(1)Q_b(1).\end{aligned}$$

Hieraus folgt allgemeiner, wenn $m=m^1p^\mu$ und m^1 nicht mehr durch p theilbar ist,

$$\mu\psi_a(m)\Theta_b(m)=\sum_{k=1}^{k=\mu}\psi_a(p^k)\,(Q_b^k+Q_b^{-k})\,\psi_a\left(\frac{m}{p^k}\right)\Theta_b\left(\frac{m}{p^k}\right).$$

Man zerlege nun in jedem Gliede $\frac{\psi_a(m)\Theta_b(m)\log m}{m}$ des Ausdruckes

$$B_n=\frac{\psi_a(2)\Theta_b(2)\log 2}{2}+\frac{\psi_a(3)\Theta_b(3)\log 3}{3}+\ldots+\frac{\psi_a(n)\Theta_b(n)\log n}{n}$$

den Logarithmus in die Logarithmen der Primfactoren von m und ordne das Resultat nach den Logarithmen der einzelnen Primzahlen. Tritt die Primzahl p in m genau μmal als Factor auf, so liefert das Glied $\frac{\psi_a(m)\Theta_b(m)\log m}{m}$ zu dem Gesammtgliede mit $\log p$ den Beitrag

$$\frac{\log p}{m} \cdot \mu \psi_a(m)\Theta_b(m) = \psi_a(p)(Q_b + Q_b^{-1})\frac{\log p}{p}\frac{\psi_a(m_1)(Q_b m_1)}{m_1}$$
$$+\psi_a(q^2)(Q_b^2 + Q_b^{-2})\frac{\log q}{q^2} \cdot \frac{\psi_a(m_2)\Theta_b(m_2)}{m_2}$$
$$+\dots,$$

wo

$$m_1 = \frac{m}{q},\ m_2 = \frac{m}{p^2}, \dots$$

Setzt man

$$F(z) = \frac{\psi_a(1)\Theta_b(1)}{1} + \frac{\psi_a(2)\Theta_b(2)}{2} + \dots$$
$$+ \frac{\psi_a(\nu)\Theta_b(\nu)}{\nu},$$

wo $\nu = E(z)$, so wird demnach

$$B_\eta = \sum F\left(\frac{n}{p}\right)\psi_a(p)(Q_b + Q_b^{-1})\frac{\log p}{p}$$
$$+ \sum F\left(\frac{n}{p^2}\right)\psi_a(p^2)(Q_b^2 + Q_b^{-2})\frac{\log p}{p^2}$$
$$+ \sum F\left(\frac{n}{p^3}\right)\psi_a(p^3)(Q_b^3 + Q_b^{-3})\frac{\log p}{p^3}$$
$$+\dots$$

Nun ist nach Abschnitt 13

$$F\left(\frac{n}{p}\right) = F(\infty) + \left\{\frac{3hf_0M^2}{\sqrt{n}}\right\}\sqrt{p}$$

und

$$\sum F\left(\frac{n}{p^2}\right)\psi_a(p^2)(Q_b^2 + Q_b^{-2})\frac{\log p}{p^2}$$
$$+ \sum F\left(\frac{n}{p^3}\right)\psi_a(p^3)(Q_b^3 + Q_b^{-3})\frac{\log p}{p^3} + \dots$$
$$= \{2L\}\sum\frac{\log p}{p(p-1)},$$

wenn L eine Grenze bezeichnet, welche der Modul von $F(z)$ nicht übersteigen kann.

Ferner ist[1]

$$\sum^{n} \frac{\log p}{\sqrt{p}} = \left\{ 4\sqrt{n} \right\}.$$

Daher wird

$$B_n = F(\infty) \sum^{n} \psi_a(q)(Q_b + Q_b^{-1}) \frac{\log p}{p}$$
$$+ \left\{ 2L \sum_{2}^{\infty} \frac{\log p}{p(p-1)} + 12 h \mathfrak{h}_0 M^2 \right\}.$$

Da die Reihe

$$\frac{\psi_a(2)\Theta_b(2)\log 2}{2} + \frac{\psi_a(3)\Theta_b(3)\log 3}{3} + \ldots$$

convergirt und $F(\infty)$ nicht $= 0$ ist, so kann demnach der Modul der Summe

$$\sum^{n} \psi_a(p)(Q_b + Q_b^{-1}) \frac{\log p}{p}$$

nie eine angebbare Grenze G übersteigen.

Dasselbe[2] gilt von dem Ausdrucke

$$\sum^{n} \frac{2 \log p}{p} - \log n.$$

19.

Es handle sich nun um die Isolirung der Primzahlen p_0 einer bestimmten Linearform $Mu + N$, welche durch eine gegebene Form

$$f = f_1^{\pi_1} f_2^{\pi_2} \ldots f_\varkappa^{\pi_\varkappa}$$

aus Ω darstellbar und nicht grösser als n sind. Damit diese Bedingungen verträglich sind, müssen alle Charakterproducte $\Pi(N)$ denselben Werth haben, wie beziehungsweise die

---

[1] L. c.

[2] Crelle's Journal, Bd. 78, S. 49, 61.

Charakterproducte $\Pi(m_0)$, wenn m_0 eine bestimmte zu M theilerfremde durch f dargestellte Zahl bezeichnet. Ist

$$NN' \equiv 1 \pmod{M},$$

so ist dann auch

$$\Pi(N') = \Pi(N) = \Pi(m_0)$$

und somit

$$\Pi(N'p) = \Pi(m_0 p),$$

wenn p irgend eine in M nicht aufgehende und durch Formen aus Ω darstellbare Primzahl bezeichnet. Alle einzelnen Charakterproducte $\Pi(pN')$ haben also dieselben Werthe wie für die durch die Formen

$$f_1^{\pi_1+e_1} f_2^{\pi_2+e_2} \ldots f_\varkappa^{\pi_\varkappa+e_\varkappa},\ f_1^{\pi_1-e_1} f_2^{\pi_2-e_2} \ldots f_\varkappa^{\pi_\varkappa-e_\varkappa}$$

darstellbaren zu M theilerfremden Zahlen, wenn p durch die Form $f_1^{e_1} f_2^{e_2} \ldots f_\varkappa^{e_\varkappa}$ darstellbar ist. Setzt man daher

$$\Theta_b(p) = Q_b + Q_b^{-1} = \omega_1^{e_1} \omega_2^{e_2} \ldots \omega_\varkappa^{e_\varkappa} + \omega_1^{-e_1} \omega_2^{-e_2} \ldots \omega_\varkappa^{-e_\varkappa}$$

und bestimmt die kleinsten positiven Zahlen μ, ν von der Art, dass das μfache aller Indices von $\psi_a(pN')$ und der Exponenten $\pi_1+e_1,\ \pi_2+e_2 \ldots \pi_\varkappa+e_\varkappa$ einerseits und das νfache aller Indices von $\psi_a(pN')$ und der Exponenten $\pi_1-e_1,\ \pi_2-e_2 \ldots \pi_\varkappa-e_\varkappa$ anderseits, beziehungsweise durch

$$2,\ \varphi(2^{\vartheta-1}),\ \varphi(q^\rho),\ \ldots\ m_1,\ m_2, \ldots m_\varkappa$$

theilbar ist, so wird nach Abschnitt 11

$$\Pi \frac{1}{(1 - x\psi_a(pN')\,\omega_1^{\pi_1+e_1}\omega_2^{\pi_2+e_2}\ldots)(1 - x\psi_a(pN')\,\omega_1^{\pi_1-e_1}\omega_2^{\pi_2-e_2}\ldots)}$$
$$= \frac{1}{(1-x^\mu)^{\frac{1+r}{\mu}}} \cdot \frac{1}{(1-x^\nu)^{\frac{1+r}{\nu}}},$$

wo das Product über alle Werthe von a und alle engeren Wurzelsysteme $\omega_2, \omega_2, \ldots \omega_\varkappa$ zu erstrecken ist.

Nimmt man auf beiden Seiten den Coëfficienten von x, so erhellt, dass die über alle Werthe von a und alle engeren Wurzelsysteme $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_\varkappa$ zu erstreckende Summe

$$\sum \frac{\psi_a(pN')\Theta_b(p)}{1+r}\,\omega_1^{\pi_1}\omega_2^{\pi_2}\ldots\omega_\varkappa^{\pi_\varkappa} \tag{11}$$

den Werth 0, 1 oder 2 hat, je nachdem keine der beiden Zahlen μ, ν oder eine derselben oder die eine und die andere den Werth 1 hat.

Damit $\mu = 1$ sei, müssen alle Indices von pN' den Werth 0 haben und alle Exponenten $\pi_1+e_1, \pi_2+e_2, \ldots \pi_\varkappa+e_\varkappa$, beziehungsweise durch $m_1, m_2, \ldots m_\varkappa$ theilbar sein. Dies kann aber nur eintreten, wenn

$$pN' \equiv 1 \pmod{M}$$

also

$$p \equiv N \pmod{M}$$

ist und die die Zahl p darstellende Form $f_1^{-e_1}f_2^{-e_2}\ldots f_\varkappa^{-e_\varkappa}$ mit f zusammenfällt, wenn demnach p der Linearform $Mu+N$ angehört und durch f darstellbar ist.

Damit $\nu = 1$ sei, müssen alle Indices von pN' und alle Exponenten $\pi_1-e_1, \pi_2-e_2, \ldots \pi_\varkappa-e_\varkappa$ den Werth 0 haben; es muss also

$$p \equiv N \pmod{M},$$

und

$$f_1^{e_1}f_2^{e_2}\ldots f_\varkappa^{e_\varkappa} = f$$

oder p in der Linearform $Mu+N$ enthalten und durch f darstellbar sein.

Damit $\mu = \nu = 1$ sei, muss demnach gleichzeitig

$$\pi_1+e_1 \equiv 0 \pmod{m_1} \quad \pi_2+e_2 \equiv 0 \pmod{m_2}\ldots$$
$$\pi_1-e_1 \equiv 0 \qquad\qquad \pi_2-e_2 \equiv 0\ldots.$$

oder

$$\pi_1 \equiv 0 \left(\mathrm{mod}\ \frac{1}{2}m_1\right),\ \pi_2 \equiv 0 \left(\mathrm{mod}\ \frac{1}{2}m_2\right), \ldots \pi_{\lambda_1} \equiv 0 \left(\mathrm{mod}\ \frac{1}{2}m_\lambda\right)$$

sein. Dieser Fall kann also nur statthaben und hat immer statt, wenn f ambig ist.

Dies vorausgeschickt, multipliciere man die Summe

$$\sum^{n} \psi_a(p)\,\Theta_b(p)\,\frac{\log p}{p} \tag{12}$$

mit

$$\frac{1}{r+1}\,\psi_a(N')\,\omega_1^{\bar{\kappa}_1}\omega_2^{\bar{\kappa}_2}\ldots\omega_\varkappa^{\bar{\kappa}_\varkappa}$$

und summire hierauf über alle Werthe von a und alle engeren Wurzelsysteme $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_\varkappa$. In dem Resultate erscheint, wenn man eine der Primzahlen p herausgreift, auf welche sich die Summe (12) bezieht, der dieser Primzahl entsprechende Ausdruck $\frac{\log p}{p}$ mit der Summe (11) multiplicirt. Er fällt daher fort, wenn p keine der Primzahlen p_0 ist und bleibt mit dem Coëfficienten σ zurück, wenn p mit einer der Primzahlen p_0 zusammenfällt. Das Resultat hat demnach die Gestalt

$$\sigma \sum \frac{\log p_0}{p_0}.$$

Führt man dann statt der Summe (12) ihren Werth ein, welcher für $a = b = 0$ die Gestalt $\log n + \{G_1\}$ und für alle anderen Werthe von a und b einen Werth $\{G\}$ hat, so ergibt sich

$$\sigma \sum \frac{\log p_0}{p_0} = \frac{1}{r+1} \log n + \left\{ \frac{rG + G'}{r+1} \right\}.$$

XXVI. SITZUNG VOM 12. DECEMBER 1895

Erschienen ist Heft VIII (October 1895), Abtheilung I des 104. Bandes der Sitzungsberichte.

Das c. M. Herr Hofrath Prof. E. Ludwig übersendet eine von den Herren Prof. Dr. J. Mauthner und Prof. Dr. W. Suida in Wien ausgeführte Arbeit: »Beiträge zur Kenntniss des Cholesterins« (III. Abhandlung).

Das c. M. Herr Hofrath Prof. A. Bauer übersendet eine Arbeit aus dem chemischen Laboratorium der k. k. Staatsgewerbeschule in Bielitz: »Zur Kenntniss der gefärbten Rosanilinbasen«, von Prof. Dr. G. v. Georgievics.

Der Secretär legt ein von Herrn W. Ebert in Genf eingesendetes versiegeltes Schreiben behufs Wahrung der Priorität vor, welches die Aufschrift führt: »Reduction des Dreikörperproblems in der Ebene auf die Radiivectoren«.

Über Ansuchen des Herrn Franz Carl Lukas, k. k. Rechnungs-Officials in Wien, wird dessen in der Sitzung dieser Classe vom 7. März l. J. behufs Wahrung der Priorität vorgelegtes versiegeltes Schreiben mit der Aufschrift: »Rotationsreihen« eröffnet. Der auszugsweise Inhalt desselben wird zur Veröffentlichung in dem akademischen Anzeiger bestimmt.

Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:

The Analyst, the Organ of the Society of Public Analyst, a monthly Journal devoted to the advancement of Analytical Chemistry. Volume XX, No. 226—237 (January to December 1S95). London, 1895; 8°.

XXVII. SITZUNG VOM 19. DECEMBER 1895.

Erschienen ist der 62. Band (Jahrgang 1895) der Denkschriften dieser Classe, ferner die daraus veranstaltete Collectivausgabe der Tiefseeberichte (IV. Reihe).

Der Secretär legt das im Auftrage Sr. k. u. k. Hoheit des durchlauchtigsten Herrn Erzherzogs Ludwig Salvator, Ehrenmitgliedes der kaiserl. Akademie, von der Buchdruckerei Heinrich Mercy in Prag übersendete Werk: »Die Liparischen Inseln. V. Filicuri« vor.

Herr Prof. Dr. L. Weinek, Director der k. k. Sternwarte in Prag, übermittelt 9 Fortsetzungen seiner neuesten Mondarbeiten.

Das w. M. Herr Prof. L. Pfaundler übersendet eine Arbeit aus dem physikalischen Institute der k. k. Universität in Graz von Herrn Albin Keiter: »Über die Tragkraft stabförmiger Elektromagnete«.

Herr Prof. L. Mrazec von der Universität in Bukarest übersendet eine Mittheilung: »Über die Anthracitbildungen des südlichen Abhanges der Südkarpathen«.

Herr Victor Grünberg, Assistent der Lehrkanzel für Physik an der k. k. technischen Hochschule in Brünn, übersendet eine Mittheilung über einen leichttransportablen Apparat für den Petrographen zur raschen Bestimmung des specifischen Gewichtes eines Minerals (Gesteins).

Das w. M. Oberbergrath Dr. E. v. Mojsisovics legt eine gemeinsam mit den Herren Prof. Dr. W. Waagen und Dr. C. Diener ausgeführte Arbeit: »Entwurf einer Gliederung der pelagischen Sedimente des Triassystems« vor.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. Ad. Lieben überreicht eine Arbeit aus seinem Laboratorium von Dr. W. Meyerhoffer: »Über reciproke Salzpaare. I. Theorie der reciproken Salzpaare mit besonderer Berücksichtigung von Salmiak und Natriumnitrat«.

Das w. M. Herr Regierungsrath Prof. F. Mertens überreicht eine Abhandlung: »Über das Nichtverschwinden der Dirichlet'schen Reihen mit reellen Gliedern«.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. V. v. Lang überreicht eine Mittheilung der Herren Regierungsrath Dr. J. M. Eder und E. Valenta in Wien: »Über drei verschiedene Spectren des Argon«.

Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:

Erzherzog Ludwig Salvator, Die Liparischen Inseln, V. Filicuri. Prag, 1895; Folio.

Vlaicu Arseniu, Merceologia si Technologia pentru scolele comerciale, profesionale si studiu privat. Brasov, 1895; 8°.

Über das Nichtverschwinden Dirichlet'scher Reihen mit reellen Gliedern

von

Franz Mertens.

In seinem berühmten Beweise für das Vorkommen von unendlich vielen Primzahlen in einer gegebenen arithmetischen Reihe, deren Differenz zu ihren Gliedern theilerfremd ist, hat bekanntlich Dirichlet das Nichtverschwinden gewisser unendlicher Reihen aus der Theorie der binären quadratischen Formen entlehnt, indem er mit Hilfe des quadratischen Reciprocitätsgesetzes zeigte, dass diese Reihen als Factor in dem Ausdrucke für die Anzahl der primitiven Classen einer gegebenen Determinante auftreten.

So interessant aber auch dieser Zusammenhang der fraglichen Reihen mit der Bestimmung der Classenanzahl der primitiven binären quadratischen Formen sein möge, so ist es doch wünschenswerth, einen Beweis für das Nichtverschwinden solcher Reihen zu besitzen, welcher ohne Reciprocitätssatz und quadratische Formen auskommt.

Es sei M die Differenz der gegebenen arithmetischen Reihe und

$$M = 2^{\lambda} p^{\pi} p_1^{\pi_1} \ldots,$$

wo $p, p_1, \ldots$ ungerade Primzahlen bezeichnen. Man stelle für jede zu M theilerfremde Zahl m eine vollständige Indicesreihe auf und setze

$$c_m = \varepsilon^{\frac{m-1}{2}} \eta^{\mathrm{ind}\, m} \omega^{\mathrm{ind}\, m} \omega_1^{\mathrm{ind}\, m} \ldots,$$

wo ε, η, ω, $\omega_1, \ldots$ Wurzeln der Gleichungen

$$\varepsilon^2 = 1, \; \eta^{\varphi(2^\lambda - 1)} = 1, \; \omega^{\varphi(p^\pi)} = 1, \ldots$$

bezeichnen. Für Zahlen m dagegen, welche nicht zu M theilerfremd sind, sei $c_m = 0$. Es handelt sich dann um den Beweis, dass die unendliche Reihe

$$\frac{c_1}{1} + \frac{c_2}{2} + \frac{c_3}{3} + \ldots$$

einen von Null verschiedenen Werth besitzt, wenn die Wurzeln ε, η, $\omega, \ldots$ alle einen der Werthe $+1$ oder -1 haben und mindestens eine derselben $= -1$ ist.

Setzt man

$$\frac{c_1}{1} + \frac{c_2}{2} + \ldots + \frac{c_n}{n} = \Theta(n),$$

so genügt es zu zeigen, dass $\Theta(n)$ von einem bestimmten Werthe s von n an über einer anzugebenden positiven Grösse liegt.

2.

Es seien

$$u_1, u_2, u_3, \ldots u_n$$
$$v_1, v_2, v_3, \ldots v_n$$

Unbestimmte und man setze

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n = U$$
$$v_1 + v_2 + \ldots + v_n = V$$
$$\Sigma u_\alpha v_\beta = w_m,$$

wo die Summe über alle Zerlegungen der Zahl m in zwei positive Factoren α, β zu erstrecken ist.

Die Glieder des Productes UV haben alle die Gestalt $u_\alpha v_\beta$ und zerfallen in vier Gruppen.

In die erste Gruppe stelle man alle Glieder, welche der Bedingung $\alpha\beta \leqq n$ genügen. Fasst man alle Ausdrücke $u_\alpha v_\beta$ zusammen, in welchen das Product der Stellenzeiger α, β einen

und denselben Werth m hat, so ist das Resultat w_m und die Summe der Glieder der ersten Gruppe demzufolge

$$= w_1 + w_2 + w_3 + \ldots + w_n.$$

In den Gliedern der zweiten Gruppe sei $\alpha\beta > n$ und $\alpha \leqq g$. wo g die grösste in $\sqrt{n}$ enthaltene ganze Zahl bezeichnet. Fasst man alle Glieder zusammen, in welchen α einen und denselben Werth hat, und setzt zur Abkürzung

$$\psi_\alpha = v_{1+a} + v_{2+a} + \ldots + v_n,$$

wo a die grösste in $\frac{n}{\alpha}$ enthaltene ganze Zahl bezeichnet, so ist das Resultat $u_a \psi_a$ und die Summe der Glieder der zweiten Gruppe

$$= u_2 \psi_2 + u_3 \psi_3 + \ldots + u_g \psi_g.$$

Die dritte Gruppe enthalte die Glieder, in welchen $\alpha\beta > n$ und $\beta \leqq g$ ist. Setzt man

$$\varphi_\beta = u_{1+b} + u_{2+b} + \ldots + u_n,$$

wo b die grösste in $\frac{n}{\beta}$ enthaltene ganze Zahl bezeichnet, so ist die Summe dieser Glieder:

$$v_2 \varphi_2 + v_3 \varphi_3 + \ldots + v_g \varphi_g.$$

Die vierte Gruppe endlich enthalte alle Glieder, in welchen α und $\beta > g$ sind. Ihre Summe ist:

$$(u_{1+g} + u_{2+g} + \ldots + u_n)(v_{1+g} + v_{2+g} + \ldots + v_n).$$

Man hat demnach

$$\begin{aligned} UV = {} & w_1 + w_2 + \ldots + w_n \\ & + u_2 \psi_2 + u_3 \psi_3 + \ldots + u_g \psi_g \\ & + v_2 \varphi_2 + v_3 \varphi_3 + \ldots + v_g \varphi_g \\ & + (u_{1+g} + u_{2+g} + \ldots + u_n)(v_{1+g} + v_{2+g} + \ldots + v_n). \end{aligned} \tag{1}$$

3.

Es werde nun allgemein

$$u_m = \frac{1}{\sqrt{m}} \qquad v_m = \frac{c_m}{\sqrt{m}}$$

gesetzt.

Die Grössen $w_1, w_2, \ldots$ fallen dann alle nicht negativ aus. Es wird nämlich

$$w_m = \frac{1}{\sqrt{m}} f(m),$$

wo

$$f(m) = c_1 + c_\delta + c_{\delta'} + \ldots$$

ist und $1, \delta, \delta', \ldots$ alle Theiler von m bezeichnen.

Ist m nicht theilerfremd zu M und $= m_1 d$, wo m_1 zu M theilerfremd ist und d in einer Potenz von M aufgeht, so ist $f(m) = f(m_1)$.

Ist m theilerfremd zu M und eine Primzahlpotenz q^μ, so ist

$$\begin{aligned} f(q^\mu) &= 1 + c_q + (c_q)^2 + \ldots + (c_q)^\mu \\ &= 1 \pm 1 + 1 \pm 1 + \ldots \\ &\geqq 0. \end{aligned}$$

Insbesondere ist bei geradem μ immer $f(q^\mu) \geqq 1$.

Ist m ein Product verschiedener Primzahlpotenzen, so ist

$$\begin{aligned} f(q^\mu r^\nu \ldots) &= f(q^\mu) . f(r^2) \ldots \\ &\geqq 0 \end{aligned}$$

und insbesondere

$$f(q^\mu r^\nu \ldots) \geqq 1,$$

wenn alle Exponenten $\mu, \nu, \ldots$ gerade sind.

Es ist also allgemein

$$f(m) \geqq 0$$

und insbesondere für jede Quadratzahl k^2

$$f(k^2) \geqq 1.$$

Denn auch in dem Falle, wo k^2 nicht zu M theilerfremd ist, wird

$$f(k^2) = f\left(\frac{k^2}{d^2}\right) \geqq 1,$$

wo $\frac{k}{d}$ zu M theilerfremd ist und d in einer Potenz von M aufgeht.

Hienach wird

$$\begin{aligned} w_1 + w_2 + \ldots + w_n &\geqq \frac{f(1)}{1} + \frac{f(4)}{2} + \frac{f(9)}{3} + \frac{f(g^2)}{g} \qquad (2) \\ &\geqq \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{g} \\ &> \log g. \end{aligned}$$

4.

Nach der Abel'schen Umformung ist

$$\begin{aligned} &\frac{c_k}{\sqrt{k}} + \frac{c_{k+1}}{\sqrt{k+1}} + \ldots + \frac{c_n}{\sqrt{n}} \\ &= c_k\left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}\right) + (c_k + c_{k+1})\left(\frac{1}{\sqrt{k+1}} - \frac{1}{\sqrt{k+2}}\right) \\ &\quad + (c_k + c_{k+1} + c_{k+2})\left(\frac{1}{\sqrt{k+2}} - \frac{1}{\sqrt{k+3}}\right) + \ldots \\ &\quad + (c_k + c_{k+1} + \ldots + c_{n-1})\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \\ &\quad + (c_k + c_{k+1} + \ldots + c_n)\frac{1}{\sqrt{n}}. \end{aligned}$$

Da aber ohne Rücksicht auf das Vorzeichen

$$c_k + c_{k+1} + \ldots \leqq \frac{1}{2}\varphi(M)$$

ist, so folgt

$$\begin{aligned} &\frac{c_k}{\sqrt{k}} + \frac{c_{k+1}}{\sqrt{k+1}} + \ldots + \frac{c_n}{\sqrt{n}} \leqq \qquad (3) \\ &\leqq \frac{1}{2}\varphi M\left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \leqq \frac{\varphi(M)}{2\sqrt{k}}. \end{aligned}$$

Hienach ist, wenn a die grösste in $\frac{n}{\alpha}$ enthaltene ganze Zahl bezeichnet,

$$\psi_a \leqq \frac{\varphi(M)}{2\sqrt{1+a}} < \frac{\varphi(M)}{2\sqrt{n}} \sqrt{\alpha}.$$

Dann wird aber

$$u_\alpha \psi_a = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \psi_a < \frac{\varphi(M)}{2\sqrt{n}}$$

$$u_2 \psi_2 + u_3 \psi_3 + \ldots + u_g \psi_g < \frac{g\varphi(M)}{2\sqrt{n}} \leqq \frac{1}{2} \varphi(M)$$

also

$$u_2 \psi_2 + u_3 \psi_3 + \ldots + u_g \psi_g + \frac{1}{2} \varphi(M) > 0. \tag{4}$$

5.

Da

$$2\sqrt{m} - 2\sqrt{m-1} - \frac{1}{\sqrt{m}} = \frac{1}{\sqrt{m}(\sqrt{m}+\sqrt{m-1})^2}$$

also

$$0 < 2\sqrt{m} - 2\sqrt{m-1} - \frac{1}{\sqrt{m}} < 4\left(\frac{1}{\sqrt{m}} - \frac{1}{\sqrt{m+1}}\right)$$

ist, so ergibt sich, wenn $m = k+1, k+2, \ldots n$ gesetzt und addirt wird,

$$0 < 2\sqrt{n} - 2\sqrt{k} - \frac{1}{\sqrt{k+1}} - \frac{1}{\sqrt{k+2}} - \ldots - \frac{1}{\sqrt{n}} < \frac{4}{\sqrt{k+1}}.$$

Man kann daher

$$\frac{1}{\sqrt{k+1}} + \frac{1}{\sqrt{k+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} = 2\sqrt{n} - 2\sqrt{k} - \frac{4\rho}{\sqrt{k+1}} \tag{5}$$

setzen, wo $0 < \rho < 1$.

Hieraus folgt, wenn b die grösste in $\frac{n}{\beta}$ enthaltene ganze Zahl bezeichnet,

$$\varphi_\beta = 2\sqrt{n} - 2\sqrt{b} - \frac{4\rho}{\sqrt{1+b}}.$$

Setzt man aber $b = \frac{n-\gamma}{\beta}$, so wird

$$\sqrt{b} = \sqrt{\frac{n}{\beta}} - \frac{\sqrt{n}-\sqrt{n-\gamma}}{\sqrt{\beta}}$$

$$= \sqrt{\frac{n}{\beta}} - \frac{\gamma}{\beta}\,\frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{n}+\sqrt{n-\gamma}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+b}} = \sqrt{\frac{\beta}{n+\beta-\gamma}}$$

und demzufolge

$$\varphi_\beta = 2\sqrt{n} - 2\sqrt{\frac{n}{\beta}} + \frac{2\gamma}{\beta}\,\frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{n}+\sqrt{n-\gamma}} - \frac{4\rho\sqrt{\beta}}{\sqrt{n+\beta-\gamma}}$$

$$= 2\sqrt{n} - 2\sqrt{\frac{n}{\beta}} \pm 4\rho\sqrt{\frac{\beta}{n}}.$$

Hienach wird

$$v_2\varphi_2 + v_3\varphi_3 + \ldots + v_g\varphi_g = 2\sqrt{n}\,(v_2 + v_3 + \ldots + v_g) \qquad (6)$$

$$-2\sqrt{n}\left(\frac{c_2}{2} + \frac{c_3}{3} + \ldots + \frac{c_g}{g}\right) \pm \frac{4\rho g}{\sqrt{n}}$$

$$= 2\sqrt{n}\,(v_1 + v_2 + \ldots + v_g) - 2\sqrt{n}\,\Theta(g) \pm 4\rho.$$

Ferner ist nach (5)

$$u_{1+g} + u_{2+g} + \ldots + u_n = 2\sqrt{n} - 2\sqrt{g} - \frac{4\rho}{\sqrt{1+g}}$$

und daher nach (3)

$$(u_{1+g} + u_{2+g} + \ldots + u_n)(v_{1+g} + v_{2+g} + \ldots + v_n) \qquad (7)$$

$$= 2\sqrt{n}\,(v_{1+g} + v_{2+g} + \ldots + v_n)$$

$$\cdot \pm \left(2\sqrt{g} + \frac{4\rho}{\sqrt{1+g}}\right) \cdot \frac{\rho^1 \varphi(M)}{2\sqrt{1+g}}$$
$$= 2\sqrt{n}\,(v_{1+g} + v_{2+g} + \ldots + v_n) \pm \rho_1 \varphi(M)\left(1 + \frac{2}{\sqrt{n}}\right),$$

wo ρ', ρ_1 ebenfalls nicht negativ und kleiner als 1 sind.

Man hat daher auch nach (6), (7)

$$\begin{aligned} &v_2\varphi_2 + v_3\varphi_3 + \ldots + v_g\varphi_g \\ &+ (u_{1+g} + u_{2+g} + \ldots + u_n)(v_{1+g} + v_{2+g} + \ldots + v_n) \\ &+ 2\sqrt{n}\,\Theta(g) - 2\sqrt{n}\,V + 4 + \varphi(M)\left(1 + \frac{2}{\sqrt{n}}\right) \geqq 0. \end{aligned} \tag{8}$$

6.

Schreibt man die Gleichung (1) in der Gestalt

$$\begin{aligned} &UV - v_2\varphi_2 - v_3\varphi_3 - \ldots - v_g\varphi_g \\ &- u_2\psi_2 - u_3\psi_3 - \ldots u_g\psi_g \\ &- (u_{1+g} + u_{2+g} + \ldots + u_n)(v_{1+g} + v_{2+g} + \ldots + v_n) \\ &= w_1 + w_2 + \ldots + w_n \end{aligned}$$

und addirt zu derselben die Ungleichungen (4) und (8), so ergibt sich nach (2)

$$\begin{aligned} 2\sqrt{n}\,\Theta(g) - (2\sqrt{n} - U)V + 4 + \left(\frac{3}{2} + \frac{2}{\sqrt{n}}\right)\varphi(M) \\ > w_1 + w_2 + \ldots + w_n \\ > \log g. \end{aligned}$$

Nach (5), (3) ist aber

$$2\sqrt{n} - U < 4$$
$$V \leqq \frac{1}{2}\varphi(M)$$

und demzufolge

$$2\sqrt{n}\,\Theta(g) + 4 + \left(\frac{7}{2} + \frac{2}{\sqrt{n}}\right)\varphi(M) > \log g$$

oder

$$\Theta(g) > \frac{\log g}{2\sqrt{n}} - \frac{4 + \left(\frac{7}{2} + \frac{2}{\sqrt{n}}\right)\varphi(M)}{2\sqrt{n}}.$$

Wird noch der Einfachheit wegen n durch n^2 ersetzt, so folgt

$$\Theta(n) > \frac{\log n}{2n} - \frac{4 + \left(\frac{7}{2} + \frac{2}{n}\right)\varphi(M)}{2n}.$$

Man bestimme nun eine möglichst kleine Zahl s von der Art, dass

$$\frac{1}{2}\log s \geqq 4 + \left(\frac{7}{2} + \frac{2}{s}\right)\varphi(M) + \varphi(M)\frac{s}{1+s}$$

wird. Da nach der Abel'schen Umformung

$$\frac{c_{1+s}}{1+s} + \frac{c_{2+s}}{2+s} + \ldots + \frac{c_n}{n} \leqq \frac{1}{2}\varphi(M)\frac{1}{1+s}$$

ist, so wird dann von $n = s$ an

$$\Theta(n) > \frac{\log s}{2s} - \frac{4 + \left(\frac{7}{2} + \frac{2}{s}\right)\varphi(M)}{2s} - \frac{1}{2}\varphi(M)\frac{1}{s+1}$$

$$> \frac{\log s}{4s}.$$

Die homogenen Coordinaten als Wurf-coordinaten

von

Gustav Kohn in Wien.

(Vorgelegt in der Sitzung am 4. Juli 1896.)

1. In einem rationalen Gebiet erster Stufe kann eine Parametervertheilung bekanntlich dadurch fixirt werden, dass man drei beliebig gewählten Elementen (Punkten) die Parameterwerthe 0, ∞, 1 zuweist. Werden nur Null- und Unendlichkeitspunkt für die Parametervertheilung gewählt, so sind lediglich die Verhältnisse der Parameter der einzelnen Punkte festgelegt.

Der folgende Satz führt die Bestimmung eines Punktes in einem linearen Raum R_n von n Dimensionen durch homogene Coordinaten direct zurück auf die Parametervertheilung (Coordinatenbestimmung) in einer geraden Linie.

Die homogenen Coordinaten $y_1, y_2, \ldots y_{n+1}$, welche ein Punkt Y in einem Coordinatensystem besitzt, dessen Fundamentalebenen $x_1 = 0$, $x_2 = 0, \ldots x_{n+1} = 0$ und dessen Einheitspunkt E ist, sind proportional den Parameterwerthen, welche auf der Verbindungslinie der Punkte E und Y ihren Schnittpunkten mit den Fundamentalebenen des Coordinatensystems in einer Parametervertheilung zukommen, für die Y der Nullpunkt und E der Unendlichkeitspunkt ist.

Der Beweis für diese Behauptung liegt in dem Gleichungssystem

$$\rho x_1 = y_1 - \lambda$$
$$\rho x_2 = y_2 - \lambda$$
$$\vdots$$
$$\rho x_{n+1} = y_{n+1} - \lambda.$$

In diesem Gleichungssystem, in welchem $x_1, x_2, \ldots x_{n+1}$ die laufenden Coordinaten eines Punktes, ρ einen Proportionalitätsfactor und λ einen Parameter bedeutet, hat man die Parameterdarstellung einer geraden Linie und man erhält für $\lambda = 0$ den Punkt Y, für $\lambda = \infty$ den Punkt E, während für $\lambda = y_i$ $x_i = 0$ resultirt.

2. Für die homogenen Coordinaten eines Punktes Y des R_n lässt sich noch eine andere ähnliche Bedeutung angeben, die sich folgendermassen ausspricht:

Macht man auf der Normcurve des R_n, welche die Ecken der Coordinatenpyramide und den Einheitspunkt E mit dem Punkt Y verbindet, E zum Nullpunkt und Y zum Unendlichkeitspunkt einer Parametervertheilung, so sind die Parameter der Ecken der Coordinatenpyramide den homogenen Coordinaten $y_1, y_2, \ldots y_{n+1}$ des Punktes Y proportional.

Die Richtigkeit deser Behauptung wird in Evidenz gesetzt durch das Gleichungssystem

$$\rho x_1 = \frac{y_1}{y_1 - \lambda}$$
$$\rho x_2 = \frac{y_2}{y_2 - \lambda}$$
$$\vdots$$
$$\rho x_{n+1} = \frac{y_{n+1}}{y_{n+1} - \lambda}.$$

Man hat nämlich in diesen Gleichungen offenbar die Parameterdarstellung für eine rationale Curve n^{ter} Ordnung, d. h. eine Normcurve des R_n und die Parameterwerthe

$$\lambda = 0, \infty; \; y_1, y_2, \ldots y_{n+1}$$

ergeben thatsächlich der Reihe nach die Punkte E, Y und die Ecken der Coordinatenpyramide.

3. Die Bedeutung unserer beiden Sätze tritt besser hervor, wenn man die Verallgemeinerung des Doppelverhältnissbegriffes heranzieht, welche ich in dem Aufsatze »Über die Erweiterung eines Grundbegriffes der Geometrie der Lage«, Math. Ann., Bd. 46, vorgeschlagen habe. Dort wird der Wurf von n Elementen eines einförmigen Trägers durch die Festsetzung definirt, dass zwei Reihen von je n Elementen dann denselben Wurf bestimmen sollen, wenn es eine projective Beziehung ihrer Träger gibt, welche die n ersten Elemente der Reihe nach in die n zweiten überführt, und es wird überdies unter dem Wurf von n Punkten des R_{n-3} ihr Wurf auf der hindurchgehenden Normcurve des R_{n-3} verstanden.

Mann kann nun den Wurf von $n+3$ (in bestimmter Folge gegebenen) Elementen eines einförmigen Trägers durch die Verhältnisse von $n+1$ Zahlen festlegen. Solche $n+1$ Zahlen sind die Parameter $x_1, x_2, \ldots x_{n+1}$, die den $n+1$ ersten Elementen in einer Parametervertheilung zukommen, in welcher das vorletzte Element den Parameter Null, das letzte den Parameter Unendlich besitzt. Diese $n+1$ Zahlen x_1, $x_2, \ldots x_{n+1}$, deren Verhältnisse nur vom Wurf der $n+3$ Elemente abhängen und ihn bestimmen, kann man passend als homogene Coordinaten des Wurfes bezeichnen.

Der erste von unseren beiden Sätzen besagt nun:

Die homogenen Coordinaten eines Punktes Y im R_n stimmen mit den homogenen Coordinaten des Wurfes überein, der auf der Verbindungslinie von Y mit dem Einheitspunkt E bestimmt wird von ihren Schnittpunkten mit den Coordinatenebenen, dem Punkt Y und dem Einheitspunkt E.

Der zweite Satz sagt:

Die homogenen Coordinaten eines Punktes Y im R_n sind nichts anderes als die homogenen Coordinaten des Wurfes, den die Ecken der Coordinatenpyramide und der Einheitspunkt zusammen mit dem Punkte Y im R_n bestimmen.

Die übliche Staudt-Fiedler'sche geometrische Interpretation der homogenen Coordinaten deutet die Quotienten von je zwei derselben als Doppelverhältnisse. Diese Einzel-

interpretationen erscheinen hier in übersichtlicher Weise zusammengefasst.

Ausserdem erweist sich die hier gegebene Bedeutung der homogenen Coordinaten als nützlich bei verschieden geometrischen Untersuchungen; insbesondere führt sie zu analytischen Beweisen einfachster Art für die Sätze, welche ich nach synthetischen Methoden im 46. Bde. der Math. Ann. abgeleitet habe.

Über drei verschiedene Spectren des Argons

(vorläufige Mittheilung)

von

J. M. Eder und **E. Valenta** in Wien.

Nach W. Crookes[1] gibt das Argon zwei verschiedene Spectren, je nachdem man eine »niedrige oder eine hohe elektromotorische Kraft« und weniger oder mehr heisse Funken verwendet; im ersteren Falle leuchtet die Capillare der Plücker'schen Röhren, welche Argon bei 2—3 *mm* Druck enthalten, roth (z. B. bei Verwendung eines Ruhmkorff'schen Inductoriums ohne Leydenerflaschen), im letzteren Falle (nach Einschaltung von einer Leydenerflasche, besonders mit stärkerem Strom und grösserem Ruhmkorff) leuchtet die Capillare hellblau. Diese beiden Arten von Spectren, deren Hauptlinien Crookes ausmass, bezeichnet derselbe der Kürze halber als »rothes« und »blaues« Argonspectrum.

Beide Spectren sind Linienspectren, jedoch von einander stark verschieden. Wir haben diese beiden Spectren, von denen das eine meistens Linien des anderen enthält, ohne Schwierigkeit erhalten können und in einer vorläufigen Mittheilung eine Anzahl Wellenlängen des rothen Argonspectrums publicirt,[2] welche wir genau gemessen haben und welche verlässlichere Werthe repräsentiren, als die Crookes'schen Zahlen, weil wir mit Hilfe unseres vorzüglichen Concavgitters eine viel grössere

---

[1] Zeitschrift für physikalische Chemie, 1895, Bd. XVI, S. 368.

[2] Anzeiger der kaiserl. Akademie der Wissenschaften, Nr. XXI vom 24. October 1895.

Dispersion und eine bessere Auflösung erzielten, als Crookes mit seinen Prismenapparaten, welche, sobald Bergkrystallapparate in Betracht kommen, nur im stärkst brechbaren Theile mit beträchtlicher Genauigkeit arbeiten.

Einen Bezirk des blauen Argonspectrums hat Kayser genau gemessen[1] (von $\lambda = 5145 \cdot 66 - \lambda = 3454 \cdot 29$), und zwar stimmen unsere Messungen sehr vollkommen mit den Kayser'schen überein. Wir massen das gesammte »blaue« Argonspectrum (unter Anwendung von mit Bergkrystall verschlossenen Röhren), begnügen uns aber, in dieser vorläufigen Mittheilung nur die Ergebnisse unserer Beobachtungen im brechbarsten Ultraviolett mitzutheilen, denn dieser Theil ist in diesem Falle so gut wie unbekannt, mit Ausnahme weniger von Crookes entdeckter und nicht sehr genau gemessener Linien. Wir konnten das äusserste Ultraviolett bis $\lambda = 2000$ verfolgen und mit solcher sehr grosser Deutlichkeit bis $\lambda = 2050$ photographiren, dass wir scharfe Wellenlängenbestimmungen vornehmen konnten. Während Crookes nach der Linie $\lambda = 2438$ nur mehr eine einzige stärker brechbare Linie ($\lambda = 2246$) fand, waren wir durch eine besondere Versuchsanordnung im Stande, das prächtige, scharf gezeichnete ultraviolette Linienspectrum des Argons (im Flaschenfunken bei 2 *mm* Druck) genau zu messen und die Wellenlängen von mehr als 150 Linien zu bestimmen (siehe nebenstehende Tabelle).

Der Nachweis, dass dem Argon im äussersten Ultraviolett ein so helles, wohl definirtes linienreiches Spectrum zukommt ist insoferne bemerkenswerth, als der Stickstoff in diesen Bezirken eine äusserst geringe Lichtkraft unter sonst gleichen Verhältnissen aufweist und sich derartig anders verhält, dass man wohl zu der Annahme berechtigt ist, dass der Stickstoff und das Argon nicht zu verwandten Elementengruppen gehören.

---

[1] Chem. News, Bd. LXXII, 1895, S. 99, Nr. 1866 vom 30. August 1895.

»Blaues Argon«-Spectrum im äussersten Ultraviolett (Eder und Valenta, bezogen auf Rowland's Normalspectrum).

λ		λ	
2438·8	6	2398·4	3
2436·9	2	2397·5	1
2432·8	4	2395·7	4
2430·5	1	2391·0	1
2430·1	2	2388·2 verschwommen	2
2429·4	1	2386·8	3
2425·4	2	2383·6	3
2424·5	2	2382·6	1
2423·9	3	2381·2	1
2423·6	2	2380·0	1
2422·7	2	2372·0	1
2421·6	2	2369·4	1
2420·6	4	2367·1	1
2418·9	3	2364·2	4
2417·3	2	2362·9	1
2415·7 einseitig verbreitert	6	2361·9	1
2414·3	3	2360·2	3
2413·2	3	2358·5	1
2412·6	2	2357·7	3
2411·2	4	2355·1	1
2410·4	2	2354·3	3
2409·6	1	2353·7	1
2408·2	1	2350·6	4
2406·7	3	2346·7	1
2405·2 verbreitert nach roth	2	2345·4	1
		2344·4	5
2404·4	4	2339·9	3
2403·3	1	2337·8 verschwommen	5
2403·4	2	2333·2	1
2400·0	1	2331·7 verschwommen	4
2399·3	3	2328·2	1

λ			λ		
2324·7		1	2255·4		1
2319·5		1	2254·4	verbreitert	2
2318·0	charakteristische Gruppe	2	2252·4		4
2317·6		2	2251·5		1
2316·5		4	2249·4		1
2315·0		3	2246·1		1
2314·0		4	2343·7		4
2309·4		4	2241·8		1
2307·5		1	2241·1		3
2305·8		1	2237·9		1
2302·1		3	2236·6		1
2300·9		1	2235·7		3
2300·3		2	2234·7		4
2295·4		1	2233·6		1
2293·0		1	2231·6		2
2292·2		3	2230·1		1
2290·6		1	2229·7		3
2289·9		2	2227·4		3
2288·8		3	2225·8		3
2287·1		1	2221·7		1
2285·8	charakteristische Gruppe	2	2221·4		1
2284·0		2	2219·9		4
2283·3		3	2219·0		2
2282·6		5	2216·3		2
2275·3		1	2211·0		1
2275·0		2	2210·5		2
2272·7		1	2205·8		2
2269·8		1	2195·6		2
2268·7		1	2191·7		1
2267·1		1	2191·4		1
2265·2		3	2190·6		1
2263·0	verschwommen	2	2187·3		2
2257·9		1	2185·5		2
2256·6		1	2181·2		2

λ		λ	
2175·6	3	2126·7	2
2174·7	2	2120·0	1
2171·5	3	2116·1	1
2165·8	3	2106·1	1
2164·6	1	2103·6	1
2162·1	1	2092·1	1
2159·3	1	2078·3	1
2154·1	1	2077·2	1
2153·3	1	2063·9	1
2151·2	2	2057·6	1
2130·6	3	2050·5	1
2129·5	1		

Ausser den beiden bisher bekannten Argonspectren, dem »blauen« und »rothen« Spectrum, fanden wir noch ein drittes, welches entsteht, wenn man sehr grosse Condensatoren mit einem sehr grossen Ruhmkorff und starken Strömen in der Primärspule des Apparates zur Anwendung bringt. Unter diesen Umständen erhielten wir (namentlich bei 15 bis 20 *mm* Druck) eine glänzend weisse Lichterscheinung in der Capillare. Bei geringerem Druck (2—10 *mm*) ist das dritte Spectrum dadurch von den anderen unterschieden, dass manche Linien des blauen Argonspectrums darin heller werden, während andere schwächer auftreten und neue Linien dazu kommen. Das rothe Argonspectrum verschwindet dabei in Röhren von niedrigem Drucke spurlos, in solchen von höherem Drucke aber bleibt es partiell bestehen. Bei 20 *mm* Druck strahlt unter diesen Umständen die Capillare ein blendend weisses Licht aus, welches ein sehr merkwürdiges, für die Spectralanalyse principiell höchst wichtiges spectroskopisches Verhalten zeigt. Die scharfen Linien des Spectrums verbreitern sich grösstentheils sehr stark, zum kleinen Theile bleiben sie scharf. Viele der Linien bleiben hiebei in völliger Coincidenz mit Linien des »blauen« oder »rothen« Argonspectrums, aber ganze Gruppen von Linien zeigen eine Verschiebung gegen

Roth (durchschnittlich um vielleicht ungefähr $^1/_2$ bis 1 Angström'sche Einheit), obschon ihre Zusammengehörigkeit zu correspondirenden scharfen Linien des »blauen« Argonspectrums augenscheinlich vorliegt.

Bei manchen Linien findet eine einseitige Verbreiterung statt, so dass durch dieses Phänomen die erwähnte Verschiebung für eine scheinbare gehalten werden könnte. Dagegen sind bei vielen Linien die Verschiebungen um so vieles grösser als die Verbreiterung, dass man gezwungen ist, eine wahre und wirkliche Verschiebung dieser Linien, respective Änderung der Wellenlängen anzunehmen, welche durchaus nicht unbedeutend ist, wenngleich man von vornherein nicht zu dieser Annahme geneigt sein mag.

Den Grund, wesshalb diese Verschiebungen nur einen Theil der Linien treffen, können wir derzeit nicht angeben, jedoch besteht ein gewisser Zusammenhang zwischen diesen Erscheinungen und dem in den Röhren herrschenden Druck, sowie der Art der elektrischen Erregung und der Temperatur in denselben.

Arbeitet man mit Argonröhren, in denen ein geringer Druck (von $^1/_{10}$—2 *mm*) herrscht, so ergibt sich die bemerkenswerthe Thatsache, dass beim stundenlangen Durchschlagen des Funkens, wenn derselbe kräftig genug ist, allmälig das rothe Argonspectrum zurücktritt, mehr und mehr Linien des blauen Spectrums auftreten; bei Röhren von $^1/_{10}$ *mm* Druck kann man anfangs ganz wohl das rothe Argonspectrum erhalten, wenn es auch Linien des blauen Spectrums enthält — nach ein bis zwei Stunden verliert sich aber das rothe Argonspectrum, indem augenscheinlich ein Theil des Argons, sei es durch Absorption eines eventuell vorhandenen fremden Bestandtheiles oder des Argons als solches durch die Aluminiumelektroden und den Einfluss des Funkens verschwindet.

Schliesslich erwähnen wir noch, dass wir das Glimmlicht an den Elektroden im Ruhmkorff-Funken mit und ohne Leydenerflascheneinschaltung studirten und constatirten, dass die Erscheinungen im weiten Theile des Rohres nicht identisch mit denjenigen in der Capillare sind. Ferner stellten wir fest, dass (wenigstens für den Bezirk $\lambda = 4806—3285$) das Glimm-

licht am positiven und negativen Pol (bei Einhaltung sonst analoger Versuchsbedingungen) identisch ist und somit die für Stickstoff charakteristischen Polerscheinungen fehlen.

Trotzdem wir mehrfache und vorzüglich definirte Spectrumphotographien des Polglimmlichtes (welches sich übrigens nur sehr schwierig photographiren lässt) erhielten, konnten wir doch niemals eine Bestätigung der Angaben von Crookes finden, dass das »rothe Argonspectrum« durch den positiven, das »blaue« durch den negativen Pol bedingt sei.

Genaue Wellenlängemessungen, welche diese Angaben völlig erhärten, sowie heliographische Reproductionen unserer Spectrumphotographien mittelst Concavgitter, welche namentlich unsere Angaben bezüglich der Verschiebung gewisser Liniengruppen augenscheinlich demonstriren, hoffen wir demnächst in den Denkschriften der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften publiciren zu können, sobald wir das umfassende Beobachtungsmateriale, welches das Spectrum vom Orangegelb bis ins Ultraviolett umfasst, gesichtet haben werden.

Über die Bestimmung der Dielektricitätsconstante eines anisotropen Stoffes nach einer beliebigen Richtung aus den Dielektricitätsconstanten nach den Hauptrichtungen

von

Dr. **Anton Lampa.**

(Vorgelegt in der Sitzung am 21. November 1895.)

I.

In meiner Abhandlung »Zur Theorie der Dielectrica«[1] habe ich gezeigt, wie aus der Annahme einer speciellen Gestalt der leitenden Partikel, aus welchen man sich das Dielektricum constituirt denken kann, die Werthe der Dielektricitätsconstanten eines anisotropen Stoffes abgeleitet werden können. Es ergaben sich Formeln für die Dielektricitätsconstanten nach den Richtungen, welche durch die Axen der ellipsoidförmig vorausgesetzten Partikeln bestimmt sind; ich will diese Dielektricitätsconstanten kurz die Hauptdielektricitätsconstanten nennen. In der vorliegenden Abhandlung untersuche ich die Beziehung zwischen der Dielektricitätsconstante nach einer beliebigen Richtung und den Hauptdielektricitätsconstanten. Es wird sich als nothwendig herausstellen, sich des Öfteren auf Gleichungen jener ersten Abhandlung zu beziehen; der Kürze wegen wird dies einfach durch Anführung ihrer Zahl unter Hinzufügung von (I) geschehen.

Die verhältnissmässige Einfachheit der Rechnung wurde in jener ersten Abhandlung durch passende Wahl des Coordinatensystems erzielt. Dieser Vortheil wird für die vorliegende Untersuchung ebenfalls zu wahren sein; zu diesem Zwecke

[1] Diese Sitzungsberichte, CIV, II. a, Juni 1895.

dürfen aber nicht wie dort die Axen des Ellipsoids als Coordinatensystem gewählt werden. Theilweise wird es jedoch erspriesslich sein, die Ellipsoidaxen als Coordinatensystem zu benützen; dieses System möge durch die Buchstaben *A, B, C* bezeichnet und kurz Axensystem genannt werden. Die Axen des Axensystems sollen mit den Axen des Coordinatensystems gleichen Ursprung haben und Winkel einschliessen, welche aus der folgenden tabellarischen Zusammenstellung ersichtlich sind:

	X	Y	Z
A	α_1	α_2	α_3
B	β_1	β_2	β_3
C	γ_1	γ_2	γ_3

1)

Die Kraft habe eine beliebige Richtung; sie wird daher bezüglich des Axensystems Componenten haben, welche ich mit $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ bezeichnen will. Sind nun ξ_A, η_B, ζ_C die Coordinaten eines Oberflächenpunktes des Ellipsoids von seinem Mittelpunkt im Axensystem genommen, so ist das Potential des Ellipsoids in einem äusseren Punkte p', welcher von dem Mittelpunkte des Ellipsoids um die Strecke r absteht, in dem Axensystem gemäss Gleichung 4 (I) gegeben durch

$$u' = \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial A} \int \xi_A h dw + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial B} \int \eta_B h dw + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial C} \int \zeta_C h dw. \qquad 2)$$

Die Integrale repräsentiren die elektrischen Momente des Ellipsoids. Sie lassen sich leicht bestimmen, wie die auf Gleichung 4 (I) unmittelbar folgende Berechnung zeigt. Man erhält, da die den Axen des Ellipsoids parallelen Kräfte jetzt $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ sind:

$$\int \xi_A h dw = \frac{a^3}{3J} \cdot \mathfrak{a}, \quad \int \eta_B h dw = \frac{b^3}{3J} \cdot \mathfrak{b}, \quad \int \zeta_C h dw = \frac{c^3}{3J} \cdot \mathfrak{c} \qquad 3)$$

(h ist, wie in I, die Flächendichte des betrachteten Oberflächenpunktes, a, b, c die Ellipsoidaxen, J das in I gebrauchte bestimmte Integral).

Durch die Werthe 3) nimmt u' die Gestalt an:

$$u' = \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial A} \cdot \frac{a^3}{3J} \cdot \mathfrak{a} + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial B} \cdot \frac{b^3}{3J} \cdot \mathfrak{b} + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial C} \cdot \frac{c^3}{3J} \cdot \mathfrak{c}. \qquad 4)$$

Dieser Ausdruck muss nun für das gewählte Coordinatensystem transformirt werden. Vor Allem schreibe ich die Beziehungen für die Coordinaten beider Systeme an:

$$\begin{aligned} A &= x \cos \alpha_1 + y \cos \alpha_2 + z \cos \alpha_3 \\ B &= x \cos \beta_1 + y \cos \beta_2 + z \cos \beta_3 \\ C &= x \cos \gamma_1 + y \cos \gamma_2 + z \cos \gamma_3 \end{aligned} \qquad 5)$$

$$\begin{aligned} x &= A \cos \alpha_1 + B \cos \beta_1 + C \cos \gamma_1 \\ y &= A \cos \alpha_2 + B \cos \beta_2 + C \cos \gamma_2 \\ z &= A \cos \alpha_3 + B \cos \beta_3 + C \cos \gamma_3 \end{aligned} \qquad 6)$$

Nach den bekannten Regeln für die Transformation der Variabeln erhält man sofort folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial A} &= \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial A} + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial A} + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial A} \\ \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial B} &= \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial B} + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial B} + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial B} \\ \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial C} &= \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial C} + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial C} + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial C}. \end{aligned} \qquad 7)$$

Aus den Gleichungen 6) findet man:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial A} &= \cos \alpha_1 & \frac{\partial y}{\partial A} &= \cos \alpha_2 & \frac{\partial z}{\partial A} &= \cos \alpha_3 \\ \frac{\partial x}{\partial B} &= \cos \beta_1 & \frac{\partial y}{\partial B} &= \cos \beta_2 & \frac{\partial z}{\partial B} &= \cos \beta_3 \\ \frac{\partial x}{\partial C} &= \cos \gamma_1 & \frac{\partial y}{\partial C} &= \cos \gamma_2 & \frac{\partial z}{\partial C} &= \cos \gamma_3, \end{aligned} \qquad 8)$$

Dadurch gehen die Gleichungen 7) über in:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial A} &= \cos\alpha_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + \cos\alpha_2 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + \cos\alpha_3 \cdot \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \\
\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial B} &= \cos\beta_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + \cos\beta_2 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + \cos\beta_3 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \qquad 9) \\
\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial C} &= \cos\gamma_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + \cos\gamma_2 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + \cos\gamma_3 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}
\end{aligned}
$$

In 4) eingesetzt folgt:

$$
\begin{aligned}
u' = {} & \frac{1}{3J}(a^3\mathfrak{a}\cos\alpha_1 + b^3\mathfrak{b}\cos\beta_1 + c^3\mathfrak{c}\cos\gamma_1)\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + \\
& \frac{1}{3J}(a^3\mathfrak{a}\cos\alpha_2 + b^3\mathfrak{b}\cos\beta_2 + c^3\mathfrak{c}\cos\gamma_2)\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + \qquad 10) \\
& \frac{1}{3J}(a^3\mathfrak{a}\cos\alpha_3 + b^3\mathfrak{b}\cos\beta_3 + c^3\mathfrak{c}\cos\gamma_3)\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z},
\end{aligned}
$$

und wieder kann das Potential des Dielektricums [vergl. 6 (I)] geschrieben werden:

$$
U' = \int \left[\alpha \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + \beta \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + \gamma \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \right] d\tau. \qquad 11)
$$

Die Werthe von α, β, γ sind aber jetzt:

$$
\begin{aligned}
\alpha &= \frac{N}{3J}(a^3\mathfrak{a}\cos\alpha_1 + b^3\mathfrak{b}\cos\beta_1 + c^3\mathfrak{c}\cos\gamma_1) \\
\beta &= \frac{N}{3J}(a^3\mathfrak{a}\cos\alpha_2 + b^3\mathfrak{b}\cos\beta_2 + c^3\mathfrak{c}\cos\gamma_2) \qquad 12) \\
\gamma &= \frac{N}{3J}(a^3\mathfrak{a}\cos\alpha_3 + b^3\mathfrak{b}\cos\beta_3 + c^3\mathfrak{c}\cos\gamma_3).
\end{aligned}
$$

Zur Bestimmung dieser α, β, γ schlage ich folgenden Weg ein. Im Axensystem wäre das Potential des Dielektricums [siehe Gleichung 6 (I) und 7 (I)]:

$$U' = \int \left[\lambda \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial A} + \mu \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial B} + \nu \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial C} \right] d\tau \qquad 13)$$

und

$$\lambda = \frac{a^3 N}{3J} \mathfrak{a}$$

$$\mu = \frac{b^3 N}{3J} \mathfrak{b} \qquad 14)$$

$$\nu = \frac{c^3 N}{3J} \mathfrak{c}.$$

Gemäss 17 (I) gelten die Beziehungen:

$$\mathfrak{a} = -\frac{\partial (V+U)}{\partial A} + 4\pi J \frac{bc}{a^2} \lambda$$

$$\mathfrak{b} = -\frac{\partial (V+U)}{\partial B} + 4\pi J \frac{ac}{b^2} \mu \qquad 15)$$

$$\mathfrak{c} = -\frac{\partial (V+U)}{\partial C} + 4\pi J \frac{ab}{c^2} \nu$$

Aus 14) und 15) erhalten wir, da $\frac{4\pi abc}{3} N = g$ (Raumerfüllung) ist:

$$\mathfrak{a} = -\frac{\partial (V+U)}{\partial A} + g\mathfrak{a},$$

also

$$\mathfrak{a} = -\frac{1}{1-g} \frac{\partial (V+U)}{\partial A}$$

und entsprechend

$$\mathfrak{b} = -\frac{1}{1-g} \frac{\partial (V+U)}{\partial B} \qquad 16)$$

$$\mathfrak{c} = -\frac{1}{1-g} \frac{\partial (V+U)}{\partial C}.$$

Dies in die Gleichung 12) eingetragen gibt

$$\alpha = -\frac{N}{3J(1-g)}\left[a^3 \cos\alpha_1 \frac{\partial(V+U)}{\partial A} + \right.$$
$$\left. + b^3 \cos\beta_1 \frac{\partial(V+U)}{\partial B} + c^3 \cos\gamma_1 \frac{\partial(V+U)}{\partial C}\right]$$
$$\beta = -\frac{N}{3J(1-g)}\left[a^3 \cos\alpha_2 \frac{\partial(V+U)}{\partial A} + \right.$$
$$\left. + b^3 \cos\beta_2 \frac{\partial(V+U)}{\partial B} + c^3 \cos\gamma_2 \frac{\partial(V+U)}{\partial C}\right] \qquad 17)$$
$$\gamma = -\frac{N}{3J(1-g)}\left[a^3 \cos\alpha_3 \frac{\partial(V+U)}{\partial A} + \right.$$
$$\left. + b^3 \cos\beta_3 \frac{\partial(V+U)}{\partial B} + c^3 \cos\gamma_3 \frac{\partial(V+U)}{\partial C}\right].$$

Nun hat man

$$\frac{\partial(V+U)}{\partial A} = \frac{\partial(V+U)}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial A} + \frac{\partial(V+U)}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial A} + \frac{\partial(V+U)}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial A}$$
$$\frac{\partial(V+U)}{\partial B} = \frac{\partial(V+U)}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial B} + \frac{\partial(V+U)}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial B} + \frac{\partial(V+U)}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial B}$$
$$\frac{\partial(V+U)}{\partial C} = \frac{\partial(V+U)}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial C} + \frac{\partial(V+U)}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial C} + \frac{\partial(V+U)}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial C},$$

d. i. mit Rücksicht auf die Gleichung 8:

$$\frac{\partial(V+U)}{\partial A} = \frac{\partial(V+U)}{\partial x}\cos\alpha_1 + \frac{\partial(V+U)}{\partial y}\cos\alpha_2 +$$
$$+ \frac{\partial(V+U)}{\partial z}\cos\alpha_3$$
$$\frac{\partial(V+U)}{\partial B} = \frac{\partial(V+U)}{\partial x}\cos\beta_1 + \frac{\partial(V+U)}{\partial y}\cos\beta_2 +$$
$$+ \frac{\partial(V+U)}{\partial z}\cos\beta_3 \qquad 18)$$
$$\frac{\partial(V+U)}{\partial C} = \frac{\partial(V+U)}{\partial x}\cos\gamma_1 + \frac{\partial(V+U)}{\partial y}\cos\gamma_2 +$$
$$+ \frac{\partial(V+U)}{\partial z}\cos\gamma_3.$$

Diese Werthe sind nun in die Gleichung 17) einzusetzen. Man erhält:

$$\alpha = -\frac{N}{3J(1-g)}\Big[(a^3\cos^2\alpha_1 + b^3\cos^2\beta_1 + c^3\cos^2\gamma_1)\frac{\partial(V+U)}{\partial x} + (a^3\cos\alpha_1\cos\alpha_2 + b^3\cos\beta_1\cos\beta_2 + c^3\cos\gamma_1\cos\gamma_2)\frac{\partial(V+U)}{\partial y} + (a^3\cos\alpha_1\cos\alpha_3 + b^3\cos\beta_1\cos\beta_3 + c^3\cos\gamma_1\cos\gamma_3)\frac{\partial(V+U)}{\partial z}\Big] \tag{19}$$

$$\beta = -\frac{N}{3J(1-g)}\Big[(a^3\cos\alpha_1\cos\alpha_2 + b^3\cos\beta_1\cos\beta_2 + c^3\cos\gamma_1\cos\gamma_3)\frac{\partial(V+U)}{\partial x} + (a^3\cos^2\alpha_2 + b_3\cos^2\beta_2 + c^3\cos^2\gamma_2)\frac{\partial(V+U)}{\partial y} + (a^3\cos\alpha_2\cos\alpha_3 + b^3\cos\beta_2\cos\beta_3 + c^3\cos\gamma_2\cos\gamma_3)\frac{\partial(V+U)}{\partial z}\Big] \tag{20}$$

$$\gamma = -\frac{N}{3J(1-g)}\Big[(a^3\cos\alpha_1\cos\alpha_3 + b^3\cos\beta_1\cos\beta_3 + c^3\cos\gamma_1\cos\gamma_3)\frac{\partial(V+U)}{\partial x} + (a^3\cos\alpha_2\cos\alpha_3 + b^3\cos\beta_2\cos\beta_3 + c^3\cos\gamma_2\cos\gamma_3)\frac{\partial(V+U)}{\partial y} + (a^3\cos^2\alpha_3 + b^3\cos^2\beta_3 + c^3\cos^2\gamma_3)\frac{\partial(V+U)}{\partial z}\Big], \tag{21}$$

was ich kürzer schreiben will:

$$\alpha = -D\frac{\partial(V+U)}{\partial x} - E\frac{\partial(V+U)}{\partial y} - F\frac{\partial(V+U)}{\partial z} \qquad 22)$$

$$\beta = -E\frac{\partial(V+U)}{\partial x} - G\frac{\partial(V+U)}{\partial y} - H\frac{\partial(V+U)}{\partial z} \qquad 23)$$

$$\gamma = -F\frac{\partial(V+U)}{\partial x} - H\frac{\partial(V+U)}{\partial y} - K\frac{\partial(V+U)}{\partial z}. \qquad 24)$$

Es wird daher U' (Gleichung 11) jetzt dargestellt sein durch folgenden Ausdruck:

$$\begin{aligned} U' = & -\int D\frac{\partial(V+U)}{\partial x}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}d\tau - \int E\frac{\partial(V+U)}{\partial y}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}d\tau \\ & - \int F\frac{\partial(V+U)}{\partial z}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}d\tau \\ & -\int E\frac{\partial(V+U)}{\partial x}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}d\tau - \int G\frac{\partial(V+U)}{\partial y}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}d\tau \\ & - \int H\frac{\partial(V+U)}{\partial z}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}d\tau \\ & -\int F\frac{\partial(V+U)}{\partial x}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}d\tau - \int H\frac{\partial(V+U)}{\partial y}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}d\tau \\ & - \int K\frac{\partial(V+U)}{\partial z}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}d\tau. \end{aligned} \qquad 25)$$

Da alle Ellipsoide, aus welchen das Dielektricum constituirt gedacht wird, als gleich gross und überdies im ganzen Dielektricum gleich gerichtet und gleichmässig vertheilt vorausgesetzt wurden, haben die Coëfficienten $D, E, \ldots$ im ganzen Dielektricum unveränderliche Werthe, können somit vor die

Integralzeichen geschrieben werden, wodurch 25) die Gestalt erhält:

$$U' = -D\int \frac{\partial(V+U)}{\partial x} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} d\tau - G\int \frac{\partial(V+U)}{\partial y} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} d\tau$$

$$-K\int \frac{\partial(V+U)}{\partial z} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} d\tau$$

$$-E\int \left[\frac{\partial(V+U)}{\partial x} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + \frac{\partial(V+U)}{\partial y} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\right] d\tau$$

$$-F\int \left[\frac{\partial(V+U)}{\partial x} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} + \frac{\partial(V+U)}{\partial z} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\right] d\tau$$

$$-H\int \left[\frac{\partial(V+U)}{\partial y} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} + \frac{\partial(V+U)}{\partial z} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y}\right] d\tau. \qquad 26)$$

Mit Hilfe dieser Gleichung, welche das Potential des Dielektricums bestimmt, soll nun im folgenden Abschnitt der Fall eines Plattencondensators behandelt werden, um zu der gesuchten Beziehung zwischen der Dielektricitätsconstante nach einer beliebigen Richtung und den Hauptdielektricitätsconstanten zu gelangen.

II.

Ich forme nun die Gleichung 26) um; man hat zunächst

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[(V+U)\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\right] = \frac{\partial(V+U)}{\partial x} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + (V+U)\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2},$$

also

$$\frac{\partial(V+U)}{\partial x} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[(V+U)\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\right] - (V+U)\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2}$$

somit

$$D\int\frac{\partial(V+U)}{\partial x}\,\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\,d\tau=$$

$$=D\int\frac{\partial}{\partial x}\left[(V+U)\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\right]d\tau-D\int(V+U)\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x^2}\,d\tau \qquad 27)$$

und analog

$$G\int\frac{\partial(V+U)}{\partial y}\,\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}\,d\tau=$$

$$=G\int\frac{\partial}{\partial y}\left[(V+U)\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}\right]d\tau-G\int(V+U)\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial y^2}\,d\tau \qquad 28)$$

$$K\int\frac{\partial(U+U)}{\partial z}\,\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\,d\tau=$$

$$=K\int\frac{\partial}{\partial z}\left[(V+U)\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\right]d\tau-K\int(V+U)\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial z^2}\,d\tau \qquad 29)$$

Die übrigen Integrale der Gleichung 26, deren Coëfficienten E, F, H sind, transformire ich auf folgende Weise. Es ist

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[(V+U)\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}\right]=\frac{\partial(V+U)}{\partial x}\,\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}+(V+U)\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x\partial y}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[(V+U)\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\right]=\frac{\partial(V+U)}{\partial y}\,\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}+(V+U)\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x\partial y},$$

also

$$\frac{\partial(V+U)}{\partial x}\,\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}+\frac{\partial(V+U)}{\partial y}\,\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}=$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\left[(V+U)\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[(V+U)\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\right]-2(V+U)\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x\partial y}.$$

Man kann daher setzen:

$$E\int\left[\frac{\partial(V+U)}{\partial x}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}+\frac{\partial(V+U)}{\partial y}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\right]d\tau=$$

$$=E\int\frac{\partial}{\partial x}\left[(V+U)\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}\right]d\tau+$$

$$+E\int\frac{\partial}{\partial y}\left[(V+U)\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\right]d\tau-2E\int(V+U)\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x\partial y}d\tau \qquad 30)$$

und analog

$$F\int\left[\frac{\partial(V+U)}{\partial x}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}+\frac{\partial(V+U)}{\partial z}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\right]d\tau=$$

$$=F\int\frac{\partial}{\partial x}\left[(V+U)\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\right]d\tau+$$

$$+F\int\frac{\partial}{\partial z}\left[(V+U)\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\right]d\tau-2F\int(V+U)\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x\partial z}d\tau, \qquad 31)$$

$$H\int\left[\frac{\partial(V+U)}{\partial y}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}+\frac{\partial(V+U)}{\partial z}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}\right]d\tau=$$

$$=H\int\frac{\partial}{\partial y}\left[(V+U)\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\right]d\tau+$$

$$+H\int\frac{\partial}{\partial z}\left[(V+U)\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}\right]d\tau-2H\int(V+U)\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial y\partial z}d\tau. \qquad 32)$$

Auf Grund der Gleichungen 27) bis 32) kann ich daher schreiben:

$$U' = -D\int \frac{\partial}{\partial x}\left[(V+U)\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\right] d\tau + D\int (V+U)\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2}\, d\tau$$

$$-G\int \frac{\partial}{\partial y}\left[(V+U)\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y}\right] d\tau + G\int (V+U)\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y^2}\, d\tau$$

$$-K\int \frac{\partial}{\partial z}\left[(V+U)\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\right] d\tau + K\int (V+U)\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z^2}\, d\tau$$

$$-E\int \frac{\partial}{\partial x}\left[(V+U)\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y}\right] d\tau - E\int \frac{\partial}{\partial y}\left[(V+U)\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\right] d\tau +$$

$$+2E\int (V+U)\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \partial y}\, d\tau$$

$$-F\int \frac{\partial}{\partial x}\left[(V+U)\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\right] d\tau - F\int \frac{\partial}{\partial z}\left[(V+U)\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\right] d\tau +$$

$$+2F\int (V+U)\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \partial z}\, d\tau$$

$$-H\int \frac{\partial}{\partial y}\left[(V+U)\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\right] d\tau - H\int \frac{\partial}{\partial z}\left[(V+U)\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y}\right] d\tau +$$

$$+2H\int (V+U)\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y \partial z}\, d\tau. \qquad 33)$$

Ein Theil dieser Integrale lässt sich gemäss Gleichung 23 (I) in Oberflächenintegrale überführen, so dass U' jetzt folgende Gestalt erhält:

$$U' = D\int \left[(V+U)\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\right]\frac{\partial x}{\partial n}\, dw +$$

$$+G\int \left[(V+U)\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y}\right]\frac{\partial y}{\partial n}\, dw + K\int \left[(V+U)\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\right]\frac{\partial z}{\partial n}\, \partial w$$

$$+E\int\left[(V+U)\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}\right]\frac{\partial x}{\partial n}dw+$$

$$+E\int\left[(V+U)\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\right]\frac{\partial y}{\partial n}dw+F\int\left((V+U)\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\right)\frac{\partial x}{\partial n}dw$$

$$+F\int\left[(V+U)\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\right]\frac{\partial z}{\partial n}dw+$$

$$+H\int\left[(V+U)\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\right]\frac{\partial y}{\partial n}dw+H\int\left((V+U)\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}\right)\frac{\partial z}{\partial n}dw$$

$$+D\iiint(V+U)\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x^2}dx\,dy\,dz+$$

$$+G\iiint(V+U)\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial y^2}dx\,dy\,dz+K\iiint(V+U)\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial z^2}dx\,dy\,dz$$

$$+2E\iiint(V+U)\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x\,\partial y}dx\,dy\,dz+$$

$$+2F\iiint(V+U)\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x\,\partial z}dx\,dy\,dz+2H\iiint(V+U)\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial y\,\partial z}dx\,dy\,dz, \quad 34)$$

was ich auch schreiben kann:

$$U'=\int(V+U)\left(D\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}+E\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}+F\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\right)\frac{\partial x}{\partial n}dw+$$

$$\int(V+U)\left(E\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}+G\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}+H\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\right)\frac{\partial y}{\partial n}dw+$$

$$\int(V+U)\left(F\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}+H\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}+K\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\right)\frac{\partial z}{\partial n}dw+$$

$$\iiint (V+U)\left(D\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x^2}+G\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial y^2}+K\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial z^2}\right)dx\,dy\,dz+$$

$$2\iiint (V+U)\left(E\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x\partial y}+F\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x\partial z}+H\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial y\partial z}\right)dx\,dy\,dz. \qquad 35)$$

Dies ist nun die Form für U', welche zur Untersuchung eines Plattencondensators unmittelbar geeignet ist. Die ersten drei Integrale sind über die ganze Oberfläche, die beiden letzten über das ganze Volum des Dielektricums zu erstrecken.

Ich denke mir nun das Coordinatensystem in einer fixen Lage bezüglich der Ellipsoidaxen und aus dem Dielektricum drei gleich grosse kreisförmige Platten von der Dicke d derart herausgeschnitten, dass die Kreisflächen der ersten parallel zur YZ-Ebene, die der zweiten parallel zur XZ-Ebene, die der dritten parallel zur XY-Ebene liegen. Wird die erste Platte in den Condensator, dessen Platten denselben Radius ρ wie die dielektrischen Platten und die Distanz d haben sollen, eingeschoben, so werden die Kraftlinien parallel zur X-Axe sein; analog bei der zweiten parallel zur Y-Axe, bei der dritten parallel zur Z-Axe. Ich will daher die für diese drei Platten giltigen Gleichungen durch die Indices x, y, z charakterisiren.

Berücksichtigt man nun den Vorgang der Transformation, wie er in der ersten Abhandlung im Texte zwischen Gleichung 22 (I) und 23 (I) dargelegt ist, so sieht man, dass für die erste Platte $\frac{\partial x}{\partial n}=1$, $\frac{\partial y}{\partial n}=\frac{\partial z}{\partial n}=0$, für die zweite $\frac{\partial y}{\partial n}=1$, $\frac{\partial x}{\partial n}=\frac{\partial z}{\partial n}=0$ und für die dritte $\frac{\partial z}{\partial n}=1$, $\frac{\partial x}{\partial n}=\frac{\partial y}{\partial n}=0$ ist.

Man erhält daher aus Gleichung 35) für die erste Platte:

$$U'_x=\int (V+U)_x\left(D\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}+E\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}+F\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\right)dw+$$

$$\iiint_x (V+U)_x\left(D\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x^2}+G\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial y^2}+K\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial z^2}\right)dx\,dy\,dz+$$

$$2\iiint_x (V+U)_x \left(E \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \partial y} + F \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \partial z} + H \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y \partial z} \right) dx\, dy\, dz. \quad 36)$$

für die zweite Platte:

$$U_y' = \int (V+U)_y \left(E \frac{\partial \frac{1}{r}}{dx} + G \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + H \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \right) dw +$$

$$\iiint_y (V+U)_y \left(D \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2} + G \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y^2} + K \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z^2} \right) dx\, dy\, dz +$$

$$2\iiint_y (V+U)_y \left(E \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \partial y} + F \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \partial z} + H \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y \partial z} \right) dx\, dy\, dz \quad 37)$$

für die dritte Platte:

$$U_z' = \int (V+U)_z \left(F \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + H \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + K \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \right) dw +$$

$$\iiint_z (V+U)_z \left(D \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2} + G \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y^2} + K \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z^2} \right) dx\, dy\, dz +$$

$$2\iiint_z (V+U)_z \left(E \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \partial y} + F \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x\, dz} + H \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y \partial z} \right) dx\, dy\, dz. \quad 38)$$

Die einfachen Integrale sind über die ganze Oberfläche des Dielektricums zu nehmen; die dreifachen haben folgende Grenzen, da wir den Ursprung des Coordinatensystems in den Mittelpunkt der linken Condensatorplatte verlegen:

Index x:

$x = 0$ bis $x = d$
$y = -\rho$ » $y = +\rho$
$z = -\rho$ » $z = +\rho$

Index y:

$x = -\rho$ bis $x = +\rho$
$y = 0$ » $y = d$
$z = -\rho$ » $z = +\rho$

Index z:

$$x = -\rho \text{ bis } x = +\rho$$
$$y = -\rho \text{ » } y = +\rho$$
$$z = 0 \text{ » } z = d.$$

Die Potentiale $(V+U)_x$, $(V+U)_y$, $(V+U)_z$ rühren nur von den auf den Condensatorplatten befindlichen Ladungen her. Wir haben daher, wenn wir die Potentiale der linken Platte durch ungestrichelte, die der rechten durch gestrichelte Buchstaben bezeichnen:

$$(V+U)_x = P_x + \frac{P'_x - P_x}{d} x, \quad (V+U)_y = P_y + \frac{P'_y - P_y}{d} y,$$
$$(V+U)_z = P_z + \frac{P'_z - P_z}{d} z \qquad 39)$$

Ich betrachte nun zunächst die dreifachen Integrale. Da

$$r = (x^2+y^2+z^2)^{1/2},$$

haben wir

$$\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3x^2}{r^5}, \quad \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y^2} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3y^2}{r^5},$$
$$\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z^2} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3z^2}{r^5}$$

$$\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \partial y} = \frac{3xy}{r^5}, \quad \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \partial z} = \frac{3xz}{r^5}, \quad \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y \partial z} = \frac{3yz}{r^5}.$$

Es ist daher mit Rücksicht auf 39):

$$\iiint (V+U)_x \left(E \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \partial y} + F \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \partial z} + H \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y \partial z}\right) dx\,dy\,dz =$$
$$3P \left[E \iiint_x \frac{xy\,dx\,dy\,dz}{r^5} + F \iiint_x \frac{xz\,dx\,dy\,dz}{r^5} + H \iiint_x \frac{yz\,dx\,dy\,dz}{r^5}\right] +$$
$$3\frac{P'_x - P_x}{d} \left[E \iiint_x \frac{x^2 y\,dx\,dy\,dz}{r^5} + F \iiint_x \frac{x^2 z\,dx\,dy\,dz}{r^5} + \right.$$
$$\left. + H \iiint_x \frac{xyz\,dx\,dy\,dz}{r^5}\right] \qquad 40)$$

$$\iiint_y (V+U)_y \left(E\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \partial y} + F\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \partial z} + H\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y \partial z}\right) dx\,dy\,dz =$$

$$3P_y\left[E\iiint_y \frac{xy\,dx\,dy\,dz}{r^5} + F\iiint_y \frac{xz\,dx\,dy\,dz}{r^5} + H\iiint_y \frac{yz\,dx\,dy\,dz}{r^5}\right] +$$

$$3\,\frac{P_y'-P_y}{d}\left[E\iiint_y \frac{xy^2\,dx\,dy\,dz}{r^5} + F\iiint_y \frac{xyz\,dx\,dy\,dz}{r^3} + \right.$$

$$\left. + H\iiint_y \frac{y^2z\,dx\,dy\,dz}{r^5}\right] \qquad 41)$$

$$\iiint_z (V+U)_z \left(E\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \partial y} + F\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \partial z} + H\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y \partial z}\right) dx\,dy\,dz =$$

$$3P_z\left[E\iiint_z \frac{xy\,dx\,dy\,dz}{r^5} + F\iiint_z \frac{xz\,dx\,dy\,dz}{r^5} + H\iiint_z \frac{yz\,dx\,dy\,dz}{r^5}\right] +$$

$$3\,\frac{P_z'-P_z}{d}\left[E\iiint_z \frac{xyz\,dx\,dy\,dz}{r^5} + F\iiint_z \frac{xz^2\,dx\,dy\,dz}{r^5} + \right.$$

$$\left. + H\iiint_z \frac{yz^2\,dx\,dy\,dz}{r^5}\right]. \qquad 42)$$

Da $r = (x^2+y^2+z^2)^{1/2}$, hat man bei den gegebenen Grenzen folgende Beziehungen:

$$\iiint_x \frac{xy\,dx\,dy\,dz}{r^5} = \iiint_x \frac{xz\,dx\,dy\,dz}{r^5} = \iiint_y \frac{yx\,dx\,dy\,dz}{r^5}$$

$$= \iiint_y \frac{yz\,dx\,dy\,dz}{r^5} = \iiint_z \frac{zx\,dx\,dy\,dz}{r^5} = \iiint_z \frac{zy\,dx\,dy\,dz}{r^5};$$

$$\iiint_x \frac{yz\,dx\,dy\,dz}{r^5} = \iiint_y \frac{xz\,dx\,dy\,dz}{r^5} = \iiint_z \frac{xy\,dx\,dy\,dz}{r^5};$$

$$\iiint_x \frac{x^2y\,dx\,dy\,dz}{r^4} = \iiint_x \frac{x^2z\,dx\,dy\,dz}{r^5} = \iiint_y \frac{y^2x\,dx\,dy\,dz}{r^5} =$$

$$\iiint_y \frac{y^2z\,dx\,dy\,dz}{r^5} = \iiint_z \frac{z^2x\,dx\,dy\,dz}{r^5} = \iiint_z \frac{z^2y\,dx\,dy\,dz}{r^5};$$

$$\iiint_x \frac{xyz\,dx\,dy\,dz}{r^5} = \iiint_y \frac{xyz\,dx\,dy\,dz}{r^5} = \iiint_z \frac{xyz\,dx\,dy\,dz}{r^5}.$$

Nun ist

$$\iiint_x \frac{xy\,dx\,dy\,dz}{r^5} = \int_0^d x\,dx \int_{-\rho}^{+\rho} dz \int_{-\rho}^{+\rho} \frac{y\,dy}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}},$$

$$\iiint_x \frac{yz\,dx\,dy\,dz}{r^5} = \int_0^d dx \int_{-\rho}^{+\rho} z\,dz \int_{-\rho}^{+\rho} \frac{y\,dy}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}},$$

$$\iiint_x \frac{x^2y\,dx\,dy\,dz}{r^5} \int_0^d x^2dx \int_{-\rho}^{+\rho} dz \int_{-\rho}^{+\rho} \frac{y\,dy}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}};$$

$$\iiint_x \frac{xyz\,dx\,dy\,dz}{r^5} \int_0^d x\,dx \int_{-\rho}^{+\rho} z\,dz \int_{-\rho}^{+\rho} \frac{y\,dy}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}.$$

Da $\int_{-\rho}^{+\rho} \frac{y\,dy}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} = -\frac{1}{3(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\Big|_{-\rho}^{+\rho} = 0$, ist der Werth obiger vier, somit auch sämmtlicher in 40) bis 42) vorkommender Integrale Null. Dadurch reduciren sich die Gleichungen 36) bis 38), so dass wir behalten:

$$U'_x = \int (V+U)_x \left(D \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + E \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + F \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\right) dw +$$

$$\iiint_x (V+U)_x \left(D \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2} + G \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y^2} + K \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z^2}\right) dx\,dy\,dz \qquad (43)$$

$$U'_y = \int (V+U)_y \left(E \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + G \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + H \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\right) dw +$$

$$\iiint_y (V+U)_y \left(D \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2} + G \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y^2} + K \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z^2}\right) dx\,dy\,dz \qquad 44)$$

$$U'_z = \int (V+U)_z \left(F \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + H \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + K \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\right) dw +$$

$$\iiint_z (V+U)_z \left(D \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2} + G \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y^2} + K \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z^2}\right) dx\,dy\,dz. \qquad 45)$$

Die noch vorkommenden dreifachen Integrale können nun noch ganz analog den Gleichungen 32 (I) bis 34 (I) geschrieben

werden, wobei die Bedeutung der $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}, \mathfrak{P}$ die daselbst gebrauchte ist:

$$\iiint_x (V+U)_x \left(D \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2} + G \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y^2} + K \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z^2} \right) dx\,dy\,dz =$$
$$P_x[-(D+G+K)\mathfrak{A}+3D\mathfrak{B}+3(G+K)\mathfrak{C}]+$$
$$+\frac{P'_x-P_x}{d}[-(D+G+K)\mathfrak{M}+3D\mathfrak{N}+3(G+K)\mathfrak{P}] \qquad 46)$$

$$\iiint_y (V+U)_y \left(D \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2} + G \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y^2} + K \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z^2} \right) dx\,dy\,dz =$$
$$P_y[-(D+G+K)\mathfrak{A}+3G\mathfrak{B}+3(D+K)\mathfrak{C}]+$$
$$+\frac{P'_y-P_y}{d}[-(D+G+K)\mathfrak{M}+3G\mathfrak{N}+3(D+K)\mathfrak{P}] \qquad 47)$$

$$\iiint_z (V+U)_z \left(D \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2} + G \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y^2} + K \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z^2} \right) dx\,dy\,dz =$$
$$P_z[-(D+G+K)\mathfrak{A}+3K\mathfrak{B}+3(D+G)\mathfrak{C}]+$$
$$+\frac{P'_z-P_z}{d}[-(D+G+K)\mathfrak{M}+3K\mathfrak{N}+3(D+G)\mathfrak{P}]. \qquad 48)$$

Der Kürze wegen schreibe ich die rechten Seiten dieser Gleichungen:

$$\begin{aligned} &P_x \,.\, M_x + \frac{P'_x-P_x}{d} N_x \\ &P_y \,.\, M_y + \frac{P'_y-P_y}{d} N_y \\ &P_z \,.\, M_z + \frac{P'_z-P_z}{d} N_z \end{aligned} \qquad 49)$$

und damit gehen die Gleichungen 43)—45) über in:

$$U'_x = \int (V+U)_x \left(D \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + E \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + F \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \right) dw +$$
$$+P_x \,.\, M_y + \frac{P'_x-P_x}{d} N_x \qquad 50)$$

$$U'_y = \int (V+U)_y \left(E \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + G \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + H \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \right) dw +$$

$$+ P_y . M_y + \frac{P'_y - P_y}{d} N_y \qquad 51)$$

$$U'_z = \int (V+U)_z \left(F \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + H \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + K \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \right) dw +$$

$$+ P_z . M_z + \frac{P'_z - P_z}{d} N_z . \qquad 52)$$

Es sind nun die einfachen Integrale auszurechnen. Zunächst ist

$$\int (V+U)_x \left(D \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + E \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + F \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \right) dw =$$

$$D \int (V+U)_x \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} dw + E \int (V+U)_x \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} dw +$$

$$+ F \int (V+U)_x \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} dw . \qquad 53)$$

Jedes dieser Integrale zerfällt in drei Theile; einen, welcher sich auf die linke Kreisfläche der dielektrischen Platte bezieht, was durch den Index 1 bezeichnet werden soll; einen zweiten, welcher sich auf die rechte Kreisfläche bezieht; diesen Theil versehe ich mit dem Index 2; endlich einen dritten, welcher sich auf die die beiden Kreisflächen verbindende Cylinderfläche bezieht; dieser Theil soll durch den Index 3 gekennzeichnet werden.

Da, von der Randwirkung abgesehen, auf die es bei diesen Betrachtungen auch gar nicht ankommt, alle Punkte je einer Condensatorplatte gleiches Potential haben, ist es gestattet, die Werthe der U' für die Mittelpunkte der beiden Condensatorplatten (kurz gesagt für: Mittelpunkte der Innenflächen der Condensatorplatten) zu bestimmen, ohne der Allgemeinheit Eintrag zu thun. Ich berechne daher vorerst den Werth der Integrale

in 53) für den Mittelpunkt der linken Condensatorplatte. Auf der linken Kreisfläche der dielektrischen Platten hat das Potential die constanten Werthe P_x, respective P_y und P_z. Der erste Theil des Integrals

$$\int (V+U)_x \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} dw$$

ist also

$$P_x \int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} dw_1.$$

Ich denke mir nun vorläufig den Mittelpunkt der linken Condensatorplatte nicht in unmittelbarer Nähe der dielektrischen Platte, sondern nehme an, dass er in der im Mittelpunkt derselben nach Aussen errichteten Normalen um die beliebige Strecke λ entfernt liege. Irgend ein Punkt der dielektrischen Platte habe nun von der linken Kreisfläche den Abstand x (der Abstand ist ja bei der ersten Platte der X-Axe parallel), während seine Entfernung von der X-Axe l sein soll. Dann ist sein Abstand von dem definirten äusseren Punkte gegeben durch

$$r^2 = l^2 + (\lambda + x)^2.$$

Hieraus folgt

$$\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} = - \frac{\lambda + x}{[l^2 + (\lambda + x)^2]^{3/2}}.$$

Da wir aber den Werth des Differentialcoëfficienten $\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}$ für die Kreisfläche selbst suchen, ist $x = 0$ zu setzen, woraus folgt:

$$\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} = - \frac{\lambda}{(l^2 + \lambda^2)^{3/2}}.$$

Da ferner $dw_1 = 2\pi l dl$, ergibt sich also

$$\int (V+U)_x \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} dw_1 = -2\pi P_x \int_0^\rho \frac{\lambda l dl}{(l^2+\lambda^2)^{3/2}} =$$
$$= -2\pi P_x \left(1 - \frac{\lambda}{\sqrt{\rho^2+\lambda^2}}\right).$$

Nun ist aber der äussere Punkt der Mittelpunkt der linken Condensatorplatte, sein Abstand λ von der dielektrischen Platte also $= 0$, woraus endlich

$$\int (V+U)_x \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} dw_1 = -2\pi P_x. \qquad 54)$$

Um $\int (V+U)_x \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} dw_2$ zu berechnen, ist vor Allem zu bedenken, dass das Potential $(V+U)_x$ auf der rechten Kreisfläche den constanten Werth P'_x hat. Es ist daher zunächst

$$\int (V+U)_x \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} dw_2 = P'_x \int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} dw_2.$$

Die Entfernung eines von der rechten Kreisfläche um die Strecke x von der X-Axe um die Distanz l abstehenden Punktes vom Mittelpunkt der linken Condensatorplatte ist nun

$$r^2 = l^2 + (d-x)^2,$$

daher

$$\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} = \frac{d-x}{[l^2+(d-x^2)]^{3/2}}.$$

Dieser Differentialcoëfficient hat für die rechte Kreisfläche den Werth $\frac{d}{(l^2+d^2)^{3/2}}$; man erhält daher

$$\int (V+U)_x \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} dw_2 = 2\pi P'_x \int_0^\rho \frac{l.d.dl}{(l^2+d^2)^{3/2}} =$$

$$= 2\pi P'_x \left(1 - \frac{d}{\sqrt{d^2+\rho^2}}\right).$$

Da, wie in der ersten Abhandlung, $\frac{d}{\rho}$ vernachlässigt wird, verschwindet $\frac{d}{\sqrt{d^2+\rho^2}}$, und es resultirt

$$\int (V+U)_x \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} dw_2 = 2\pi P'_x. \tag{55}$$

Für irgend einen Punkt der Cylinderfläche, welcher von der linken Kreisfläche um die Distanz x absteht, hat $(V+U)_x$ den Werth $P_x + \frac{P'_x - P_x}{d} x$; es ist daher

$$\int (V+U)_x \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} dw_3 = P_x \int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} dw_3 + \frac{P'_x - P_x}{d} \int x \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} dw_3.$$

Das Oberflächenelement in diesem Integral ist gegeben durch $2\rho\pi . dx$. Die Entfernung eines von der linken Kreisfläche um die Strecke x abstehenden Punktes der Cylinderfläche vom Mittelpunkt der linken Condensatorplatte wird bestimmt durch die Gleichung

$$r^2 = \rho^2 + x^2,$$

aus welcher sich $\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} = -\frac{x}{(\rho^2+x^2)^{3/2}}$ ergibt.

Es ist daher zu berechnen:

$$\int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} dw_3 = -2\rho\pi \int_0^d \frac{x dx}{(\rho^2+x^2)^{3/2}}$$

und

$$\int x \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} dw_3 = -2\rho\pi \int_0^d \frac{x^2 dx}{(\rho^2+x^2)^{3/2}}.$$

Man hat

$$\int_0^d \frac{x dx}{(\rho^2+x^2)^{3/2}} = -\frac{1}{\sqrt{\rho^2+x^2}}\Bigg|_0^d = -\frac{1}{\sqrt{\rho^2+d^2}} + \frac{1}{\rho} =$$

$$= -\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho} = 0.$$

Ferner ist

$$\int_0^d \frac{x^2dx}{\sqrt{\rho^2+x^2}} = -\frac{1}{\sqrt{\rho^2+x^2}}\Big|_0^d + \lg\left(x+\sqrt{\rho^2+x^2}\right)\Big|_0^d =$$

$$= \lg\left(\frac{d+\sqrt{\rho^2+d^2}}{\rho}\right).$$

Nun ist $\lg\left(\frac{d}{\rho}+\frac{\sqrt{\rho^2+d^2}}{\rho}\right)$ bei der gemachten Vernachlässigung von $\frac{d}{\rho} = \lg(1) = 0$, daher auch

$$\int_0^d \frac{x^2dx}{(\rho^2+x^2)^{3/2}} = 0.$$

Es ergibt sich somit

$$\int (V+U)_x \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} dw_3 = 0. \tag{56}$$

Durch Zusammenfassung der Gleichungen 54) bis 56) erhält man:

$$\int (V+U)_x \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} dw = 2\pi(P'_x - P_x).* \tag{57}$$

In gleicher Weise sind die übrigen Integrale zu berechnen. Man hat:

---

* Ich benütze die Gelegenheit, um eine Incorrectheit in der Abhandlung: »Zur Theorie der Dielektrica« zur Sprache zu bringen. Das daselbst vorkommende Integral $\int (V+U)_a \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} dw$ (und die entsprechenden beiden andern) ist irrthümlicherweise mit dem von Clausius (Die mechanische Wärmetheorie, 2. Aufl., 2. Bd., S. 80, Gl. 29) behandelten identificirt worden, so dass $2\pi(P'_a - P_a)\left(1-\frac{1}{2}\frac{d}{\rho}\right)$ als sein Werth angegeben wurde, während sein wirklicher Werth, wie die obige Berechnung zeigt, $2\pi(P'_a - P_a)$ ist. Da die Grösse $\frac{d}{\rho}$ vernachlässigt wird, gelangte ich allerdings zu demselben Werthe, so dass die Resultate jener Arbeit durch dieses Versehen nicht alterirt werden.

$$\int (V+U)_x \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} dw_1 = P_x \int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y'} dw_1.$$

Würde man aber hier abermals $dw_1 = 2\pi l dl$ als Oberflächenelement einführen, so käme man auf das Integral $\int_0^\rho \frac{dl}{l}$, welches keinen bestimmten Werth hat. Ich verfahre daher folgendermassen: Irgend ein Punkt der linken Kreisfläche habe die Coordinaten y und z. Sein Abstand vom Mittelpunkt der linken Condensatorplatte ist dann gegeben durch

$$r^2 = y^2 + z^2,$$

daher

$$\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} = -\frac{y}{(y'^2+z^2)^{3/2}}$$

und

$$\int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y'} dw_1 = -\int_{-\rho}^{+\rho} \int_{-\rho}^{+\rho} \frac{y\, dy\, dz}{(y^2+z^2)^{3/2}}.$$

Nun ist $-\int \frac{y dy}{(y^2+z^2)^{3/2}} = \frac{1}{y^2+z^2}$. Setzt man die Grenzen ein, so folgt unmittelbar $\int_{-\rho}^{+\rho} \frac{y dy}{(y'^2+z^2)^{3/2}} = 0$, also auch

$$\int (V+U)_x \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} dw_1 = 0. \tag{58}$$

Ferner ist

$$\int (V+U)_x \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} dw_2 = P'_x \int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} dw_2.$$

Ein Punkt der rechten Kreisfläche mit den Coordinaten y und z hat von dem Mittelpunkt der linken Condensatorplatte einen Abstand, welcher bestimmt ist durch

$$r^2 = y^2 + z^2 + d^2,$$

daher

$$\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} = -\frac{y}{(y^2+z^2+d^2)^{3/2}}.$$

Man sieht also, dass auch

$$\int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} dw_2 = -\int_{-\rho}^{+\rho}\int_{-\rho}^{+\rho} \frac{y\,dy\,dz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} = 0,$$

daher

$$\int (V+U)_x \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} dw_2 = 0. \tag{59}$$

Um den für die Cylinderfläche geltenden Theil des Integrals zu berechnen, nehme ich auf der Cylinderfläche im Abstand x von der linken Kreisfläohe einen Punkt, dessen andere Coordinaten y und z sind. Sein Abstand vom Mittelpunkt der linken Condensatorplatte ist dann gegeben durch

$$r^2 = x^2+y^2+z^2,$$

wobei

$$y^2+z^2 = \rho^2$$

sein muss.

Es ist sonach

$$\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} = -\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} = -\frac{y}{(x^2+\rho^2)^{3/2}}.$$

Führe ich für y und z Polarcoordinaten ein, so dass

$$y = \rho \cos \varphi$$
$$z = \rho \sin \varphi,$$

so ist

$$\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} = -\frac{\rho \cos \varphi}{(x^2+\rho^2)^{3/2}}.$$

Das Oberflächenelement ist dann $dw_3 = \rho \, d\varphi \, dx$ und

$$\int (V+U)_x \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} dw_3 = P_x \int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} dw_3 + \frac{P_x' - P_x}{d} \int x \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} dw_3$$

$$= -\rho^2 P_x \int_0^d \frac{dx}{(x^2+\rho^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} \cos\varphi \, d\varphi$$

$$-\rho^2 \frac{P_x' - P_x}{d} \int_0^d \frac{x\,dx}{(x^2+\rho^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} \cos\varphi \, d\varphi.$$

Da nun $\int_0^{2\pi} \cos\varphi \, d\varphi = 0$, folgt also

$$\int (V+U)_x \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} dw_3 = 0. \qquad 60)$$

Durch Zusammenfassung der Gleichungen 58) bis 60) ergibt sich endlich

$$\int (V+U)_x \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} dw = 0. \qquad 61)$$

Da sich bei der ersten Platte nichts ändert, wenn y mit z vertauscht wird, muss daher auch die Gleichung bestehen:

$$\int (V+U)_x \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} dw = 0. \qquad 62)$$

Mit Rücksicht auf die Gleichungen 57), 61) und 62) resultirt daher

$$\int (V+U)_x \left(D \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + E \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + F \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \right) dw = 2\pi D (P_x' - P_x). \qquad 63)$$

Ebenso wird man finden:

$$\int (V+U)_y \left(E \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + G \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + H \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \right) dw =$$

$$= 2\pi G (P_y' - P_y). \qquad 64)$$

$$\int (V+U)_z \left(F \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + H \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + K \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \right) dw = 2\pi K(P'_z - P_z). \quad (65)$$

Die Gleichungen 50) bis 52) nehmen in Folge dessen eine bedeutend einfachere Gestalt an. Da der Punkt, für welchen wir die U' bestimmt haben, der Mittelpunkt der linken Condensatorplatte ist, deren Potentiale durch ungestrichelte Buchstaben gekennzeichnet werden sollen, werden wir U anstatt U' zu schreiben haben, und erhalten:

$$\begin{aligned} U_x &= 2\pi D(P'_x - P_x) + M_x P_x + \frac{P'_x - P_x}{d} N_x \\ U_y &= 2\pi G(P'_y - P_y) + M_y P_y + \frac{P'_y - P_y}{d} N_y \\ U_z &= 2\pi K(P'_z - P_z) + M_z P_z + \frac{P'_z - P_z}{d} N_z. \end{aligned} \quad 66)$$

An diese Gleichungen sind nun dieselben Überlegungen zu knüpfen wie an die Gleichung 42 (I). Bezeichne ich die Dielektricitätsconstanten der drei Platten mit D_x, D_y, D_z, so werden daher gemäss 47 (I) und 48 (I) die Gleichungen gelten:

$$\begin{aligned} D_x &= 1 + 4\pi D - \left(M_x - \frac{2N_x}{d} \right) \\ D_y &= 1 + 4\pi G - \left(M_y - \frac{2N_y}{d} \right) \\ D_z &= 1 + 4\pi K - \left(M_z - \frac{2N_z}{d} \right) \end{aligned} \quad 67)$$

Diese Gleichungen gehen aus den Gleichungen 47 (I) und 48 (I) unmittelbar hervor, wenn man die Constanten E_1, E_2, E_3 welche in ihnen auftreten, bezüglich durch die Constanten D, G, K ersetzt. Man wird daher gemäss Gleichung 50 (I) mit Beibehaltung der daselbst gebrauchten Bezeichnungen weiter schreiben können:

$$\begin{aligned} 4\pi D + D(\alpha - 3\beta) + G(\alpha - 3\gamma) + K(\alpha - 3\gamma) &= D_x - 1 \\ 4\pi G + D(\alpha - 3\gamma) + G(\alpha - 3\beta) + K(\alpha - 3\gamma) &= D_y - 1 \\ 4\pi K + D(\alpha - 3\gamma) + G(\alpha - 3\gamma) + K(\alpha - 3\beta) &= D_z - 1 \end{aligned} \quad 68)$$

Es wurde ferner in jener Abhandlung gezeigt, dass $\alpha - 3\beta = \alpha - 3\gamma = 0$, so dass die Gleichungen 68) die einfache Gestalt annehmen:

$$\begin{aligned} D_x &= 1 + 4\pi D \\ D_y &= 1 + 4\pi G \\ D_z &= 1 + 4\pi K. \end{aligned} \tag{69}$$

Es ist nun Zeit, sich an die Bedeutung der Constanten D, G, K zu erinnern. Aus den Gleichungen 19) bis 24) ersieht man, dass

$$\begin{aligned} D &= \frac{N}{3J(1-g)}(a^3 \cos^2 \alpha_1 + b^3 \cos^2 \beta_1 + c^3 \cos^2 \gamma_1) \\ G &= \frac{N}{3J(1-g)}(a^3 \cos^2 \alpha_2 + b^3 \cos^2 \beta_2 + c^3 \cos^2 \gamma_2) \\ K &= \frac{N}{3J(1-g)}(a^3 \cos^2 \alpha_3 + b^3 \cos^2 \beta_3 + c^3 \cos^2 \gamma_3); \end{aligned} \tag{70}$$

nun geben aber die Gleichungen 18 (I) die Beziehungen

$$\frac{a^3 N}{3J(1-g)} = E_1, \quad \frac{b^3 N}{3J(1-g)} = E_2, \quad \frac{c^3 N}{3J(1-g)} = E_3,$$

so dass die Gleichungen 70) auch geschrieben werden können:

$$\begin{aligned} D &= E_1 \cos^2 \alpha_1 + E_2 \cos^2 \beta_1 + E_3 \cos^2 \gamma_1 \\ G &= E_1 \cos^2 \alpha_2 + E_2 \cos^2 \beta_2 + E_3 \cos^2 \gamma_2 \\ K &= E_1 \cos^2 \alpha_3 + E_2 \cos^2 \beta_3 + E_3 \cos^2 \gamma_3. \end{aligned}$$

In Gleichung 69) eingesetzt folgt:

$$\begin{aligned} D_x &= 1 + 4\pi E_1 \cos^2 \alpha_1 + 4\pi E_2 \cos^2 \beta_1 + 4\pi E_3 \cos^2 \gamma_1 \\ D_y &= 1 + 4\pi E_1 \cos^2 \alpha_2 + 4\pi E_2 \cos^2 \beta_2 + 4\pi E_3 \cos^2 \gamma_2 \\ D_z &= 1 + 4\pi E_1 \cos^2 \alpha_3 + 4\pi E_2 \cos^2 \beta_3 + 4\pi E_3 \cos^2 \gamma_3. \end{aligned}$$

Da allgemein $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$, können wir diese Gleichungen auch schreiben

$$\begin{aligned} D_x &= (1 + 4\pi E_1) \cos^2 \alpha_1 + (1 + 4\pi E_2) \cos^2 \beta_1 + (1 + 4\pi E_3) \cos^2 \gamma_1 \\ D_y &= (1 + 4\pi E_1) \cos^2 \alpha_2 + (1 + 4\pi E_2) \cos^2 \beta_2 + (1 + 4\pi E_3) \cos^2 \gamma_2 \\ D_z &= (1 + 4\pi E_1) \cos^2 \alpha_3 + (1 + 4\pi E_2) \cos^2 \beta_3 + (1 + 4\pi E_3) \cos^2 \gamma_3 \end{aligned}$$

Die Klammergrössen sind nun, wie die Gleichungen 53 (I) zeigen, nichts Anderes als die Hauptdielektricitätsconstanten D_a, D_b, D_c, so dass wir weiter schreiben können:

$$\begin{aligned} D_x &= D_a \cos^2 \alpha_1 + D_b \cos^2 \beta_1 + D_c \cos^2 \gamma_1 \\ D_y &= D_a \cos^2 \alpha_2 + D_b \cos^2 \beta_2 + D_c \cos^2 \gamma_2 \\ D_z &= D_a \cos^2 \alpha_3 + D_b \cos^2 \beta_3 + D_c \cos^2 \gamma_3. \end{aligned} \tag{71}$$

D_x war die Dielektricitätsconstante der Substanz für den Fall, dass die Kraft parallel der X-Axe war; dann sind aber $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ die Winkel, welche die Kraft, somit auch die Richtung, nach welcher die Dielektricitätsconstante bestimmt wurde, mit den Axen des Ellipsoids, also auch mit den Richtungen der Hauptdielektricitätsconstanten einschliesst. Dieselbe Bemerkung gilt bezüglich D_y und D_z. Die drei Gleichungen in 71) sagen also alle dasselbe aus, wie es auch sein muss. Sie geben die gesuchte Beziehung zwischen der Dielektricitätsconstante nach einer beliebigen Richtung und den Hauptdielektricitätsconstanten. Bezeichnen wir die Dielektricitätsconstante nach einer beliebigen Richtung r mit D_r, die Hauptdielektricitätsconstanten mit D_a, D_b, D_c, ihre Richtungen (die Ellipsoidaxen) mit a, b, c, so ist die gesuchte Beziehung niedergelegt in der Gleichung:

$$D_r = D_a \cos^2 (a, r) + D_b \cos^2 (b, r) + D_c \cos^2 (c, r). \tag{72}$$

Aus den Gleichungen 71) lässt sich noch ein weiterer Satz ableiten: Wenn man sie nämlich addirt, so erhält man die Gleichung:

$$D_x + D_y + D_z = D_a + D_b + D_c. \tag{73}$$

D_x, D_y, D_z sind die Dielektricitätsconstanten nach drei auf einander senkrechten Richtungen. In der Gleichung 73) kommen aber die Winkel, welche die Lage dieser Richtungen gegenüber den Richtungen der Hauptdielektricitätsconstanten angeben, nicht mehr vor; die Gleichung gibt also den Satz:

Die Summe der Dielektricitätsconstanten nach beliebigen drei auf einander senkrechten Richtungen

ist stets gleich der Summe der Hauptdielektricitätsconstanten; oder in anderen Worten:

Die Summe der Dielektricitätsconstanten nach beliebigen drei aufeinander senkrechten Richtungen ist für jedes anisotrope (optisch zweiaxige) Medium eine constante Grösse.

Für ein Medium, welches nur zwei Hauptdielektricitätsconstanten besitzt (also ein optisch einaxiges), werden in Gleichung 72) zwei Glieder zusammenzuziehen sein. In der Klammer steht dann die Summe zweier Cosinusquadrate, welche gleich ist dem Quadrat des Cosinus jenes Winkels, welchen die Richtung r mit der Ebene einschliesst, für welche die Dielektricitätsconstante constant ist; dieser Winkel ist daher auch der Winkel der Richtung mit dieser betreffenden Hauptdielektricitätsconstante. Bezeichnet man daher die grössere Hauptdielektricitätsconstante mit D_g, die kleinere mit D_k, ihre Richtungen entsprechend mit g und k, so folgt:

$$D_r = D_g \cos^2(g, r) + D_k \cos^2(k, r). \tag{74}$$

Gleichung 73) geht entsprechend für diesen Fall über in

$$D_x + D_y = D_g + D_k. \tag{75}$$

III.

Die in der ersten und in der vorliegenden Abhandlung durchgeführte Hypothese ellipsoidischer Molekel, welche auch von Stefan [Zur Theorie der magnetischen Kräfte. Diese Sitzungsberichte 69 (2), 1874] zur Sprache gebracht worden ist, ist auch ansreichend, um die Erscheinungen der Doppelbrechung zu erklären. Dies soll noch gezeigt werden.

Die Gleichung 72) ermöglicht eine einfache Construction. Die Gleichung eines dreiaxigen Ellipsoides sei

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Irgend ein Radiusvector, welcher die Oberfläche in dem Punkte x, y, z schneidet, ist gegeben durch

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

die Winkel, welche er mit den Axen einschliesst, sind bestimmt durch

$$\cos(a, r) = \frac{x}{r}, \cos(b, r) = \frac{y}{r}. \cos(c, r) = \frac{z}{r}.$$

Es ist daher auch

$$x = r\cos(a, r), \quad y = r\cos(b, r), \quad z = r\cos(c, r).$$

Trägt man diese Werthe in die Gleichung des Ellipsoides ein, so folgt

$$\frac{\cos^2(a, r)}{a^2} + \frac{\cos^2(b, r)}{b^2} + \frac{\cos^2(c, r)}{c^2} = \frac{1}{r^2}. \tag{76}$$

Vergleicht man mit dieser Relation die Gleichung 72), so sieht man, dass D_r, die Dielektricitätsconstante nach einer beliebigen Richtung, gegeben ist durch den reciproken Werth des Quadrates des Radiusvectors, welcher in einem dreiaxigen Ellipsoid mit den Halbaxen $a = \frac{1}{\sqrt{D_a}}$, $b = \frac{1}{\sqrt{D_b}}$, $c = \frac{1}{\sqrt{D_c}}$ in derselben Richtung gezogen wird; es wird dann in der That $D_r = \frac{1}{r^2}$. Die Gleichung dieses Ellipsoids lautet somit

$$D_a x^2 + D_b y^2 + D_c z^2 = 1. \tag{77}$$

Nun ist nach der elektromagnetischen Lichttheorie

$$D_a = \alpha^2, \quad D_b = \beta^2, \quad D_c = \gamma^2,$$

wenn α, β, γ die Hauptbrechungsquotienten des anisotropen Mediums bedeuten. Bezeichnen wir ferner die Lichtgeschwindigkeit im leeren Raum mit v, die Lichtgeschwindigkeit nach den Hauptrichtungen mit $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ (wobei wegen $\alpha > \beta > \gamma$ $\mathfrak{a} < \mathfrak{b} < \mathfrak{c}$), so wird, da $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ gleiche Richtung mit a, b, c haben, Gleichung 72) übergehen in

$$\frac{v^2}{\mathfrak{a}^2}\cos^2(\mathfrak{a}, r) + \frac{v^2}{\mathfrak{b}^2}\cos^2(\mathfrak{b}, r) + \frac{v^2}{\mathfrak{c}^2}\cos^2(\mathfrak{c}, r) = D_r, \text{ d. i. weiter}$$

$$\frac{\cos^2(\mathfrak{a}, r)}{\mathfrak{a}^2} + \frac{\cos^2(\mathfrak{b}, r)}{\mathfrak{b}^2} + \frac{\cos^2(\mathfrak{c}, r)}{\mathfrak{c}^2} = \frac{D_r}{v^2}. \tag{78}$$

Die linke Seite dieser Gleichung bedeutet nun gemäss 76) das reciproke Quadrat eines Radiusvectors in einem Ellipsoid

$$\frac{x^2}{\mathfrak{a}^2}+\frac{y^2}{\mathfrak{b}^2}+\frac{z^2}{\mathfrak{c}^2}=1, \qquad 79)$$

welcher mit den Axen die Winkel $(\mathfrak{a}, r)$, $(\mathfrak{b}, r)$, $(\mathfrak{c}, r)$ einschliesst. Bezeichne ich diesen Radiusvector mit $\mathfrak{s}$, so muss

$$\frac{\cos^2(\mathfrak{a}, r)}{\mathfrak{a}^2}+\frac{\cos^2(\mathfrak{b}, r)}{\mathfrak{b}^2}+\frac{\cos^2(\mathfrak{c}, r)}{\mathfrak{c}^2}=\frac{1}{\mathfrak{s}^2},$$

respective, wie der Vergleich mit Gleichung 74) lehrt:

$$\frac{D_r}{v^2}=\frac{1}{\mathfrak{s}^2},$$

also

$$D_r=\frac{v^2}{\mathfrak{s}^2} \qquad 80)$$

sein, d. h. da Gleichung 75) die Gleichung des Ergänzungsellipsoides, $\mathfrak{s}$ daher eine Strahlengeschwindigkeit ist: Die Dielektricitätsconstante nach einer beliebigen Richtung erscheint nicht durch eine Wellen-, sondern durch eine Strahlengeschwindigkeit bestimmt.

Ich kann jedoch diesen Satz nicht aussprechen, ohne daran zu erinnern, dass die Untersuchung, deren Endergebniss er ist, die Bestimmung der Dielektricitätsconstante mittelst statischer Ladungen vorausgesetzt hat. Das gewonnene Resultat lässt also noch immer die Möglichkeit offen, dass die Wellengeschwindigkeit auch in anderen als in den Hauptrichtungen, in welchen sie ja mit der Strahlengeschwindigkeit zusammenfällt, in einer Beziehung steht zu dem dielektrischen Verhalten der Substanz, falls dasselbe mit Hertz'schen Schwingungen von sehr kurzer Wellenlänge geprüft wird; mit anderen Worten: der obige Satz leitet zu der vorerst als Frage auszusprechenden Vermuthung, ob nicht die Bestimmung der Dielektricitätsconstante ausser den Hauptrichtungen mit relativ kurzen elektrischen Wellen einen anderen Werth ergibt als die Bestimmungen derselben mit statischen Ladungen, derart, dass die nach der ersten Methode bestimmte Dielektricitätsconstante

der Wellen-, die nach der zweiten bestimmte der Strahlengeschwindigkeit zugeordnet wäre.

Ich beabsichtige, diese Vermuthung zunächst auf theoretischem Wege zu untersuchen, glaube jedoch, dass eine experimentells Prüfung nicht auf übermässige Schwierigkeiten stossen würde. Ein Unterschied der Werthe bei den zweierlei Bestimmungen darf erst erwartet werden, wenn die elektrischen Wellen gegenüber der Dicke der zu untersuchenden Platte klein sind; denn nur in diesem Falle werden in der Platte ununterbrochen entgegengesetzte Polarisationszustände gleichzeitig existiren. Mit Hilfe der Lebedew'schen Anordnung[1] können Wellen von 0·6 *cm* Länge erzeugt werden, während anderseits entsprechend dickere Platten aus Kalkspath mit der geeigneten Orientirung der Axen unschwer herzustellen sein dürften.

Der durch Gleichung 80) ausgesprochene Satz betrifft, wie gesagt, die auf statischem Wege bestimmte Dielektricitätsconstante für alle Fälle. Die durch ihn ausgesprochene Beziehung gilt naturgemäss auch für die Hauptrichtungen. Der Hauptdielektricitätsconstante D_a ist die Hauptgeschwindigkeit $\mathfrak{a}$ zugeordnet. Aus der Definition des Ergänzungsellipsoides folgt, dass die Geschwindigkeit $\mathfrak{a}$ nur solchen Strahlen zukommen kann, welche in der $\mathfrak{bc}$-Ebene liegen. Dort kommt auch anderseits, wie die Definition des Polarisationsellipsoides ergibt, die Geschwindigkeit $\mathfrak{a}$ Wellen zu, deren Normalen in der $\mathfrak{bc}$-Ebene liegen. Man kann somit der Hauptdielektricitätsconstante D_a sowohl eine zu ihr senkrechte Ebene von Strahlen, als auch eine solche von Wellennormalen zuordnen. Dasselbe folgt auch für die beiden anderen Hauptdielektricitätsconstanten, doch gilt das nicht mehr für jede andere Richtung. Wenn wir die Dielektricitätsconstante mit statischen Ladungen (oder auch mit relativ langen Wellen) bestimmen, so steht sie in Beziehung zu einer Strahlengeschwindigkeit, welche in dem Ergänzungsellipsoid durch Construction des Radiusvector in der Richtung der fraglichen Dielektricitätsconstante zu finden ist. Diese

---

[1] P. Lebedew, Über die Doppelbrechung der Strahlen elektrischer Kraft. Wiedemann's Annalen der Physik und Chemie. Bd. 56, S. 1, 1895.

Geschwindigkeit kann nur Strahlen zukommen, welche in einer zu dieser Richtung senkrechten Ebene liegen. Die Gleichung 80) kann daher auch ausgesprochen werden durch den Satz: Der auf statischem Wege bestimmten Dielektricitätsconstante ist eine zu der Richtung, in welcher sie bestimmt wird, senkrechte Ebene zugeordnet, welche der geometrische Ort aller Strahlen ist, deren eine im Ergänzungsellipsoid mit der Richtung der Dielektricitätsconstante gleich gelagerte Geschwindigkeit die Maxwell'sche Beziehung erfüllt.

Für die hypothetische, von der auf statischem Wege bestimmten verschiedenen Dielektricitätsconstante, welche zu ihrer Bestimmung die Anwendung relativ kurzer elektrischer Schwingungen voraussetzt, würde ein analoger Satz gelten, welcher aus dem soeben ausgesprochenen erhalten wird, wenn die Worte Strahl und Ergänzungsellipsoid durch die Worte Wellennormale, respective Polarisationsellipsoid ersetzt werden.

Beide Sätze behalten selbstverständlich auch für isotrope Medien Giltigkeit, in welchen Strahl und Wellennormale stets zusammenfallen, während das Ergänzungs- und das Polarisationsellipsoid in eine Kugel übergehen. Des Weiteren sieht man aber auch, dass in isotropen Medien in beliebigen, in anisotropen in den Hauptrichtungen die auf statischem Wege bestimmte Dielektricitätsconstante mit der mit relativ kurzen Schwingungen bestimmten, von ihr im Allgemeinen hypothetisch verschiedenen zusammenfallen.

Die Beziehung zwischen der auf statischem Weg bestimmten Dielektricitätsconstante und dem Quotienten, welcher aus der Strahlengeschwindigkeit im leeren Raum und der der Dielektricitätsconstante zugeordneten Strahlengeschwindigkeit gebildet wird, führt in ihrer Anwendung auf Gleichung 72), wie gezeigt wurde, unmittelbar zu dem Ergänzungsellipsoid, von welchem aus bekanntlich die Wellenfläche durch eine einfache Construction erhalten werden kann. Damit ist aber auch der Beweis erbracht, dass die Hypothese der ellipsoidförmigen Molekel ausreichend ist, um die Erscheinungen der Doppelbrechung von moleculartheoretischem Gesichtspunkt aus zu begreifen.

Wären uns ellipsoidische Molekel mit bestimmten Axenlängen gegeben, würde uns ferner die Zahl derselben pro Volumeinheit festgesetzt, so könnten wir zu Folge der Gleichung 54 (I) sofort die Hauptdielektricitätsconstanten eines aus ihnen aufzubauenden anisotropen Mediums angeben. Mit Hilfe der oben dargelegten Beziehungen liessen sich dann weiter alle für die Erscheinungen der Doppelbrechung massgebenden Grössen, Hauptbrechungsquotienten, Lage der optischen Axen und so fort ableiten, d. h. das dielektrische und optische Verhalten des Mediums wäre bis auf die Dispersion auf rein geometrische Bestimmungsstücke zurückgeführt.

Gleichung 72) führt, wie ihrer Beziehung zum Ergänzungsellipsoid entspricht, direct zu den secundären optischen Axen. Wir können fragen, ob nicht in jedem anisotropen Medium Ebenen angebbar sind, in welchen die Dielektricitätsconstante unveränderlich ist. Zur Beantwortung dieser Frage betrachte ich das Ellipsoid, welches zur constructiven Bestimmung der auf statischem Weg ermittelten Dielektricitätsconstante nach einer beliebigen Richtung dient (Gleichung 77):

$$D_a x^2 + D_b y^2 + D_c z^2 = 1.$$

Die analytische Geometrie lehrt, dass im Allgemeinen zwei verschiedene Systeme paralleler Ebenen existiren, welche ein dreiaxiges Ellipsoid in Kreisen schneiden. Alle diese Ebenen stehen senkrecht auf der Ebene der grössten und kleinsten Axe, die Winkel θ_1 und θ_2, welche sie mit der grössten, in unserem Fall der c-Axe, einschliessen, sind gegeben durch $\sin\theta_{1,2} = \pm \frac{a}{b}\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}}$. Die Winkel also, welche zwei durch den Mittelpunkt des Ellipsoids gehende Gerade, deren je eine zu je einem der genannten Ebenensysteme senkrecht ist, mit der c-Axe einschliessen, sind im Allgemeinen $\varphi = 90-\theta$, daher

$$\cos\varphi = \pm \frac{a}{b}\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}}, \quad \cos^2\varphi = \frac{a^2}{b^2}\,\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}.$$

In unserem Falle ist

$$a^2 = \frac{1}{D_a}, \; b^2 = \frac{1}{D_b}, \; c^2 = \frac{1}{D_c},$$

somit

$$\cos^2 \varphi = \frac{\frac{1}{D_a}}{\frac{1}{D_b}} \cdot \frac{\frac{1}{D_b} - \frac{1}{D_c}}{\frac{1}{D_a} - \frac{1}{D_c}} \tag{82}$$

Die auf statischem Wege bestimmte Dielektricitätsconstante in jeder beliebigen Richtung, welche zu den durch $\cos^2 \varphi$ bestimmten zwei Richtungen senkrecht ist, wird einen constanten, und zwar den Werth D_b haben, da zu Folge der analytischen Geometrie derjenige Schnittkreis des dreiaxigen Ellipsoids, dessen Mittelpunkt mit dem Ellipsoidmittelpunkt zusammenfällt, die mittlere Halbaxe des Ellipsoids zum Radius hat.

Für die auf statischem Weg bestimmte Dielektricitätsconstante D_φ in den durch $\cos \varphi$ angegebenen Richtungen finden wir daher gemäss 73)

$$D_\varphi + D_b = D_a + D_b + D_c$$
$$D_\varphi = D_a + D_c - D_b.$$

Mit Hilfe der Gleichungen

$$D_a = \frac{v^2}{\mathfrak{a}^2}, \; D_b = \frac{v^2}{\mathfrak{b}^2}, \; D_c = \frac{v^2}{\mathfrak{c}^2}$$

kann man noch $\cos^2 \varphi$ in die Form bringen:

$$\cos^2 \varphi = \frac{\mathfrak{a}^2}{\mathfrak{b}^2} \cdot \frac{\mathfrak{b}^2 - \mathfrak{c}^2}{\mathfrak{a}^2 - \mathfrak{c}^2};$$

dies ist aber die Bestimmungsgleichung für die Winkel, welche die secundären optischen Axen mit der Richtung der grössten Hauptgeschwindigkeit ($\mathfrak{c}$) einschliessen.

Über die Tragkraft stabförmiger Elektromagnete

von

Alwin Keiter.

Aus dem physikalischen Institute der k. k. Universität in Graz.

(Mit 2 Tafeln und 4 Textfiguren.)

Einleitung.

Bekanntlich zählt die experimentelle Bestimmung der als »magnetische Tragkraft« bezeichneten Grösse zu denjenigen Versuchen, welche stets einer grossen Zahl von Fehlerquellen ausgesetzt sind, deren gänzliche Unschädlichmachung wohl nie gelingen wird. Man muss sich desshalb in jedem einzelnen Falle damit begnügen, wenigstens diejenigen Fehlerquellen auszuschliessen, deren Einfluss am meisten ins Gewicht fällt. Eine ausführliche Erörterung der bei der Bestimmung der Tragkraft eines Elektromagneten durch Abreissversuche in Betracht kommenden Fehlerquellen findet sich bei Dubois.[1]

Der Verfasser vorliegender Arbeit suchte nun den von der Theorie geforderten Bedingungen möglichst gerecht zu werden, und zwar sollte diese Annäherung an den idealen Fall mit möglichst einfachen Mitteln erreicht werden.[2] Trotz der sonst günstigeren Ringform wurde von Versuchen mit ringförmigen Magneten abgesehen, da es hiebei auf das gleichzeitige Abreissen an zwei Berührungsstellen ankommt und dies letztere

---

[1] Dubois, Magnetische Kreise, 1894, S. 168 ff.

[2] Vergl. Wassmuth: Über die Tragkraft von ringförmigen Elektromagneten, Diese Sitzb., II, 82, S. 2, 3.

fast nicht zu erzielen ist, während dieser Umstand bei Stäben mit nur einer Schnittstelle vollkommen wegfällt. Hauptsächlich aus diesem Grunde und auch der leichteren Anordnung halber wurde die Stabform gewählt. Bei der Berechnung der Versuche wird eine gleichförmige Vertheilung der magnetischen Vectoren im Innern des Eisens zugrunde gelegt; diese Annahme ist in der Praxis um so besser erfüllt, ein je grösseres Dimensionsverhältniss der Stab besitzt; desshalb wurde hauptsächlich ein Stab benützt mit einem Dimensionsverhältniss = 100 (Länge : Durchmesser), was noch den Vortheil bringt, dass die eigene Entmagnetisirung des Stabes bedeutend kleiner ist, als bei einem solchen mit einem kleinen Dimensionsverhältnisse, so dass sich mit geringen Stromstärken schon bedeutende magnetische Momente erzielen lassen. Um die natürliche Adhäsion der beiden Berührungsflächen möglichst herabzudrücken, wurde ein kleiner Querschnitt des Stabes gewählt. Eine Hauptfehlerquelle aller Abreissversuche mit getrennter Bewickelung von »Magnet« und »Anker« dürfte darin liegen, dass bei letzterer Anordnung eine gewiss nicht zu vernachlässigende Streuung der magnetischen Kraftlinien an der Schnittstelle auftritt, in Folge dessen man kaum berechtigt ist, eine gleichförmige Vertheilung in der Nähe derselben anzunehmen.

Bei allen diesen Versuchen ist das bei der Berechnung als homogen vorausgesetzte äussere Kraftfeld gerade an der wichtigsten Stelle merklich inhomogen. Wassmuth[1] trug diesem Umstande in der Weise Rechnung, dass er bei seinen Ringmagneten die Windungen bis knapp an die Berührungsflächen führte, so dass keine grössere Unterbrechung an dieser wichtigen Stelle eintrat.

Bei den vorliegenden Untersuchungen war ein überall merklich homogenes Feld vorhanden, da die beiden Stabhälften innerhalb einer gleichförmig bewickelten Magnetisirungsspule auseinandergerissen wurden. Eine Streuung der Inductionslinien trat zwar auch in diesem Falle ein, jedoch war sie gewiss bedeutend geringer als bei der Anordnung mit zwei getrennten

---

[1] Siehe vorher citirte Abhandlung.

Spulen. Auch darauf, dass sich die beiden Stirnflächen stets in genau concentrischer, sich deckender Lage befinden sollen, wurde in der später beschriebenen Weise besondere Rücksicht genommen. Der leitende Gedanke, der diesen Versuchen zugrunde lag, war, nochmals kurz gesagt, folgender: Es sollte mit einfachen Mitteln eine gute Anpassung an den idealen Fall der Theorie erreicht werden, um die Ergebnisse von Theorie und Beobachtung leicht miteinander vergleichen zu können, und zwar in Bezug auf die Giltigkeit des Maxwell'schen Zugkraftsgesetzes. Um die Anwendbarkeit des letzteren in seiner einfachsten Form

$$T = \frac{1}{8\pi}\bar{\mathfrak{B}}^2 F$$

($\bar{\mathfrak{B}}$ = Mittelwerth der magnetischen Induction in der Schnittfläche, F = Inhalt der letzteren) auf einen, den schon von Stefan[1] geforderten Bedingungen minder entsprechenden Fall zu prüfen, wurde ein zweiter Stab von bedeutend kleinerem Dimensionsverhältnisse in derselben Weise untersucht; hier lag dann eine merklich ungleichförmige Vectorenvertheilung in den Schnittflächen und demgemäss eine bedeutendere Streuung der Kraftlinien vor.

Als dritter Theil der Arbeit erscheinen Versuche, welche betreffs des von Wassmuth in der bereits citirten Abhandlung angeführten, an Ringmagneten beobachteten Verhaltens der Tragkraft bei Zwischenlagen aus Glimmer angestellt wurden.

Anordnung der Versuche.

Der zu den Abreissversuchen dienende Theil der ganzen Versuchsanordnung ist mit geänderten Dimensionsverhältnissen in Fig. 1 schematisch dargestellt. Die Grundlage dieses Theiles bildete ein auf einem steinernen Isolirpfeiler ruhendes, sehr starkes Gestell, welches demnach etwaigen, von aussen kommenden Erschütterungen fast gar nicht ausgesetzt war. An einem daran befindlichen Querstücke wurde die 100 *cm* lange Magnetisirungsspule *MS* frei beweglich aufgehängt; in dieselbe

---

[1] Stefan, Über die Tragkraft der Magnete. Diese Sitzungsber., II, 81.

hinein hing, ebenfalls an einer cardanischen Aufhängung, der obere Theil des im Ganzen 80 *cm* langen, in zwei gleichlange

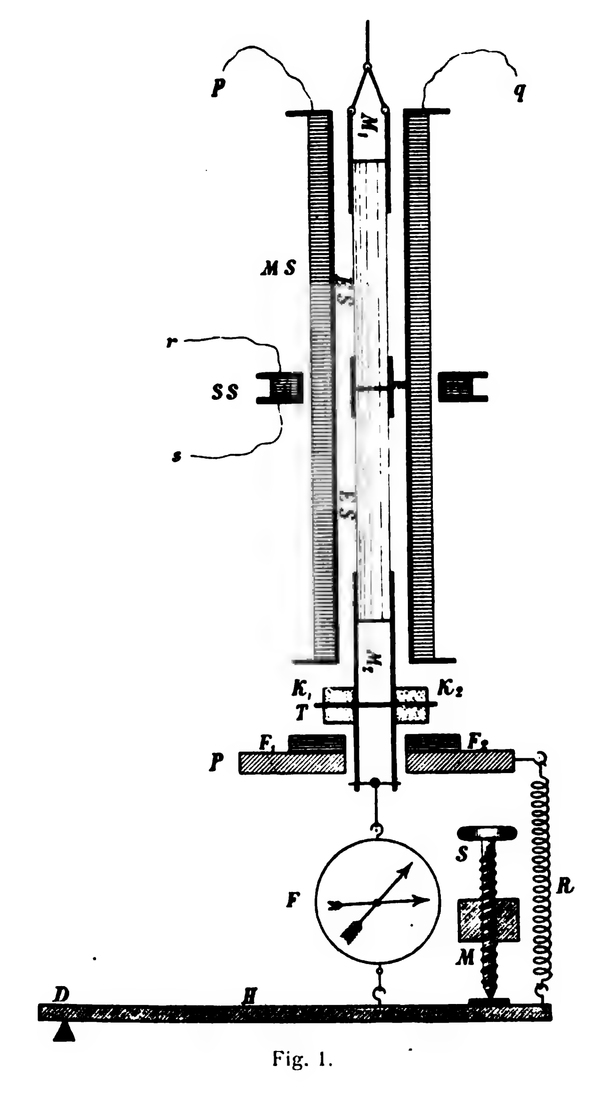


Fig. 1.

Hälften geschnittenen Eisenstabes *ES*, auf dessen oberes und unteres Ende je eine zur Verlängerung dienende Messingröhre (M_1 und M_2) aufgetrieben war. Das obere Ende der unteren Stabhälfte trug ein kurzes, ebenfalls durch blosses Auftreiben

befestigtes Messingröhrchen *m*, in welches das untere Ende der oberen Stabhälfte genau hineinpasste und sich darin fast reibungslos bewegen liess, was durch vorsichtiges Ausreiben der oberen Hälfte des Messingröhrchens *m* erreicht wurde.

Diese die beiden Stabtheile verbindende Hülse hatte den Zweck, das genau concentrische Aufeinanderpassen der beiden kreisförmigen, wohl abgedrehten und polirten Schnittflächen zu erzielen. Durch die freie Aufhängung von Stab und Magnetisirungsspule sollten eventuelle Pressungen des Stabes gegen die Innenwand der Spule, die bei der bedeutenden Länge des ersteren und dem geringen Spielraum zwischen ersterem und letzterer (circa 1 *mm*) leicht auftreten konnten und daraus sich ergebende Ungenauigkeiten der Tragkraftsbestimmungen vermieden werden. Die Magnetisirungsspule bestand aus einem mit vier Lagen 0·123 *cm* dicken Kupferdrahtes der ganzen Länge nach gleichmässig bewickelten Messingrohre; die Gesammtwindungszahl war 1553, die Windungszahl pro Längeneinheit (1 *cm*) wurde durch Ausmessen mehrerer Stellen in jeder Lage direct ermittelt und betrug im Durchschnitte 15·53. Der im Querschnitte kreisförmige Stab hatte, wie die Messung seines Umfanges an mehreren Stellen seiner Länge ergab, einen Durchmesser von 0·8 *cm*, welchem Werthe eine Querschnittsfläche von 0·5026 cm^2 entspricht; sein Material war sogenanntes steirisches Frischeisen, eine sehr weiche und ziemlich reine Eisensorte. *T* ist ein durch das untere Messingrohr M_2 gesteckter Stift, auf welchen beiderseits die beiden Kautschukstöpsel K_1 und K_2 aufgeschoben wurden, mit welch letzteren die untere Hälfte des Stabes nach erfolgtem Abreissen auf eine ebene, aus weichen Filzplatten hergestellte und auf der festen, in der Mitte mit einem Loch versehenen Platte *P* ruhende Unterlage F_1 und F_2 aufschlug. An das untere Ende des Messingrohres M_2 wurde das zur Messung der Tragkraft dienende Dynamometer (Federwage) *F* gehängt, welches, mit einem Maximumzeiger versehen, die Ablesung des maximalen angewendeten Zuges nach erfolgter Trennung beider Stabhälften gestattete; ein etwaiges Verreissen des sehr leicht beweglichen Maximumzeigers durch Stoss war ausgeschlossen, da wegen der oben beschriebenen Ausführung der Arretirungsvorrichtung

die Wucht des bei jedesmaligem Abreissen eintretenden Stosses bedeutend abgeschwächt wurde. Die eigentliche Abreissvorrichtung bestand aus einem horizontalliegenden, bei D um eine horizontale, senkrecht zur Papierfläche stehende Axe drehbaren, fast 100*cm* langen Hebel H, der mittelst der Schraube S, deren Mutter M fix am Gestell des ganzen Apparates befestigt war, auf- und abbewegt werden konnte; eine Spiralfeder R drückte ihn stets gegen das Ende der Schraube S und trug

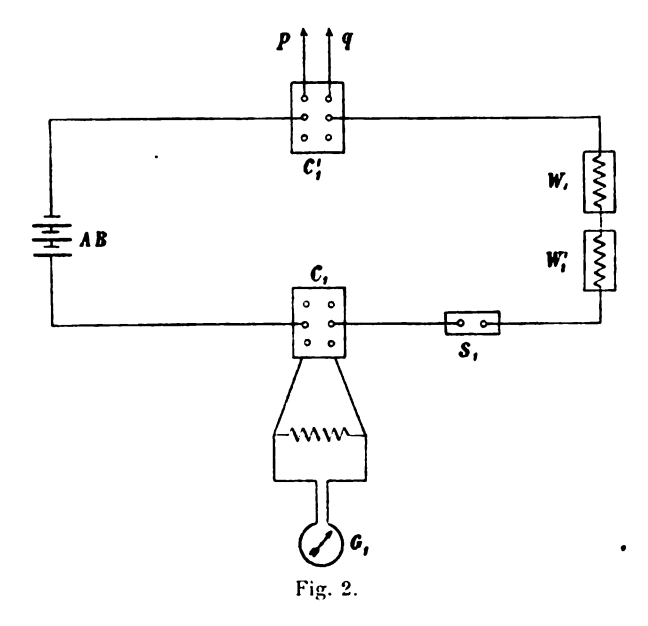


Fig. 2.

also auch sein Gewicht. Ein starker Messingdraht stellte zwischen Hebel und Federwage eine feste Verbindung her. Mittelst der hier beschriebenen Abreissvorrichtung liess sich der jeweilige Werth der magnetischen Tragkraft sehr leicht und sicher bestimmen und es zeigte sich auch zwischen den bei jeder einzelnen Beobachtung angestellten vier Messungen eine sehr gute Übereinstimmung. Zur Controle wurden übrigens auch einige Versuche in der Weise ausgeführt, dass an das Ende der Messingröhre M_2 eine Glasflasche angehängt wurde, deren Gewicht durch langsames, vorsichtiges Einspritzen von Wasser so lange gesteigert wurde, bis die Trennung der Stabhälften erfolgte; die also durch Wägung erhaltenen Werthe

der magnetischen Tragkraft ergaben eine sehr gute Übereinstimmung mit den mittelst der Federwage bei denselben magnetisirenden Kräften erhaltenen.

Zur Messung der magnetischen Induction diente eine ausserhalb der Magnetisirungsspule, concentrisch mit derselben angebrachte, in gleicher Höhe mit der Schnittstelle des Stabes liegende kleine Secundärspule *SS* mit 100 Windungen eines sehr dünnen, gut isolirten Kupferdrahtes; während dieser Messungen konnten die beiden Stabhälften durch eine auf der Platte *P* leicht anzubringende und abnehmbare Unterstützungs-

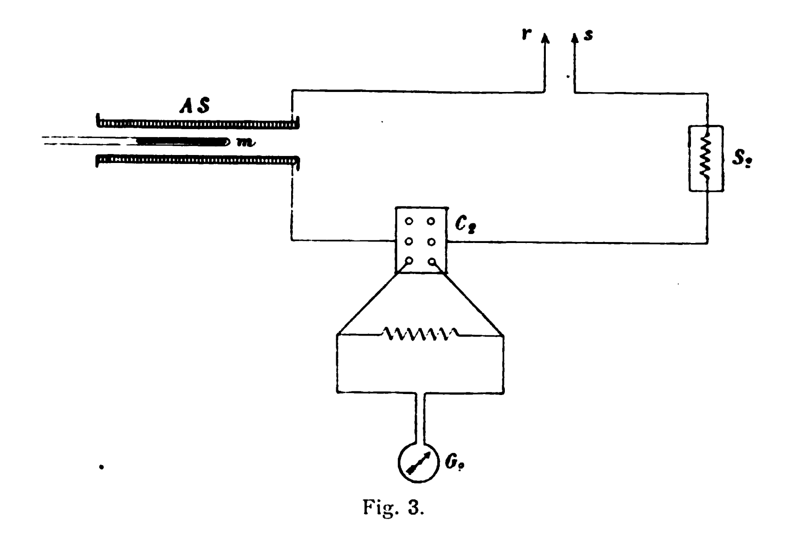


Fig. 3.

vorrichtung für den Stift *T* zusammengeschoben erhalten werden.

Fig. 2 gibt eine schematische Darstellung des primären Stromkreises. Der magnetisirende Strom wurde von einer Accumulatorenbatterie *AB* geliefert und seine Stärke mittelst des in einem Nebenschlusse liegenden Galvanometers G_1 gemessen, dessen Reductionsfactor durch mehrere Messungen bestimmt worden war. Der Schlüssel S_1 gestattete das beliebige Schliessen und Unterbrechen des Stromes. W_1 und W_2 sind zwei Widerstände, deren Drähte durch eine Wasserkühlung auf stets gleicher Temperatur gehalten wurden; sie gestatteten bei einer gegebenen Anzahl eingeschalteter Accumulatoren

70 verschiedene Stromstärken anzuwenden. Die Drahtenden *pq* wurden an die Enden der Magnetisirungsspule *MS* (siehe Fig. 1) angeschlossen und mittelst der Commutatoren C_1 und C_1' konnte die Richtung des Stromes im Galvanometerzweige (G_1) und in der Magnetisirungsspule beliebig gewechselt werden.

Ein Schema des secundären Stromkreises gibt Fig. 3. In letzterem befand sich ein sehr empfindliches (ballistisches) Galvanometer G_2, ein Schlüssel S_2, der auch die Einschaltung verschiedener Widerstände erlaubte, die Aichungsspule *AS* und der Commutator C_2. Auch das Galvanometer G_2 lag in einem Nebenschlusse. Die Drahtenden *rs* wurden an die kleine Inductionsspule *SS* (siehe Fig. 1) angeschlossen.

Beide Galvanometer G_1 und G_2 wurden mit Spiegel und Fernrohr abgelesen.

Beschreibung der Versuche.

Vor und während der Versuche wurde der Eisenstab auf die bekannte Weise entmagnetisirt. Letztere gingen nun folgendermassen vor sich:

Durch rasches Herausziehen eines kleinen permanenten Stahlmagneten *m* von bekanntem magnetischen Momente *M* aus der Aichungsspule *AS* (siehe Fig. 3) wurde der Aichungsausschlag ρ am Galvanometer G_2 erhalten. Dies gab vier Ablesungen, indem dabei sowohl das Galvanometer G_2 commutirt, als auch die Lage der Pole des kleinen Magneten *m* vertauscht wurde, um einseitige Fehler zu vermeiden.

Das Commutiren des Primärstromes mittelst des Commutators C_1' (siehe Fig. 2) gab den Inductionausschlag 2α, dessen Hälfte als der Gesammtzahl sämmtlicher plötzlich durch die Fläche der kleinen Inductionsspule *SS* (siehe Fig. 1) hindurchtretender Kraftlinien entsprechend angenommen wurde, weil bei diesem Commutiren zuerst $\mathfrak{N}$ Kraftlinien verschwinden, um sofort wieder in entgegengesetzter Richtung aufzutreten. Der Werth von α wurde ebenfalls durch vier zusammengehörige Ablesungen ermittelt, indem wieder das Galvanometer G_2 und der Strom in der Magnetisirungsspule commutirt wurden. Die Messung der primären Stromstärke am Galvanometer G_1 ergab einen Ausschlag β, wofür der Mittelwerth aus zwei bei ver-

schiedener Stellung des Commutators C_1 gemachten Ablesungen angesetzt wurde. Die in den Tabellen befindlichen Werthe der magnetischen Tragkraft T_{kg} sind die Mittelwerthe aus je vier Beobachtungen, indem bei jeder Stellung des Commutators C_1' zwei Abreissversuche gemacht wurden, welche untereinander stets eine ziemlich gute Übereinstimmung ergaben.

Die ganze Reihe der einer Beobachtung entsprechenden 14 Ablesungen wurde nach der Regel vorgenommen, soviel als möglich einschliessende Messungen zu machen; es wurde also folgende Reihenfolge durchwegs eingehalten:

1. Erstes Paar der Aichungsablesungen;
2. erstes Paar der Inductionsablesungen;
3. erste Stromstärkemessung;
4. die vier Tragkraftsmessungen;
5. zweite Stromstärkemessung;
6. zweites Paar der Inductionsablesungen;
7. zweites Paar der Aichungsablesungen.

Berechnung der Versuche.

Alle hiebei auftretenden Grössen seien in absoluten Einheiten (*cgs*) ausgedrückt. Zur Bestimmung des Werthes der magnetischen Induction $\mathfrak{B}$ gelangt man auf folgende Art: Einerseits ist der durch das rasche Entfernen des kleinen Magneten m aus der Aichungsspule AS (siehe Fig. 3) erhaltene Ausschlag ρ am Galvanometer G_2 proportional der Grösse $4\pi M n_1$, wenn M das bekannte magnetische Moment des Magneten m, und n_1 die Windungszahl pro 1 *cm* auf der Aichungsspule AS bedeutet (siehe Fig. 3)

$$\rho = \lambda . 4\pi M n_1;$$

mit λ sei die Proportionalitätsconstante, welche den Widerstand des ganzen secundären Stromkreises enthält, bezeichnet. Anderseits ist der durch das Commutiren des Stromes in der Magnetisirungsspule erhaltene Ausschlag α an demselben Galvanometer proportional der Grösse $\mathfrak{N} . n_2$, wenn $\mathfrak{N}$ die Gesammtzahl aller plötzlich durch die Fläche der kleinen Inductionsspule tretenden Kraftlinien und n_2 die Windungszahl der Inductionsspule bedeutet:

$$\alpha = \lambda . \mathfrak{N} n_2;$$

der Proportionalitätsfactor ist wieder derselbe. Durch Division beider Gleichungen erhält man

$$\mathfrak{N} = 4\pi M \frac{n_1}{n_2} \cdot \frac{\alpha}{\rho};$$

dabei sind die direct abgelesenen Werthe von α und ρ auf den Sinus des halben Ausschlagswinkels zu reduciren.

$\mathfrak{N}$, die Zahl sämmtlicher die Fläche der Inductionsspule SS (siehe Fig. 1) durchschneidender Kraftlinien, besteht aus zwei Theilen, dem magnetischen Inductionsflusse $\mathfrak{G} = \mathfrak{B} . F_1$, wobei $\mathfrak{B}$ die magnetische Induction, F_1 die Querschnittsfläche des Eisenstabes ist, und dem der Fläche $F—F_1$, wobei F die Windungsfläche der Magnetisirungsspule bedeutet, entsprechenden Theile. Wird die Intensität des magnetischen Feldes im Innern der Spule MS mit $\mathfrak{H}_e$ bezeichnet, so ist $\mathfrak{H}_e(F—F_1)$ jener zweite Theil von $\mathfrak{N}$. Wir erhalten so die Beziehung

$$\mathfrak{N} = \mathfrak{B}F_1 + \mathfrak{H}_e(F-F_1).$$

Strenge genommen bedeutet darin $\mathfrak{B}$ den Mittelwerth der magnetischen Induction auf der Querschnittsfläche des Eisenstabes, da ja der magnetische Inductionsfluss $\mathfrak{G}$ durch das über die ganze Fläche F_1 auszudehnende Integral $\int\int \mathfrak{B} dF_1$ gegeben ist, welches bei Einführung des Mittelwerthes von $\mathfrak{B}$ in die obige Form übergeht.

Aus der letzten Gleichung ergibt sich

$$\mathfrak{B} = \frac{\mathfrak{N}}{F_1} - \mathfrak{H}_e\left[\frac{F}{F_1} - 1\right].$$

Wird der früher erhaltene Ausdruck für $\mathfrak{N}$ darin eingesetzt und noch berücksichtigt, dass $\mathfrak{H}_e = 4\pi n i$ ist (i = Stärke des primären Stromes, n = Windungszahl pro 1 *cm* auf der Magnetisirungsspule), wobei noch $i = R\beta$ (R = Reductionsfactor des Galvanometers G, β = auf die Tangente des Ausschlagswinkels reducirter Ausschlag am Galvanometer G_1) gesetzt werden kann, so erhält man schliesslich die magnetische Induction $\mathfrak{B}$ folgendermassen durch lauter der directen Messung zugängliche Grössen ausgedrückt:

$$\mathfrak{B} = 4\pi \frac{M}{F_1} \cdot \frac{n_1}{n_2} \cdot \frac{\alpha}{\rho} - 4\pi n R \beta \left[\frac{F}{F_1} - 1 \right].$$

Bei Anwendung geringerer Feldstärken $\mathfrak{H}_e$ ist $\mathfrak{B}$ durch den ersten Posten dieses Ausdruckes hinlänglich genau gegeben.

Die übrigen magnetischen Grössen ergeben sich nun in folgender Weise:

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{H}_t \hat{+} 4\pi\mathfrak{J}, \qquad \mathfrak{H}_t = \mathfrak{H}_e \hat{+} \mathfrak{H}_i, \qquad \mathfrak{H}_e = 4\pi n R \beta;$$

$\mathfrak{H}_t$ ist der Mittelwerth der totalen magnetisirenden Kraft, welcher sich durch geometrische Summirung der äusseren magnetisirenden Kraft $\mathfrak{H}_e$ und der von den fictiven Oberflächenbelegungen stammenden $\mathfrak{H}_i$ ergibt, $\mathfrak{J}$ der Mittelwerth der Magnetisirungsintensität.

Setzt man das Verhältniss $\mathfrak{H}_i : \mathfrak{J} = N$, so ist N der mittlere Entmagnetisirungsfactor des Stabes, eine Function des Dimensionsverhältnisses des letzteren, und $\mathfrak{H}_i = N\mathfrak{J}$.

Mit dessen Einführung erhält man unter der Annahme einer gleichförmigen Magnetisirung des Stabes

$$\mathfrak{H}_t = \mathfrak{H}_e - N\mathfrak{J} \quad \text{und} \quad \mathfrak{B} = \mathfrak{H}_e - N\mathfrak{J} + 4\pi\mathfrak{J},$$

woraus sich

$$\mathfrak{J} = \frac{\mathfrak{B} - \mathfrak{H}_e}{4\pi - N}$$

findet. Für N wurde der von Dubois[1] für ein Dimensionsverhältniss $m = 100$ (80 : 0·8) angegebene Werth $N = 0 \cdot 0045$ gesetzt. Aus der so erhaltenen Magnetisirungsintensität $\mathfrak{J}$ wurde nun der Werth von $\mathfrak{H}_t = \mathfrak{H}_e - N\mathfrak{J}$ gerechnet, ferner die magnetische Susceptibilität $\varkappa = \mathfrak{J} : \mathfrak{H}_t$ und die magnetische Permeabilität $\mu = \mathfrak{B} : \mathfrak{H}_t$.

Die magnetische Tragkraft in *kg*, T_{kg}, folgt nach dem Maxwell'schen Gesetze in folgender Weise

$$T_{kg} = \frac{1}{8\pi} \cdot \frac{\mathfrak{B}^2}{1000g} \cdot F_1;$$

---

[1] Dubois, Magnetische Kreise. 1894, S. 45.

dabei bedeutet g den Werth der Fallbeschleunigung $= 980 \cdot 8$, F_1 wiederum den Querschnitt des Stabes. Ersetzt man in diesem Ausdrucke für T_{kg} die magnetische Induction $\mathfrak{B}$ durch $\mathfrak{H}_i + 4\pi\mathfrak{J}$, so erhält man bei weiterer Ausführung drei Posten, von denen jedem eine besondere physikalische Deutung zukommt.[1] Eigentlich sollte nun bei der vom Verfasser vorliegender Arbeit angewendeten Versuchsanordnung das Glied, welches der elektrodynamischen Anziehung der beiden Spulenhälften in der gebräuchlicheren Anordnung mit zwei getrennt gewickelten Spulen entspricht, in Abzug gebracht werden. Da dies letztere Glied $= \frac{1}{8\pi}\mathfrak{H}_e^2$ aber erst bei einem Werthe von circa $\mathfrak{H}_e = 250$ *cgs* Einheiten $1\,g$ betragen hätte und dieser Werth der Feldstärke $\mathfrak{H}_e$ bei weitem nicht erreicht wurde, so ist der mit seiner Beibehaltung begangene Fehler unwesentlich.

Einrichtung der Tabellen.

Tafel I enthält die Ergebnisse der mit dem langen, dünnen Stabe gemachten Versuchsreihe. Die hier neu auftretende Grösse Δ ist durch folgende Gleichung definirt:

$$T_{kg}\,\text{beob.} - T_{kg}\,\text{ber.} = \Delta\,\frac{T_{kg}\,\text{beob.}}{100};$$

Δ ist also die zwischen dem durch directe Messung gefundenen Werthe der magnetischen Zugkraft, T_{kg} beob., und dem mit Hilfe der ballistisch gemessenen magnetischen Induction $\mathfrak{B}$ nach dem Maxwell'schen Gesetze berechneten Werthe jener Grösse, T_{kg} ber. sich ergebende Differenz, ausgedrückt in Procenten von T_{kg} beob.

Tafel II enthält die übrigen dieser Versuchsreihe entsprechenden magnetischen Grössen, wobei der leichteren Übersichtlichkeit halber die Werthe der äusseren Feldstärke $\mathfrak{H}_e$ in der ersten Spalte nochmals angesetzt sind.

---

[1] Siehe vorhergehendes Citat, S. 161 ff.

Langer, dünner Stab.

I.

$\mathfrak{H}_e$	$\mathfrak{B}$	T_{kg} ber.	T_{kg} beob.	$\Delta^0/_0$
5·17	5670	0·657	0·664	+1·05
5·19	5690	0·661	0·674	+1·92
5·45	5780	0·682	0·701	+2·71
5·68	6010	0·736	0·761	+3·29
6·02	6330	0·816	0·861	+5·21
6·47	6760	0·933	0·981	+4·90
6·90	7160	1·046	1·064	+1·70
7·28	7490	1·144	1·173	+2·47
7·83	8090	1·335	1·361	+1·92
8·14	8180	1·364	1·429	+4·50
8·35	8330	1·415	1·499	+5·60
8·57	8460	1·459	1·509	+3·30
8·70	8540	1·488	1·512	+1·60
8·90	8730	1·554	1·570	+1·00
9·78	9140	1·705	1·738	+1·90
10·20	9450	1·823	1·901	+4·10
10·45	9500	1·867	1·929	+3·12
10·72	9760	1·943	1·994	+2·60
11·01	9800	1·960	2·051	+4·44
11·22	10060	2·065	2·089	+1·15
11·50	10090	2·077	2·181	+4·75
11·82	10330	2·175	2·239	+2·80
12·12	10380	2·198	2·219	+0·90
12·66	10700	2·336	2·449	+4·60
13·05	10770	2·366	2·449	+3·31
13·49	11050	2·489	2·604	+4·42
13·96	11160	2·541	2·656	+4·30
14·21	11230	2·572	2·689	+4·35
14·70	11630	2·760	2·876	+4·00
15·22	11680	2·785	2·939	+5·20
15·24	11690	2·786	2·909	+4·20
15·29	11800	2·842	2·959	+3·91

$\mathfrak{H}_c$	$\mathfrak{B}$	T_{kg} ber.	T_{kg} beob.	$\Delta^0/_0$
15·77	11850	2·864	3·009	+4·80
16·56	11980	2·929	3·109	+5·77
17·34	12470	3·170	3·281	+3·38
18·05	12520	3·197	3·363	+4·94
18·89	12820	3·353	3·499	+4·17
19·26	13010	3·453	3·569	+3·24
20 28	13260	3·588	3·779	+5·04
21·34	13490	3·712	3·814	+2·67
22·49	13760	3·864	4·069	+5·00
24·29	14070	4·038	4 249	+4 95
25·78	14300	4·170	4·309	+3 20
26·63	14470	4·271	4·361	+2·05
27·52	14540	4·315	4 389	+1·68
27·84	14620	4·363	4·439	+1·70
29·61	14710	4·412	4·554	+3 11
30·80	14930	4·548	4·619	+1·50
33·24	15170	4 697	4·799	+2·11
36·16	15470	4 879	4·912	+0·67
39·55	15670	5·011	5·019	+0·14
42·10	15830	5·109	5·184	+1·45
44·55	15910	5·166	5·239	+1·38
47·02	16100	5·290	5·312	+0·40
50·31	16160	5·327	5·425	+1·81
51·03	16210	5·358	5·362	+0·06
52·03	16250	5·384	5·384	0·00
54·19	16300	5·422	5·467	+0·80
55·14	16360	5·469	5·526	+1·03
56·73	16390	5·480	5·519	+0·70
59·40	16430	5·509	5·564	+0·99
59·42	16460	5·528	5·581	+0·95
60·06	16550	5·585	5·604	+0·34
61·76	16620	5·638	5·661	+0·40
66·55	16640	5·651	5·709	+1·00
77·59	16930	5·846	5·904	+0·98

II.

$\mathfrak{H}_e$	$\mathfrak{H}_l$	κ	μ	$\mathfrak{J}$	$\mathfrak{H}_e$	$\mathfrak{H}_l$	κ	μ	$\mathfrak{J}$
5·17	3·18	140	1755	445	16·56	12·27	78	977	953
5·19	3·21	138	1729	450	17·34	12·88	77	968	991
5·45	3·38	136	1704	459	18·05	13·57	73	923	995
5·68	3·53	135	1700	478	18·89	14·30	71	896	1019
6·02	3·76	134	1683	503	19·26	14·61	71	890	1034
6·47	4·05	133	1670	538	20·28	15·54	68	853	1054
6·90	4·33	131	1652	569	21·34	16·52	65	817	1072
7·28	4·60	130	1628	596	22·49	17·56	62	784	1094
7·83	4·97	128	1607	635	24·29	19·26	58	730	1118
8·14	5·21	125	1569	650	25·78	20·67	55	692	1136
8·35	5·37	123	1552	662	26·63	21·46	54	674	1150
8·57	5·54	121	1526	672	27·52	22·32	52	652	1156
8·70	5·64	120	1513	679	27·84	22·62	51	647	1162
8·90	5·78	120	1511	694	29·61	24·36	48	604	1168
9·78	6·51	112	1404	727	30·80	25·46	47	586	1186
10·20	6·81	110	1387	752	33·24	27·82	43	545	1205
10·45	7·05	107	1356	755	36·16	30·63	40	505	1228
10·72	7·22	107	1351	776	39·55	33·95	37	462	1244
11·01	7·50	104	1306	779	42·10	36·44	34	434	1256
11·22	7·62	105	1321	800	44·55	38·85	32	403	1266
11·50	7·89	102	1279	802	47·02	41·26	31	390	1278
11·82	8·13	101	1271	821	50·31	44·54	29	363	1282
12·12	8·41	98	1234	825	51·03	45·24	28	358	1286
12·66	8·83	96	1212	851	52·03	46·23	28	351	1289
13·05	9·19	93	1171	856	54·19	48·37	27	337	1294
13·49	9·54	92	1158	878	55·14	49·30	26	332	1298
13·96	9·96	89	1120	887	56·73	50·89	25	321	1300
14·21	10·19	88	1101	893	59·40	53·54	24	307	1303
14·70	10·54	88	1103	925	59·42	53·55	24	307	1306
15·22	11·04	84	1058	929	60·06	54·15	24	306	1312
15·24	11·04	85	1065	934	61·76	55·83	24	298	1318
15·29	11·07	85	1066	938	66·55	60·61	22	275	1320
15·77	11·53	82	1028	942	77·59	71·55	19	237	1341

Ergebnisse.

Wie aus den Tafeln und der graphischen Darstellung ersichtlich ist, ergibt sich bei dem langen dünnen Stabe (Dimensionsverhältniss $m = 100$) im Allgemeinen eine ziemlich gute Übereinstimmung zwischen Theorie und Beobachtung. Es zeigte sich auch bei den vorliegenden Versuchen die von Bosanquet[1] beobachtete Thatsache, dass die Berechnung der magnetischen Tragkraft nach dem Maxwell'schen Gesetze: $\mathfrak{Z} = \frac{1}{8\pi}\mathfrak{B}^2$ pro 1 cm^2 stets kleinere Werthe ergab, als die Beobachtung, besonders aber bei kleineren Werthen der Induction $\mathfrak{B}$, etwa bis zu $\mathfrak{B} = 14.000$ *cgs* Einheiten. Im Ganzen genommen kann man sagen, dass für diesen Stab das Maxwell'sche Gesetz als bestätigt angesehen werden kann, da die Differenz zwischen dem berechneten und beobachteten Werthe der magnetischen Tragkraft einen maximalen Werth $\Delta = 5 \cdot 77\%$ erreicht, bei der grösseren Zahl der Beobachtungen aber einen viel kleineren Werth aufweist. Dabei ist noch zu beachten, dass für die Beurtheilung der Übereinstimmung zwischen Theorie und Beobachtung die ersten Potenzen der Beobachtungsfehler massgebend sind, d. h. es sind als eigentliche Abweichungen nur die durch 2 dividirten Werthe des Δ anzusehen, denn angenähert ist:

$$\mathfrak{B}_{\text{beob.}} - \mathfrak{B}_{\text{ber.}} = \frac{\Delta}{2} \cdot \frac{\mathfrak{B}_{\text{beob.}}}{100}.$$

Würde man also die mit der ballistischen Methode gefundenen Werthe der magnetischen Induction $\mathfrak{B}$ mit den aus der beobachteten Tragkraft nach dem Maxwell'schen Gesetze berechneten vergleichen, so würde sich eine maximale Differenz von $\Delta' = 2 \cdot 89\%$ ergeben, welche gewiss auf Rechnung der verschiedenen unvermeidlichen Fehlerquellen gesetzt werden kann. Die Erscheinung, dass die Abweichungen zwischen den beobachteten und berechneten Werthen der magnetischen Trag-

[1] Bosanquet: The Tension of Lines of Force (Elektromagnets) Phil. Mag. [5], 22, 1886.

kraft zuerst ansteigen, um dann wiederum abzunehmen, dürfte auch mit der Thatsache zusammenhängen, dass auch bei einem durchschnittenen Stabe die sogenannte Streuung der Kraftlinien an der Schnittstelle mit wachsender Intensität des äusseren Feldes zuerst zunimmt, eine Weile ziemlich constant bleibt und dann wiederum abnimmt. Es wird sich also auch die Vertheilung der auf den Schnittflächen ausgeschiedenen freien magnetischen Dichten immer mehr einer über die ganze Fläche hin constanten Dichtebelegung nähern, d. h. mit wachsender Intensität des äusseren Feldes sind die Bedingungen der Anwendbarkeit des Maxwell'schen Gesetzes in der einfachen Form $\mathfrak{Z} = \frac{1}{8\pi}\mathfrak{B}^2 F$ immer besser erfüllt; es muss sich dann also bei höheren Werthen der magnetischen Induction $\mathfrak{B}$, also in der Nähe der Sättigung, eine bessere Übereinstimmung zwischen Theorie und Beobachtung ergeben, als bei niedrigen Werthen jener Grösse, was sich im bereits Vorliegenden bestätigt hat.

Versuche mit einem kurzen, dicken Stabe.

Um auch den Fall einer ungleichförmigen Vertheilung der magnetischen Vectoren über die Querschnittsfläche zu untersuchen, wurden nun mit einem Stabe von bedeutend kleinerem Dimensionsverhältnisse $m = 11 \cdot 9$ (Länge $= 16 \cdot 0\,cm$, Durchmesser $= 1 \cdot 344\,cm$) zwei Versuchsreihen in derselben Weise wie vorher gemacht. Ihre Ergebnisse sind in Tafel IV verzeichnet. Das Material dieses kurzen, dicken Stabes war gewöhnliches Schmiedeeisen.[1] Die beiden Schnittflächen waren wiederum sorgfältig abgeschliffen und polirt und wie bei dem früheren langen, dünnen Stabe durch eine Messinghülse ihr genau concentrisches Aufeinanderpassen erzielt. Die Secundärspule zur Messung der magnetischen Induction bestand in diesem Falle aus neun direct auf die die beiden Stabhälften verbindende Messinghülse in einer Lage gewickelten, gut isolirten Drahtwindungen. Bei der geringen Dicke jener Hülse

---

[1] Beim Abdrehen der beiden Stabhälften zeigten sich an mehreren Stellen ziemlich harte und spröde Adern.

konnte der in diesen Windungen inducirte Stromimpuls beim Commutiren des Primärstromes ohne weitere Correction als das Mass des magnetischen Inductionsflusses angesehen werden. Die beiden Stabhälften wurden wiederum innerhalb der ein merklich homogenes Feld erzeugenden Magnetisirungsspule auseinandergerissen, mittelst der im Vorhergehenden beschriebenen Abreissvorrichtung.

Wie aus Tafel III und der graphischen Darstellung ersichtlich ist, zeigte sich bei diesen Versuchen keine gute Übereinstimmung zwischen Theorie und Beobachtung, da die Differenzen T_{kg} beob.—T_{kg} ber. bis zu einem Werthe von $\Delta = 41\%$ T_{kg} beob. ansteigen. Jedoch zeigt sich auch hier wiederum die bereits besprochene Erscheinung, dass diese Differenz mit steigender Annäherung an die Sättigung abnimmt; besonders deutlich zeigt sich dieses Verhalten bei der ersten Versuchsreihe.

Vor der zweiten Versuchsreihe wurde der remanente Magnetismus des Stabes nicht beseitigt, woraus sich die im allgemeinen noch schlechter stimmenden Resultate jener Reihe erklären lassen dürften.

Bei diesem kurzen Stabe waren also die Bedingungen der Giltigkeit des Maxwell'schen Gesetzes in der Form $T = \frac{1}{8\pi}\mathfrak{B}^2 F$ gewiss nicht erfüllt; auch dürfte hier die die Ergebnisse beeinflussende Reibung in der die beiden Stabhälften verbindenden Messinghülse mehr in Betracht zu ziehen sein.

Hier soll noch folgender Umstand Erwähnung finden: Wenn ein inhomogen magnetisirter Körper vorliegt und es sich darum handelt, den Mittelwerth der magnetischen Induction $\mathfrak{B}$ (der mit $\overline{\mathfrak{B}}$ bezeichnet werden soll) in einem bestimmten Querschnitte desselben zu bestimmen, so ist Folgendes zu beachten, falls man die sogenannte ballistische Methode in Anwendung bringt: der in dem jenen Querschnitt umschnürenden Secundärleiter beim Entstehen und Verschwinden des Magnetismus inducirte Integralstrom I ist durch folgenden Ausdruck gegeben:

$$I = \lambda . \int \mathfrak{B} \cos(\mathfrak{B}, n)\, dF = \lambda . \int \mathfrak{B}_n \, dF = \lambda . \overline{\mathfrak{B}}_n F.$$

III.

$\mathfrak{H}_c$	$\mathfrak{B}$	T_{kg} ber.	T_{kg} beob.	$\Delta\%$
86·43	6100	2·144	3·544	+39·50
87·11	6120	2·160	3·674	+41·21
87·55	6790	2·657	3·691	+28·01
113·70	8760	4·422	5·658	+21·84
115·18	8920	4·580	6·010	+23·79
118·48	9130	4·796	6·192	+22·54
125·21	9730	5·451	6·951	+21·58
129·20	10050	5·819	7·174	+18·89
134·02	10470	6·308	7·596	+16·96
146·15	11530	7·654	8·781	+12·84
148·20	11720	7·915	8·998	+12·03
150·58	11820	8·053	9·031	+10·83
162·28	12690	9·281	10·391	+10·68
187·26	14080	11·412	12·000	+ 4·90
192·77	14860	12·719	13·025	+ 2·34
194·83	14870	12·741	13·032	+ 2·23
116·51	9320	5·000	6·826	+26·75
119·47	9580	5·289	7·116	+25·67
123·03	9870	5·609	7·418	+24·39
127·13	10180	5·966	7·868	+24·17
129·79	10490	6·341	7·986	+20·60
131·59	10580	6·443	8·273	+22·12
131·86	10580	6·451	8·158	+20·92
131·98	10600	6·472	8·258	+21·63
132·16	10620	6·492	8·286	+21·65
133·72	10730	6·634	8·081	+17·91
134·33	10780	6·688	8·583	+22·08
137·14	10990	6·957	8·874	+21·60
138·09	11080	7·072	9·018	+21·58
140·56	11470	7·576	9·216	+17·80
149·83	11963	8·243	9·941	+17·08
150·44	12000	8·294	10·034	+17·34

Dabei ist λ ein den Widerstand des Secundärleiters enthaltender constanter Proportionalitätsfactor, dessen numerischer Werth bei der Aichung des ballistischen Galvanometers zu bestimmen ist, $(\mathfrak{B}, n)$ der Winkel, den die die Fläche des Secundärleiters durchschneidende Inductionslinie ($\mathfrak{B}$) mit der Normalen n jener Fläche einschliesst, dF ein Element der letzteren; die Integration ist über die sogenannte Windungsfläche des Secundärleiters auszuführen. Man erhält also nach dem Obigen aus dem beobachteten Stromimpulse I nur den Mittelwerth der zur Fläche des Secundärleiters normalen Componente der magnetischen Induction, welcher mit $\bar{\mathfrak{B}}_n$ bezeichnet wurde,

$$\bar{\mathfrak{B}}_n = \frac{I}{\lambda . F},$$

während der Mittelwerth der gesammten magnetischen Induction durch:

$$\bar{\mathfrak{B}} = \bar{\mathfrak{B}}_n \hat{+} \bar{\mathfrak{B}}_t,$$

wobei $\bar{\mathfrak{B}}_t$ der Mittelwerth der tangentialen Inductionscomponente ist, dargestellt wird, also stets grösser als $\bar{\mathfrak{B}}_n$ ist. Treten sämmtliche Inductionslinien normal durch jene Fläche, so fallen beide Mittelwerthe zusammen, $\bar{\mathfrak{B}}$ und $\bar{\mathfrak{B}}_n$. Der Fall aber, dass die durchtretenden magnetischen Inductionslinien die Ebene des Secundärleiters nicht normal schneiden, sondern unter mehr oder weniger spitzen Winkeln, liegt vor bei einem in der Mitte durchschnittenen, kurzen, dicken Stabe, der in einem seiner Axe gleichgerichteten homogenen Kraftfelde magnetisirt wird. Der Verlauf der Inductionslinien an der Schnittstelle eines solchen Stabes dürfte obenstehender Zeichnung (Fig. 4) entsprechen.[1]

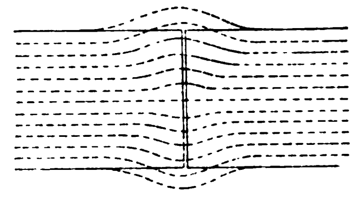


Fig. 4.

[1] Vergl. Zuchristian: Experim. Darstellung von Magnetfeldern. Sitzb. der kais. Akad., II., 1894.

Es liefert hier also nach dem Früheren der in einer an der Schnittstelle angebrachten Secundärspule inducirte Stromstoss I einen kleineren Werth $\overline{\mathfrak{B}}_n$, als der in der Fläche herrschende Mittelwerth der magnetischen Totalinduction $\overline{\mathfrak{B}}$ beträgt. Darauf lässt sich gewiss ein grosser Theil der bei dem kurzen, dicken Stabe gefundenen schlechten Übereinstimmung zwischen Theorie und Beobachtung, betreffs des Maxwell'schen Gesetzes: $T = \frac{1}{8\pi}\overline{\mathfrak{B}}^2F$ zurückführen. Beim langen, dünnen Stabe ist die Vertheilung der magnetischen Vektoren eine viel gleichmässigere, die Inductionslinien treten nahezu senkrecht durch die Schnittflächen und der aus den ballistischen Messungen erhaltene Mittelwerth $\overline{\mathfrak{B}}_n$ stimmt mit dem im Maxwell'schen Gesetze auftretenden $\overline{\mathfrak{B}}$ viel besser überein. Die Thatsache, dass sich sowohl bei den Versuchen Bosanquet's, als auch den vorliegenden die aus der gemessenen magnetischen Induction berechneten Werthe der magnetischen Tragkraft stets kleiner ergaben als die beobachteten, dürfte in den vorhergehenden Erwägungen eine theilweise Erklärung gefunden haben.

Versuche mit Glimmerblättchen.

Anknüpfend an die von Wassmuth[1] beobachtete Erscheinung des Anwachsens der Tragkraft eines Ringmagneten beim Einschieben von Glimmerblättchen zwischen »Magnet« und »Anker« wurden folgende Versuche gemacht: Es wurde bei beiden Stäben in die die beiden Stabtheile verbindende Messinghülse ein sehr dünnes, an Grösse dem Stabquerschnitte gleiches Glimmerblättchen eingelegt und nun wie früher die magnetische Tragkraft bestimmt. Die mittelst Sphärometers gemessene Dicke der Blättchen betrug weniger als 0·002 *cm*. Es wurde auch in diesem Falle aus der gemessenen magnetischen Induction nach dem Maxwell'schen Gesetze die Tragkraft gerechnet und hiebei folgende Ergebnisse gefunden:

[1] Wassmuth: Über die Tragkraft von ringförmigen Elektromagneten. Sitzb. der kais. Akad., II., 1882, Seite 10.

I. Langer, dünner Stab.

$\mathfrak{H}_e$	$\mathfrak{B}$	T_{kg} ber.	T_{kg} beob.	$\Delta^0/_0$
10·27	9183	1·720	1·649	−4·30
11·55	9758	1·942	1·934	−0·40
13·59	10710	2·339	2·289	−2·11
15·23	11430	2·665	2·504	−6·44
15·24	11480	2·688	2·559	−5·04
16·03	11745	2·814	2·714	−3·70
19·71	12860	3·374	3·209	−5·16
29·19	14487	4·282	4·089	−4·75
38·98	15330	4·794	4·594	−4·35
59·77	16370	5·467	5·149	−6·20

II. Kurzer, dicker Stab.

$\mathfrak{H}_e$	$\mathfrak{B}$	T_{kg} ber.	T_{kg} beob.	$\Delta^0/_0$
116	9010	4·676	4·764	+1·85
126	9734	5·458	5·651	+3·42
139	10500	6·351	6·551	+3·06
155	11980	8·267	8·336	+0·83

Eine Vergleichung dieser Ergebnisse mit den früheren zeigt, dass in beiden Fällen bei gleicher Feldstärke durch das Einschieben des Glimmerblättchens die Tragkraft bedeutend vermindert wurde und es folgt nun eine Gegenüberstellung der zu derselben Feldstärke gehörigen Inductions- und Tragkraftswerthe mit und ohne Einschieben des Glimmerblättchens:

I. Langer, dünner Stab.

𝔅 ohne Blättch.	𝔅 mit Blättch.	Abnahme:	T_{kg} beob. ohne Blättch.	T_{kg} beob. mit Blättch.	Abnahme:
9454	9183	271	1·901	1·649	0·252
10090	9758	332	2 181	1·934	0·247
11047	10709	338	2·604	2·289	0·315
11685	11429	256	2·939	2·504	0·435
11690	11479	211	2·909	2·559	0 350
11850	11745	105	3·009	2·714	0·295
13260	12859	401	3·779	3·209	0·570
14700	14487	213	4·554	4·089	0·465
15672	15329	343	5·019	4·594	0·425
16461	16370	91	5·581	5·149	0 432

II. Kurzer, dicker Stab.

𝔅 ohne Blättch.	𝔅 mit Blättch.	Abnahme:	T_{kg} beob. ohne Blättch.	T_{kg} beob. mit Blättch,	Abnahme:
9310	9010	300	6·826	4 764	2 062
10170	9734	436	7·868	5·651	2·217
10990	10500	490	8·874	6 551	2·323
12258	11980	278	9 711	8·336	1·375

Es konnte demnach bei beiden Stäben das Auftreten der von Wassmuth an Ringmagneten beobachteten Erscheinung nicht festgestellt werden. Das Einschieben eines dünnen Glimmerblättchens zwischen »Magnet« und »Anker« ergab im vorliegenden Falle stets eine Verminderung des im Secundärleiter inducirten Stromes und der magnetischen Tragkraft. Die durch das Einschieben der dünnen Blättchen hervorgerufene Vergrösserung des magnetischen Widerstandes des magnetischen Kreises war zu erheblich, als dass sie durch die gesteigerte Ausscheidung »freier Dichte« auf den Schnittflächen hätte aufgewogen werden können.

Was die Übereinstimmung der berechneten und beobachteten Tragkraftswerthe bei Anwendung der Glimmerblättchen anbelangt, so zeigte sich, wie aus den entsprechenden Tafeln ersichtlich ist, besonders beim kurzen, dicken Stabe dieselbe als eine auffallend gute gegenüber der vorher ohne Anwendung des Blättchens gefundenen; beim langen, dünnen Stabe wechseln die Differenzen Δ gegen früher ihr Vorzeichen, bleiben aber ziemlich von derselben absoluten Grösse.

Schluss.

Die Ergebnisse vorliegender Arbeit sind kurz zusammengefasst, folgende:

Die Giltigkeit des Maxwell'schen Gesetzes in seiner einfachen Form

$$T = \frac{1}{8\pi} \cdot \mathfrak{B}^2 F$$

ist für diejenigen Fälle, welche den seiner Herleitung zu Grunde liegenden idealen Voraussetzungen möglichst gut angepasst sind, nach den bisherigen Erfahrungen kaum anzuzweifeln.[1] Jene Voraussetzungen sind identisch mit den von Stefan für die Giltigkeit seiner Tragkraftsformel

$$T = 2\pi \mathfrak{J}^2 . F$$

geforderten: »Es sollen Anker und Magnet keinen freien Magnetismus enthalten, die Richtung der Magnetisirung senkrecht auf der angegebenen Berührungsfläche stehen und die Intensität der Magnetisirung in jedem Punkte derselben die gleiche sein«.

Es ist sehr wahrscheinlich, dass das Maxwell'sche Gesetz in der Form

$$T = \frac{1}{8\pi} \int \mathfrak{B}^2 dF$$

auch in den übrigen Fällen die magnetische Tragkraft bestimmt; nur können dann bei Einführung des Mittelwerthes $\overline{\mathfrak{B}}_n$ der

---

[1] Vergl. Taylor, Tragkraft der Elektromagnete. Wied. Ann., 1895, 4.

Normalcomponente $\mathfrak{B}_n$ der magnetischen Induction $\mathfrak{B}$ in der Schnittfläche sich bedeutende Abweichungen ergeben, welche aber mit der Annäherung an die magnetische Sättigung des Eisens abnehmen, da nach dem Kirchhoff'chen Sättigungssatze[1] die Magnetisirung eines ungleichförmig magnetisirten Körpers mit wachsender äusserer Feldstärke der Gleichförmigkeit zustrebt, falls das äussere Feld homogen ist und sich dadurch eben die Annäherung an die von der Theorie geforderten Bedingungen immer mehr und mehr mit wachsender äusserer Feldstärke erhöht.

Die bei beiden untersuchten Stäben erreichten Maximalwerthe der Tragkraft betrugen 10·754 *kg* und 9·226 *kg* pro 1 cm^2. Ein weiteres Steigern der äusseren Feldstärke war wegen zu grosser Erhitzung der Magnetisirungsspulen unzulässig.

Durch das Einschieben dünner Glimmerblättchen zwischen die beiden Stabhälften wurde die Tragkraft stets vermindert.

Die magnetische Tragkraft eines Systems dürfte im Allgemeinen am besten durch eine Potenzreihe auszudrücken sein, deren erstes Glied eben das Maxwell'sche Gesetz in seiner einfachen Form darstellt, während der Einfluss der folgenden Glieder mit steigender Annäherung an die Sättigung immer mehr verschwindet. Thatsächlich wurden solche Reihenentwicklungen bereits angewendet und hiebei die Entwicklung auf einige wenige Glieder ausgedehnt, z. B. von Wassmuth und Bosanquet. Die Thatsache, dass Wassmuth fand, es wachse die magnetische Tragkraft rascher als $\mathfrak{J}$ und langsamer als $\mathfrak{J}^2$, dürfte theilweise in der Anordnung seiner Versuche ihre Erklärung finden; es waren nämlich die Secundärwindungen zur Bestimmung der Grösse $\mathfrak{J}$ nicht in unmittelbarer Nähe einer Schnittfläche des Ringes, sondern um 90° hievon entfernt angebracht, also an einer Stelle, wo $\mathfrak{J}$ grössere Werthe aufwies, als in den Schnittflächen, da sich die entmagnetisirende Wirkung der letzteren in ihrer unmittelbaren Nähe am meisten fühlbar macht und sehr rasch abfällt.

---

[1] Kirchhoff, Gesammelte Abhandlungen, S. 223.

Endlich sei noch auf eine von Adler[1] gegebene Formel für die Tragkraft eines Elektromagneten hingewiesen:

$$\mathfrak{Z} = T(\text{pro } 1\,cm^2) = 2\pi\bar{\mathfrak{J}}^2+\bar{\mathfrak{J}}\mathfrak{H}_e-\int_0^{\bar{\mathfrak{J}}}\frac{\mathfrak{J}}{\varkappa}\,d\mathfrak{J}.$$

Führt man in diesen Ausdruck $\frac{\mathfrak{J}}{\varkappa} = \mathfrak{H}_t = \mathfrak{H}_e-\mathfrak{H}_i$ ein, wobei $\mathfrak{H}_i$ die eigene entmagnetisirende Kraft bedeutet, so erhält man

$$\mathfrak{Z} = 2\pi\bar{\mathfrak{J}}^2+\bar{\mathfrak{J}}\mathfrak{H}_e-\int_0^{\bar{\mathfrak{J}}}(\mathfrak{H}_e-\mathfrak{H}_i)d\mathfrak{J} = 2\pi\bar{\mathfrak{J}}^2+\int_0^{\bar{\mathfrak{J}}}\mathfrak{H}_i\,d\mathfrak{J},$$

welch letzterer Ausdruck mit Einführung des Mittelwerthes von $\mathfrak{H}_i$ in

$$\mathfrak{Z} = 2\pi\bar{\mathfrak{J}}^2+\bar{\mathfrak{H}}_i.\bar{\mathfrak{J}}$$

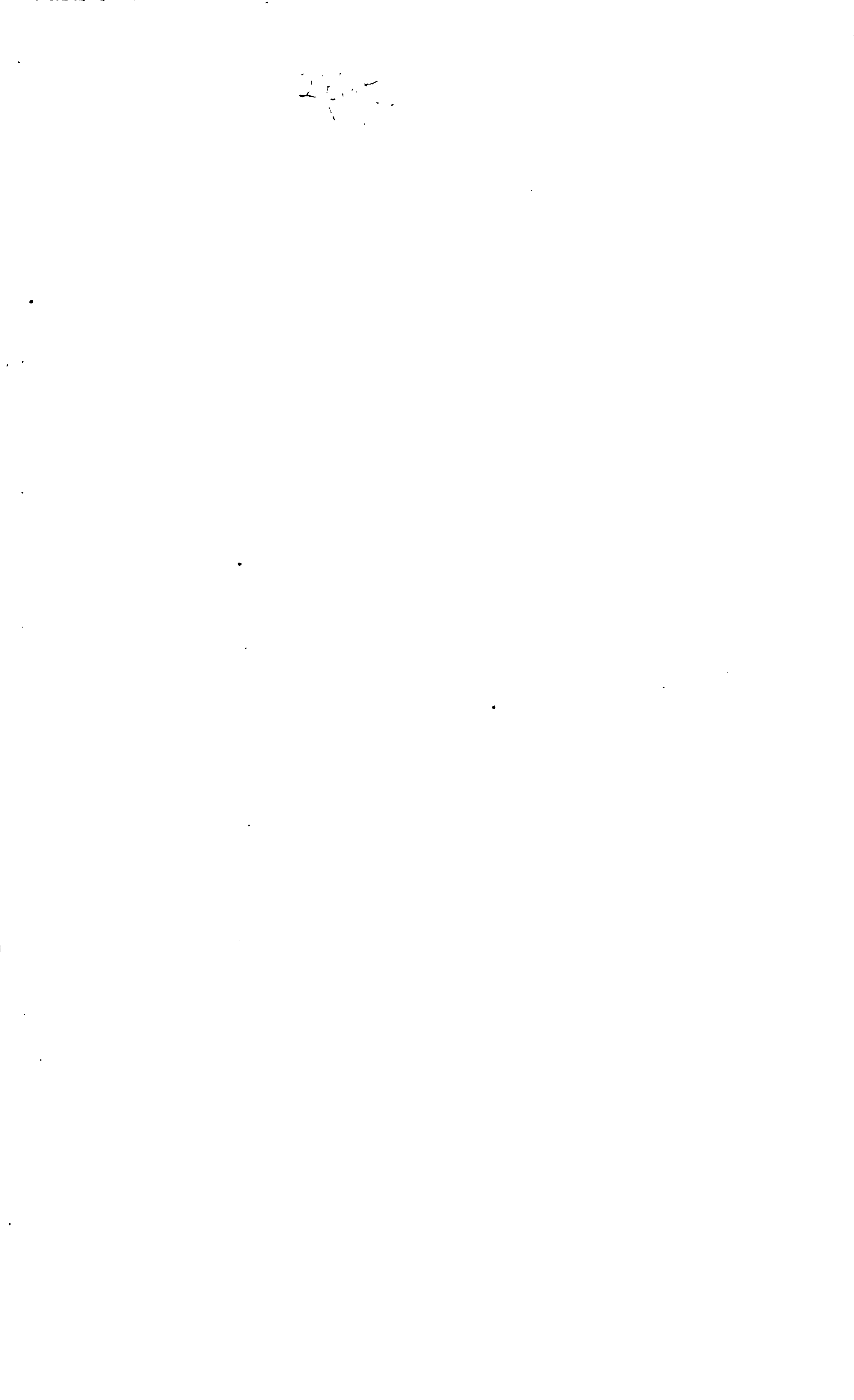
übergeht. Beachtet man nun, dass für kreiscylindrische Stäbe $\bar{\mathfrak{H}}_i:\bar{\mathfrak{J}} = \bar{N}$ eine merklich constante Grösse ist ($\bar{N} =$ mittlerer Entmagnetisirungsfactor), was besonders für Stäbe mit grossem Dimensionsverhältnisse gilt, so ergibt sich weiters

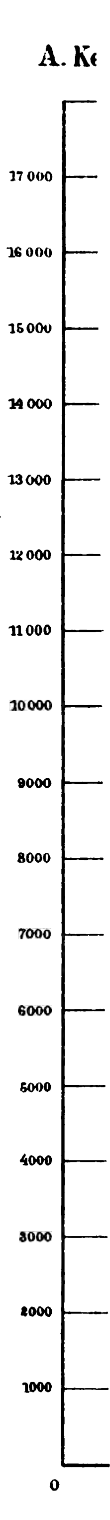
$$\mathfrak{Z} = 2\pi\bar{\mathfrak{J}}^2+\bar{N}\bar{\mathfrak{J}} = (2\pi+\bar{N})\bar{\mathfrak{J}}^2.$$

Demnach würde sich die magnetische Tragkraft eines solchen Stabes einer bestimmten Grenze nähern, wie es auch nach der Formel von Stefan der Fall sein müsste; nach dem Maxwell'schen Gesetze ist diese Folgerung ausgeschlossen.

Zum Schlusse sei es dem Verfasser gestattet, den Herren Professoren: Institutsleiter Dr. Leopold Pfaundler, Dr. Anton Wassmuth und Dr. Ignaz Klemenčič für die bei vorliegender Arbeit vielfach gewährte Unterstützung seinen ergebensten Dank auszusprechen.

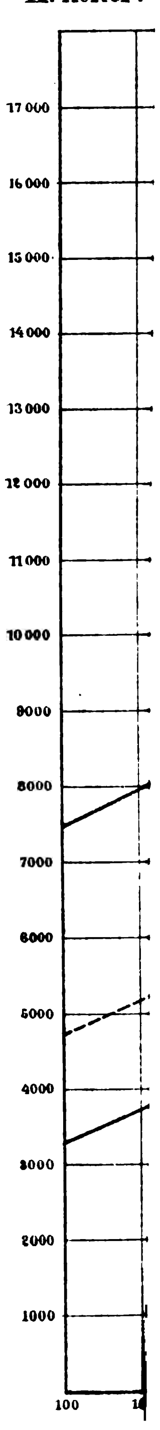
[1] Adler, Über die Formel für die Tragkraft der Elektromagnete. Diese Sitzungsber., II., 1893, Nr. 8.




17 000
16 000
15 000
14 000
13 000
12 000
11 000
10 000
9000
8000
7000
6000
5000
4000
3000
2000
1000
0




A. Keiter:


17 000
16 000
15 000
14 000
13 000
12 000
11 000
10 000
9000
8000
7000
6000
5000
4000
3000
2000
1000
100

Über die Zusammensetzung der gesättigten Dämpfe von Mischungen

von

Max Margules.

(Mit 7 Textfiguren.)

Die Untersuchungen über die Zusammensetzung des Dampfes flüssiger Gemische sind nicht sehr zahlreich.[1] Konowalow hat bewiesen, dass der Dampf relativ reicher ist an dem Stoff, mit dessen Zunahme in der Flüssigkeit der Druck bei constanter Temperatur steigt. Planck hat für sehr verdünnte Lösungen eine Formel angegeben, aus dem Dampfdruck des reinen Lösungsmittels und der Mischung den Antheil der Substanzen im Dampfe zu berechnen. Sie setzt voraus, dass man auf den Dampf die Gesetze idealer Gase anwenden darf und dass van t'Hoff's Regel der Druckerniedrigung in der einfachsten Form gilt. Nernst hat Fälle untersucht, in denen die gelöste Substanz als Flüssigkeit und als Gas dissociirt; auch diese Arbeit bezieht sich nur auf verdünnte Mischungen. Die Formeln wurden durch Versuche von Winkelmann, Nernst und Gerber geprüft.

[1] Konowalow, Wiedemann's Ann., 14, 1881. Planck, Ostwald's Zeitschr., 2, 1888. Winkelmann, Wied. Ann., 39, 1890. Van der Waals Archives Néerlandaises 24, 1889. Nernst, Göttinger Nachrichten, 1891. Gerber, Wied. Beiblätter, 1894.

Eine in den »Travaux et Mém. des Facultés de Lille« veröffentlichte Arbeit von Duhem kenne ich nur aus der kurzen Anzeige in Wied. Beibl. 1894.

In Betreff der in den letzten Abschnitten dieser Mittheilung behandelten Gegenstände vergleiche man die bezüglichen Stellen in Gibbs' Abhandlung über das Gleichgewicht heterogener Stoffe und mehrere Arbeiten von Blümcke in Ostwald's Zeitschr., 6—11.

Van der Waals hat in der »Théorie moleculaire d'une substance composée de deux matières différentes« den Gegenstand aus einem sehr umfassenden Gesichtspunkte betrachtet. Seine Untersuchung gibt ein schönes Bild der Vorgänge in den Mischungen, besonders in der Nähe der kritischen Zustände. Sie gab Anlass zu Kuenen's interessanten Arbeiten über Mischungen von Kohlensäure und Methylchlorid, von Äthan und Stickoxydul, und zur Entdeckung der retrograden Condensation.

Die Voraussetzungen, dass der flüssige und gasförmige Zustand einer reinen Substanz durch eine Gleichung mit wenigen Constanten darstellbar ist, dass eine ähnliche Gleichung für die Mischung gilt, dass zwischen den Constanten des Gemisches und denjenigen der Componenten einfache Beziehungen bestehen, sind für van der Waals' Theorie wesentlich nothwendig.

Bei Wasser und Alkohol in gewöhnlicher Temperatur treffen jene Annahmen sicher nicht zu. Selbst wenn man ganz ausreichende Zustandsgleichungen fände, wäre es noch sehr schwierig, die Zusammensetzung der Dämpfe eines Gemisches auf diesem Wege zu berechnen.

Es gibt eine grosse Classe von Mischungen, deren Dampf sich in gewöhnlichen Temperaturen bis zur Sättigung nahezu wie ein Gemisch idealer Gase verhält. Für solche Fälle habe ich eine brauchbare Theorie der Destillation zu entwickeln versucht.

Zunächst sind die Überlegungen, mittels deren Kirchhoff die Mischungen einer verdampfenden und einer dampflosen Substanz behandelt hat, auf die Mischung zweier flüchtiger Körper auszudehnen. Man kommt zu einer Formel, welche gestattet, die Zusammensetzung des Dampfes zu berechnen, wenn man die Mischungswärme, den Dampfdruck der reinen Substanzen und des Gemisches, überdies noch das Temperaturgefälle der Druckwerthe kennt. Das letztere lässt sich aus den vorhandenen Messungen an Gemischen nicht mit ausreichender Genauigkeit bestimmen. Desshalb ist die erwähnte Formel vorläufig nicht verwendbar. Ähnlich verhält es sich bekanntlich mit der Kirchhoff'schen für Salzlösungen.

Ein anderer Weg geht aus von den Ausdrücken für die freie Energie des Gemisches, welche Nernst angegeben hat. Schon aus den verschiedenen Formen derselben Grösse lässt sich eine Beziehung zwischen den Partialdruckwerthen ableiten. Zu derselben Differentialgleichung kommt man durch Ausführung des Postulates, dass die freie Energie des Systems Flüssigkeit und gesättigter Dampf kleiner sei, als diejenige einer anderen Massenvertheilung zwischen flüssiger und gasförmiger Phase in demselben Raume. Die Gleichung schliesst auch den Satz von Konowalow ein. Mittels derselben sind die Zusammensetzungen der Dämpfe von Äthylalkohol—Wasser und Methylalkohol—Wasser für alle Mischungsverhältnisse der Flüssigkeiten aus Konowalow's Dampfdruckcurven berechnet worden.

Daran schliessen sich noch Ausführungen über die Gestalt der Partialdruckcurven für Flüssigkeitspaare von beschränkter Mischbarkeit, über gesättigte und übersättigte Mischungen.

---

1. Bezeichnungen und Voraussetzung.

Die Massen der in einem Gefäss vom Volumen v enthaltenen Stoffe 1, 2 seien M_1+m_1, M_2+m_2 Gramm. M bezieht sich auf den flüssigen, m auf den gasförmigen Antheil jedes Stoffes. v_d das Volumen des Dampfraumes, v_f jenes der Flüssigkeit. Die Temperatur hat in allen Theilen der Masse den gleichen Werth. T absolute Temperatur, t Temperatur vom gebräuchlichen Nullpunkt in der Centigrad-Scale gezählt.

Q ist die bei Mischung von M_1 und M_2 in constanter Temperatur zuzuführende Wärmemenge.

P_1, P_2 Dampfdruckwerthe der reinen Substanzen bei T.

Π Dampfdruck des Gemisches; p_1, p_2 Partialdruck der Bestandtheile.

Es wird angenommen, die Dämpfe verhalten sich bis zur Sättigung wie ideale Gase, befolgen die nach Mariotte, Gay-Lussac, Dalton, Joule, Avogadro benannten Gasgesetze.

R_1, R_2 sind Constante in den Zustandsgleichungen der Dämpfe

$$m_1 R_1 T = p_1 v_d, \qquad m_2 R_2 T = p_2 v_d.$$

μ_1, μ_2 sind Zahlen, welche angeben, wie viel Gramm des Dampfes der Substanz 1, beziehungsweise 2 den gleichen Raum einnehmen, wie 2 g Wasserstoff bei demselben Druck und derselben Temperatur. Die Massen

$$N_1 = \frac{M_1}{\mu_1}, \quad N_2 = \frac{M_2}{\mu_2}, \quad n_1 = \frac{m_1}{\mu_1}, \quad n_2 = \frac{m_2}{\mu_2}$$

werden als Gramm-Moleküle der Flüssigkeiten, beziehungsweise der Dämpfe bezeichnet.

Man hat ferner

$$\mu_1 R_1 = \mu_2 R_2 = K.$$

Mit diesen Zeichen sind die Zustandsgleichungen der Dämpfe

$$n_1 KT = p_1 v_d, \qquad n_2 KT = p_2 v_d.$$

II, p_1, p_2 sind Functionen der Temperatur und der Zusammensetzung des flüssigen Gemisches. Die letztere wird bestimmt durch die Variable

$$z = \frac{M_1}{M_1+M_2} \quad \text{oder} \quad \zeta = \frac{N_1}{N_1+N_2}.$$

Die hier angeführten Zeichen beziehen sich auf die im folgenden oft und an verschiedenen Stellen gebrauchten Grössen. Andere, nur gelegentlich verwendete Bezeichnungen sind an den betreffenden Orten angeführt.

2. Verdampfungsgleichung.

Die erste Beziehnung zwischen p_1 und p_2 liefert das Dalton'sche Gesetz

$$p_1 + p_2 = \Pi, \tag{I}$$

die andere der zweite Hauptsatz der Thermodynamik, durch die Gleichung

$$\frac{\partial U}{\partial v} = T\frac{\partial \Pi}{\partial T} - \Pi \tag{II}$$

worin U die innere Energie des Systems Flüssigkeit—Dampf bezeichnet. Hier sind v, T als unabhängige Veränderliche anzusehen.

Sind ferner

$$E_1, E_2$$

die innere Energie der Masseneinheit der reinen Flüssigkeiten 1, 2,

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2$$

die innere Energie der Masseneinheit der Dämpfe 1, 2, so hat man

$$U = m_1\varepsilon_1 + m_2\varepsilon_2 + M_1E_1 + M_2E_2 + Q$$

und da die Summe der flüssigen und gasförmigen Masse jeder Substanz constant angenommen ist,

$$\frac{\partial U}{\partial v} = \left(\varepsilon_1 - E_1 - \frac{\partial Q}{\partial M_1}\right)\frac{\partial m_1}{\partial v} + \left(\varepsilon_2 - E_2 - \frac{\partial Q}{\partial M_2}\right)\frac{\partial m_2}{\partial v}.$$

Die Menge der Flüssigkeit wählt man so gross, dass sich ihre Zusammensetzung z mit v sehr wenig ändert. Je grösser die Flüssigkeitsmasse, desto geringer die Änderung des z bei gleicher Zunahme des Volumens. Mit ungeändertem z und T hat der neu aufsteigende Dampf die gleiche Zusammensetzung wie der schon vorhandene. Aus der Zustandsgleichung folgt

$$\frac{\partial m_1}{\partial v} = \frac{p_1}{R_1 T}\frac{\partial v_d}{\partial v} + \frac{v_d}{R_1 T}\frac{\partial p_1}{\partial v} = \frac{p_1}{R_1 T}\left(1 - \frac{\partial v_f}{\partial v}\right) + \frac{v_d}{R_1 T}\frac{\partial p_1}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v}.$$

Das specifische Volumen der Flüssigkeit ist klein gegenüber demjenigen des Dampfes; man vernachlässigt $\partial v_f/\partial v$ gegen 1 und setzt der oben angeführten Annahme gemäss $\partial z/\partial v$ gleich Null, hat dann

$$\frac{\partial m_1}{\partial v} = \frac{p_1}{R_1 T} = \frac{m_1}{v_d}, \qquad \frac{\partial m_2}{\partial v} = \frac{p_2}{R_2 T} = \frac{m_2}{v_d}.$$

Π soll nun als Function von z und T (nicht, wie in Gleichung II als Function von v, T) betrachtet werden. Bei Anwendung der bekannten Clausius'schen Bezeichnung ist

$$\left(\frac{\partial \Pi}{\partial T}\right)_v = \left(\frac{\partial \Pi}{\partial T}\right)_z + \left(\frac{\partial \Pi}{\partial z}\right)_T\left(\frac{\partial z}{\partial T}\right)_v$$

und es gilt wieder, dass, je grösser die flüssige Masse, desto kleiner $(\partial z/\partial T)_v$, demnach für die vorausgesetzte sehr grosse Masse

$$\left(\frac{\partial \Pi}{\partial T}\right)_v = \left(\frac{\partial \Pi}{\partial T}\right)_z .$$

Für die Folge sollen

$$z \text{ und } T$$

als die unabhängigen Veränderlichen gelten; wir können dann die Indices bei den Differentialquotienten weglassen und erhalten statt der Gleichung II)

$$\left(\varepsilon_1 - E_1 - \frac{\partial Q}{\partial M_1}\right)\frac{p_1}{R_1 T} + \left(\varepsilon_2 - E_2 - \frac{\partial Q}{\partial M_2}\right)\frac{p_2}{R_2 T} = T\frac{\partial \Pi}{\partial T} - \Pi.$$

Alle hier vorkommenden Grössen, auch die Differentialquotienten von Q (analog den Verdünnungswärmen) sind nur Functionen von z und T, von der Masse der Flüssigkeit unabhängig. Verbindet man die letzte Gleichung mit I), so folgt IIa)

$$\left(\varepsilon_1 - E_1 + R_1 T - \frac{\partial Q}{\partial M_1}\right)\frac{p_1}{R_1 T} + \left(\varepsilon_2 - E_2 + R_2 T - \frac{\partial Q}{\partial M_2}\right)\frac{p_2}{R_2 T} = T\frac{\partial \Pi}{\partial T}.$$

3. Verdampfungswärme der Flüssigkeiten aus der Mischung.

$\varepsilon_1 - E_1$ ist die innere Verdampfungswärme der Masseneinheit der reinen Substanz 1. Da $P_1 V_1 = R_1 T$, wenn V_1 das specifische Volumen des gesättigten Dampfes bedeutet, die Ausdehnungsarbeit bei der Verdampfung darstellt, so ist die ganze Verdampfungswärme

$$L_1 = \varepsilon_1 - E_1 + R_1 T = R_1 T \frac{T}{P_1}\frac{dP_1}{dT}.$$

Man kann sich vorstellen, dass die Flüssigkeit 1 aus der Mischung allein verdampft. Bringt man in den Dampfraum einen Körper, welcher den Dampf 1 absorbirt, auf 2 aber nicht einwirkt, so mag die Menge dm_1 des ersten langsam entzogen und durch die Verflüchtigung einer gleichen Masse dM_1 aus der Flüssigkeit ersetzt werden. Die Wärmemenge, welche für den letzten Theil des Processes bei constanter Temperatur zuzuführen ist, beträgt $A_1 dM_1$, wenn wir setzen

$$A_1 = L_1 - \frac{\partial Q}{\partial M_1}$$

die Verdampfungswärme für 1 g der Flüssigkeit 1 aus der Mischung.

Führt man durch die Gleichungen

$$B_1 = \mu_1 A_1 = \frac{K}{R_1}\left(\varepsilon_1 - E_1 + R_1 T - \frac{\partial Q}{\partial M_1}\right)$$

$$B_2 = \mu_2 A_2 = \frac{K}{R_2}\left(\varepsilon_2 - E_2 + R_2 T - \frac{\partial Q}{\partial M_2}\right)$$

die Verdampfungswärmen für je ein Gramm-Molekül der Flüssigkeiten 1 und 2 aus der Mischung ein und setzt

$$B = KT \frac{T}{\Pi} \frac{\partial \Pi}{\partial T},$$

so hat man statt der Gleichung II*a*)

$$B_1 p_1 + B_2 p_2 = B\Pi. \qquad \text{II}b)$$

B ist die Verdampfungswärme jener Masse aus der Mischung, deren Dampf das gleiche Volumen hat, wie das Gramm-Molekül eines Gases beim Druck Π und bei der Temperatur T, gleich wie

$$\mu_1 L_1 = KT \frac{T}{P_1} \frac{dP_1}{dT}$$

die Verdampfungswärme für ein Gramm-Molekül der reinen Flüssigkeit 1 ist.

Man kann die Gleichung II*b*) auch so schreiben:

$$n_1 B_1 + n_2 B_2 = (n_1 + n_2) B;$$

sie drückt den selbstverständlichen Satz aus, dass die Wärmemenge, welche man der Mischung zuführen muss, um $n_1 + n_2$ Gramm-Moleküle zu verdampfen, gleich ist der Summe der Wärmemengen, welche nothwendig wären, um (bei merklich ungeänderter Zusammensetzung) n_1 Gramm-Moleküle der Substanz 1 und n_2 der Substanz 2 einzeln aus der Mischung verdampfen zu lassen.

4. Partialdruck und Massenverhältniss im Dampfgemisch.

Aus den Gleichungen I) und II*b*) erhält man

$$\frac{p_1}{\Pi} = \frac{B - B_2}{B_1 - B_2}, \qquad \frac{p_2}{\Pi} = \frac{B_1 - B}{B_1 - B_2}. \qquad \text{III)}$$

Das Verhältniss der Mengen beider Stoffe im gesättigten Dampf des Gemisches ist

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2}\frac{p_1}{p_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2}\frac{B-B_2}{B_1-B}. \qquad \text{III}\,a)$$

Der leichteren Übersicht wegen stellen wir die Werthe der auf der rechten Seite der Gleichungen vorkommenden Symbole zusammen und schreiben die Formeln so, dass alle Glieder reine Zahlen sind.

$$\frac{B}{KT} = \frac{\partial \log \Pi}{\partial \log T}, \qquad \frac{B_1}{KT} = \frac{d \log P_1}{d \log T} - \frac{1}{R_1 T}\frac{\partial Q}{\partial M_1},$$

$$\frac{B_2}{KT} = \frac{d \log P_2}{d \log T} - \frac{1}{R_2 T}\frac{\partial Q}{\partial M_2}.$$

Um die Zusammensetzung des Dampfes zu bestimmen, müsste man kennen: Den Druck des gesättigten Dampfgemisches und sein Temperaturgefälle, den Dampfdruck der reinen Substanzen und das bezügliche Temperaturgefälle, endlich die Mischungswärme und ihr Gefälle nach z.

[Es empfiehlt sich, die Formeln III) mit denjenigen zu vergleichen, welche man findet, wenn man den kürzesten Weg einschlägt, um die Zusammensetzung des Dampfes unabhängig von chemischer Analyse zu berechnen. Misst man Temperatur, Druck, Volumen und Masse des Dampfgemisches und bestimmt daraus eine Grösse μ so, dass

$$(m_1+m_2)KT = \mu \Pi v_d,$$

dann hat μ für das Dampfgemisch eine ähnliche Bedeutung, wie $\mu_1 \mu_2$ für die reinen Substanzen. Man kommt zu den Gleichungen

$$\frac{p_1}{\Pi} = \frac{\mu-\mu_2}{\mu_1-\mu_2}, \qquad \frac{p_2}{\Pi} = \frac{\mu_1-\mu}{\mu_1-\mu_2}\Bigg].$$

Wenn ein Bestandtheil des Gemisches keinen Dampf aussendet, $p_2 = 0$, geben die Gleichungen III) den Kirchhoff'schen Ausdruck der Verdünnungswärme mittels der Beziehung

$$B = B_1.$$

Wenn $Q = 0$ für jedes Mischungsverhältniss, so sind die Gleichungen III) durch die Annahmen $p_1 = P_1$ und $p_2 = P_2$ identisch erfüllt. Diese entsprechen erfahrungsgemäss dem Fall, dass die Flüssigkeiten nicht mischbar, aber beide mit dem Dampfraum in Berührung sind.

Mischen sich die Flüssigkeiten nur in begrenzten Mengenverhältnissen, so entstehen für die dazwischenliegenden z zwei Schichten von constanter Zusammensetzung. Der Dampf beider Schichten muss gleichen Druck und gleiche Partialdrucke haben; anderenfalls würde, wenn die Schichten miteinander und mit dem Dampfraum in Berührung sind, das Gleichgewicht durch Destillation gestört. Demnach ist auch B für beide Schichten gleich, ebenso B_1 und B_2. Die Verdampfungswärme einer Flüssigkeit aus einer Schicht ist ebenso gross wie für die andere Schicht.

5. Änderung der Zusammensetzung des Dampfes mit der Temperatur.

Die Grösse B_1 hat dieselbe Beziehung zum Partialdruck p_1, wie die Verdampfungswärme eines Gramm-Moleküls der reinen Substanz $\mu_1 L_1$ zum Druck P_1. Demnach

$$\frac{B_1}{KT} = \frac{\partial \log p_1}{\partial \log T}, \qquad \frac{B_2}{KT} = \frac{\partial \log p_2}{\partial \log T}.$$

Diese Ausdrücke wären zur Berechnung des Mischungsverhältnisses im Dampfe nicht geeignet, weil mit ihnen II*b*) identisch aus I) hervorgeht. Man kann sie benützen, um die folgenden Gleichungen aufzustellen:

$$\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{p_1}{p_2}\right) = \frac{p_1}{p_2}\,\frac{B_1 - B_2}{KT^2}, \qquad \frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{m_1}{m_2}\right) = \frac{m_1}{m_2}\,\frac{B_1 - B_2}{KT^2}. \qquad \text{IV)}$$

Das Verhältniss m_1/m_2 wächst oder nimmt ab mit steigender Temperatur, je nachdem B_1 grösser oder kleiner ist als B_2.

Im folgenden sind in Fig. 1 die B_1 und B_2 für das Gemisch Alkohol$_{(1)}$—Wasser$_{(2)}$ für $T = 303°$ als Functionen von z durch Curven dargestellt. Von $z = 0$ bis zu $z = 0{\cdot}23$ beiläufig ist $B_1 > B_2$, der Dampf alkoholarmer Gemische nimmt mit steigender Temperatur an Alkoholgehalt zu, bei grösseren z ist $B_1 < B_2$,

der Dampf wird mit wachsendem T wasserreicher. In den Gemischen Alkohol$_{(1)}$—Schwefelkohlenstoff$_{(2)}$ ist überall $B_1 > B_2$, der Alkoholgehalt des Dampfes wächst bei allen Mischungsverhältnissen mit der Temperatur.

Aus den Gleichungen

$$\frac{\partial \log p_1}{\partial T} = \frac{d \log P_1}{dT} - \frac{1}{R_1 T^2} \frac{\partial Q}{\partial M_1},$$

$$\frac{\partial \log p_2}{\partial T} = \frac{d \log P_2}{dT} - \frac{1}{R_2 T^2} \frac{\partial Q}{\partial M_2},$$

leitet man ab, dass der Partialdruck p_1 mit der Temperatur rascher, beziehungsweise langsamer wächst, als der Druck P_1 des reinen gesättigten Dampfes, wenn durch Hinzufügung einer kleinen Menge der Substanz 1 zur flüssigen Mischung bei constantem T Wärme entwickelt, beziehungsweise absorbirt wird. Man hat nämlich

$$\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{p_1}{P_1}\right) = -\frac{p_1}{P_1} \cdot \frac{1}{R_1 T^2} \frac{\partial Q}{\partial M_1}.$$

Dieselben Gleichungen lassen sich folgenderweise integriren und zur Bestimmung des Mischungsverhältnisses im Dampfe verwenden. Nennt man $p_1^{(0)} \ldots P_2^{(0)}$ die Werthe von $p_1 \ldots P_2$ für die Temperatur T_0, und setzt

$$p_1^{(0)} = P_1^{(0)} f_1(z), \qquad p_2^{(0)} = P_2^{(0)} f_2(z),$$

so ist für eine andere Temperatur T

$$p_1 = P_1 f_1(z) . e^{-\int \frac{\partial Q}{\partial M_1} \frac{dT}{R_1 T^2}} = G_1 f_1(z)$$

$$p_2 = P_2 f_2(z) . e^{-\int \frac{\partial Q}{\partial M_2} \cdot \frac{dT}{R_2 T^2}} = G_2 f_2(z),$$

wobei die Integralgrenzen T_0 und T sind. G_1 und G_2 kennt man, wenn die Mischungswärme als Function von z und T, überdies die Dampfdruckwerthe der reinen Substanzen für T gegeben sind. Dann lassen sich aus dem Dampfdruck des Gemisches Π^0 für T_0 und Π für T mittels der Gleichungen

$$\Pi^{(0)} = P_1^{(0)} f_1(z) + P_2^{(0)} f_2(z), \qquad \Pi = G_1 f_1(z) + G_2 f_2(z)$$

die Werthe von f_1 und f_2, also auch die $p_1 p_2$ für beide Temperaturen finden. Die so erhaltenen Ausdrücke von p_1/Π und p_2/Π gehen in die Gleichungen III) über, wenn T unendlich nahe an T_0 liegt.

Die letzten zwei Gleichungen werden identisch, wenn p_1/p_2 in beiden Temperaturen gleich ist; dann sind sie auch zu dem erwähnten Zwecke nicht verwendbar. In Wirklichkeit ändert sich jenes Verhältniss sehr wenig selbst in grossen Temperaturintervallen. Man braucht desshalb sehr genaue Messungen der als bekannt vorausgesetzten Grössen, um die Gleichungen anwenden zu können.

6. Beziehungen zwischen Mischungswärme und Partialdruck.

Nennt man Φ die Mischungswärme für die Masseneinheit der Flüssigkeit von der Zusammensetzung z, so ist

$$Q = (M_1 + M_2)\Phi$$

und mit Benützung der Gleichungen des letzten Abschnittes

$$\frac{\partial Q}{\partial M_1} = \Phi + (1-z)\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{KT^2}{\mu_1}\frac{\partial}{\partial T}\log\left(\frac{P_1}{p_1}\right)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial M_2} = \Phi - z\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{KT^2}{\mu_2}\frac{\partial}{\partial T}\log\left(\frac{P_2}{p_2}\right).$$

Daraus

$$\Phi = KT^2\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{z}{\mu_1}\log\left(\frac{P_1}{p_1}\right) + \frac{1-z}{\mu_2}\log\left(\frac{P_2}{p_2}\right)\right)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = KT^2\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{1}{\mu_1}\log\left(\frac{P_1}{p_1}\right) - \frac{1}{\mu_2}\log\left(\frac{P_2}{p_2}\right)\right)$$

$$0 = \frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{z}{\mu_1}\frac{\partial \log p_1}{\partial z} + \frac{1-z}{\mu_2}\frac{\partial \log p_2}{\partial z}\right).$$

Den Ausdruck der Mischungswärme, welchen die erste dieser Gleichungen enthält, hat auf anderem Wege Nernst gefunden (Theor. Chemie, S. 104). Die letzte Gleichung kann man, wenn die Variable ζ statt z eingeführt wird, so schreiben

$$\frac{\partial}{\partial T}\left(\zeta\frac{\partial \log p_1}{\partial \zeta} + (1-\zeta)\frac{\partial \log p_2}{\partial \zeta}\right) = 0.$$

7. Die Verdampfungswärmen der Bestandtheile aus den Mischungen Alkohol—Wasser, Methylalkohol—Wasser, Alkohol—Schwefelkohlenstoff.

Die Dichte des Wasserstoffes bei $t = 0°$ und einer Atmosphäre Druck gleich $10^{-5}.8 \cdot 9551\, g.cm^{-3}$ gesetzt und die Gramm-Calorie zu $10^{7}.4 \cdot 1675\, g.cm^{2}.\sec^{-2}$ angenommen, hat man

$$K = 2 . \frac{271 \cdot 5}{273} \, \frac{\text{Gramm-Cal.}}{g . 1°} .$$

Die folgende Tabelle enthält für einige Flüssigkeitspaare: Die Werthe von $d \log P / d \log T$ aus den Dampfdruckformeln von Regnault berechnet, die Constanten a der Formel

$$\Phi = a_1 \sin \pi z + \ldots + a_5 \sin 5 \pi z \quad \text{[Gramm-Calorien pro Gramm]}$$

abgeleitet aus den Messungen von Winkelmann (für Methylalkohol—Wasser aus denen von Dupré),[1] ferner die μ_1, μ_2, endlich die aus diesen Daten berechneten $B_1/(KT)$ und $B_2/(KT)$ für 11 Werthe von z.

Die Φ aus den Formeln stimmen mit den beobachteten bis auf wenige Hundertel der gewählten Maasseinheit überein, nur bei Methylalkohol—Wasser kommen grössere Unterschiede vor; vielleicht weil hier fünf Glieder der Formel noch nicht ausreichen, wahrscheinlich aber wegen der Verschiedenheit der Temperaturen, bei denen Dupré gemessen hat (16° bis 20°).

In jeder Combination ist die an erster Stelle genannte Flüssigkeit als die oben mit 1 bezeichnete Substanz anzusehen.

Die Verdampfungswärme einer Flüssigkeit aus der Mischung als Function der Zusammensetzung hat an sich einiges Interesse, auch ohne Rücksicht auf die Anwendung, welche man davon machen will.

[1] Winkelmann, Poggendorff's Annalen 150. Dupré, Pogg. Annalen 148 (1873).

	Alkohol — Wasser		Methyl-alkohol — Wasser	Alkohol — Schwefel-kohlenstoff
t	0°	30°	18°	0°
$\frac{d \log P_1}{d \log T}$ ...	18·098	16·668	16·163	18·098
$\frac{d \log P_2}{d \log T}$ ...	19·520	17·395	18·232	12·477
a_1	—10·184	— 6·080	— 9·471	2·318
a_2	— 3·685	— 2·584	— 1·229	0·151
a_3	— 1·124	— 0·774	— 0·535	0·127
a_4	— 0·184	— 0·188	— 0·254	0·040
a_5	— 0·012	— 0·088	+ 0·027	0·006
μ_1	46	46	32	46
μ_2	18	18	18	76

z	$\frac{B_1}{KT}$	$\frac{B_2}{KT}$	$\frac{B_1}{KT}$	$\frac{B_2}{KT}$	$\frac{B_1}{KT}$	$\frac{B_2}{KT}$	$\frac{B_1}{KT}$	$\frac{B_2}{KT}$
0·0	23·88	19·52	20·21	17·40	18·67	18·23	17·25	12·48
·1	22·92	19·55	19·49	17·42	17·84	17·98	17·37	12·46
·2	20·88	19·69	18·10	17·51	16·76	17·86	17·60	12·40
·3	19·10	19·92	17·09	17·64	15·98	17·89	17·78	12·30
·4	18·19	20·10	16·67	17·73	15·64	17·95	17·88	12·22
·5	17·98	20·17	16·55	17·76	15·57	18·01	17·93	12·14
·6	18·03	20·14	16·55	17·76	15·49	18·16	17·99	12·02
·7	18·09	20·10	16·62	17·71	15·49	18·40	18·04	11·85
·8	18·10	20·09	16·67	17·66	15·63	18·68	18·09	11·69
·9	18·10	20·09	16·67	17·65	15·90	18·83	18·10	11·53
1·0	18·10	20·09	16·67	17·67	16·16	18·96	18·10	11·48

Die Verdampfungswärme des Alkohols aus einer sehr verdünnten Lösung in Wasser ist bei 30° fast um ein Viertel, bei 0° um mehr als ein Viertel grösser, als diejenige des reinen Alkohols. Die entsprechenden Unterschiede für Wasser sind weitaus kleiner; das hängt unmittelbar mit den Wärmemengen zusammen, welche durch Zusatz kleiner Massen der reinen Flüssigkeiten zur Mischung entwickelt werden. Die Figuren 1 und 2, welche für zwei Fälle die B_1 und B_2 darstellen,

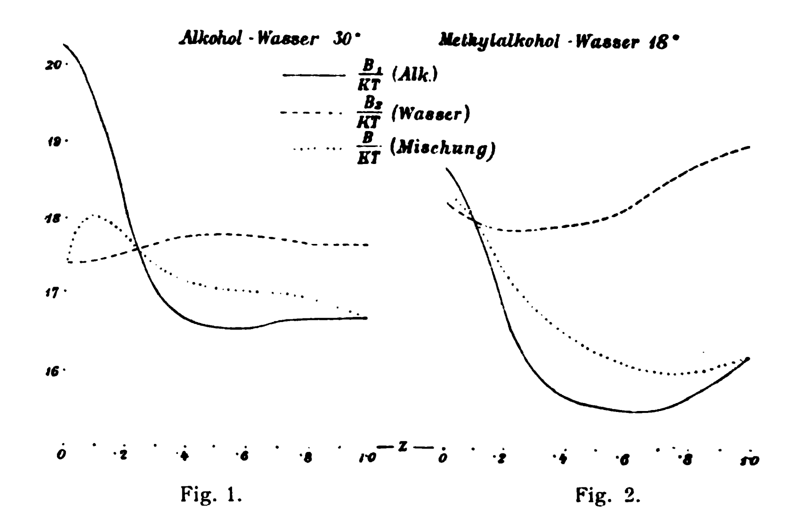


Fig. 1. Fig. 2.

geben zugleich eine Vorstellung vom Gang dieser Wärmemengen.

Die eingezeichnete Curve B (Verdampfungswärme für ein Gramm-Molekül des Gemisches) ist vorläufig als eine willkürlich gezogene anzusehen; man kennt nur ihre Endpunkte und weiss, dass sie überall zwischen den Curven B_1, B_2 liegt, also auch durch den Schnittpunkt beider hindurchgeht, wenn es einen solchen gibt.

Der Versuch, aus Konowalow's Beobachtungsreihen hinreichend genaue Werthe von $\partial \log \Pi / \partial T$ für einige Mischungsverhältnisse abzuleiten, ist nicht gelungen. Unmittelbar auf diesen Zweck gerichtete Messungen würden vermuthlich die Anwendung der Gleichungen (III) zur Bestimmung der Zusammensetzung des Dampfes gestatten.

8. Verdünnte Lösungen flüchtiger Körper.
(Formel von Planck.)

Für die Erniedrigung des Dampfdruckes einer Flüssigkeit durch Auflösung einer geringen Menge nicht flüchtiger Substanz in derselben hat Raoult ein empirisches Gesetz angegeben; das gleiche hat van t'Hoff in seinen fruchtbaren Untersuchungen über den osmotischen Druck gefunden.

Angenommen, das Gesetz gelte ebenso für die Lösung einer flüchtigen Substanz, wenn nur statt des Dampfdruckes der Partialdruck des Lösungsmittels gesetzt wird, so ist dasselbe in den oben angegebenen Zeichen zu schreiben

$$\frac{P_2 - p_2}{P_2} = \frac{N_1}{N_1 + N_2} = \zeta,$$

wobei N_1 sehr klein im Vergleich mit N_2 sein soll.

Durch die Arbeiten von Arrhenius ist bekannt, dass dieser Satz nur mit Einschränkungen gilt, wenn man die Zahl der Gramm-Moleküle so definirt, wie es oben geschehen ist. Wir wollen ihn demgemäss nur dort anwenden, wo man annehmen darf, dass die gelöste Substanz weder dissociirt noch polymerisirt ist. Man hat

$$p_2 = P_2(1-\zeta), \qquad p_1 = \Pi - p_2$$

$$\frac{p_1}{\Pi} = \frac{\Pi - P_2}{\Pi} + \frac{P_2}{\Pi}\zeta.$$

Im Grenzfall unendlicher Verdünnung ist Π nur sehr wenig von P_2 verschieden. Mit Vernachlässigung unendlich kleiner Zahlen höheren Grades erhält man die Formel von Planck

$$\frac{p_1}{\Pi} - \zeta = \frac{\Pi - P_2}{\Pi} \quad (\text{Lim}\,\zeta = 0).$$

Das erste Glied auf der linken Seite bezeichnet Planck als die molekulare Concentration des Dampfes, das zweite als diejenige der Flüssigkeit. Diese Gleichung gestattet p_1 zu berechnen aus ζ, P_2, Π.

Handelt es sich um eine verdünnte Lösung von 2 in 1, so sind nur die Indices zu vertauschen und $1-\zeta$ an Stelle von ζ zu schreiben

$$p_1 = P_1\zeta \qquad (\text{Lim}\,\zeta = 1).$$

Dem van t'Hoff-Raoult'schen Gesetz zufolge ist für ζ nahe 1 das Verhältniss p_1/P_1, für ζ nahe 0 das Verhältniss p_2/P_2 nur von der Concentration abhängig, von der Temperatur unabhängig. Damit stimmen auch die Gleichungen des 5. Abschnittes überein; bei $z = 1$ und in der Nähe dieses Werthes ist $\partial Q/\partial M_1 = 0$, $G_1 = P_1$, folglich

$$\frac{p_1^0}{P_1^0} = \frac{p_1}{P_1} = f_1(z)$$

und ähnlich bei $z = 0$ $G_2 = P_2$. Aber das genannte Gesetz sagt auch, dass jene Verhältnisse für eine grosse Classe von Flüssigkeiten die gleichen Werthe haben, und es gibt $f_1(z) = \zeta$, $f_2(z) = 1 - \zeta$ an. Darüber können die vorher abgeleiteten Gleichungen nichts enthalten, da sie ebensowohl für Elektrolyte wie für Nichtleiter gelten.

9. Freie Energie des Flüssigkeitsgemisches und des Dampfgemisches.

Lässt man bei constantem T die Menge dM_1 der ersten Flüssigkeit aus der Mischung verdampfen, so ist dabei vom System die äussere Arbeit $dM_1 p_1 v_1 = dM_1 R_1 T$ zu leisten (Verlust an freier Energie). Wird dieser Dampf abgetrennt und bis zum Druck P_1 comprimirt, so ist dabei Arbeit zuzuführen (Gewinn an freier Energie), deren Betrag

$$-dM_1 \int p\,dv = dM_1 R_1 T \log\left(\frac{P_1}{p_1}\right).$$

Verflüssigt man noch den Dampf unter dem Druck P_1, so hat man wieder $dM_1 P_1 V_1 = dM_1 R_1 T$ an äusserer Arbeit zuzuführen. Der Gewinn bei der dritten Operation ist ebenso gross, wie der Verlust bei der ersten.

Im Ganzen hat man danach, wenn man die Masse dM_1 oder dN_1 Gramm-Moleküle von der Mischung flüssig abscheidet,

$$dM_1 R_1 T \log\left(\frac{P_1}{p_1}\right) = dN_1 K T \log\left(\frac{P_1}{p_1}\right)$$

als Zuwachs der freien Energie des Systems. Ebenso bei Abtrennung einer kleinen Menge dM_2 der anderen Flüssigkeit

$$dM_2R_2T\log\left(\frac{P_2}{p_2}\right) = dN_2KT\log\left(\frac{P_2}{p_2}\right).$$

Wählt man die abzuscheidenden Theile so, dass die Zusammensetzung ζ, also auch p_1, p_2 constant bleiben,

$$\frac{dN_1}{dN_2} = \frac{N_1}{N_2} = \frac{\zeta}{1-\zeta},$$

so wird der ganze Zuwachs an freier Energie bei Trennung von N_1 und N_2

$$KT\left(N_1\log\frac{P_1}{p_1} + N_2\log\frac{P_2}{p_2}\right).$$

Dieser Ausdruck gibt also auch den Verlust an, welchen die freie Energie der Flüssigkeiten bei Mischung von N_1 mit N_2 erleidet. Andere Ausdrücke derselben Grösse sind

$$KT\int_0^{N_1}\log\left(\frac{P_1}{p_1}\right)dN_1 \quad \text{bei constantem } N_2,$$

$$KT\int_0^{N_2}\log\left(\frac{P_2}{p_2}\right)dN_2 \quad \text{bei constantem } N_1.$$

Die erste Form hat Nernst angegeben (Theor. Chemie, S. 104) und daraus mittels der Beziehung zwischen der Änderung der freien und der gesammten inneren Energie jenen Ausdruck der Mischungswärme gefunden, welcher oben im 6. Abschnitt angeführt ist.

Nennt man F_1, F_2 die freie Energie eines Gramm-Moleküls der reinen Flüssigkeiten 1, beziehungsweise 2, $\mathfrak{F}$ diejenige der Mischung N_1+N_2, führt man ferner in die oben angegebenen Ausdrücke ζ ein und beachtet, dass

$$\text{bei constantem } N_2 \ldots\ldots dN_1 = N_2\frac{d\zeta}{(1-\zeta)^2};$$

$$\text{bei constantem } N_1 \ldots\ldots dN_2 = -N_1\frac{d\zeta}{\zeta^2},$$

so wird

$$\mathfrak{F} = N_1F_1+N_2F_2-(N_1+N_2)KT\left\{\zeta\log\frac{P_1}{p_1}+(1-\zeta)\log\frac{P_2}{p_2}\right\} \quad \text{V)}$$

$$= N_1F_1 + N_2F_2 - (N_1+N_2)KT(1-\zeta)\int_0^\zeta \log\left(\frac{P_1}{p_1}\right)\frac{d\zeta}{(1-\zeta)^2} \qquad \text{V}a)$$

$$= N_1F_1 + N_2F_2 - (N_1+N_2)KT\zeta\int_\zeta^1 \log\left(\frac{P_2}{p_2}\right)\frac{d\zeta}{\zeta^2}\,. \qquad \text{V}b)$$

Bei Benützung der letzten Formen wird vorausgesetzt, dass die Integrale bestimmte endliche Werthe haben, obgleich p_1, beziehungsweise p_2 an einer der Grenzen Null wird.

Aus der Gleichung

$$(1-\zeta)\int_0^\zeta \log\left(\frac{P_1}{p_1}\right)\frac{d\zeta}{(1-\zeta)^2} = \zeta\int_\zeta^1 \log\left(\frac{P_2}{p_2}\right)\frac{d\zeta}{\zeta^2}$$

kann man, indem man beide Seiten durch ζ dividirt, dann differentiirt, die Gleichung zwischen (V) und (Va) ableiten. Wenn man jedoch beide Seiten zweimal nach ζ differentiirt, erhält man eine, im Folgenden noch oft zu benützende Beziehung zwischen p_1 und p_2

$$\zeta\frac{\partial \log p_1}{\partial\zeta} + (1-\zeta)\frac{\partial \log p_2}{\partial\zeta} = 0. \qquad \text{VI)}$$

Der Ausdruck auf der linken Seite von VI) ist derselbe, von welchem im 6. Abschnitte gezeigt wurde, dass sein Temperaturgefälle Null, dass er also eine Function von ζ allein ist. Es fand sich aber dort kein Mittel, den Werth der Function zu bestimmen.

Man wird weiterhin mit dem nicht gesättigten Dampf des Gemisches zu rechnen haben. Sind im Dampfraum n'_1 Gramm-Moleküle der ersten Substanz, Partialdruck p'_1, und n'_2 der anderen Substanz, Partialdruck p'_2, so hat man für die freie Energie des Dampfgemisches die Summe der freien Energie beider Dämpfe zu setzen

$$n'_1\left(F_1 - KT - KT\log\frac{P_1}{p'_1}\right) + n'_2\left(F_2 - KT - KT\log\frac{P_2}{p'_2}\right).$$

10. Bedingung des stabilen Zustandes.

Der Zustand eines in constanter Temperatur erhaltenen Systems ist unbedingt stabil, wenn die ihm zugehörende freie Energie kleiner ist, als diejenige aller anderen Zustände, welche

die Massen des Systems bei gleicher Temperatur in dem gleichen Volumen annehmen könnten (Gibbs, v. Helmholtz).

(Als erstes Beispiel für die Anwendung des Princips, zugleich als Einleitung für das folgende, diene das System Flüssigkeit—Dampf einer einfachen Substanz. Die Zahl der Gramm-Moleküle sei C, das Gesammt-Volumen V, der Dampfraum v_d. Nimmt man N Gramm-Moleküle Flüssigkeit, n' Dampf an, nennt w das Volumen eines Gramm-Moleküles Flüssigkeit, so ist

$$N + n' = C, \qquad V = Nw + v_d = (C - n')w + v_d;$$

$n'w$ ist das Volumen der Flüssigkeit, welche aus dem in v_d enthaltenen Dampf entstünde. Vernachlässigt man auch hier das Volumen der Flüssigkeit gegen dasjenige der gleichen Dampfmasse, so kann man statt der Bedingung $V =$ const. die andere $v_d =$ const. setzen. Bei Anwendung ähnlicher Bezeichnungen wie im vorigen Abschnitt ist die freie Energie des Systems

$$\mathfrak{F} = NF + n'F - n'KT\left(1 + \log\frac{P}{p'}\right);$$

P der Druck des gesättigten Dampfes, p' derjenige der im Dampfraum enthaltenen n' Gramm-Moleküle. Mittels der Beziehung $p'v_d = n'KT$ hat man

$$\mathfrak{F} = CF - v_d p'\left(1 + \log\frac{P}{p'}\right).$$

Das erste Glied auf der rechten Seite ist constant, ebenso im zweiten Glied der Factor v_d. Der kleinste Werth von $\mathfrak{F}$ tritt ein, wenn $p' = P$, bei jener Massenvertheilung, welche den Druck im Dampfraum gleich dem Druck des gesättigten Dampfes macht, also schon der Voraussetzung gemäss stabil ist. In dieser Ableitung ist die freie Energie der Flüssigkeit als unabhängig vom Druck oder die Flüssigkeit als unzusammendrückbar angenommen).

Wir kehren zu dem System zurück, welches sich aus zwei Flüssigkeiten N_1 und N_2 Gramm-Moleküle und den Dämpfen n'_1, n'_2 zusammensetzt, wobei

$$N_1 + n'_1 = C_1, \qquad N_2 + n'_2 = C_2$$

constant sind und die Zustandsgleichungen

$$n'_1 KT = p'_1 v_d, \qquad n'_2 KT = p'_2 v_d$$

bestehen. Die freie Energie des Systems ist

$$\mathfrak{F} = C_1 F_1 + C_2 F_2 - KT\left(N_1 \log \frac{P_1}{p_1} + N_2 \log \frac{P_2}{p_2}\right)$$
$$- KT n'_1\left(1 + \log \frac{P_1}{p'_1}\right) - KT n'_2\left(1 + \log \frac{P_2}{p'_2}\right).$$

Man hat diejenigen Werthe $n'_1 n'_2$ zu suchen, welche $\mathfrak{F}$ zu einem Minimum machen bei constantem Volumen des Systems, oder, was hier auf das gleiche hinauskommt, bei constantem Dampfvolumen v_d.

p_1, p_2 sind als bestimmte (wenngleich nicht bekannte) Functionen von ζ, der jeweiligen Zusammensetzung des flüssigen Theils, anzusehen.

Zieht man von $\mathfrak{F}$ die Constante

$$C_1 F_1 + C_2 F_2 - KT(C_1 \log P_1 + C_2 \log P_2)$$

ab, dividirt den Rest durch KT, so soll der Ausdruck

$$H = N_1 \log p_1 + N_2 \log p_2 + n'_1(\log p'_1 - 1) + n'_2 \log (p'_2 - 1)$$

ein Minimum werden.

Mit n'_1 ändern sich unmittelbar p'_1 und N_1, mit n'_2 ändern sich p'_2 und N_2, mit beiden Variablen ändert sich mittelbar der Werth von ζ, also p_1 und p_2. Man hat

$$\frac{\partial N_1}{\partial n'_1} = -1, \quad N_1 \frac{\partial \zeta}{\partial n'_1} = -\zeta(1-\zeta), \quad N_2 \frac{\partial \zeta}{\partial n'_1} = -(1-\zeta)^2,$$

$$\frac{\partial N_2}{\partial n'_2} = -1, \quad N_1 \frac{\partial \zeta}{\partial n'_2} = \zeta^2, \quad N_2 \frac{\partial \zeta}{\partial n'_2} = \zeta(1-\zeta),$$

demnach

$$\frac{\partial H}{\partial n'_1} = -(1-\zeta)\left(\zeta \frac{\partial \log p_1}{\partial \zeta} + (1-\zeta)\frac{\partial \log p_2}{\partial \zeta}\right) + \log \frac{p'_1}{p_1}.$$

$$\frac{\partial H}{\partial n'_2} = \zeta\left(\frac{\partial \log p_1}{\partial \zeta} + (1-\zeta)\frac{\partial \log p_2}{\partial \zeta}\right) + \log \frac{p'_2}{p_2}.$$

Beim Minimumwerth von H müssen

$$\frac{\partial H}{\partial n'_1} = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial n'_2} = 0$$

sein. Zuvor wurde die Gleichung VI) abgeleitet. Mit Hilfe derselben ergibt sich, dass $p'_1 = p_1$ und $p'_2 = p_2$ nothwendige Bedingungen des Minimumwerthes von H, also auch der Stabilität des Systems Flüssigkeit—Dampf sind.

Nach den Annahmen, welche der Ableitung der hier verwendeten Form V) zugrunde liegen, sind p_1, p_2 die Partialdrucke im gesättigten Dampf der Flüssigkeit von der Zusammensetzung ζ, also in einem als stabil vorausgesetzten Zustand. Mit dem vorhin angeführten Satz wäre ein Zirkel geschlossen. Zweckmässig zieht man die Folgerung in umgekehrter Richtung: Da mit $p'_1 = p_1$ und $p'_2 = p_2$ der Zustand des Systems Flüssigkeit—Dampf stabil ist, so müssen $\partial H/\partial n'_1$ und $\partial H/\partial n'_2$ bei Einsetzung dieser Werthe verschwinden, also findet man auf anderem Wege die Gleichung

$$\frac{\partial \log p_1}{\partial \log \zeta} = \frac{\partial \log p_2}{\partial \log (1-\zeta)}. \qquad \text{VI)}$$

Soll an der Stelle, wo die ersten Differentialquotienten verschwinden, H ein Minimum sein, so gelten daselbst die Ungleichungen

$$\frac{\partial^2 H}{\partial n_1'^2} > 0, \quad \frac{\partial^2 H}{\partial n_2'^2} > 0, \quad \frac{\partial^2 H}{\partial n_1'^2}\frac{\partial^2 H}{\partial n_2'^2} - \left(\frac{\partial^2 H}{\partial n'_1 \partial n'_2}\right)^2 > 0$$

Man hat nun, indem man die Gleichung VI) als erfüllt voraussetzt und mit n_1, n_2 die Werthe von n'_1, n'_2 bezeichnet, welche zu p_1, p_2 gehören, an jener Stelle

$$\frac{\partial^2 H}{\partial n_1'^2} = \frac{1}{n_1} + \frac{1-\zeta}{N_1+N_2}\frac{\partial \log p_1}{\partial \zeta},$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial n_2'^2} = \frac{1}{n_2} - \frac{\zeta}{N_1+N_2}\frac{\partial \log p_2}{\partial \zeta},$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial n'_1 \partial n'_2} = -\frac{\zeta}{N_1+N_2}\frac{\partial \log p_1}{\partial \zeta} = \frac{1-\zeta}{N_1+N_2}\frac{\partial \log p_2}{\partial \zeta}.$$

In den zwei ersten Gleichungen sind die ersten Glieder auf der rechten Seite wesentlich positiv. Damit die Bedingungen des Minimums unbedingt erfüllt seien, muss man fordern

$$\frac{\partial p_1}{\partial \zeta} > 0, \quad \frac{\partial p_2}{\partial \zeta} < 0. \qquad \text{VII)}$$

Jede dieser Ungleichungen geht aus der anderen hervor vermöge der Gleichung VI).

(Im Grenzfall

$$\frac{\partial p_1}{\partial \zeta} = 0, \quad \frac{\partial p_2}{\partial \zeta} = 0$$

sind die Bedingungen des Minimums auch noch erfüllt. Gelten diese Gleichungen für alle ζ, so hat man es mit nicht mischbaren Flüssigkeiten zu thun, gelten sie in einem begrenzten Intervall, so sind die Substanzen in beschränkten Verhältnissen mischbar und bilden in jenem Intervall Schichten constanter Zusammensetzung).

Bei Substanzen, welche sich in allen Verhältnissen mischen, wächst p_1 von 0 bis P_1 und p_2 nimmt von P_2 bis 0 ab, wenn ζ von 0 zu 1 steigt. Die Ungleichungen VII) verlangen, dass nirgends eine Culmination des Partialdrucks stattfinde.

11. Der Satz von Konowalow.

Als Dampfdruckcurve bezeichnen wir im folgenden diejenige, welche den Druck Π des gesättigten Dampfes als Function von ζ bei constanter Temperatur darstellt.

Verbindet man mit der Gleichung VI) die andere

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \zeta} = \frac{\partial p_1}{\partial \zeta} + \frac{\partial p_2}{\partial \zeta},$$

so erhält man

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \zeta} = \frac{\partial p_1}{\partial \zeta}\left(1 - \frac{\zeta}{1-\zeta}\frac{p_2}{p_1}\right) = \frac{\partial p_1}{\partial \zeta}\left(1 - \frac{N_1}{N_2}\frac{n_2}{n_1}\right).$$

Die Forderung VII) muss erfüllt sein, also

$$\text{für } \frac{\partial \Pi}{\partial \zeta} > 0, \quad \frac{n_1}{n_2} > \frac{N_1}{N_2} \quad \text{und für } \frac{\partial \Pi}{\partial \zeta} < 0, \quad \frac{n_1}{n_2} < \frac{N_1}{N_2}.$$

An jeder Stelle, wo die Dampfdruckcurve mit wachsendem ζ (wachsendem Gehalt der Flüssigkeit an Substanz 1) ansteigt, ist der Dampf relativ reicher an 1, als die Flüssigkeit; wo die Π-Curve mit wachsendem ζ abfällt, ist der Dampf relativ ärmer an 1. Hat die Curve für ein bestimmtes ζ ein Maximum oder Minimum, so ist daselbst die Zusammensetzung des Dampfes gleich derjenigen der Flüssigkeit.

Diesen Satz hat Konowalow aus dem Postulat abgeleitet, dass die Zusammendrückbarkeit eines stabilen Systems positiv sein soll, dass also mit der Abnahme des Volumens eine Erhöhung des Dampfdruckes eintritt.

12. Berechnung der Partialdruck-Curven aus der Druck-Curve des Gemisches. Beispiele: Mischungen von Äthylalkohol—Wasser und Methylalkohol—Wasser.

Ist Π als Function von ζ gegeben, so erhält man aus den Gleichungen VI) und I) eine Differentialgleichung für p_1

$$(\zeta\Pi - p_1)\frac{\partial p_1}{\partial\zeta} + (1-\zeta)p_1\frac{\partial\Pi}{\partial\zeta} = 0.$$

Eine Lösung derselben $p_1 = \Pi$ ist selbsverständlich, wenn die Substanz 2 keinen Dampf aussendet. Anderenfalls muss man eine Lösung finden, welche für $\zeta = 0$, $p_1 = 0$ und für $\zeta = 1$, $p_1 = \Pi = P_1$ macht. Es ist möglich, beiden Grenzbedingungen zu genügen, obwohl die Gleichung von der ersten Ordnung ist. Beispiel: $\Pi = a + b\zeta$, $p_1 = (a+b)\zeta$. Die Differentialgleichung ist nicht linear, wird sich also nur in wenigen Fällen direct integriren lassen.

Eine andere Methode ist diese: Das Functionenpaar $p_1 p_2$ zu suchen, welches die Gleichung VI) und die Grenzbedingungen erfüllt und zu der gegebenen Π-Curve führt. Die zwei ersten Forderungen sind leicht zu befriedigen. Solche Paare sind beispielsweise

$$p_1 = P_1\zeta^\alpha, \qquad p_2 = P_2(1-\zeta)^\alpha$$

mit positivem α. Für $\alpha = 1$ erhält man ein Π, welches von P_2 zu P_1 geradlinig verläuft; für $\alpha = 2$ eine Π-Curve, die bei $\zeta = P_2/(P_1+P_2)$ ein Minimum hat.

Die Π-Curven, deren einige Punkte durch Messungen bestimmt worden sind, scheinen nicht von so einfacher Art zu sein.[1]

Man muss für $p_1 p_2$ Formen annehmen, welche mehrere Constanten enthalten und diese den Messungen gemäss wählen. Als brauchbar für einige Fälle erweisen sich die Formeln:

$$p_1 = P_1 \zeta^{\alpha_0} e^{\alpha_1(1-\zeta) + \frac{\alpha_2}{2}(1-\zeta)^2 + \frac{\alpha_3}{3}(1-\zeta)^3 + \dots}$$

$$p_2 = P_2 (1-\zeta)^{\beta_0} e^{\beta_1 \zeta + \frac{\beta_2}{2}\zeta^2 + \frac{\beta_3}{3}\zeta^3 + \dots}$$

Zwischen den Constanten α und β bestehen zufolge der Gleichung VI) die Beziehungen

$$\beta_0 = \alpha_0 - \alpha_1 \qquad \beta_2 = \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \dots$$
$$\beta_1 = -\alpha_1 \qquad \beta_3 = -\alpha_3 - 2\alpha_4 - 3\alpha_5 - \dots$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Man hat ferner

$$\frac{\partial p_1}{\partial \zeta} = \frac{p_1}{\zeta} \left\{ \alpha_0 - \alpha_1 \zeta - \alpha_2 \zeta (1-\zeta) - \dots \right\}$$

---

[1] Als ich diese Arbeit schon abgeschlossen hatte, erhielt ich Kenntniss von einer denselben Gegenstand betreffenden Abhandlung von Lehfeldt (Phil. Mag. Nov. 1895). Darin ist die Gleichung (11) identisch mit der Differentialgleichung (VI) oben, nur in minder übersichtlicher Form geschrieben. Ebenso sind Lehfeldt's Gleichungen (20) dieselben, wie die oben angegebenen einfachen Ausdrücke für p_1 und p_2. Er berechnet damit die Zusammensetzung des Dampfes zweier Flüssigkeitspaare Alkohol-Äther, Schwefelkohlenstoff-Äther aus dem von Wüllner und Regnault gemessenen Gesammtdrucke und findet mit entsprechender Wahl von α (bei ihm r) gute Übereinstimmung, ebenso in Betreff zweier anderen Paare, für welche er selbst die Zusammensetzung des Dampfes ermittelt hat. Doch ist zu bemerken, dass wenn $\alpha < 1$ bei $\zeta = 0$ der Werth von $\partial p_1/\partial \zeta$ und bei $\zeta = 1$ ebenso $-\partial p_2/\partial \zeta$ unendlich gross wird, folglich auch $\partial \Pi/\partial \zeta$ beziehungsweise $-\partial \Pi/\partial \zeta$ an den Grenzen unendlich.

In allen von Lehfeldt berechneten Fällen müsste die relative Erniedrigung des Partialdruckes in den verdünnten Lösungen kleiner als die normale sein und im ganzen Verlauf bezüglich beider Stoffe symmetrisch.

$$\frac{\partial p_2}{\partial \zeta} = \frac{p_2}{1-\zeta}\left\{-\beta_0+\beta_1(1-\zeta)+\beta_2(1-\zeta)\zeta+\ldots\right\}$$

für $\zeta = 0$ $\frac{\partial p_2}{\partial \zeta} = -(\beta_0-\beta_1)P_2$, für $\zeta = 1$ $\frac{\partial p_1}{\partial \zeta} = (\alpha_0-\alpha_1)P_1$.

Wir wollen die Formeln auf Beispiele anwenden, in denen die Erniedrigung des Partialdruckes beiderseits in sehr verdünnten Lösungen normal angenommen ist, gemäss der van t'Hoff-Raoult'schen Regel; setzen demnach

für $\zeta = 0$ $\frac{\partial p_2}{\partial \zeta} = -P_2$, für $\zeta = 1$ $\frac{\partial p_1}{\partial \zeta} = P_1$,

folglich

$$\alpha_0 = \beta_0 = 1, \qquad \alpha_1 = \beta_1 = 0.$$

Sind die Substanzen in allen Verhältnissen mischbar, so darf p_1 der Bedingung VII) gemäss keine Culmination haben, demnach für alle ζ

$$1-\alpha_2\zeta(1-\zeta)-\alpha_3\zeta(1-\zeta)^2-\ldots > 0$$

Endlich kann man, um die Bestimmung der Constanten zu erleichtern, die Winkel ermitteln, welche die Tangenten an die Π-Curve in den Grenzpunkten mit der ζ-Axe bilden und benützen, dass

$$\text{für } \zeta = 0, \quad \left(\frac{\partial p_1}{\partial \zeta}\right)_0 = P_1 e^{\frac{\alpha_2}{2}+\frac{\alpha_3}{3}+\ldots} = \left(\frac{\partial \Pi}{\partial \zeta}\right)_0 + P_2,$$

$$\text{für } \zeta = 1, \quad \left(\frac{\partial p_2}{\partial \zeta}\right)_1 = -P_2 e^{\frac{\beta_2}{2}+\frac{\beta_3}{3}+\ldots} = \left(\frac{\partial \Pi}{\partial \zeta}\right)_1 - P_1.$$

Beachtet man die Beziehungen zwischen den α und β, so folgt

$$\frac{\alpha_2}{2}+\frac{\alpha_3}{3}+\frac{\alpha_4}{4}+\ldots = \log\left[\left(\frac{\partial \Pi}{\partial \zeta}\right)_0 + P_2\right] - \log P_1,$$

$$\frac{\alpha_2}{1.2}+\frac{\alpha_3}{2.3}+\frac{\alpha_4}{3.4}+\ldots = \log\left[P_1-\left(\frac{\partial \Pi}{\partial \zeta}\right)_1\right] - \log P_2.$$

Wo man mit zwei Constanten auskommt, lassen sich die Werthe derselben schon mit ziemlicher Annäherung aus diesen Gleichungen finden. Die genauere Bestimmung kann man nur

durch Anpassung an die gemessenen Werthe von Π, nöthigenfalls mit Benützung mehrerer Constanten durchführen.

Als erstes Beispiel berechne ich die Partialdruck-Curven für Mischungen von Äthylalkohol und Wasser auf den Messungen des Dampfdrucks Π, welche Konowalow für vier Mischungsverhältnisse ausgeführt hat. Die Beobachtungen umfassen das Temperaturintervall von 15° bis 80° der gebräuchlichen Scale, sind aber für die verschiedenen Mischungen nicht bei genau gleichen Temperaturen gemacht, so dass man, um Π als Function von ζ darzustellen, erst eine Reduction vornehmen muss.

[Als bequemste Interpolationsformel bietet sich diejenige, welche Magnus für den Dampfdruck des Wassers benützt hat

$$\operatorname{Log} \Pi(t) = \operatorname{Log} \Pi(t_0) + \frac{c_1(t-t_0)}{c_2+t-t_0}.$$

Bestimmt man in Konowalow's Reihen die Constanten aus drei passend gewählten Beobachtungen und berechnet damit die Π-Werthe für die übrigen Temperaturen, so findet man die Übereinstimmung befriedigend. Als Beispiel diene die Mischung mit 50·4 Procent Alkohol, für welche die zahlreichsten Beobachtungen vorliegen: aus den bei 15°3, 59°65, 80°5 gemessenen Druckwerthen erhält man mit $t_0 = 15·3$

$$\Pi(t_0) = 27·4, \qquad c_1 = 6·95, \qquad c_2 = 254·0$$

t	15°5	40°6	60°05	70°15	70°3	80°55	
Π (ber.)	27·75	116·8	301·1	470·0	472·8	721·4	(*mm* Hg)
Π (beob.)	27·7	117·5	301·4	470·7	473·4	720·9	

An die auf solche Art berechneten Π für 40°, 60°, 80° sind noch die Correctionen angebracht, welche den Unterschieden zwischen den berechneten und den nächstliegenden beobachteten Π entsprechen].

Die Tabelle enthält die so ermittelten Druckwerthe der Mischungen für drei Temperaturen, nebst den zugehörigen Werthen für reines Wasser und reinen Alkohol (letztere nach Regnault). Der Druck ist einmal in Millimetern Quecksilberhöhe angegeben (Π), das anderemal als Vielfaches des Wasserdampfdrucks bei gleicher Temperatur. Ein Hundertel dieses Druckes ist für unseren Zweck ein hinreichend gutes Maass.

Äthylalkohol — Wasser.

z	ζ	(Π) *mm*.Hg			Π		
		80°	60°	40°	80°	60°	40°
0	0	354·9	148·9	54·86	1	1	1
0·3313	0·1624	647·5	275·9	102·1	1·83	1·85	1·86
0·5040	0·2845	705·7	300·5	113·9	1·99	2·02	2·08
0·6802	0·4554	753·7	318·3	120·2	2·12	2·14	2·19
0·8570	0·7012	792·5	339·4	128·5	2·23	2·28	2·34
1	1	812·9	350·2	133·7	2·291	2·352	2·436

Wir versuchen zunächst, die Beobachtungen bei 80° durch die oben angegebenen Formeln darzustellen, indem wir annehmen, dass die Erniedrigung des Partialdrucks in sehr verdünnten Lösungen von Alkohol in Wasser oder von Wasser in Alkohol normal ist. Man hat dazu die Constanten $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \ldots$ zu bestimmen und kommt hier mit einer einzigen aus

$$\alpha_2 = 0, \qquad \alpha_3 = 4\cdot 74, \qquad \alpha_4 = \alpha_5 = \ldots = 0,$$

$$\mathrm{Log}\, p_1 = \mathrm{Log}\,(P_1 \zeta) + \mathrm{Log}\, c \,.\, \frac{\alpha_3}{3}\,(1-\zeta)^3,$$

$$\mathrm{Log}\, p_2 = \mathrm{Log}\,[P_2(1-\zeta)] + \mathrm{Log}\, c \,.\, \frac{\alpha_3}{6}\,\zeta^2(3-2\zeta).$$

Mit $P_2 = 1$ und $P_1 = 2\cdot 291$ hat man für die oben angeführten vier Werthe von ζ

p_1	0·941	1·162	1·346	1·675	
p_2	0·886	0·836	0·767	0·556	$t = 80°$.
Π	1·83	2·00	2·11	2·23	

Diese Π-Werthe stimmen hinreichend genau mit den beobachteten überein. Fig. 3 gibt die Curven des Partialdrucks und des Gesammtdrucks.

Fast ebenso gut lassen sich mit derselben Formel und dem gleichen α_3 die Π für 60° und 40° darstellen. Man findet, wenn jedesmal $P_2 = 1$ gesetzt wird, p_2 wie oben und mit dem entsprechenden P_1

p_1	0·967	1·194	1·383	1·719	$t = 60°$
Π	1·85	2·03	2·15	2·28	
p_1	1·001	1·236	1·432	1·782	$t = 40°$
Π	1·89	2·07	2·20	2·34	

(Dass man für ein so grosses Temperaturintervall mit der gleichen Formel auskommt, hat man nur dem Umstand zu verdanken, dass für wenige Mischungsverhältnisse Messungen vorliegen. Im Allgemeinen sind die α Functionen der Temperatur; man vergleiche Abschnitt 5).

Für das Gemisch Alkohol—Wasser bei 80° sind hier noch zwei aus der Formel berechnete Tabellen angefügt; die erste gibt für neun Werthe von ζ Partialdruck und Gesammtdruck (für $P_2 = 1$) an; die andere ist mit jenen ζ gerechnet, welche den Werthen $z = 0·1, 0·2...0·9$ entsprechen, sie gibt an, wie viel Procent Alkohol im Dampf einer 10-, 20-,...90-procentigen Mischung enthalten sind.

Äthylalkohol—Wasser 80°.

ζ	p_1	p_2	Π	Procente Alkohol in der Flüssigkeit	Procente Alkohol im Dampf
0	0	1	1	0	0
0·1	0·725	0·920	1·65	10	50·5
·2	1·029	·868	1·90	20	65·0
·3	1·182	·830	2·01	30	71·7
·4	1·289	·792	2·08	40	75·4
·5	1·395	·742	2·14	50	78·0
·6	1·521	·667	2·19	60	80·0
·7	1·673	·557	2·23	70	82·3
·8	1·856	·406	2·26	80	85·6
·9	2·065	·216	2·28	90	91·4
1·0	2·291	0	2·29	100	100

Auch für die Mischungen von Methylalkohol mit Wasser habe ich ähnlich wie zuvor Π-Reihen für einige

Temperaturen durch Interpolation aus Konowalow's Beobachtungen zusammengestellt. Ich führe nur eine an, für

$$t = 60°$$

ζ	0	0·1546	0·3532	0·4957	0·5949	1
(Π) ...	148·9	278·5	379·7	428·3	472·0	607·8 (*mm* Hg)
Π	1	1·87	2·55	2·88	3·17	4·082

Konowalow's Reihe für reinen Methylalkohol weicht von derjenigen Regnault's beträchtlich ab und nähert sich den Messungen von Dittmar und Fawsitt (Landolt—Börnstein's Tabellen). Das für $\zeta = 1$ benützte Π ist aus der erstgenannten Reihe entnommen. Zur Berechnung von p_1, p_2 wird

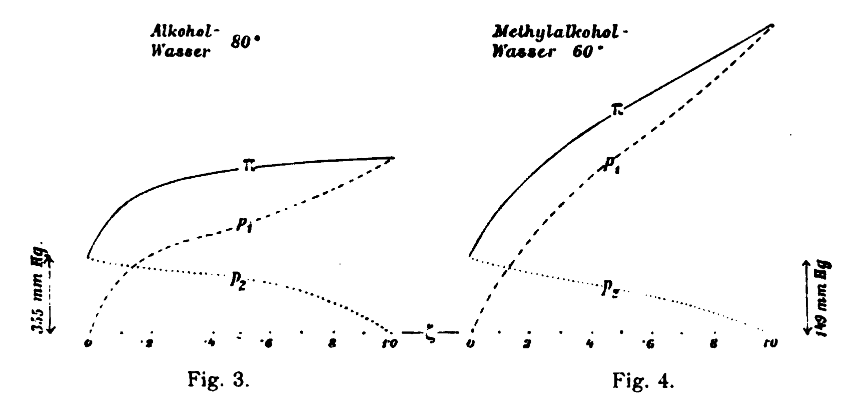


Fig. 3. Fig. 4.

wieder die oben angegebene Form verwendet, doch braucht man in diesem Falle zwei Constanten; als solche wählen wir

$$\alpha_2 = 0\cdot 87, \qquad \beta_2 = 1\cdot 61,$$

demnach

$$\alpha_3 = \beta_2 - \alpha_2, \quad \beta_3 = \alpha_2 - \beta_2, \quad \alpha_4 = \alpha_5 \ldots = \beta_4 = \beta_5 \ldots = 0.$$

$$\operatorname{Log} p_1 = \operatorname{Log}(P_1 \zeta) + \operatorname{Log} e \left\{ \frac{\alpha_2}{6} (1-\zeta)^2 (1+2\zeta) + \frac{\beta_2}{3} (1-\zeta)^3 \right\}$$

$$\operatorname{Log} p_2 = \operatorname{Log}(P_2 [1-\zeta]) + \operatorname{Log} e \left\{ \frac{\alpha_2}{3} \zeta^3 + \frac{\beta_2}{6} \zeta^2 (3-2\zeta) \right\}.$$

Mit $P_2 = 1$ und $P_1 = 4\cdot 082$ findet man daraus für die angegebenen Mischungsverhältnisse

p_1	1·000	1·849	2·333	2·651
p_2	0·861	0·707	0·596	0·511
Π	1·86	2·56	2·93	3·16

also eine recht befriedigende Übereinstimmung mit den beobachteten Werthen, mit Ausnahme des dritten, wo die Abweichung etwas grösser ist.

Die Figur 4 ist auf Grund der für neun äquidistante ζ berechneten p_1 und p_2 entworfen.

Die berechneten Π-Curven, Fig. 3 und 4, haben beiläufig jene Gestalt, welche man aus den durch Messungen gegebenen je sechs Punkten vermuthet. Wäre die Annahme, dass die Erniedrigung des Partialdruckes an den Grenzen beiderseits normal ist, ganz falsch, so müsste es sich dadurch verrathen, dass die Endstücke der berechneten Π-Curve einen unwahrscheinlichen Verlauf hätten. Um ganz sicher zu sein, braucht man jedoch eine dichtere Reihe von Beobachtungen.

13. Allgemeiner Verlauf der Partialdruck-Curven für Flüssigkeitspaare von begrenzter Mischbarkeit. Labiler Zustand der übersättigten Mischungen.

Substanzen, welche sich in beschränkten Verhältnissen mischen, bilden in dem übrigen ζ-Intervall Schichten von constanter Zusammensetzung. Eine nothwendige Bedingung des Gleichgewichtes zwischen den Schichten und ihren Dämpfen ist die Gleichheit des Partialdruckes jeder Componente aus beiden gesättigten Mischungen. Man hat sich demnach im Allgemeinen den Verlauf der p_1, p_2 als Functionen von ζ so vorzustellen, wie ihn die Figur 5 in den ausgezogenen Linien anzeigt.

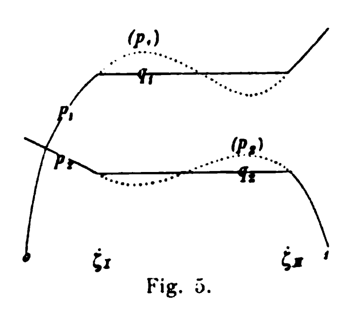


Fig. 5.

Für $\zeta = 0$ ist $p_1 = 0$ und $p_2 = P_2$; von da ab steigt p_1, p_2 nimmt ab bis zu ζ_1, wo die Lösung von 1 in 2 gesättigt ist.

Für $\zeta = 1$ ist $p_1 = P_1$ und $p_2 = 0$; mit abnehmendem ζ wird p_1 kleiner, p_2 grösser bis zu ζ_{II}, welches das Mischungsverhältniss der gesättigten Lösung von 2 in 1 ist.

Der Werth von p_1 bei ζ_{II} ist gleich demjenigen bei ζ_I, wir nennen ihn q_1, ebenso q_2 den Werth von p_2 an den Schichtungsgrenzen. Für alle zwischen diesen liegenden Mischungsverhältnisse bleibt die Zusammensetzung der Schichten ungeändert, die zugehörigen Partialdrucke sind durch die Geraden $q_1 q_2$ dargestellt.

Wir wollen annehmen, die beiden vorhin erwähnten Curven p_1 seien Bruchstücke einer einzigen zusammenhängenden Curve, deren Mittelstück in der Figur durch die punktirte Linie (p_1) dargestellt ist; ähnliches gelte für $p_2 \ldots (p_2)$. Für die Curvenstücke an beiden Seiten besteht die Gleichung VI), im Vereine mit der Forderung VII) eine nothwendige Bedingung des stabilen Zustandes der Mischung. Wir setzen voraus, die Gleichung gelte durchwegs auch für $(p_1)(p_2)$. Die Ungleichung kann hier offenbar nicht überall erfüllt sein, denn die (p_1)-Curve muss (mindestens) ein Maximum und ein Minimum haben, ebenso (p_2) ein Minimum und ein Maximum. Der Gleichung VI) zufolge fallen die Culminationen beider Curven auf die gleichen ζ-Werthe. Zwischenliegenden ζ zugehörende (p_1), (p_2) entsprechen labilen Zuständen der Mischung. Es lässt sich jedoch zeigen, dass auch die zwischen ζ_I und die erste Culmination fallenden (p_1), (p_2)-Zustände (übersättigte Lösungen von 1 in 2) ebenso diejenigen zwischen ζ_{II} und der anderen Culmination (übersättigte Lösungen von 2 in 1) nicht stabil sein können.

Die erwähnten Bedingungen sind nothwendig, aber nicht immer ausreichend für die Stabilität des Systems von Mischung und Dampf.

Die Betrachtungen, welche man hier anzustellen hat, sind analog denjenigen, welche sich auf die sogenannten theoretischen Isothermen einer reinen Substanz für Temperaturen unter der kritischen beziehen.

Angenommen, man kennt in einem bestimmten Falle den Verlauf der stetigen Curven des Partialdrucks, sie zeigen die erwähnten Culminationen. Man hat nun die Aufgabe, die Mischungsverhältnisse der Sättigung zu finden. Dieses Problem lässt sich

nach der Fig. 5 leicht lösen, man sucht jene ζ auf, für welche sowohl die p_1, als die p_2 gleiche Werthe haben.

Man kann auch einen anderen Weg einschlagen. Bei einem Mischungsverhältniss zwischen ζ_I und ζ_{II} betrachten wir die Mischung erstens in dem Zustand der Schichtung; die freie Energie ist

$$N_1 F_1 + N_2 F_2 - N_1 KT \log \frac{P_1}{q_1} - N_2 KT \log \frac{P_2}{q_2};.$$

zweitens dieselben Mengen im Zustand der homogenen Mischung; in diesem Falle ist die freie Energie

$$N_1 F_1 + N_2 F_2 - N_1 KT \log \frac{P_1}{(p_1)} - N_2 KT \log \frac{P_2}{(p_2)}.$$

Zieht man von beiden Ausdrücken gleiche Glieder ab und dividirt die übrigen durch $(N_1 + N_2) KT$, so bleiben

$$f(\zeta) = \zeta \log q_1 + (1-\zeta) \log q_2,$$
$$\psi(\zeta) = \zeta \log (p_1) + (1-\zeta) \log (p_2)$$

zu untersuchen. Man hat zunächst

$$\psi(\zeta_I) = f(\zeta_I), \qquad \psi(\zeta_{II}) = f(\zeta_{II}),$$

ferner, mittels der Gleichung VI)

$$\frac{\partial \psi}{\partial \zeta} = \log \frac{(p_1)}{(p_2)}, \qquad \psi(\zeta_{II}) - \psi(\zeta_I) = \int_{\zeta_I}^{\zeta_{II}} \log \frac{(p_1)}{(p_2)} d\zeta.$$

Da nun der Ausdruck auf der linken Seite der letzten Gleichung auch gleich ist mit

$$f(\zeta_{II}) - f(\zeta_I) = (\zeta_{II} - \zeta_I) \log \frac{q_1}{q_2},$$

so ergibt sich, dass

$$\log \frac{q_1}{q_2} \quad \text{der Mittelwerth von} \quad \log \frac{(p_1)}{(p_2)}$$

auf der Strecke ζ_I bis ζ_{II} ist. Damit hat man eine einfache Construction zur Bestimmung dieser ζ (Fig. 6). Man zeichnet eine Curve, welche $\log p_1 - \log p_2$ als Function von ζ darstellt. Nach den vorausgesetzten Eigenschaften von p_1, p_2 steigt die Curve

von $-\infty$ bis zu einem Maximum, fällt dann zu einem Minimum ab, steigt wieder bis $\zeta = 1$, wo die Ordinate ∞ wird. Zwischen den Culminationen legt man eine Gerade durch, parallel der ζ-Axe, so dass die von ihr und dem oberen Curvenstück begrenzte Fläche gleich gross ist wie die Fläche zwischen der Geraden und dem unteren Curvenstück. Die Ordinate der Geraden ist $\log q_1 - \log q_2$; die Abscissen ihrer Schnittpunkte mit den äusseren Curvenästen sind ζ_I, ζ_{II}. Man bemerkt noch, dass der Zuwachs von ψ zwischen ζ_I und ζ dargestellt ist durch die Fläche, welche von der Abscissenaxe, den Ordinaten bei ζ_I, ζ und der Curve selbst begrenzt ist; ebenso der Zuwachs von f durch das entsprechende Rechteck; dass also ψ für alle Mischungsverhältnisse zwischen ζ_I und ζ_{II} grösser ist als f.

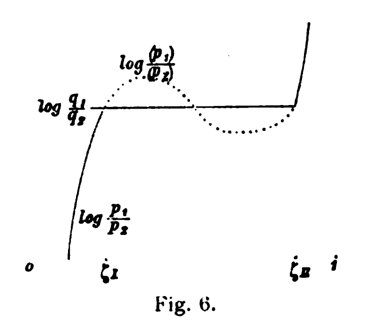


Fig. 6.

Die freie Energie von $N_1 + N_2$ Gramm-Molekülen der Mischung wollen wir ausserhalb des Schichtungsintervalls mit $\Psi(\zeta)$ bezeichnen, ebenso innerhalb des Intervalls, wenn wir den Weg $(p_1)(p_2)$ verfolgen. $F(\zeta)$ ist die freie Energie zwischen $\zeta_I\ \zeta_{II}$ auf dem Weg $q_1 q_2$. Demnach mit den gleichen Werthen der Constanten C, D

$$\Psi(\zeta) = (N_1 + N_2)[C + D\zeta + KT\psi(\zeta)],$$
$$F(\zeta) = (N_1 + N_2)[C + D\zeta + KTf(\zeta)].$$

Variirt man die Summanden, während man die Summe $N_1 + N_2$ ungeändert lässt, so gibt Fig. 7 ein Bild des Verlaufes von Ψ und F. Die Curve Ψ kann verschiedene Formen annehmen, der Umstand, auf welchen es allein ankommt, ist, dass sie eine Doppeltangente hat, die Gerade F, und dass zwischen den Berührungspunkten Ψ grösser ist als F. Betrachtet man in der Figur einen Punkt, welcher zwischen der Curve und der Tangente liegt, so gehört zu ihm offenbar der Zustand, in welchem ein Theil des Körpers als

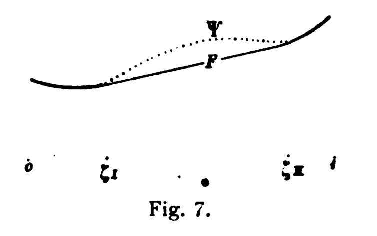


Fig. 7.

homogene Mischung, der andere Theil in zwei Schichten besteht. Die freie Energie daselbst ist grösser, als F für dasselbe ζ. Der Zustand kann nicht stabil sein. Damit hängt zusammen, dass die übersättigten Lösungen nicht stabil sind, obgleich sie die Bedingungen VI), VII) erfüllen.

(Bei Ableitung dieser Bedingungen war die Mischung als homogen vorausgesetzt und die Möglichkeit, dass sie in zwei Gemische zerfällt, nicht in Erwägung gezogen).

Die Umwandlung der übersättigten Mischung in die Schichten kann von selbst eintreten, nicht aber der Übergang in umgekehrter Richtung.

Bei dieser Überlegung ist schweigend angenommen, dass die flüssige Mischung der gleichen Mengen in beiden Zuständen das gleiche Volumen hat, bei derselben Temperatur unter dem Druck ihres gesättigten Dampfes. Nur bei gleichem Volumen darf man schliessen, dass der Zustand mit dem kleinsten Werth der freien Energie unbedingt stabil ist.

Die Annahme trifft nicht genau zu. Obgleich die Volumunterschiede gering sind, kann man die Möglichkeit nicht ausschliessen, dass die Übersättigung dadurch begünstigt wird, wenn das Volum der Schichten grösser ist, als dasjenige der homogenen Mischung.

14. Gesättigte und übersättigte Salzlösungen.

Statt der vorhin ausgeführten Construction zur Auffindung der Werthe ζ_{I} und ζ_{II} aus der Form der Partialdruck-Curven, kann man eine andere wählen, welche nur die Kenntniss einer Curve voraussetzt. Nimmt man statt des Ausdruckes V) der freien Energie den Werth Vb), so wird

$$\Psi(\zeta_{\mathrm{I}}) = N_1 F_1 + N_2 F_2 - (N_1 + N_2) K T \zeta_{\mathrm{I}} \left\{ \int_{\zeta_{\mathrm{I}}}^{\zeta_{\mathrm{II}}} \log \frac{P_2}{(p_2)} \frac{d\zeta}{\zeta^2} + \int_{\zeta_{\mathrm{II}}}^{1} \log \frac{P_2}{p_2} \frac{d\zeta}{\zeta^2} \right\}.$$

$$F(\zeta_{\mathrm{I}}) = N_1 F_1 + N_2 F_2 - (N_1 + N_2) K T \zeta_{\mathrm{I}} \left\{ \int_{\zeta_{\mathrm{I}}}^{\zeta_{\mathrm{II}}} \log \frac{P_2}{q_2} \frac{d\zeta}{\zeta^2} + \int_{\zeta_{\mathrm{II}}}^{1} \log \frac{P_2}{p_2} \frac{d\zeta}{\zeta^2} \right\}.$$

Da nun $F(\zeta_I) = \Psi'(\zeta_I)$, so findet man

$$\int_{\zeta_I}^{\zeta_{II}} \log(p_2)\frac{d\zeta}{\zeta^2} = \log q_2 \int_{\zeta_I}^{\zeta_{II}} \frac{d\zeta}{\zeta^2}.$$

Führt man $\zeta^{-1} = \xi$ als Variable ein, so folgt, dass $\log q_2$ der Mittelwerth von $\log(p_2)$ ist in der Strecke von ξ_I bis ξ_{II}.

Wenn eine der Substanzen, welche in die Mischung eintreten, keinen Dampf aussendet, wir nennen sie 1, so verliert die p_1-Curve jede Bedeutung (nicht auch p_1/P_1, wenn man annimmt, dass der Dampfdruck der Substanz stets vorhanden und nur unmessbar klein ist). Es ist möglich, für diesen Fall die Bedingung der Mischsättigung an der p_2-Curve allein zu untersuchen.

Löst sich die dampflose Substanz in der flüchtigen in allen Verhältnissen, so sinkt die p_2-Curve stetig vom Werthe P_2 bei $\zeta = 0$, bis zu Null bei $\zeta = 1$.

Wenn die Löslichkeit begrenzt ist, so fällt die Curve nur bis zu einer Ordinate q_2 bei ζ_I ab und der Dampfdruck behält diesen Werth bis zu $\zeta = 1$ (oder doch sehr nahe bis dahin. Wir schliessen hier der Kürze wegen den Fall aus, dass die Substanz 1 mit dem Lösungsmittel krystallisirt). Die Curve hat jenseits von ζ_I eine natürliche Fortsetzung; man kennt ein Stück davon, welches der Übersättigung zugehört. Die vollständige Ergänzung der p_2-Curve hat man sich ähnlich wie in der Figur 5 vorzustellen, mit einem Minimum und einem Maximum. Dasselbe gilt für die Curve der freien Energie und für die Gerade, welche sie bei ζ_I und nahe bei $\zeta = 1$ tangirt.

Die in den letzten Abschnitten angestellten Betrachtungen lassen sich in folgendem zusammenfassen: Von zwei flüssigen Stoffen oder einem flüssigen und einem festen, welche überhaupt mischbar sind, darf man annehmen, dass sie in allen Verhältnissen homogene Mischungen bilden können. Die Partialdruck-Curven verlaufen entweder ohne Culmination dann sind alle Gemische stabil oder die Curven haben je ein Maximum und ein Minimum, dann sind die homogenen

Gemische in einem gewissen mittleren Intervall labil und zerfallen in zwei Schichten. Die Kenntniss einer vollständigen Partialdruck-Curve (welche man durch analytische oder graphische Interpolation zwischen den bekannten Endstücken erlangen könnte) genügt, um zu bestimmen, bei welchen Mengenverhältnissen die Mischsättigung eintritt.

(18. Februar 1896.) Duhem's Abhandlung habe ich erst vor kurzem durchsehen können; ich bedauere, sie vorher nicht gekannt zu haben. Der grösste Theil der oben abgeleiteten Beziehungen ist nebst vielen anderen in jener 1894 veröffentlichten Arbeit enthalten. Neu sind in dieser Mittheilung nur die in den Abschnitten 7. und 12. ausgeführten Rechnungen.

SITZUNGSBERICHTE

DER KAISERLICHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

Berichtigung

zu Heft VIII, Sitzungsberichte Bd. CIV, Abth. II a., S. 970.

Zeile 13 von oben statt »63° 12'« soll es heissen: »71° 6'«.
Zeile 15 von oben statt »1° 18' gegen den Wind« soll es heissen: »6° 36' im Sinne des Windes«.
Zeile 20 von oben statt »1°« soll es heissen: »8° 54'«.



WIEN, 1895.

AUS DER KAISERLICH-KÖNIGLICHEN HOF- UND STAATSDRUCKEREI.

IN COMMISSION BEI F. TEMPSKY,

BUCHHÄNDLER DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

INHALT

des 1. und 2. Heftes Jänner und Februar 1895 des CIV. Bandes, Abtheilung II. a. der Sitzungsberichte der mathem.-naturw. Classe.

Preis des ganzen Heftes: 1 fl. 65 kr. = 3 Mk. 30 Pfg.

SITZUNGSBERICHTE

DER KAISERLICHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

CIV. BAND. III. UND IV. HEFT.

JAHRGANG 1895. — MÄRZ UND APRIL.

ABTHEILUNG II. a.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE, PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.

(MIT 6 TEXTFIGUREN.)



WIEN, 1895.

AUS DER KAISERLICH-KÖNIGLICHEN HOF- UND STAATSDRUCKEREI.

IN COMMISSION BEI F. TEMPSKY,

BUCHHÄNDLER DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

INHALT

des 5. und 6. Heftes Mai und Juni 1895 des CIV. Bandes, Abtheilung II. a. der Sitzungsberichte der mathem.-naturw. Classe.

Preis des ganzen Heftes: 1 fl. 80 kr. = 3 Mk. 60 Pfg.

SITZUNGSBERICHTE

DER KAISERLICHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

CIV. BAND. VII. HEFT.

JAHRGANG 1895. — JULI.

ABTHEILUNG II. a.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE, PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.

(MIT 3 TAFELN UND 15 TEXTFIGUREN.)



WIEN, 1895.

AUS DER KAISERLICH-KÖNIGLICHEN HOF- UND STAATSDRUCKEREI.

IN COMMISSION BEI CARL GEROLD'S SOHN,

BUCHHÄNDLER DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

INHALT

des 7. Heftes Juli 1895 des CIV. Bandes, Abtheilung II. a. der Sitzungsberichte der mathem.-naturw. Classe.

3

Preis des ganzen Heftes: 2 fl. 60 kr. = 3 Mk. 20 Pfg.

Die Sitzungsberichte der mathem.-naturw. Classe erscheinen vom Jahre 1888 (Band XCVII) an in folgenden **vier** gesonderten **Abtheilungen**, welche auch einzeln bezogen werden können:

Abtheilung I. Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mineralogie, Krystallographie, Botanik, Physiologie der Pflanzen, Zoologie, Paläontologie, Geologie, Physischen Geographie und Reisen.

Abtheilung II. a. Die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Astronomie, Physik, Meteorologie und Mechanik.

Abtheilung II. b. Die Abhandlungen aus dem Gebiete der Chemie.

Abtheilung III. Die Abhandlungen aus dem Gebiete der Anatomie und Physiologie des Menschen und der Thiere, sowie aus jenem der theoretischen Medicin.

Dem Berichte über jede Sitzung geht eine Übersicht aller in derselben vorgelegten Manuscripte voran.

Von jenen in den Sitzungsberichten enthaltenen Abhandlungen, zu deren Titel im Inhaltsverzeichniss ein Preis beigesetzt ist, kommen Separatabdrücke in den Buchhandel und können durch die akademische Buchhandlung F. Tempsky (Wien, IX., Wasagasse 12) zu dem angegebenen Preise bezogen werden.

Die dem Gebiete der Chemie und verwandter Theile anderer Wissenschaften angehörigen Abhandlungen werden auch in besonderen Heften unter dem Titel: »Monatshefte für Chemie und verwandte Theile anderer Wissenschaften« herausgegeben. Der Pränumerationspreis für einen Jahrgang dieser Monatshefte beträgt 5 fl. oder 10 Mark.

Der akademische Anzeiger, welcher nur Original-Auszüge, oder, wo diese fehlen, die Titel der vorgelegten Abhandlungen enthält, wird, wie bisher, acht Tage nach jeder Sitzung ausgegeben. Der Preis des Jahrganges ist 1 fl. 50 kr. oder 3 Mark.

SITZUNGSBERICHTE

DER KAISERLICHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

CIV. BAND. VIII. HEFT.

JAHRGANG 1895. — OCTOBER.

ABTHEILUNG II. a.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE, PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.

(MIT 21 TEXTFIGUREN.)



WIEN, 1895.

AUS DER KAISERLICH-KÖNIGLICHEN HOF- UND STAATSDRUCKEREI.

IN COMMISSION BEI CARL GEROLD'S SOHN,

BUCHHÄNDLER DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

INHALT

des 8. Heftes October 1895 des CIV. Bandes, Abtheilung II. a. der Sitzungsberichte der mathem.-naturw. Classe.

Preis des ganzen Heftes: 2 fl. = 4 Mk.

SITZUNGSBERICHTE

DER KAISERLICHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

CIV. BAND. IX. UND X. HEFT.

JAHRGANG 1895. — NOVEMBER UND DECEMBER.

ABTHEILUNG II. a.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE, PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.

(MIT 2 TAFELN UND 11 TEXTFIGUREN.)



WIEN, 1895.

AUS DER KAISERLICH-KÖNIGLICHEN HOF- UND STAATSDRUCKEREI.

IN COMMISSION BEI CARL GEROLD'S SOHN,

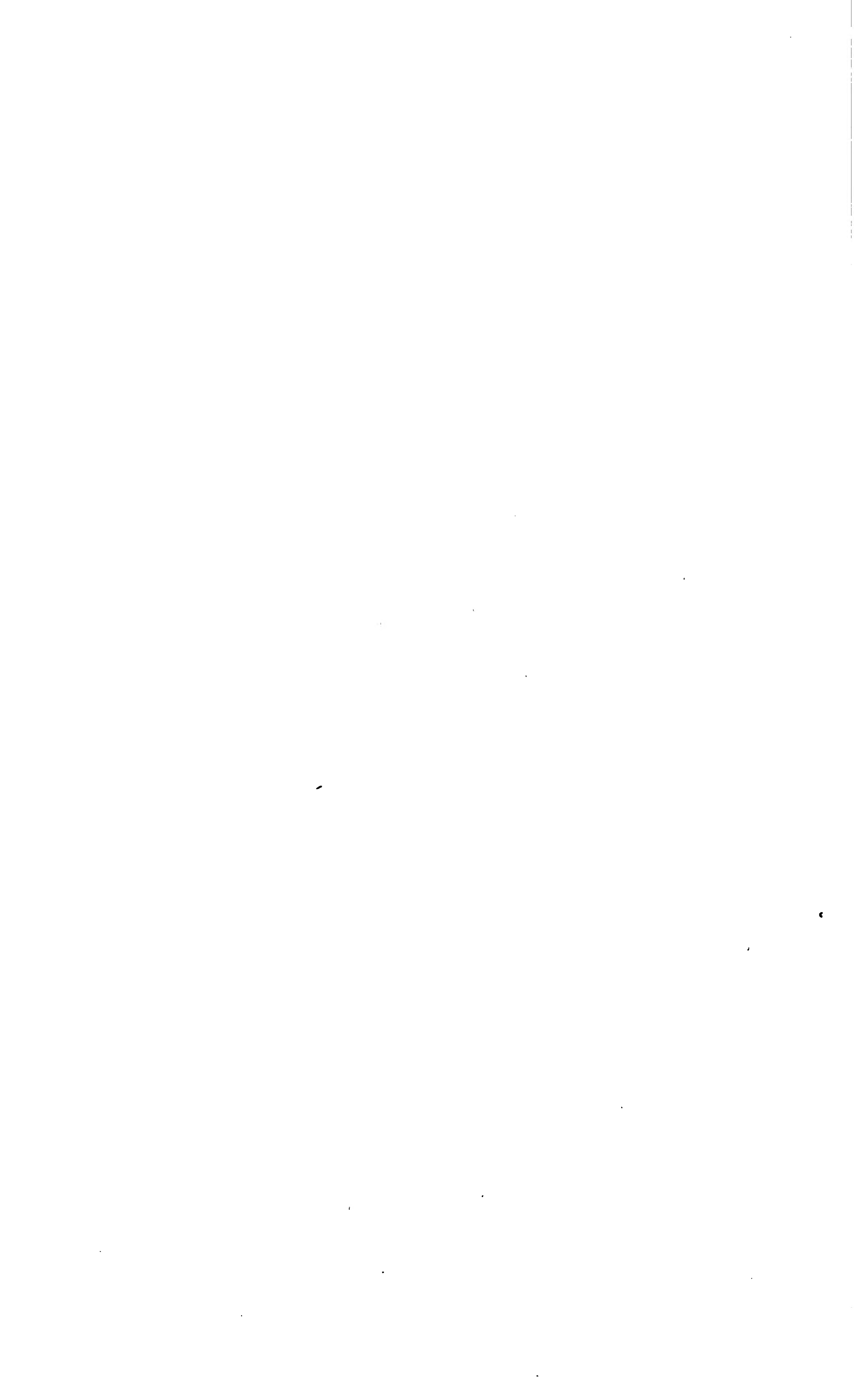
BUCHHÄNDLER DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

INHALT

des 9. und 10. Heftes November und December 1895 des CIV. Bandes, Abtheilung II. a. der Sitzungsberichte der mathem.-naturw. Classe.

Preis des ganzen Heftes: 2 fl. 10 kr. = 4 Mk. 20 Pfg.







Date Due



